Билет 23: Сформулируйте первую и вторую теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке. Покажите, что отрезок в условии теоремы нельзя заменить интервалом, а также, что нельзя отказаться от непрерывности функции.

Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. ►Предположим, что это не так, и непрерывная на $[a,b]$ функция $y = f(x)$ не ограничена. Тогда для любого натурального n существует точка $x_n \in [a,b]$, такая, что $|f(x_n)| \geq n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \in [a,b])$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b], \tag{1}$$

$$\left| f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k > k\,. \tag{2}$$

Из непрерывности функции $f(x)$ и (1) следует, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(c) < \infty$, а из (2) что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \infty$.

Полученное противоречие доказывает теорему. ◄

Замечание. Отрезок в условии этой теоремы нельзя заменить интервалом. Так функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,1)$, но не ограничена на нем.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, достигает на нем нижней и верхней грани своих значений, а именно, существуют точки $c_1, c_2 \in [a,b]$ такие, что*

$$f(c_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(c_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство. ►Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ будет ограниченной на нем. Положим

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Если $f(x) \neq M$ на $[a,b]$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ будет непрерывной на отрезке и, следовательно, ограниченной на нем, то есть

$$\exists C : \forall x \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} < C. \tag{3}$$

Из (3) вытекает

$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow M - f(x) > \frac{1}{C}. \tag{4}$$

Однако по определению точной верхней грани для $\varepsilon = \dfrac{1}{C}$ должна найтись точка

$x \in [a,b]$, в которой $f(x) > M - \varepsilon$, то есть

Существование точки, в которой принимается наименьшее значение, доказывается аналогично. ◄

Замечание. В этой теореме также нельзя заменить отрезок интервалом. Например, функция $y = x$ непрерывна на интервале (a,b), но не достигает на нем нижней и верхней границ своих значений.