Билет 11: Пользуясь определением предела функции по Гейне и соответствующими свойствами сходящихся последовательностей, докажите теорему об арифметических операциях с функциями, имеющими конечный предел.

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_r(a)$ *точки* a.

Тогда, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=A\cdot B$,
3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ при $x\in \overset{\circ}{O}_r(a)$.

Доказательство. Возьмем произвольную сходящуюся к a последовательность $\{x_n\}$ $(x_n\neq a)$. Из определения предела по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)+g(x_n)\right)=A+B$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n)=A\cdot B$ для всех сходящихся к a (и не совпадающих с a) последовательностей $\{x_n\}$, то есть первые два утверждения доказаны. При $B\neq 0$ очевидна справедливость и третьего утверждения.