Билет 22: Докажите теорему о нуле непрерывной функции. Докажите теорему Коши о промежуточном значении для непрерывной функции.

Теорема Коши о промежуточном значении

Теорема (о нуле непрерывной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и принимает на концах отрезка значения разных знаков* $(f(a)\cdot f(b)<0)$.

Тогда существует точка $c\in(a,b)$, *в которой* $f(c)=0$.

Доказательство. ►Предположим для определенности, что $f(a)<0, f(b)>0$. Построим систему стягивающихся отрезков $\{[a_n,b_n]\}$. Положим

$$a_0=a,\ b_0=b.$$

Пусть c_0 - середина отрезка $[a_0,b_0]$. Если $f(c_0)=0$, то положим $c=c_0$ - процесс завершен. Если нет, то в качестве $[a_1,b_1]$ выберем ту половину отрезка, на которой функция меняет знак:

$$\text{если } f(c_0)>0, \text{ то } a_1=a_0,\ b_1=c_0;$$

$$\text{если } f(c_0)<0, \text{ то } a_1=c_0,\ b_1=b_0.$$

Аналогично определяем отрезок $[a_2,b_2]$ по $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$:

$$\text{если } f(c_1)>0, \text{ то } a_2=a_1,\ b_2=c_1;$$

$$\text{если } f(c_1)<0, \text{ то } a_2=c_1,\ b_2=b_1,$$

и так далее. Если процесс оборвется на некотором шаге, то мы сразу определим нужную точку c, если нет, то мы получим систему отрезков

$$[a_0,b_0]\subset[a_1,b_1]\subset\ldots;\ \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

По лемме о вложенных отрезках существует точка c такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Из непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$.

Переходя к пределу в неравенствах $\begin{cases}f(a_n)<0\\ f(b_n)>0\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}$, получим $\begin{cases}f(c)\le 0\\ f(c)\ge 0\end{cases}$,

то есть $f(c)=0$.

Случай $f(a)>0,\ f(b)<0$ разбирается аналогично.◄

Теорема (о промежуточном значении). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(a)\ne f(b)$.

Тогда каждое число d, *принадлежащее интервалу с концами в точках* $f(a)$ *и* $f(b)$ *является значением функции хотя бы в одной точке* $c\in[a,b]$, *то есть* $f(c)=d$.

Доказательство. ►Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-d$. Очевидно, что $g(a)\cdot g(b)<0$ и $g(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда по предыдущей теореме существует точка $c\in[a,b]$: $g(c)=0$, откуда получаем $f(c)=d$.◄

Замечание. Требование непрерывности функции в последних теоремах существенно.

Примером, иллюстрирующим этот факт, может служить функция $f(x)=\operatorname{sgn}x$, определенная на отрезке $[-1;1]$ и не принимающая значения $\dfrac{1}{2}\in(-1,1)=(\operatorname{sgn}(-1),\operatorname{sgn}(1))$.