Билет 7: Дайте определение предела числовой последовательности. Запишите это определение с помощью кванторов в терминах окрестностей и в терминах неравенств (для конечного и бесконечных пределов).

Предел последовательности

Последовательность – функция натурального аргумента. Натуральный аргумент может стремиться только к $+\infty$, поэтому определение предела последовательности «похоже» на определение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Часто в словах слова «при n стремящемся к $+\infty$» опускают «+», а то и вовсе не упоминают, куда стремится n (и так все понятно). Следующая разница в определениях связана с тем, что, поскольку аргумент принимает только натуральные значения, то и радиус окрестности бесконечности (δ) берется натуральным (N).

Итак, последовательность $\{a_n\}$ стремится к b (имеет предел b) при $n \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, после которого будет выполняться неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$.

В логической символике это определение записывается следующим образом

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N \left(|a_n - b| < \varepsilon\right)$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \left(n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon\right).$$

Определение «с окрестностями»

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N \left(a_n \in O_\varepsilon(b)\right)$$

можно прочитать следующим образом: «Для любой окрестности точки b найдется номер N, после которого все члены последовательности попадают в эту окрестность».

Определения «с окрестностями» для $b = \infty$ или $b = \pm\infty$ ничем не отличаются от соответствующего определения для конечного b, различны только определения с неравенствами. Например,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty := \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N \left(a_n \in O_\varepsilon(-\infty)\right)\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty := \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N \left(a_n < -\varepsilon\right)\right).$$

Пример. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n - n^2\right) = -\infty$. Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$2n - n^2 \in O_\varepsilon(-\infty) \Leftrightarrow 2n - n^2 < -\varepsilon \Leftrightarrow (n-1)^2 > \varepsilon + 1 \Leftrightarrow n > \sqrt{\varepsilon+1} + 1 \Leftarrow n > N,$$

если $N = \left[\sqrt{\varepsilon+1} + 1\right]$.

Упражнение. Запишите определения «с окрестностями» и «в неравенствах» для $\lim\limits_{n} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n} a_n = +\infty$. Приведите примеры.