## *Первообразная и неопределенный интеграл*

***Определение.*** *Функция* $F(x)$ *называется первообразной по отношению к функции* $f(x)$ *на некотором промежутке, если на этом промежутке функция* $F(x)$ *дифференцируема и удовлетворяет уравнению* $F'(x)=f(x)$ *или, что то же самое, соотношению* $dF(x)=f(x)dx$.

***Определение.*** *Множество всех первообразных функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом* $f(x)$ *и обозначается* $\int f(x)dx$. *Произведение* $f(x)dx$ *называется подынтегральным выражением, а функция* $f(x)$ *- подинтегральной функцией. Из определения неопределенного интеграла вытекает*

$$d\left(\int f(x)dx\right)=dF(x)=F'dx=f(x)dx.$$

Нам понадобится следующий, уже доказанный нами факт, характеризующий множество первообразных данной функции на данном промежутке.

***Утверждение***. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *- две первообразные функции* $f(x)$ *на одном и том же промежутке, то их разность* $F_1(x)-F_2(x)$ *постоянна на этом промежутке.*

Таким образом, если $F(x)$ какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+C$.

### *Таблица основных интегралов*

| | | |
|---|---|---|
| $\int 0\cdot dx=C$ | $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C$ | $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ |
| $\int\dfrac{dx}{x-a}=\ln\lvert x-a\rvert+C$ | $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$ | $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert+C\ \ (a\neq0)$ |
| $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$ | $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C\ \ (a\neq0)$ | $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ |
| $\int e^x dx=e^x+C$ | $\int\sin xdx=-\cos x+C$ | $\int\cos xdx=\sin x+C$ |
| $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$ | $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$ | $\int shxdx=chx+C$ |
| $\int chxdx=shx+C$ | $\int\dfrac{dx}{ch^2x}=thx+C$ | $\int\dfrac{dx}{sh^2x}=-cthx+C$ |

Докажем, например, формулу $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C\ \ (a\neq0)$, в самом деле,

$$\left(\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert\right)'=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

***Задача.*** Доказать остальные формулы.

## *Простейшие правила интегрирования*

### *Линейность неопределенного интеграла*

$$\int\left(\alpha u(x)+\beta v(x)\right)dx=\alpha\int u(x)\,dx+\beta\int v(x)\,dx.$$

Равенство проверяется непосредственным дифференцированием.

**Пример**. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$.

### *Интегрирование по частям*

***Утверждение***. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на промежутке* $X$ *, тогда справедлива формула*

$$\int u(x)\,dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\,du(x).$$

Доказательство. $\triangleright$ Непосредственным дифференцированием проверяется формула

$$u(x)v(x)=\int u(x)\,dv(x)+\int v(x)\,du(x),$$

откуда получаем нужную. $\triangleleft$

Эта формула в краткой записи выглядит следующим образом: $\int udv=uv-\int vdu$.

**Пример.**

$$\int\sqrt{x}\ln xdx=\left\{\begin{aligned}&u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x}\\&dv=\sqrt{x}dx,\ v=\frac{2}{3}x^{3/2}\end{aligned}\right\}=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{4}{9}x^{3/2}+C.$$

### *Замена переменной в неопределенном интеграле*

***Утверждение.*** *Пусть функция* $F(t)$ *является первообразной функции* $f(t)$ *на промежутке* $\mathrm{T}$, *а функция* $\varphi(x)$ *определена и дифференцируема на промежутке* $X$ , *причем*

$$\varphi:X\to\mathrm{T}.$$

Тогда справедлива формула

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C$$

$$\left(\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)=F(\varphi(x))+C\right).$$

Доказательство. $\triangleright$ Проверяем формулу, дифференцируя сложную функцию $F(\varphi(x))$:

$$\left(F(\varphi(x))\right)'=F'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x).\triangleleft$$

**Пример.**

$$\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\{t=\cos x\}=-\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

Приведем простой, но очень важный частный случай формулы замены переменной.

***Линейная подстановка***. *Если функция* $F(t)$ *является первообразной функции* $f(t)$ *на промежутке* $\mathrm{T}$, *а при отображении* $\varphi(x)=ax+b$ *промежуток* $X$ *переходит в* $\mathrm{T}$, *то на* $X$ *справедлива формула*

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Проверяется эта формула, так же, как и основная, - непосредственным дифференцированием.

**Пример.**

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{c}x=\sin t\\ t=\arcsin x\end{array}\right\}=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,d(\sin t)=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C=\frac{t}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2}+C=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

### *Первообразные рациональных функций*

***Определение.*** *Рациональной функцией называется дробь вида* $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *- многочлены.*

Дроби вида $\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ $(k>1)$, $\dfrac{bx+c}{x^2+px+q}$ и $\dfrac{bx+c}{(x^2+px+q)^l}$ $(l>1)$ называются простейшими рациональными дробями соответственно $I, II, III$ и $IV$ рода.

Проинтегрируем простейшие рациональные дроби:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases}\dfrac{(x-a)^{1-k}}{1-k}, & k\neq 1,\\ \ln|x-a|, & k=1.\end{cases},$$

$$\int\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{bx+c}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}dx=\left\{\begin{array}{c}t=x+\dfrac{p}{2}\\ dx=dt\end{array}\right\}=\int\frac{bt+\tilde{c}}{(t^2+a^2)^k}\,dt,$$

$$\int\frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2)}{(t^2+a^2)^k}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln(t^2+a^2), & k=1,\\ \dfrac{(t^2+a^2)^{1-k}}{2(1-k)}, & k\neq 1.\end{cases}$$

Рассмотрим интегралы $I_n=\int\dfrac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Интегрируя по частям, имеем

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\left\{\begin{array}{c}u=\dfrac{1}{(t^2+a^2)^n},\ \ du=\dfrac{-2ntdt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\\ dv=dt,\ \ v=t\end{array}\right\}=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+\int\frac{2nt^2dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+\int\frac{2n(t^2\pm a^2)\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

то есть

$$I_{n+1}(t)=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n(t)\right).$$

**Пример**. $I_2(x)=\int\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+(2-1)\int\dfrac{dx}{x^2+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+arctgx\right)+C$.

Из алгебры известно, что любую рациональную дробь можно представить в виде линейной комбинации простейших. А именно, если $\deg P(x)=r$, $\deg Q(x)=s$, и

$Q(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ (дискриминанты квадратных трехчленов отрицательны), то

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{k_i}\frac{a_{ik}}{(x-x_i)^k}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{l_j}\frac{b_{jl}+c_{jl}x}{(x^2+p_jx+q_j)^l}\right),$$

где $p(x)$ - многочлен степени $h=\max\{0;r-s\}$.

**Пример.**

$$\frac{x^7+1}{(x^2+2x+4)^2(x-2)^3}=p(x)+\frac{a_1}{x-2}+\frac{a_2}{(x-2)^2}+\frac{a_3}{(x-2)^3}+\frac{b_1x+c_1}{x^2+2x+4}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+2x+4)^2},$$

где $p(x)$ - многочлен второй степени.

**Пример.** Вычислить интеграл $\int\frac{4x^2+4x}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}dx.$

Представим подинтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{4x^2+4x}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}.$$

Теперь найдем неопределенные коэффициенты $A,B,C,D$. Для этого мысленно сложим дроби в правой части, убедимся в равенстве знаменателей полученной дроби и исходной, а затем приравняем их числители:

$$4x^2+4x=A(x-1)(x^2+2x+5)+B(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Приравняем эти многочлены в точке $x=1$ (нуле знаменателя)

$$x=1: 8=8B\Rightarrow B=1,$$

подставим полученное значение и преобразуем выражение:

$$3x^2+2x-5=A(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2,$$

сократим на $(x-1)$:

$$3x+5=A(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1),$$

опять приравняем левую и правую части в точке $x=1$:

$$8=8A\Rightarrow A=1,$$

подставим полученное значение и преобразуем выражение:

$$-x^2+x=(Cx+D)(x-1),\ -x^2+x=Cx^2+(D-C)x-D,$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$x^2: -1=C,\quad x^0: 0=-D.$$

В результате получим:

$$\int\frac{4x^2+4x}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+2x+5}\right)dx=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\int\frac{xdx}{(x+1)^2+4}=\left\{\begin{matrix}t=x+1,\\ x=t-1,\ dx=dt\end{matrix}\right\}=\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\int\frac{(t-1)dt}{t^2+4}=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+\frac{1}{2}arctg\frac{(x+1)}{2}+C.$$

**_Первообразные вида_ $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$.**

Замена переменной $t=tg\frac{x}{2}$ сводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции. В самом деле, поскольку

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

получаем

$$\int R(\cos x,\sin x)\,dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Пример.**

$$\int\frac{dx}{3\sin x+6\cos x+7}=\left\{t=tg\frac{x}{2}\right\}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}+\frac{6\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+7}=\int\frac{2dt}{t^2+6t+13}=$$

$$=\int\frac{2dt}{(t+3)^2+4}=2arctg\frac{t+3}{2}+C=2arctg\frac{tg\frac{x}{2}+3}{2}+C.$$

Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то выкладки могут упроститься, если сделать замену переменной $t=tgx$ (или $t=ctgx$).

**Пример.** $\int tg^3xdx=\left\{\begin{array}{c}t=tgx\\ x=arctgt\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right\}=\int t^3\frac{dt}{1+t^2}=$

$$=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C=\frac{1}{2}tg^2x+\ln|\cos x|+C.$$

Если бы мы воспользовались бы заменой $t=tg\frac{x}{2}$, то получили бы

$$\int tg^3xdx=16\int\frac{t^4dt}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)^3}.$$

Этот интеграл, конечно, тоже вычисляется, но … ☹.

Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то можно воспользоваться заменой $t=\cos x$, а если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то заменой $t=\sin x$.

**Пример**. $\int\frac{\sin^2x}{\cos x}dx=\left\{\begin{array}{cc}t=\sin x, & x=\arcsin t\\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \cos x=\sqrt{1-t^2}\end{array}\right\}=\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$

$$=\int\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|-\sin x+C.$$

Основная тригонометрическая подстановка в этом случае бы дала:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = 8\int \frac{t^2 dt}{\left(1+t^2\right)^2 \left(1-t^2\right)} \text{ ☹.}$$

### *Первообразные вида* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

В этом случае подынтегральное выражение рационализируется при помощи подстановки $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

**Пример.**

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left\{ t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \right\} = \int td\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) =$$

$$\frac{t\left(t^2+1\right)}{t^2-1} - \int \frac{t^2+1}{t^2-1}dt = \frac{t\left(t^2+1\right)}{t^2-1} - \int\left(1+\frac{2}{t^2-1}\right)dt = \frac{t\left(t^2+1\right)}{t^2-1} - t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= \frac{2t}{t^2-1} - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \text{, где } t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

**Пример.** $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{3x-1}}dx = \left\{ t = \sqrt[3]{3x-1},\ x = \frac{t^3+1}{3},\ dx = t^2 dt \right\} = \int \frac{t^2}{1+t}dt =$

$$= \int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{3x-1}.$$

### *Первообразные вида* $\int R\left(e^x\right)dx$

В этом случае подынтегральное выражение рационализируется при помощи подстановки $t = e^x,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$.

**Пример.** $\int \frac{dx}{e^x+1} = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C$.

### *Первообразные вида* $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$**. *Подстановки Эйлера***

Выделяя полный квадрат в трехчлене $ax^2+bx+c$ и делая соответствующую линейную замену переменной, интеграл можно привести к одному из следующих видов: $\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt$**,** $\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)dt$**,** $\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)dt$**.**

Для рационализации этих интегралов достаточно положить, соответственно:

$\sqrt{t^2 \pm 1} = t - u$ (тогда $t^2 \pm 1 = t^2 - 2tu + u^2$; $t = \frac{u^2 \mp 1}{2u}$; $\sqrt{1+t^2} = \frac{-\left(1 \pm u^2\right)}{2u}$; $dt = \frac{u^2 \pm 1}{2u^2}du$);

$\sqrt{1-t^2} = (1-t)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$; $u = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ (тогда $t = \frac{u^2-1}{1+u^2}$; $dt = \frac{4udu}{\left(u^2+1\right)^2}$).

Эти подстановки были предложены еще Эйлером.

**Пример.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \{t = x+1\} = \int \frac{dt}{t-1+\sqrt{t^2+1}} = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{t^2+1} = u-t \\ t = \frac{u^2-1}{2u} \\ dt = \frac{u^2+1}{2u^2}du \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{dt}{t-1+u-t} = = \frac{1}{2}\int \frac{(u^2+1)\,du}{(u-1)u^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right)du =$$

$= \ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + C$, где $u = t+\sqrt{t^2+1}$ и $t = x+1$.

## *Определенный интеграл*

***Определение.*** *Разбиением* $T$ *отрезка* $[a;b]$ *называется набор точек* $x_0,...,x_n$ *этого отрезка такой, что* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

*Отрезки* $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,...,n)$ *называются отрезками разбиения.*

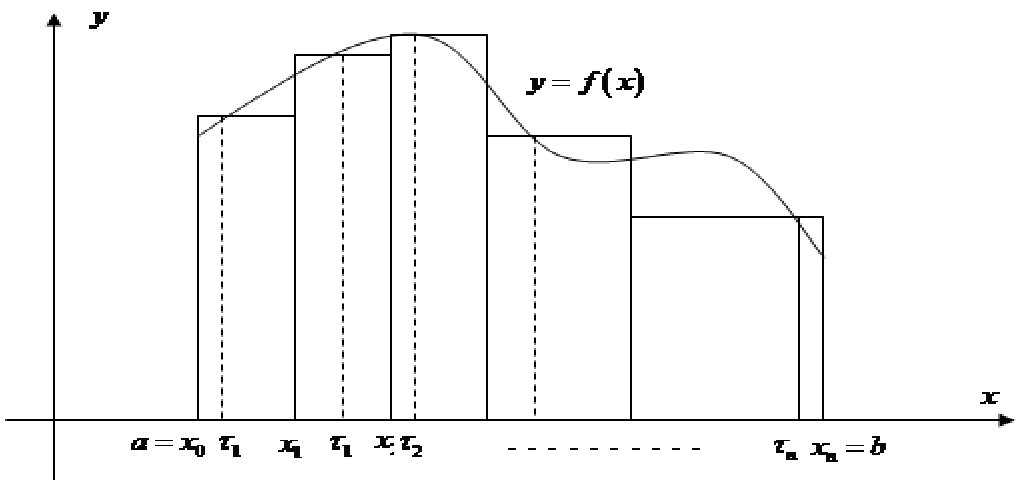
*Максимум* $\lambda(T)$ *из длин отрезков разбиения называется параметром разбиения.*

***Определение***. *Разбиением с отмеченными точками* $(T,\tau)$ *называется разбиение* $T$ *и набор точек* $\tau_1,...,\tau_n$ $(\tau_i \in [x_{i-1}, x_i])$.

***Определение.*** *Пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[a,b]$, *а* $(T,\tau)$ - *разбиение с отмеченными точками этого отрезка. Сумма*

$$\sigma(f,T,\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i,$$

*где* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, *называется интегральной суммой функции* $f$, *соответствующей разбиению с отмеченными точками* $(T,\tau)$.




***Определение.*** *Говорят, что число* $I$ *является интегралом Римана от функции* $f$ *на отрезке* $[a,b]$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого разбиения* $(T,\tau)$ *с отмеченными точками отрезка* $[a,b]$, *параметр разбиения которого* $\lambda(T) < \delta$, *имеет место соотношение* $\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon$.

Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, числа $a$ и $b$ называются верхним и нижним пределом интегрирования соответственно; $f$ - подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение, $x$ - переменная интегрирования.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i .$$

***Определение.*** *Функция $f$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, если для нее определен интеграл Римана.*

### *Необходимое условие интегрируемости*

***Утверждение***. *Если функция $f$, определенная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на нем, то она ограничена на этом отрезке.*

*Доказательство.* $\triangleright$ Если $f$ неограниченна на $[a,b]$, то при любом разбиении $T$ функция будет неограниченной по крайней мере на одном из отрезков $[x_{i-1},x_i]$. Это означает, что, выбирая соответствующим образом точку $\tau_i \in [x_{i-1},x_i]$, можно сделать величину $f(\tau_i)\Delta x_i$ сколь угодно большой, но тогда и интегральную сумму $\sigma\big(f;(T,\tau)\big)$ можно сделать сколь угодно большой по модулю, что означает, что конечного предела у интегральных сумм нет. $\triangleleft$

### *Суммы Дарбу*

Обозначим через $m_i$ и $M_i$, соответственно, точные нижнюю и верхнюю грани ограниченной функции $f(x)$ на $[x_{i-1},x_i]$ и составим суммы

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \quad S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i .$$

Эти суммы называются, соответственно, нижней и верхней интегральными суммами, или нижней и верхней суммами Дарбу. Для интегральной суммы $\sigma$, соответствующей произвольному набору отмеченных точек, очевидно, имеем $s \le \sigma \le S$.

### *Свойства сумм Дарбу*

***Утверждение.*** *Если к имеющимся точкам деления добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу может только возрасти, а верхняя только уменьшиться.*

*Доказательство.* $\triangleright$ Для доказательства этого факта достаточно ограничиться присоединением одной точки $x'$. Пусть она попала на $i$ – й промежуток:

$$x_{i-1} < x' < x_i .$$

Обозначим через $S'$ новую верхнюю сумму Дарбу, от прежней она отличается только слагаемыми, соответствующими промежутку $[x_{i-1},x_i]$. Пусть $M_i'$ и $M_i''$ обозначают точные верхние границы функции, соответственно, на промежутках $[x_{i-1},x']$ и $[x',x_i]$. Имеем

$$M_i'(x'-x_{i-1})+M_i''(x_i-x') \le M_i\,(x'-x_{i-1}+x_i-x') = M_i\,(x_i-x_{i-1}),$$

откуда следует $S' \le S$.

Аналогично доказывается соответствующее неравенство для нижних интегральных сумм. $\triangleleft$

***Утверждение.*** *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $s_1,\ S_1$ - верхняя и нижняя суммы Дарбу, соответствующие разбиению $T_1$, а $s_2,\ S_2$, соответствующие разбиению $T_2$. Объединим точки деления этих двух разбиений в третье - $T_3$, и пусть $s_3,\ S_3$ - его суммы Дарбу. Имеем $s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2$. $\triangleleft$

Из доказанного утверждения следует, что множество всех нижних сумм ограничено сверху (любой верхней суммой), а множество верхних сумм ограничено снизу (любой нижней). В таком случае, существуют

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\},$$

причем $I_* \le I^*$. Эти числа называются, соответственно, нижним и верхним интегралами Дарбу.

***Условие существования интеграла***

***Теорема.*** *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\lambda(\mathrm{T})\to 0}(S-s)=0$.

Доказательство. $\triangleright$ Необходимость. Предположим, что интеграл существует, тогда по любому $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что если $\lambda(\mathrm{T})<\varepsilon$, то для любой интегральной суммы $\sigma$ будет справедливо неравенство $I-\varepsilon<\sigma<I+\varepsilon$. Но тогда и для точной верхней и точной нижней граней интегральных сумм по всем выделенным точкам $\{\tau_k\}$ будет также верно $I-\varepsilon\le s\le\sigma\le S\le I+\varepsilon$. То есть $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}S$.

Достаточность. Пусть теперь $\lim\limits_{\lambda(\mathrm{T})\to 0}s=\lim\limits_{\lambda(\mathrm{T})\to 0}S=I$. Тогда, перейдя в неравенствах $s\le\sigma\le S$ ($s,\sigma$ и $S$ здесь строятся по одному разбиению) к пределу, получим $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=I$. $\triangleleft$

Обозначим колебание $M_i-m_i$ функции в $i-$ом частичном промежутке через $\omega_i$, тогда $S-s=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$, и условие существования определенного интеграла принимает вид:

$$\lim_{\lambda(\mathrm{T})\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0.$$

***Утверждение***. *Если функция интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то она также интегрируема и на его части* $[c,d]\subseteq[a,b]$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что точки $c$ и $d$ являются точками разбиения. Тогда $0\le\lim\limits_{\lambda(\mathrm{T})\to 0}\sum\limits_{c}^{d}\omega_i\Delta x_i\le\lim\limits_{\lambda(\mathrm{T})\to 0}\sum\limits_{a}^{b}\omega_i\Delta x_i=0.$

Мы знаем, что необходимым условием интегрируемости функции является ее ограниченность. Покажем, что оно не является достаточным. Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x \text{ рационально,}\\ 1, \text{ если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$$

Она ограничена $(0\le D(x)\le 1)$, но на любом отрезке $[a,b]$ для любого разбиения

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(1-0)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a\not\to 0.$$

### *Классы интегрируемых функций*

***Теорема***. *Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. $\triangleright$ Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем (теорема Кантора). То есть по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $|x' - x''| < \delta \;\; (x', x'' \in [a,b])$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Но тогда, если $\lambda(T) < \delta$, то $\omega_i < \varepsilon$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon (b-a),$$

откуда следует существование интеграла. $\triangleleft$

Справедливо также следующее утверждение.

***Теорема.*** *Если ограниченная на отрезке функция имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.*(без доказательства)

Пример. Функция $y = x$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, а значит, интегрируема на нем. Интеграл $\int\limits_0^1 x dx$ будет пределом любой последовательности интегральных сумм с $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$. Рассмотрим последовательность разбиений $[0;1]$ на равные отрезки: $\mathrm{T} = \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}$ и выделим точки $\tau_k = \frac{k}{n} \;\; (k = 1, \dots, n)$. Тогда $\sigma(x, \mathrm{T}_n, \tau) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. То есть $\int\limits_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

## ***Свойства определенного интеграла***

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ $(a < b)$. Положим по определению $\int\limits_b^a f(x) dx = -\int\limits_a^b f(x) dx$ и $\int\limits_a^a f(x) dx = 0$.

$1^{\circ}$ ***(Аддитивность)***. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема в наибольшем из отрезков с концами в точках $a, b$ и $c$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

*Доказательство.* $\triangleright$ Предположим сначала, что $a < c < b$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на части. Не нарушая общности, можно считать точку $c$ одной из точек деления. Для соответствующей интегральной суммы будем иметь

$$\sum_a^b f(\xi) \Delta x = \sum_a^c f(\xi) \Delta x + \sum_c^b f(\xi) \Delta x.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим требуемое равенство.

Другие случаи взаимного расположения точек $a, b, c$ приводятся к разобранному. Пусть, например, $a < b < c$. Тогда, по доказанному,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$$

После перестановки пределов интегрирования в последнем интеграле, получим нужное нам равенство.

Аналогично поступаем с другими расположениями. $\triangleleft$

$2^\circ$ ***(Линейность).*** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$. *Тогда произвольная линейная комбинация* $\alpha f(x)+\beta g(x)$ *этих функций также будет интегрируемой на этом отрезке, причем*

$$\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

**Доказательство**. $\triangleright$ Возьмем произвольное разбиение $T$ отрезка $[a,b]$ на части и составим интегральные суммы для всех трех интегралов. При этом точки $\tau_i$ в каждом частичном промежутке выбираем для всех трех сумм одни и те же. Получим

$$\sum_i \left(\alpha f(\tau_i)+\beta g(\tau_i)\right)\Delta x_i=\alpha\sum_i f(\tau_i)\Delta x_i+\beta\sum_i g(\tau_i)\Delta x_i.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\lambda(T)\to 0$, убеждаемся в интегрируемости линейной комбинации и справедливости требуемого равенства. $\triangleleft$

$3^\circ$ ***Теорема (об оценке модуля интеграла).*** *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *тогда функция* $|f(x)|$ *также интегрируема на этом отрезке, и имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

*Доказательство.* $\triangleright$ Рассмотрим произвольное разбиение $T$ отрезка $[a,b]$. Так как для любой пары точек $x',x''\in[x_i,x_{i+1}]$ будет $\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le|f(x')-f(x'')|$, то и колебание $\omega_i^*$ функции $|f(x)|$ в этом промежутке не превосходит $\omega_i$ (колебания функции $f(x)$). В таком случае имеем $\sum_i \omega_i^*\Delta x_i\le\sum_i\omega_i\Delta x_i$, а переходя к пределу в последнем неравенстве при $\lambda(T)\to 0$, убеждаемся в интегрируемости функции $|f(x)|$. Для доказательства нужного нам неравенства для интегралов перейдем к пределу в соответствующем неравенстве для интегральных сумм. $\triangleleft$

$4^\circ$ ***Теорема (об интегрировании неравенств).*** *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(x)\le g(x)$ *везде на* $[a,b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. $\triangleright$ Возьмем произвольное разбиение с выделенными точками $(T,\tau)$ отрезка $[a,b]$ и составим интегральные суммы для двух интегралов. Получим

$$\sum_i f(\tau_i)\Delta x_i\le\sum_i g(\tau_i)\Delta x_i.$$

Переходя в последним неравенстве к пределу при $\lambda(\mathrm{T})\to 0$, получаем нужное нам неравенство. $\triangleleft$

$5^\circ$ ***Теорема (об оценке интеграла).*** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *и если на всем этом отрезке справедливо неравенство* $m\le f(x)\le M$, *то*

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

*Доказательство.* $\triangleright$ Воспользуемся предыдущим свойством с учетом того, что $\int_a^b C dx = C(b-a)$. $\triangleleft$

### *Теорема о среднем значении*

***Определение.*** *Средним интегральным функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *называется число*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

***Теорема (о среднем интегральном).*** *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *и пусть на всем этом отрезке* $m \le f(x) \le M$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

*где* $m \le \mu \le M$.

*Доказательство.* $\triangleright$ По теореме об оценке интеграла

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

откуда получаем

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Теперь полагаем $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. $\triangleleft$

В случае непрерывной функции справедлива следующая теорема.

***Теорема (о среднем интегральном значении непрерывной функции).*** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда найдется точка* $c \in [a,b]$ *такая, что*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

*Доказательство.* $\triangleright$ В качестве $m$ и $M$ возьмем соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. По второй теореме Вейерштрасса эти значения принимаются в некоторых точках $c_1, c_2 \in [a,b]$:

$$f(c_1) = m, \quad f(c_2) = M.$$

По теореме о среднем интегральном $\mu$ принадлежит отрезку с $\left[f(c_1), f(c_2)\right]$. По теореме же Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке с концами в точках $c_1$ и $c_2$ найдется точка $c$, в которой $f(c) = \mu$. $\triangleleft$

Требование непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$ существенно. В самом деле, рассмотрим $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x \le 2. \end{cases}$ Тогда $\mu = \frac{1}{2} \notin \{0;1\}$ (множеству значений функции $f(x)$).

### *Интеграл с переменным верхним пределом*

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Определим на этом же отрезке функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,,$$

которую часто называют интегралом с переменным верхним пределом. Из свойства аддитивности определенного интеграла вытекает корректность определения функции $\Phi(x)$ для $x\in[a,b]$.

***Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).*** *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ будет непрерывной на этом отрезке.*

*Доказательство.* $\triangleright$ Интегрируемая на отрезке функция ограничена на нем, то есть существует такое число $C$, что $|f(x)|\le C$ на $[a,b]$. Пусть $x\in[a,b]$, и пусть $h$ - приращение независимой переменной, при котором $x+h\in[a,b]$. Воспользовавшись свойством аддитивности, а также теоремами об оценках определенного интеграла, получим

$$|\Delta\Phi(x)|=|\Phi(x+h)-\Phi(x)|=\left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|=\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right|\le\left|\int_x^{x+h}|f(t)|\,dt\right|\le C|h|.$$

То есть $\lim\limits_{h\to 0}\Delta\Phi(x)=0$, что означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке $x$. $\triangleleft$

***Теорема (о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом).*** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ будет дифференцируемой на этом отрезке.*

*Доказательство.* $\triangleright$

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)\,,$$

где $c$ лежит между $x$ и $x+\Delta x$. Из непрерывности $f(x)$ следует, что при $\Delta x\to 0$ будет справедливо $f(c)\to f(x)$. $\triangleleft$

## *Основная формула интегрального исчисления*

Доказанная выше теорема означает, что для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ интеграл $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ будет первообразной функцией. Если $F(x)$ какая-либо другая первообразная $f(x)$, то $\Phi(x)=F(x)+C$. Имеем

$$0=\Phi(a)=F(a)+C\ \Rightarrow c=-F(a)\,,$$

поэтому $\Phi(x)=F(x)-F(a)$. При $x=b$ получим

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\,.$$

***Формула Ньютона-Лейбница***, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ - называется основной формулой интегрального исчисления.

Теперь мы можем вычислять определенный интеграл, не используя интегральные суммы.

**Пример.** $\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - 0$.

**Пример**. Найдем среднее интегральное значение функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$

$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$.

### *Формула интегрирования по частям*

***Теорема.*** *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a,b]$, *то справедливо соотношение*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

*Доказательство.* $\triangleright$ По правилу дифференцирования производной произведения имеем

$$(uv)'(x) = (u'\cdot v)(x) + (u\cdot v')(x).$$

По условию все функции в этом равенстве непрерывны, а, значит, и интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Используя линейность интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$(u\cdot v)(x)\Big|_a^b = \int_a^b (u'\cdot v)(x)\,dx + \int_a^b (u\cdot v')(x)\,dx. \triangleleft$$

**Пример**. $\int_1^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$

### *Замена переменной в определенном интеграле*

***Теорема.*** *Если* $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ - *непрерывно дифференцируемое отображение отрезка* $\alpha \le t \le \beta$ *в отрезок* $a \le x \le b$ *такое, что* $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, *то при любой непрерывной на* $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

*Доказательство.* $\triangleright$ Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, тогда по теореме о дифференцировании сложной функции, функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \triangleleft$$

**Пример.** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x=\sin t,\ dx=\cos t dt \\ t=\arcsin x,\ x\big|_0^1 \Rightarrow t\big|_0^{\pi/2} \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left( t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

## *Геометрические приложения определенного интеграла*

### *Длина плоской кривой*

***Определение.*** *Длиной кривой* $\overset{\frown}{AB}$ *называется точная верхняя граница* $S$ *для множества периметров* $p$ *вписанных в кривую ломаных:* $S=\sup\{p\}$. *Если это число конечно, то кривая называется спрямляемой.*

### *Длина кривой, заданной параметрически*

Рассмотрим параметрически заданную гладкую кривую

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta],$$

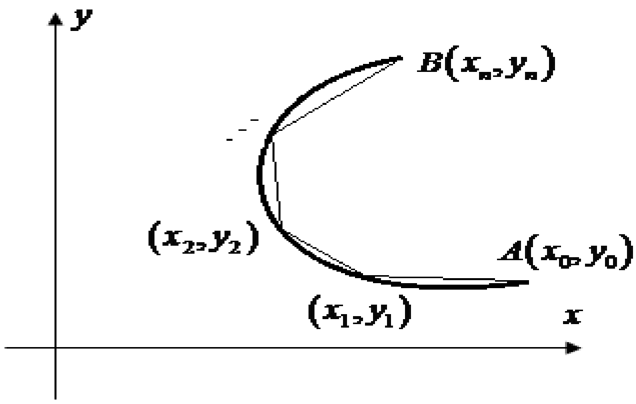
где $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$.

***Утверждение***. *Параметрически заданная на конечном промежутке гладкая кривая спрямляема.*

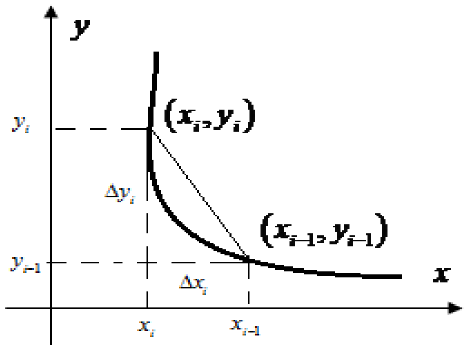
*Доказательство.* $\triangleright$ Поскольку функции $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на отрезке, то их модули ограничены на нем, то есть существуют константы $m, M, l, L$ такие, что

$$m \le |x'(t)| \le M,\ l \le |y'(t)| \le L \quad (t \in [\alpha,\beta]).$$

Рассмотрим ломаную с вершинами в точках $(x_i, y_i) = (x(t_i),\ y(t_i))$ $(\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta)$.




Выделим одно звено ломаной и оценим его длину:




$$p_i = \sqrt{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2}.$$

По формуле Лагранжа для конечных приращений

$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$,

$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1})$, где точки $\tau_i$ и $\tilde{\tau}_i$ лежат на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$.

Периметр ломаной равен

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left(y_i-y_{i-1}\right)^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2\left(\tau_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)^2+y'^2\left(\tilde{\tau}_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2\left(\tau_i\right)+y'^2\left(\tilde{\tau}_i\right)}\left(t_i-t_{i-1}\right)\le\sqrt{M^2+L^2}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-t_{i-1}\right)=\sqrt{M^2+L^2}\left(\beta-\alpha\right).$$

Мы воспользовались ограниченностью производных $x'(t), y'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Видим, что множество периметров вписанных ломаных ограничено, следовательно, кривая спрямляема. Аналогично оценке сверху, мы можем получить и оценку снизу для длины $S$ нашей кривой. Поэтому можно записать:

$$\sqrt{m^2+l^2}\left(\beta-\alpha\right)\le S\le\sqrt{M^2+L^2}\left(\beta-\alpha\right).\triangleleft$$

***Формула для вычисления длины дуги гладкой кривой, заданной параметрически.***

Введем функцию $S(t)$, равную длине переменной дуги от точки $\left(x(\alpha),y(\alpha)\right)$ до $\left(x(t),y(t)\right)$ $\left(S(\alpha)=0,\ S(\beta)=S=\left|\overset{\frown}{AB}\right|\right)$.

Рассмотрим промежуток $[t,t+\Delta t]$. Приращение $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$ равно длине дуги, заданной на отрезке $[t,t+\Delta t]$. Запишем оценку для приращения длины $S(t)$ на этом промежутке:

$$\sqrt{m^2+l^2}\Delta t\le\Delta S\le\sqrt{M^2+L^2}\Delta t.$$

Здесь $M,L,m,l$, соответственно, наибольшие и наименьшие значения модулей производных $x'$ и $y'$ на отрезке $[t,t+\Delta t]$. Из непрерывности производных вытекает, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}M^2=\lim_{\Delta t\to 0}m^2=x'^2(t),\quad \lim_{\Delta t\to 0}L^2=\lim_{\Delta t\to 0}l^2=y'^2(t).$$

То есть

$$S'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}.$$

Таким образом, длина переменной дуги – дифференцируемая функция, и по формуле Ньютона-Лейбница ее приращение на отрезке $[\alpha,\beta]$ равно

$$S=S(\beta)-S(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (1)$$

**Пример 1**. Найти длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}\qquad t\in[0,2\pi].$$

Решение: $$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=$$

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

***Длина кривой, заданной явно.***

Пусть кривая задана явно в прямоугольных координатах:

$$y=f(x),\quad a\le x\le b.$$

Принимая $x$ за параметр, ее можно записать в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases}$

Применив (1), получим

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

**Пример 2**. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Решение: $S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right).$

***Длина кривой, заданной в полярных координатах***

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ $\left(\varphi \in [\alpha, \beta]\right)$, то ее можно задать параметрически системой

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

В этом случае

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(r'\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2 + \left(r'\sin\varphi + r\cos\varphi\right)}\,d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2\cos^2\varphi - 2rr'\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + 2rr'\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

**Пример 3**. Найти длину дуги окружности радиуса $R$, с центром в точке $(0; R)$, заключенную между прямыми $2y = x$ и $y = x$.

Решение. Запишем уравнение окружности в декартовых координатах:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2yR.$$

С учетом

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$$

в полярных координатах уравнение нашей дуги выглядит следующим образом:

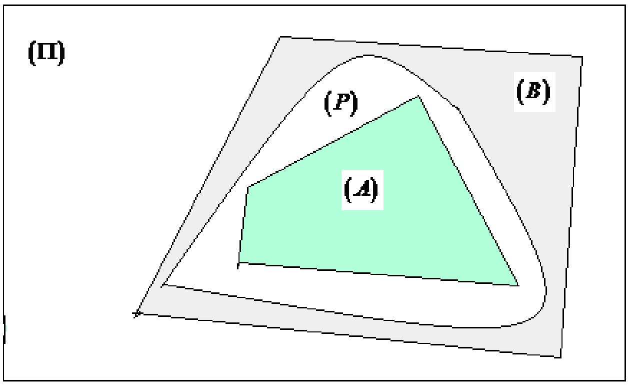
$$r = a\sin\varphi, \quad \left(\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Найдем ее длину:

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{a\pi}{3}.$$

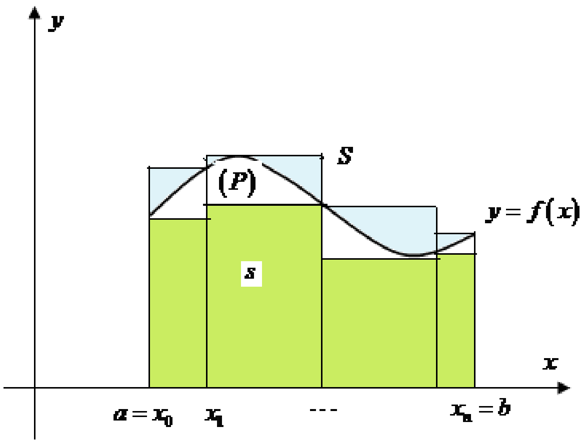
***Площадь плоской фигуры.***

Пусть $(P)$ - произвольная ограниченная фигура на плоскости (содержащаяся в некотором прямоугольнике). Обозначим через $(A)$ Многоугольники, целиком содержащиеся в $(P)$, а через $(B)$ - многоугольники, содержащие $(P)$. Через $A$ и $B$ обозначим множества их площадей.




Для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $a \le b$. Ограниченное сверху множество чисел $A$ имеет точную верхнюю грань $P_*$, а ограниченное снизу множество чисел $B$ точную нижнюю грань $P^*$. Очевидно, что $P_* \le P^*$, если же эти числа совпадают, то общее их значение $P$ называют площадью фигуры $(P)$, а саму эту фигуру называют квадрируемой.

***Площадь криволинейной трапеции.***




Пусть $f(x)$ - неотрицательная интегрируемая функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $(P)$, определенную неравенствами: $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$. Верхние суммы Дарбу для $f(x)$ являются площадями многоугольников, содержащих $(P)$, а, соответственно, нижние – площадями многоугольников, целиком содержащихся в $(P)$.

Таким образом, получаем
$I_* \le P_* \le P^* \le I^*$. Из интегрируемости $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует, что $I_* = I^*$, а, значит, фигура $(P)$ квадрируема и

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если функция отрицательна, то интеграл равен площади, взятой со знаком минус, если же меняет знак, то равен алгебраической сумме площадей.

Если криволинейная трапеция снизу и сверху ограничена кривыми

$$y_1 = f_1(x) \text{ и } y_2 = f_2(x) \quad (a \le x \le b),$$

то площадь такой трапеции будет равна

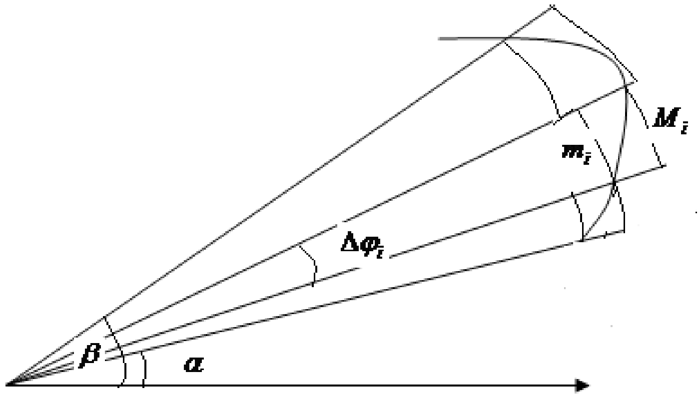
$$P = \int_a^b \left( f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

**Пример 4.** Найти площадь области, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение: $P = \int_0^1 \left( \sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left( \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

### *Площадь фигуры, заданной в полярных координатах*

Найдем площадь сектора $(P)$, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta \quad (\alpha < \beta)$. Рассмотрим разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ - $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ и проведем соответствующие этим углам радиус-векторы.




Пусть $M_i$ и $m_i$ соответственно наибольшее и наименьшее значение функции $r(\varphi)$ в промежутке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Площадь множества круговых секторов, ограниченных радиус-векторами $\varphi = \varphi_i \quad (1 \le i \le n)$ и целиком содержащихся в $(P)$, равна $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\varphi_i$, площадь круговых секторов с теми же самыми радиус-векторами, содержащих $(P)$, равна $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\varphi_i$. Эти числа являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу для интеграла $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$ и имеют пределом этот интеграл. Получаем

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

**Пример 5**. Найти площадь сектора, ограниченного окружностью $r = a\sin\varphi$ и лучами $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Решение: $P = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} a^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{a^2\pi}{24}$.

### *Объем тела вращения*

Выведем формулу для вычисления объема тела $(V)$, полученного при вращении кривой $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ вокруг оси $Ox$. Для этого разобьем $(V)$ на части $(V_i)$ плоскостями, перпендикулярными оси $Ox$ и проходящими через точки $x_i \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Часть $(V_i)$ содержит в себе цилиндр $(A_i)$, в основании которого лежит круг радиуса $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$, а высота равна $\Delta x_i$. Аналогично, $(V_i)$ содержится в цилиндре $(B_i)$ с круговым основанием радиуса $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$ и той же высотой. Объемы «внутренних» и «внешних» цилиндров будут равны соответственно, $\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 \Delta x_i$, то есть совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу для интеграла $\pi\int_a^b f^2(x) dx$. Окончательно получаем $V = \pi\int_a^b f^2(x) dx$.

**Пример 6.** Найти объем шара радиуса $R$.

Решение: $V=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3}$.

### ***Приближенное вычисление определенного интеграла***

### ***Формула центральных прямоугольников***

Метод центральных прямоугольников заключается в том, что в качестве приближенного значения интеграла функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ берется интегральная сумма, полученная при разбиении отрезка на равные промежутки с выделенными точками – серединами этих промежутков.

Рассмотрим случай разбиения отрезка на $n$ частей. Тогда точки деления $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, а выделенные точки $\tau_i=a+\frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i).$$

То есть

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)+R_n.$$

Оценим погрешность $R_n$.

Сначала решим следующую задачу.

**Задача**. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$. Оценить разность $\int\limits_{-h/2}^{h/2}f(x)dx-f(0)h$.

Решение. Поскольку $|f'(x)|$ непрерывна на отрезке $\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$, то она ограничена на нем, и $|f'(x)|\le M,\quad x\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$.

Запишем для $f(x)$ формулу Маклорена при $n=1$: $f(x)=f(0)+f'(0)x+r_1(x)$. Очевидно, остаток $r_1(x)$ является интегрируемой функцией на $\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$. Нам также понадобится оценка $|r_1(x)|=\left|\frac{f''(c)x^2}{2!}\right|\le\frac{Mx^2}{2}\quad(|c|<|x|)$. Имеем

$$|R_n|=\left|\int\limits_{-h/2}^{h/2}f(x)dx-f(0)h\right|=\left|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(f(x)-f(0)\right)dx\right|=\left|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(f(0)+f'(0)x+r_1(x)-f(0)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(f'(0)x+r_1(x)\right)dx\right|=\left|\int\limits_{-h/2}^{h/2}r_1(x)dx\right|\le\int\limits_{-h/2}^{h/2}|r_1(x)|dx\le\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{Mx^2}{2}dx=\frac{Mh^3}{24}.$$

### *Оценка погрешности формулы центральных прямоугольников*

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\tau_i)\right|=\left|\sum_{i=1}^n\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx-\frac{b-a}{n}f(\tau_i)\right)\right|\le\sum_{i=1}^n\frac{M(b-a)^3}{24n^3}=\frac{M(b-a)^3}{24n^2},$$

или

$$\left|R^n\right|\le\frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

**Пример**. На сколько частей надо разбить отрезок $[0;1]$, чтобы методом центральных прямоугольников вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью $0,01$?

Решение. Вторая производная подынтегральной функции $\left(e^{-x^2}\right)''=e^{-x^2}\left(4x^2-2\right)$ возрастает на $[0;1]$, поэтому ее модуль достигает максимума на конце отрезка (в данном случае при $x=0$), то есть $\left|\left(e^{-x^2}\right)''\right|\le 2$.

Получаем $\frac{2(1-0)^3}{24n^2}<\frac{1}{100}$, $n^2>8,(3)$. То есть на 3 части.

## *Несобственные интегралы*

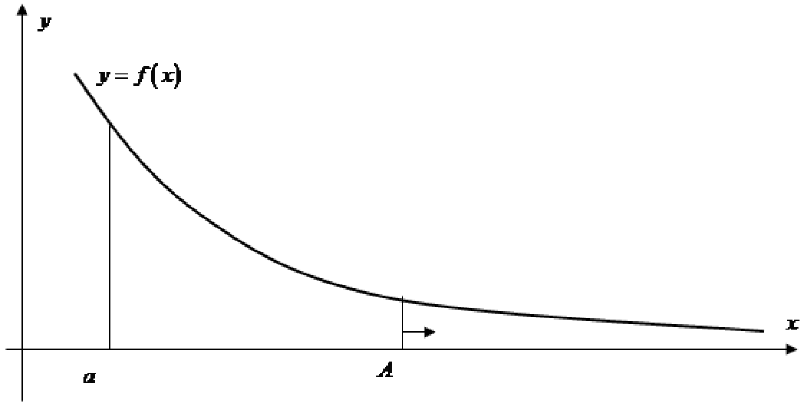
### *Несобственные интегралы первого рода*

***Определение***. *Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,A]$, содержащемся в этом промежутке. Величина*

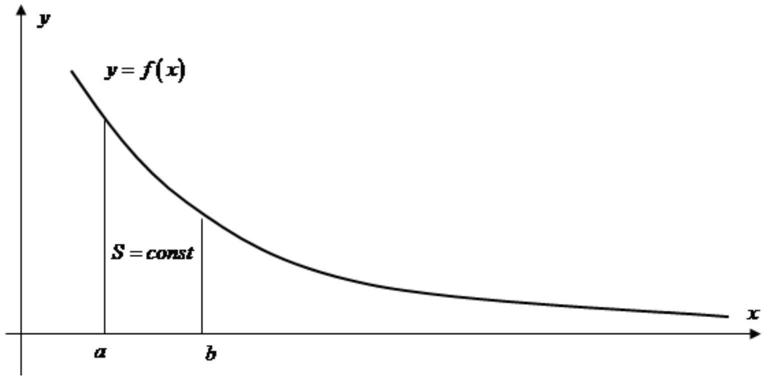
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx,$$

*если этот предел существует, называется несобственным интегралом от функции $f$ по промежутку $[a,+\infty)$.*

Говорят, что интеграл *сходится*, если конечный предел существует и *расходится* в противном случае.



***Утверждение.*** *Если функция* $f(x)$ *определена в промежутке* $[a,+\infty)$ *и интегрируема на любом отрезке* $[a,A]$, *содержащемся в этом промежутке, то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ $(b>a)$ *сходятся или расходятся одновременно.*




***Задача***. *Докажите это утверждение.*

**Пример**. Выясним, при каких значениях параметра $\alpha$ сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\{\alpha\neq 1\}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1,\\ \infty, & \alpha<1,\end{cases}$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\ln A=\infty.$$

В дальнейшем, при вычислении несобственных интегралов мы будем применять следующую форму записи: $F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$. Например:

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=-(0-1)=1.$$

Из определения несобственного интеграла видно, что сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(A)=\int\limits_a^A f(x)dx$ *при* $A\to+\infty$.

### *Признаки сходимости несобственных интегралов*

***Утверждение*** *(критерий Коши сходимости несобственного интеграла). Если функция* $f(x)$ *определена на промежутке* $[a,+\infty)$ *и интегрируема на любом отрезке* $[a,A]\subset[a,+\infty)$, *то интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $A>a$, *что для любых* $A',A''>A$ *имеет место соотношение*

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

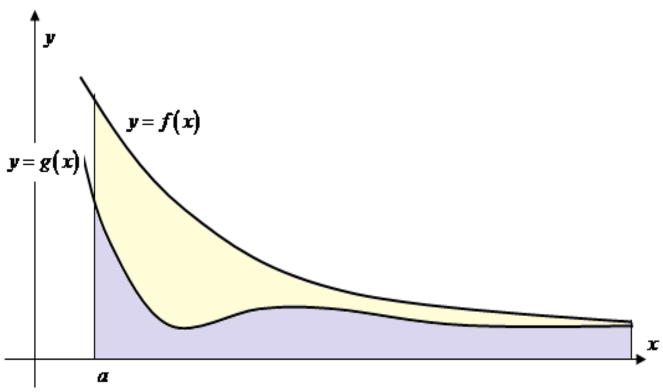
(без доказательства)

***Утверждение.*** *Если функция* $f(x)$ *неотрицательна, то интеграл* $F(A)=\int\limits_a^A f(x)dx$ *представляет собой неубывающую функцию, и для сходимости* *интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно ограниченности функции* $F(A)$ *на* $[a,+\infty)$.

Справедливость этого утверждения следует из определения несобственного интеграла и теоремы о пределе монотонной функции.

***Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов***

***Теорема (признак сравнения).*** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на промежутке* $[a,+\infty)$, *и пусть для некоторого* $b > a$ *на промежутке* $[b,+\infty)$ *справедливо неравенство* $f(x) \ge g(x) \ge 0$. *Тогда из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *вытекает сходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, *а из расходимости* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *вытекает расходимость* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.




Доказательство. $\triangleright$ Из теоремы об интегрировании неравенств при любом $A > b$ имеем

$$G(A) = \int\limits_b^A g(x)\,dx \le \int\limits_b^A f(x)\,dx = F(A).$$

Из ограниченности функции $F(A)$ на $[b,+\infty)$ следует ограниченность $G(A)$ а, значит, и сходимость $\int\limits_b^{+\infty} g(x)\,dx$.

Пусть теперь интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится. Если бы интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходился, то, как только что было доказано, сходился бы и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, что привело бы к противоречию. $\triangleleft$

***Теорема (предельный признак сравнения).*** *Пусть положительные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на промежутке* $[a,+\infty)$, *и пусть существует предел*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 < K < +\infty).$$

*Тогда интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. $\triangleright$ Из существования предела вытекает, что при некотором $b > a$ будет выполнено неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \frac{K}{2}$, то есть $\frac{K}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3K}{2}$ или

$\frac{K}{2}g(x) < f(x) < \frac{3K}{2}g(x)$. Далее применяем к функциям $\frac{K}{2}g(x)$, $f(x)$, $\frac{3K}{2}g(x)$ предыдущую теорему. ◁

***Абсолютная сходимость несобственного интеграла первого рода***

***Определение.*** *Говорят, что несобственный интеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится абсолютно, если сходится интеграл* $\int_a^\infty |f(x)|dx$.

***Утверждение.*** *Если интеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. ▷ Достаточно проверить признак Коши для сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$:

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \le \int_{A'}^{A''} |f(x)|dx \underset{A',A''\to\infty}{\to} 0. \triangleleft$$

***Определение.*** *Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то (иногда) говорят, что он сходится условно.*

***Задача.*** *Доказать, что интегралы* $\int_\pi^\infty \frac{\sin x dx}{x^\alpha}$, $\int_\pi^\infty \frac{\cos x dx}{x^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ *сходятся абсолютно.*

***Утверждение****. Интегралы* $\int_\pi^\infty \frac{\sin x dx}{x^\alpha}$, $\int_\pi^\infty \frac{\cos x dx}{x^\alpha}$ *при* $0 < \alpha \le 1$ *сходятся условно.*

Доказательство. ▷

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x dx}{x^\alpha} = \left\{ \begin{matrix} u = \frac{1}{x^\alpha},\ du = \frac{-\alpha dx}{x^{\alpha+1}} \\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -\frac{\cos x}{x^\alpha}\Bigg|_\pi^\infty - \alpha\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \alpha\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx,$$

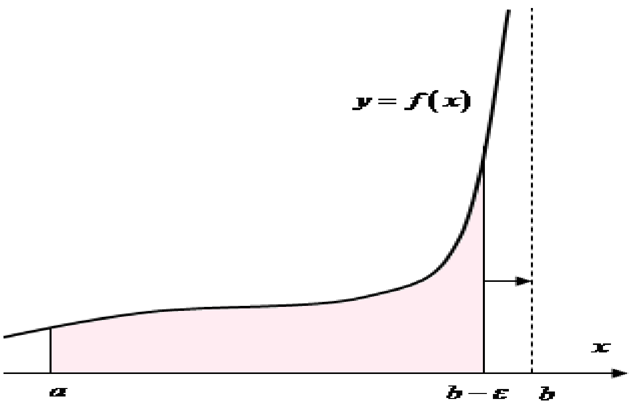
а поскольку $\alpha + 1 > 1$, то интеграл сходится.

Покажем, что сходимость не абсолютная. Учитывая, что $|\sin x| \ge \sin^2 x$, имеем

$$\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \ge \int_\pi^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx = \frac{1}{2}\int_\pi^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^\alpha}dx = \frac{1}{2}\int_\pi^\infty \frac{dx}{x^\alpha} - \frac{1}{2}\int_\pi^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx.$$

Поскольку первый интеграл при $0 < \alpha \le 1$ расходится, а второй сходится при всех $\alpha > 0$, исходный интеграл расходится. ◁

***Несобственные интегралы второго рода.***



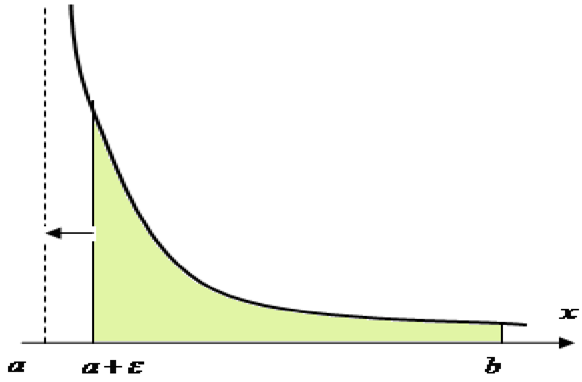

***Определение.*** *Пусть функция* $f(x)$ *определена в промежутке* $[a,b)$, *интегрируема на любом отрезке* $[a,b-\varepsilon]$, *содержащемся в этом промежутке и неограниченна в любой полуокрестности* $O_\varepsilon^-(b)$. *Величина*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

*если этот предел существует, называется несобственным интегралом от функции* $f$ *по промежутку* $[a,b)$.

Говорят, что интеграл *сходится*, если конечный предел существует и *расходится* в противном случае.

Аналогично определяется интеграл от функции с «особенностью» в левом конце промежутка.




***Определение.*** *Пусть функция* $f(x)$ *определена в промежутке* $(a,b]$, *интегрируема на любом отрезке* $[a+\varepsilon,b]$, *содержащемся в этом промежутке и неограниченна в любой полуокрестности* $O_\varepsilon^+(a)$. *Величина*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

*если этот предел существует, называется несобственным интегралом от функции* $f$ *по промежутку* $(a,b]$.

***Утверждение.*** Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,b)$, интегрируема на любом отрезке $[a,b-\varepsilon]$, содержащемся в этом промежутке и неограниченна в любой полуокрестности $O_\varepsilon^-(b)\subset(a,b)$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx \quad (a<c<b)$ сходятся и расходятся одновременно.

***Задача***. *Докажите это утверждение, а также сформулируйте и докажите соответствующее утверждение для* $(a,b]$.

**Пример 2.** Выясним, при каких значениях параметра $\alpha$ сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \{\alpha\neq 1\} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1,\\ \infty, & \alpha>1,\end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

***Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов второго рода.***

***Теорема*** *(теорема сравнения). Пусть функция* $f(x)$ *определена в промежутке, интегрируема на любом отрезке* $[a,b-\varepsilon]$, *содержащемся в этом промежутке и неограниченна в любой полуокрестности* $O_\varepsilon^-(b)\subset(a,b)$.

*Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на промежутке* $[a,b)$, *и пусть для некоторого* $c\in(a,b)$ *на промежутке* $[c,b)$ *справедливо неравенство* $f(x)\geq g(x)\geq 0$.

*Тогда из сходимости интеграла* $\int_a^b f(x)dx$ *вытекает сходимость интеграла* $\int_a^b g(x)dx$*, а из расходимости* $\int_a^b g(x)dx$ *вытекает расходимость* $\int_a^b f(x)dx$.

***Теорема*** *(предельный признак сравнения). Пусть положительные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на промежутке* $[a,b)$*, и пусть существует предел*

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=K \quad (0<K<+\infty).$$

*Тогда интегралы* $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству соответствующих утверждений для несобственных интегралов 1-го рода. Соответствующие теоремы справедливы и для промежутка $(a,b]$.

***Абсолютная сходимость несобственного интеграла второго рода.***

***Определение.*** *Говорят, что несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится абсолютно, если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|dx$.

***Утверждение.*** *Если интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится абсолютно, то он сходится. (без доказательства)*

**Пример**. Исследовать в зависимости от параметра $\alpha$ абсолютную и условную сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sin {}^1\!/_x}{x^\alpha}dx$.

Решение. Имеем

$$\int_0^1 \frac{\sin {}^1\!/_x}{x^\alpha}dx=\left\{\begin{matrix} t={}^1\!/_x \Rightarrow t\Big|_{+\infty}^{1}, \\ x={}^1\!/_t \Rightarrow dx=-{}^{dt}\!/_{t^2}, \end{matrix}\right\}=-\int_{+\infty}^{1}\frac{t^\alpha \sin t}{t^2}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt.$$

Последний же интеграл(как было доказано выше) сходится абсолютно при $2-\alpha>1$ $(\alpha<1)$ и условно при $0<2-\alpha\le 1$ $(1\le\alpha<2)$.

## *Числовые ряды.*

***Определение****. Числовым рядом называется бесконечная сумма*

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k .$$

*Числа* $a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots$ *называются членами ряда, а слагаемое* $a_n$ *- общим членом ряда.*

*Сумма первых* $n$ *членов ряда* $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ *называется* $n-$*й частичной суммой ряда.*

***Определение.*** *Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел* $S$ *последовательности его частичных сумм:*

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n .$$

*Число* $S$ *называется суммой ряда.*

*Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся.*

**Пример 1**. Ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ сходится.

Доказательство. $\triangleright$ Так как $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, то

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\triangleleft$$

**Пример 2**. Ряд $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится.

Доказательство. $\triangleright$ Если ряд сходится, то существует $S=\lim_{n\to\infty}S_n$. В таком случае $S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ и $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$, но $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Полученное противоречие завершает доказательство. $\triangleleft$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ называется *гармоническим.*

**Пример 3.** Ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ расходится.

Доказательство. $\triangleright$ Имеем $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ четное},\\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное}.\end{cases}$

Откуда мы видим, что предела у последовательности частичных сумм не существует. $\triangleleft$

**Пример 4**. Ряд $a+aq+aq^2+\ldots+aq^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}aq^k$ сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\ge 1$.

Доказательство. $\triangleright$ В самом деле, при $q\ne 1$ имеем $S_n=\frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$.

Если $|q|<1$, то $S=\sum_{k=0}^{\infty}aq^k=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}=\frac{a}{1-q}$.

Если $|q|>1$, то $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}=\infty$.

Если $q=-1$, то ряд расходится (пример 3). Если же $q=1$, то $S_n=n\to\infty$. $\triangleleft$

***Свойства сходящихся рядов.***

***Теорема**. Сходимость ряда останется прежней, если изменить конечное число его членов.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ - исходный ряд, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ - ряд, отличающийся от исходного конечным числом элементов, то есть существует такой номер $N$, что при всех $k\ge N$ будет $a_k=b_k$. Обозначим через $A_n$ и $B_n$ соответственно последовательности частичных сумм первого и второго рядов. Тогда при $n\ge N$ имеем

$$A_n - B_n = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k - b_k\right) = \sum_{k=1}^{N-1}\left(a_k - b_k\right) + \sum_{k=N}^{n}\left(a_k - b_k\right) = \sum_{k=1}^{N-1}\left(a_k - b_k\right) = C,$$

то есть частичные суммы отличаются лишь на константу. В таком случае обе последовательности (частичных сумм) сходятся или расходятся одновременно. $\triangleleft$

***Теорема.*** *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- два сходящихся ряда, и пусть* $A$ *и* $B$ *соответственно суммы этих рядов. Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda a_k + \mu b_k\right)$ *также сходится, а его сумма равна* $\lambda A + \mu B$.

Доказательство. $\triangleright$ Обозначим через $A_n$ и $B_n$ частичные суммы наших рядов. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda a_k + \mu b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lambda A_n + \mu B_n\right) = \lambda A + \mu B. \triangleleft$$

***Утверждение***. *Обратное неверно.*

**Пример 5**. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}$ расходятся, а их сумма сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k-1} + (-1)^{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

***Определение.*** *Ряд, полученный из исходного* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *отбрасыванием первых* $n$ *элементов, называется* $n$*-м остатком ряда:* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

***Утверждение.*** *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Доказательство. $\triangleright$ Ряд, определяющий остаток, сходится или расходится вместе с исходным рядом. Поэтому, если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то конечной последовательности $R_n$ просто не существует. Если же $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n.$$

А так как $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то $R_n$ - бесконечно малая последовательность. $\triangleleft$

## *Признаки сходимости числовых рядов.*

***Теорема (необходимый признак сходимости).*** *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. $\triangleright$ Поскольку ряд сходится, то существует $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = 0$. $\triangleleft$

Этот признак не является необходимым, что показывает пример гармонического ряда.

**Пример 6**. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k+1}$ расходится, поскольку $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

***Теорема (Критерий Коши сходимости числового ряда).*** *Числовой ряд* $\sum_{л=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n,m\to\infty}\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| = 0 .$$

Доказательство. $\triangleright$ Воспользуемся критерием Коши сходимости последовательности частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Последовательность $S_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n,m\to\infty}\left|S_m - S_n\right| = 0 ,$$

но при $m > n$ имеем

$$\left|S_m - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| . \triangleleft$$

## *Признаки сходимости знакопостоянных рядов.*

***Теорема (необходимый и достаточный признак сходимости ряда с положительными членами).*** *Ряд с положительными слагаемыми сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. $\triangleright$ Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными слагаемыми не убывает. Поэтому (по теореме Вейерштрасса) ее сходимость эквивалентна ее ограниченности. $\triangleleft$

***Теорема (сравнения).*** *Пусть для двух рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, *начиная с некоторого номера* $N$, *выполнено неравенство* $0 \le a_k \le b_k \quad (k \ge N)$. *Тогда:*

1) *из сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *;*
2) *из расходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *следует расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *.*

Доказательство. $\triangleright$ Заменим нулями первые $N$ элементов каждого из исходных рядов и обозначим через $A_n$ и $B_n$ частичные суммы полученных рядов.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то неубывающая последовательность $B_n$ ограничена $(0 \le B_n \le B)$. Тогда и для неубывающей последовательности $A_n$ будет справедливо $0 \le A_n \le B_n \le B$, то есть она тоже ограничена, а, следовательно, сходится.

Пусть теперь ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. Если бы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходился, то по предыдущей части теоремы сходился бы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, что неверно. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится. $\triangleleft$

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\sin kx}{2^k}$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\sin kx}{k}$ расходится. В самом деле, $0 \le \frac{2+\sin kx}{2^k} \le \frac{3}{2^k}$, а $\frac{2+\sin kx}{k} \ge \frac{1}{k}$.

***Теорема*** *(предельная теорема сравнения). Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *- ряды с положительными членами, и пусть существует конечный положительный предел*

$$C = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \quad (0 < C < \infty).$$

*Тогда ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

(*Такие ряды называются равносходящимися).*

Доказательство. $\triangleright$ Начиная с некоторого номера $N$ будет выполнено неравенство $\frac{C}{2} \le \frac{a_k}{b_k} \le \frac{3C}{2}$.

Тогда при $k \ge N$ имеем $\frac{C}{2} b_k \le a_k \le \frac{3C}{2} b_k$. Далее применяем предыдущую теорему. $\triangleleft$

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ расходится.

В самом деле, $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$ при $k \to \infty$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится.

Ряд же $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ является равносходящимся с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

***Теорема (признак Даламбера)****. Если* $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ *, то при* $q < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $q > 1$ *расходится, причем в последнем случае* $a_k \not\to 0$ $(k \to \infty)$.

Доказательство. $\triangleright$ Так как $q \ne 1$, то $q = 1 \pm \delta$, где $\delta > 0$. Тогда, начиная с некоторого номера $N$, будет выполнено неравенство

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - q \right| < \frac{\delta}{2} \Leftrightarrow q - \frac{\delta}{2} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < q + \frac{\delta}{2}.$$

Если $q = 1 - \delta$ ($\delta \in (0,1)$, поскольку $q > 0$), то воспользовавшись правым неравенством, при $k \ge N$ получим:

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 - \delta + \frac{\delta}{2} \Leftrightarrow 0 < a_{k+1} < a_k \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Положим $p = 1 - \frac{\delta}{2}$, тогда

$$a_{N+1} < a_N p, \quad a_{N+2} < a_{N+1} p < a_N p^2, \ \ldots, \ a_{N+m} < a_N p^m \Leftrightarrow \{N + m = k\} \Leftrightarrow a_k < a_N p^{k-N}.$$

Обозначив $\lambda = \frac{a_N}{p^N}$, видим, что начиная с номера $N$, общий член ряда $a_k$ не превосходит $\lambda p^k$ - общего члена сходящейся геометрической прогрессии, поэтому исходный ряд сходится.

Если $q = 1 + \delta$, то (из левого неравенства)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 + \delta - \frac{\delta}{2} \Rightarrow a_{k+1} > a_k \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \Rightarrow 0 < a_k < a_{k+1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k \ne 0,$$

то есть ряд расходится. $\triangleleft$

**Пример**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^{100}}{2^k}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{100^k}$ расходится.

Доказательство. $\triangleright$ Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{100}2^k}{2^{k+1}k^{100}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{100}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!100^k}{100^{k+1}k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{100}=\infty>1.\triangleleft$$

***Замечание***. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$, *то ничего о сходимости этого ряда сказать нельзя.*

**Пример**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, но

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}=1 \text{ и } \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1.$$

***Теорема (радикальный признак Коши)***. *Если* $a_k>0$ $(k=1,2,\ldots)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=q$, *то при* $q<1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходится, а при* $q>1$ *расходится, причем в последнем случае* $a_k\nrightarrow 0$ $(k\to\infty)$.

Доказательство. $\triangleright$ Так как $q\neq 1$, то $q=1\pm\delta$, где $\delta>0$. Тогда, начиная с некоторого номера $N$, будет выполнено

$$\left|\sqrt[k]{a_k}-q\right|<\frac{\delta}{2}\Leftrightarrow q-\frac{\delta}{2}<\sqrt[k]{a_k}<q+\frac{\delta}{2}\Leftrightarrow\left(q-\frac{\delta}{2}\right)^k<a_k<\left(q+\frac{\delta}{2}\right)^k.$$

Если $q=1-\delta$, то, учитывая, что $\delta\in(0,1)$, воспользуемся правым неравенством

$$a_k<\left(1-\delta+\frac{\delta}{2}\right)^k=\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k$ сходится, следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$.

Если $q=1+\delta$, то (левое неравенство)

$$a_k>\left(1+\delta-\frac{\delta}{2}\right)^k=\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^k\to\infty\quad(k\to\infty).$$

То есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится по достаточному признаку расходимости. $\triangleleft$

**Пример.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{k(k-1)}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k^2}}{k^k}$ расходится.

Доказательство. $\triangleright$ Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{k(k-1)}}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}=\frac{1}{e}<1,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{2^{k^2}}{k^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{k}=\infty>1.\triangleleft$$

***Замечание.*** *Если* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a^k}=1$, *то ничего о сходимости этого ряда сказать нельзя.*

**Пример**. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, но

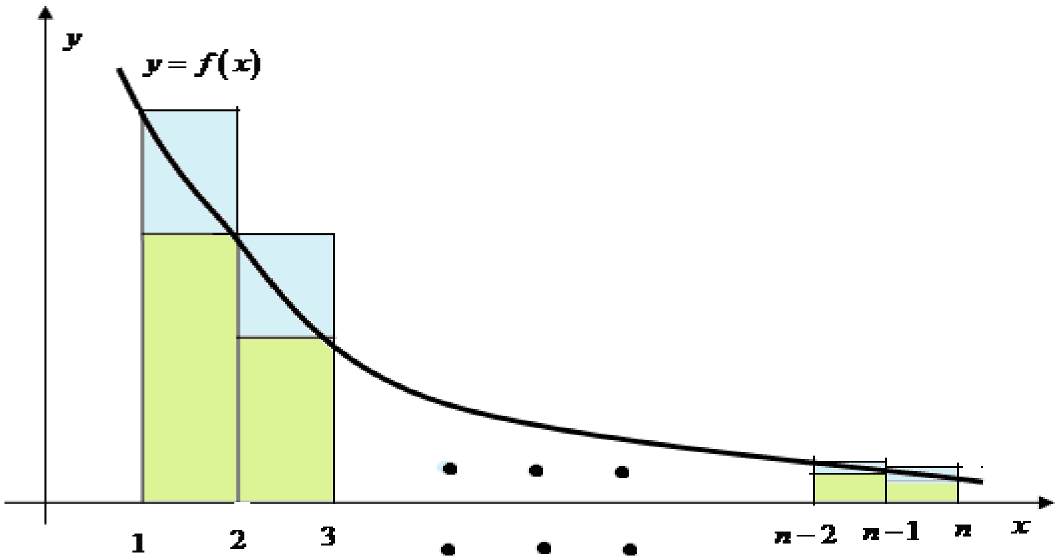
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}e^{-\frac{1}{k}\ln k}=e^0=1, \text{ аналогично, } \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k(k+1)}}=1.$$

***Теорема (интегральный признак Коши).*** *Если $f(x)$ - неотрицательная невозрастающая функция, определенная на полуоси $x\geq 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty}f(x)dx$.*

Доказательство. $\triangleright$ Из монотонности функции $f(x)$ $\left(f(k+1)\leq f(x)\leq f(k),\quad x\in[k,k+1]\right)$ и теоремы об оценке определенного интеграла вытекает, что

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k),$$

это хорошо это заметно на картинке:




Воспользуемся свойством аддитивности определенного интеграла:

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)\leq\int_1^n f(x)dx\leq\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

То есть для частичных сумм ряда: $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$ получаем оценку (в обозначениях $a_k=f(k)$)

$$S_n-a_1\leq\int_1^n f(x)dx\leq S_n-a_n$$

или

$$\int_1^n f(x)dx+a_n\leq S_n\leq\int_1^n f(x)dx+a_1.$$

Так как функция $f(x)$ монотонна и ограничена, то существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}f(n)$. Поэтому из последней оценки вытекает, что у неубывающей последовательности $S_n$ конечный предел существует тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. ◁

Применим этот признак к исследованию сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$.

Сходимость такого ряда эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, а нам известно, что при $\alpha > 1$ такие интегралы сходятся, а при $\alpha \le 1$ расходятся.

## *Абсолютная сходимость ряда.*

***Определение.*** *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$.

***Теорема.*** *Из абсолютной сходимости следует и сходимость исходного ряда.*

Доказательство. ▷ В самом деле, в случае абсолютной сходимости выполнено условие Коши:

$$\lim_{n,m\to\infty}\sum_{k=n}^{m}|a_k| = 0.$$

Но тогда условие Коши будет выполнено и для исходного ряда, поскольку

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m}|a_k|. \lhd$$

***Определение.*** *Если ряд сходится, но не абсолютно, то он называется условно сходящимся.*

**Пример**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ условно.

Доказательство. Применим к первому ряду признак сравнения: $\left|\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится.

Рассмотрим последовательность частичных сумм второго ряда:

$$S_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2n(2n-1)}.$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}$ совпадает со сходимостью (предельный признак сравнения) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, а этот ряд сходится. Поэтому существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$.

Поскольку же $\lim\limits_{n\to\infty}|S_{2n+1}-S_{2n}| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$, то существует и общий предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Ряд же из абсолютных величин - $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ (гармонический) расходится.

***Теорема***. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k$*, полученный из исходного перестановкой его слагаемых, также будет сходиться, причем* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

***Лемма***. *Если* $a_k \ge 0$ $(k=1,2,...)$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$ *, полученный из исходного перестановкой его слагаемых, также будет сходиться, причем* $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. Пусть $S$ - сумма исходного ряда, а $n_k$ - номер элемента $a_k$ в последовательности $\{\tilde{a}_k\}$. Так как исходный ряд сходится, то последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ будет ограничена сверху $S$. Рассмотрим частичную сумму переставленного ряда $\tilde{S}_m = \sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k$. Положим $n = \max_{1 \le k \le m} n_k$, тогда

$$\tilde{S}_m \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le S \Rightarrow \tilde{S}_m \le S .$$

То есть неубывающая последовательность $\tilde{S}_m$ сходится, а ее предел (сумма переставленного ряда) $\tilde{S} \le S$.

В свою очередь исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ мы можем рассматривать как перестановку ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$, но тогда $S \le \tilde{S}$. Это означает, что $S = \tilde{S}$.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = S$. Рассмотрим две последовательности:

$$\{a_k^+\} = \frac{1}{2}\left(\{|a_k|\} + \{a_k\}\right) \text{ и } \{a_k^-\} = \frac{1}{2}\left(\{|a_k|\} - \{a_k\}\right).$$

Так как $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k^{\pm}\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ - сходящиеся, пусть их суммы соответственно $S^+$ и $S^-$. Тогда $S = S^+ - S^-$.

Возьмем перестановку $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$ исходного ряда и построим по ней $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k^-$. Из леммы вытекает, что $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k^+ = S^+$ а $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k^- = S^-$. Поэтому переставленный ряд сходится, и $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k = S$.

***Теорема (Римана).*** *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится условно, то для любого числа* $S$ *найдется такая перестановка* $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$ *исходного ряда, что* $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k = S$. *Слагаемые также можно переставить так, чтобы полученный ряд расходился.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\{a_k^+\} = \frac{1}{2}\left(\{|a_k|\} + \{a_k\}\right) \text{ и } \{a_k^-\} = \frac{1}{2}\left(\{|a_k|\} - \{a_k\}\right).$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k\to\infty} a_k^{\pm} = 0$. Кроме того, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+\right), \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- .$$

Видим, что если сходится один из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$, то сходится и другой, а значит, и ряд из модулей, что неверно. Поэтому оба вспомогательных ряда расходятся, и их суммы неограниченно возрастают.

Рассмотрим случай $S = 0$.

Положим $n_1 = 1, \qquad S_{n_1} = a_1^+ \geq 0$. Будем последовательно вычитать элементы последовательности $\{a_k^-\}$, пока (в первый раз) не получим $S_{n_2} < 0$, далее будем прибавлять неиспользованные элементы из $\{a_k^+\}$, пока (в первый раз) не получим $S_{n_3} \geq 0$, потом снова начнем вычитать и т.д.. Пусть $a_{m_i}^+$ - последний прибавленный элемент в сумме $S_{n_{2i+1}}$, а $a_{l_i}^-$ - последний, который мы вычли при построении $S_{n_{2i}}$. Очевидно, что

$$0 \leq S_{n_{2i+1}} < a_{m_i}^+ , \qquad \left|S_{n_{2i}}\right| \leq a_{l_i}^- \quad \left(S_{n_{2i}} < 0\right) \text{ и } S_{n_{2i}} < S_j < S_{n_{2i+1}} \text{ при } n_{2i} < j < n_{2i+1}.$$

Поскольку же $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^{\pm} = 0$, то и $\lim\limits_{j\to\infty} S_j = 0$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить любую сумму. Если же следить за тем, чтобы $\left|S_{n_j}\right| \geq 1$, то получим расходящийся ряд.

## *Признаки сходимости знакопеременных рядов.*

***Теорема (признаки Коши и Даламбера).*** *Пусть дан ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и пусть существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|}$ *или* $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$*, равный* $q$*. Тогда если* $q < 1$*, то ряд сходится абсолютно, а если* $q > 1$*, то расходится.*

Доказательство. ▹ Если $q < 1$, то ряд из модулей сходится по признаку Коши или Даламбера для знакопостоянных рядов, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. Если же $q > 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| \neq 0$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится ◃

***Теорема (признак Лейбница).*** *Если последовательность* $a_k$ *членов знакочередующегося ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *монотонно убывает к нулю (* $a_k \geq a_{k+1} \quad (k \geq 1)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$*), то ряд сходится, а для его остатка* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *справедлива оценка*

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Доказательство. ▹ Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами. Видим, что

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = (-1)^{2n} a_{2n+1} + (-1)^{2n+1} a_{2n+2} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

то есть последовательность $S_{2n}$ - неубывающая. В частности, имеем $S_{2n} \geq S_2$.

Для частичных сумм с нечетными номерами имеем

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} a_k = (-1)^{2n-1} a_{2n} + (-1)^{2n} a_{2n+1} = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0,$$

поэтому последовательность $S_{2n+1}$ - невозрастающая, и $S_{2n+1} \le S_1$.

Имеем далее

$$S_1 \ge S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n} a_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \ge S_{2n} \ge S_2,$$

то есть

$$S_1 \ge S_{2n+1} \ge S_2 \qquad \text{и} \qquad S_1 \ge S_{2n} \ge S_2.$$

По теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности существуют пределы

$$S^* = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \quad \left(S_{2n} \le S^*\right) \text{ и } S_* = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} \quad \left(S_* \le S_{2n+1}\right).$$

Поскольку же

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n+1} - S_{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$

то эти пределы равны: $S^* = S_* = S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ . Причем для любых натуральных $n$ и $m$ будет справедливо $S_{2n} \le S \le S_{2m+1}$. Поэтому

$$\left|R_{2n}\right| = \left|S - S_{2n}\right| = S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n} a_{2n+1} = a_{2n+1},$$

$$\left|R_{2n-1}\right| = \left|S_{2n-1} - S\right| = S_{2n-1} - S \le S_{2n-1} - S_{2n} = -(-1)^{2n-1} a_{2n} = a_{2n},$$

то есть и для четных, и для нечетных номеров выполняется неравенство

$$\left|R_n\right| \le a_{n+1}. \lhd$$

***Замечание.*** *Поскольку сходимость ряда не измениться, если заменить или отбросить конечное число его элементов, то знакочередующийся ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad (a_k \ge 0)$ *при* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *будет сходиться, даже если последовательность* $a_k$ *будет монотонной лишь начиная с некоторого номера.*

**Пример**. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+k+9}$ сходится.

Доказательство. $\rhd$ Очевидно, что $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2+k+9} = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{x}{x^2+x+9}$. Ее производная $\varphi'(x) = \frac{x^2+x+9-x(2x+1)}{\left(x^2+x+9\right)^2} = \frac{-x^2+9}{\left(x^2+x+9\right)^2} < 0$ при $x > 3$, поэтому последовательность $\frac{k}{k^2+k+9}$ монотонно убывает, начиная с третьего номера.

Ряд сходится по признаку Лейбница. $\lhd$

***Преобразование Абеля.***

Рассмотрим сумму $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k$. Пусть $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (n \ge 1)$, при этом положим $B_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} \left(B_k - B_{k-1}\right) a_k = \sum_{k=m}^{n} B_k a_k - \sum_{k=m}^{n} B_{k-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} B_k a_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} B_k a_{k+1} =$$

$$= B_n a_n - B_{m-1} a_m + \sum_{k=m}^{n-1} B_k \left(a_k - a_{k+1}\right).$$

***Преобразованием Абеля называется следующая формула:***

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = B_n a_n - B_{m-1} a_m + \sum_{k=m}^{n-1} B_k \left(a_k - a_{k+1}\right).$$

Эта формула является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям для определенных интегралов. Если $m=1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = B_n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k \left(a_{k+1} - a_k\right).$$

***Теорема (признак Дирихле).*** *Если частичные суммы* $B_n$ *ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *ограничены в совокупности* $\left(\left|B_n\right| \le M\right)$, *а числа* $a_k$ *образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. $\triangleright$ Проверим для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ справедливость критерия Коши:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| = \left|B_n a_n - B_{m-1} a_m + \sum_{k=m}^{n-1} B_k \left(a_k - a_{k+1}\right)\right| \le M\left(\left|a_n\right| + \left|a_m\right| + \sum_{k=m}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right|\right) =$$

$$= M\left(\left|a_n\right| + \left|a_m\right| + \left|a_m - a_n\right|\right) \le 2M\left(\left|a_n\right| + \left|a_m\right|\right) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и следовательно, ряд сходится.

***Замечание.*** *Часть теоремы о признаке Лейбница, касающаяся собственно сходимости ряда, является следствием признака Дирихле.*

Действительно, в условиях теоремы Лейбница $b_k = (-1)^k \ \left(k \ge 0\right)$, $B_{2n} = 1$, $B_{2n+1} = 0 \ \left(n \ge 0\right)$, то есть последовательность частичных сумм $B_n$ ограничена, а $a_k$ монотонно стремится к нулю.

**Пример**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kt}{k} \ \left(t \ne 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}\right)$ сходится.

Доказательство. $\triangleright$ Последовательность $a_k = \dfrac{1}{k}$ монотонно стремится к нулю.

Покажем, что последовательность частичных сумм $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt$ ограничена. Для этого помножим и разделим нашу сумму на $\sin\dfrac{t}{2}$:

$$\left|\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt\right| = \left|\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}\cdot\cos t + \sin\frac{t}{2}\cdot\cos 2t + \ldots + \sin\frac{t}{2}\cdot\cos nt\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{2}\left(\cancel{\sin\frac{3t}{2}} - \sin\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\sin\frac{5t}{2}} - \cancel{\sin\frac{3t}{2}}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)t}{2} - \cancel{\sin\frac{(2n-1)t}{2}}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{(2n+1)t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)\right| = \left|\frac{\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|} < \infty. \triangleleft$$

***Задача***. Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kt}{k}$ сходится на всей числовой оси.

(Указание: $\sin 2\pi n = 0$, а при $t \ne 2\pi n$ примените метод из предыдущего доказательства.)