Билет 12:Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенстве (в двух неравенствах) для последовательностей. Докажите одну из них.

Переход к пределу в неравенствах

Теорема (о предельном переходе в неравенстве). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *, и пусть* $a_n \le b_n$*, по крайней мере, начиная с некоторого номера* $(n \ge n_0)$*. Тогда* $a \le b$*.*

Доказательство. ►Рассмотрим последовательность $\{c_n\} = \{b_n - a_n\}$. Эта последовательность сходящаяся $\left(\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c = b - a\right)$, кроме того, $c_n \ge 0$ при $(n \ge n_0)$. Покажем, что $c \ge 0$.

Предположим, что $c < 0$. Тогда возьмем $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ и выберем номер N такой, что при $n > N$

$$|c_n - c| < \frac{|c|}{2}, \text{ то есть } \begin{cases} c_n < c + \frac{|c|}{2} \\ c_n > c - \frac{|c|}{2} \end{cases}.$$

Но в таком случае, при $n > \max\{N, n_0\}$ будет (мы используем только верхнее неравенство) $c_n < c + \frac{|c|}{2} < 0$. Мы пришли к противоречию. следовательно $c \ge 0$.◄

Теорема (о предельном переходе в двух неравенствах). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$*, и пусть* $a_n \le c_n \le b_n$*, по крайней мере, начиная с некоторого номера* $(n \ge n_0)$*.*

Тогда последовательность $\{c_n\}$ *сходится и* $\lim c_n = a$*.*

Доказательство. ►Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы, после некоторого номера N_1, элементы последовательности $\{a_n\}$ будут находиться в $O_\varepsilon(a)$, а, после номера N_2, в той же окрестности будут находиться все члены последовательности $\{b_n\}$. Тогда для номеров $n > N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$ элемент последовательности $\{c_n\}$, находясь между a_n и b_n, тоже попадет в $O_\varepsilon(a)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.◄