Билет 4: Дайте определение ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) числовой последовательности. Приведите примеры ограниченных и неограниченных последовательностей.

Ограниченной, если: $\exists C \ \ \forall n \in \mathbb{N} \left(|x_n| \le C \right)$ *(существует число* C *такое, что* $|x_n| \le C$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$*),*
ограниченной сверху, если: $\exists C \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left(x_n \le C \right)$,
ограниченной снизу, если: $\exists C \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left(C \le x_n \right)$.

Пример. Покажем, что последовательность $\{a_n\} = \{2n - n^2 + 4\}$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

Предварительное замечание: ясно, что точки с координатами (n, a_n) есть точки с натуральными абсциссами на графике функции $y = 2x - x^2 + 4$ - параболе с «ветвями вниз» и вершиной в точке $(1;5)$. Покажем, что $a_n \le 5$ для всех натуральных n:
$2n - n^2 + 4 \le 5 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \ge 0$ - всегда верно.

Запишем в кванторах отрицание ограниченности снизу:

$$\forall C \ \exists n \in \mathbb{N} \left(2n - n^2 + 4 < C \right).$$

Итак, фиксируем произвольное $C \in \mathbb{R}$

$$2n - n^2 + 4 < C \Leftrightarrow -\left(n^2 - 2n + 1\right) + 5 < C \Leftrightarrow (n-1)^2 > 5 - C \Leftarrow n > 1 + \sqrt{|5 - C|} ,$$

а такое n, очевидно, существует.