Билет 10: Сформулируйте теоремы о пределе суммы, произведения и частного сходящихся последовательностей. Докажите две из них.

Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда последовательность* $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$ *также будет сходящейся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a + b$.

Доказательство. ►Из условия теоремы вытекает, что $a_n = a + \alpha_n$, а $b_n = b + \beta_n$ $(n \in \mathbf{N})$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$c_n - (a+b) = (a + \alpha_n + b + \beta_n) - (a+b) = \alpha_n + \beta_n = \gamma_n,$$

причем γ_n - бесконечно малая последовательность (как сумма бесконечно малых).◄

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда последовательность* $\{c_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ *также будет сходящейся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \cdot b$.

Доказательство. ►Из условия теоремы вытекает, что $a_n = a + \alpha_n$, а $b_n = b + \beta_n$ $(n \in \mathbf{N})$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$c_n - (a \cdot b) = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab = \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n = \gamma_n.$$

Последовательности $\alpha_n b,\ \beta_n a,\ \alpha_n \beta_n$ бесконечно малые как произведение бесконечно малой на ограниченную и произведение бесконечно малых последовательностей. Тогда $\{\gamma_n\}$ бесконечно малая как сумма бесконечно малых..◄

Теорема*. Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ $(b \neq 0)$. *Тогда последовательность* $\{c_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ *также будет сходящейся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство см. в лекциях: 1 модуль (PDF), с. 19