Билет 8: Дайте определение бесконечно малых и бесконечно больших функций и последовательностей. Приведите примеры. Как связаны бесконечно малые и бесконечно большие? Докажите теоремы о сумме бесконечно малых и произведении бесконечно малой на ограниченную.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции и последовательности

Определение. *Функция* $y=\alpha(x)$ *называется бесконечно малой при* $x\to a$, *если* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Непосредственно из определений предела функции вытекает, что

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$ функция.

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно записать «в неравенствах» определение того, что $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-A\right)=0$.

Пример. Функция $y=x^3$ - бесконечно малая при $x\to 0$. Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}x^3=0:=\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(0<|x|<\delta\Rightarrow\left|x^3\right|<\varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|x^3\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|x|<\sqrt[3]{\varepsilon}\Leftarrow 0<|x|<\delta, \text{ если } \delta=\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Пример. Функция $y=\dfrac{1}{x^3}$ - бесконечно малая при $x\to\infty$. Доказательство.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0:=\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(|x|>\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x^3}\right|<\varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|\frac{1}{x^3}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\sqrt[3]{\varepsilon}\Leftarrow|x|>\delta, \text{ если } \delta=\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Определение. *Последовательность* $\{\alpha_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

Так же, как и для предела функции $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow x_n=A+\alpha_n$, где α_n - б.м.

$\left\{e^{-n}\right\}$ - бесконечно малая последовательность. Доказательство.

$$\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0=:\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\left(n>N\Rightarrow\left|e^{-n}\right|<\varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|e^{-n}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow e^{-n}<\varepsilon\Leftrightarrow -n<\ln\varepsilon\Leftrightarrow n>\ln\frac{1}{\varepsilon}\Leftarrow n>N, \text{ если } N=\max\left\{1;\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Определение. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Пример. Функция $y=$ x^3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty:=\forall\varepsilon>0\exists\delta\left(0<|x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x^3}\right|>\varepsilon\right).$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|\frac{1}{x^3}\right|>\varepsilon\Leftrightarrow 0<\left|x^3\right|<\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow 0<|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Leftarrow 0<|x|<\delta, \text{ если } \delta=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}.$$

Пример. Функция $y = x^3$ - бесконечно большая при $x \to \infty$. Доказательство:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \left(\left| x \right| > \delta \Rightarrow \leq \left| x^3 \right| > \varepsilon \right).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\left| x^3 \right| > \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \left| x \right| > \sqrt[3]{\varepsilon} \Leftarrow \left| x \right| > \delta, \text{ если } \delta = \sqrt[3]{\varepsilon} .$$

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой, если* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Пример. $\{e^n\}$ - бесконечно большая последовательность. Доказательство.

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = \infty =: \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \left(n > N \Rightarrow \left| e^n \right| > \varepsilon \right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\left| e^n \right| > \varepsilon \Leftrightarrow n > \ln \varepsilon \Leftarrow n > N, \text{ если } N = \max\{1; [\ln \varepsilon]\}.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей

Произведением двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ будем называть последовательность $\{c_n\}$ с элементами $c_n = a_n b_n$.

Теорема. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. ▶ Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{b_n\}$ - ограниченная, то есть

$$\exists C: \forall n \quad \text{будет верно } \left| b_n \right| \leq C .$$

Покажем, что последовательность $\{\alpha_n b_n\}$ является бесконечно малой, то есть, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N \quad \text{будет справедливо } \left| b_n \alpha_n \right| < \varepsilon .$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{C}$ Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то найдется такой номер N, после которого $\left| \alpha_n \right| < \varepsilon_1$, но тогда при $n > N$ будет верно и $\left| b_n \alpha_n \right| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$. ◀

Следствие. *Произведение бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. ▷ Бесконечно малая последовательность – сходящаяся и, следовательно, ограниченная. Далее к произведению применим предыдущую теорему. ◁

Теорема. *Сумма бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. ▶ Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Покажем, что последовательность $\{\gamma_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$ также является бесконечно малой.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ из определения бесконечно малых вытекает, что

$$\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N_1 \quad \left(\left| \alpha_n \right| < \varepsilon_1 \right) \right)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N_2 \quad \left(\left| \beta_n \right| < \varepsilon_1 \right) \right)$$

Тогда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ будут выполнены оба эти неравенства, и мы получим

$$\forall n > N \left(\left(\left| \alpha_n \right| < \varepsilon_1 \right) \wedge \left(\left| \beta_n \right| < \varepsilon_1 \right) \right) \Rightarrow \left| \gamma_n \right| = \left| \alpha_n + \beta_n \right| \leq \left| \alpha_n \right| + \left| \beta_n \right| < \varepsilon . \text{ ◀}$$