14 Объясните смысл записей $f(x)=o(g(x))$, $f(x)=O(g(x))$, $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$.
Приведите примеры. Выпишите основные асимптотические соотношения для функций

Сравнение асимптотического поведения функций

Дадим определение некоторых элементарных понятий, относящихся к асимптотическому поведению функций.

Определение. *Говорят, что функция f есть бесконечно малая по сравнению с функцией g при $x\to a$ и пишут $f=o(g)\ (x\to a)$, если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to a$.*

Замечание. *Если функция $g(x)\neq 0$ в $\overset{\circ}{O}(a)$, то последнее определение можно записать как*

$$f(x)=o(g(x))\ \ (x\to a)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Пример 1. $x^2=o(x)$ при $x\to 0$.

Пример 2. $x=o(x^2)$ при $x\to\infty$.

Определение. *Запись*

$$f(x)=O(g(x))\quad (x\to a)$$

означает, что

$$f(x)=g(x)h(x),$$

где $h(x)$ - ограниченная функция в некоторой окрестности $O(a)$ или проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}(a)$.

Замечание. *Если $g(x)\neq 0$ в $O(a)$ (в $\overset{\circ}{O}(a)$), то*

$f(x)=O(g(x))\quad (x\to a)$, когда функция $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ будет ограниченной в этой окрестности.

Пример. $\dfrac{x^3}{x^2+1}=O(x)\quad (x\to\infty)$. В самом деле, (при $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ и $g(x)=x$) имеем $|h(x)|=\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}\right|\le 1$ на всей оси.

Определение. *Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x\to a$ и пишут $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$, если $f(x)=g(x)(1+\alpha(x))$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to a$.*

Если мы раскроем скобки в правой части равенства, то получим еще один вариант определения:

$$f(x)\sim g(x)\ \ (x\to a)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+o(g(x))\ \ (x\to a).$$

Замечание. Если $g(x)\neq 0$ в некоторой $\overset{\circ}{O}(a)$, то

$$f(x)\sim g(x)\ (x\to a)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$