## *Кривые в пространстве* $\mathbf{R}^3$

Кривая $(\Gamma)\subset\mathbf{R}^3$, заданная векторным уравнением $(\Gamma)=\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$, называется гладкой, если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и $\mathbf{r}'(t)\ne 0$ при $t\in[\alpha,\beta]$. В каждой точке $\mathbf{r}(t_0)$ $(\alpha\le t_0\le\beta)$ кривая $(\Gamma)$ имеет касательную прямую $(L)=\{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{r}'(t_0)t\}$.

Если $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, то в параметрической форме кривая задается следующим образом:

$$(\Gamma)=\{x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\le t\le\beta\},$$

где $x(t),\ y(t),\ z(t)$ непрерывно дифференцируемы, и $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\ne 0$ на $[\alpha,\beta]$.

Прямая $(L)=\{x=x(t_0)+x'(t_0)t,\ y=y(t_0)+y'(t_0)t,\ z=z(t_0)+z'(t_0)t\}$ будет касательной к $(\Gamma)$ в точке $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$.

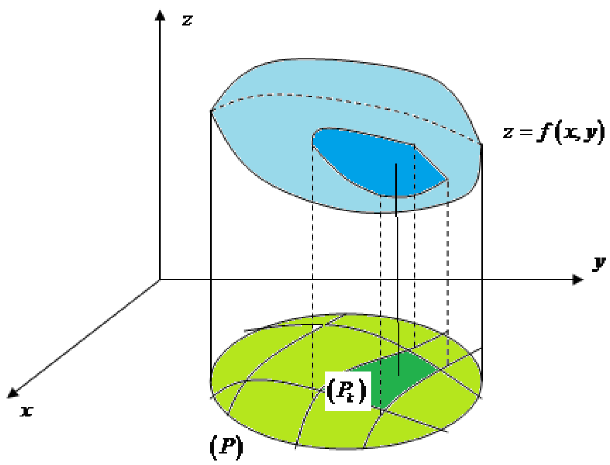
Говорят, что кривая $(\Gamma)$ разбита на кривые $(\Gamma_k)$ $(k=1,\dots,n)$ или составлена из кривых $(\Gamma_k)$ $(k=1,\dots,n)$, если $(\Gamma)=\bigcup_{k=1}^{n}(\Gamma_k)$, и конец кривой $(\Gamma_k)$ является началом кривой $(\Gamma_{k+1})$ $(k=1,\dots,k-1)$. Последний факт записывают как $(\Gamma)=(\Gamma_1)(\Gamma_2)\dots(\Gamma_n)$.

Если $(\Gamma)=(\Gamma_1)(\Gamma_2)\dots(\Gamma_n)$, где все $(\Gamma_k)$ $(k=1,\dots,n)$ гладкие, то она называется кусочно гладкой.

Точку $A=\mathbf{r}(\alpha)$ будем называть началом кривой $(\Gamma)$, а точку $B=\mathbf{r}(\beta)$ ее концом. Уравнение $\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(\beta+\alpha-t),\ \alpha\le t\le\beta\}$ задает в пространстве кривую, которая проходится в противоположном направлении, - ее начало в точке $B$, А конец – в $A$. Эту кривую будем называть ориентированной противоположно кривой $(\Gamma)$ и обозначать $(\Gamma^-)$.

## ***Двойные интегралы***

### ***Определение и основные свойства***




***Определение.*** *Пусть в области* $(P)$ *определена функция* $f(x,y)$. *Разобьем область* $(P)$ *сетью гладких кривых на конечное число областей* $(P_1),(P_2),\dots,(P_n)$. *Возьмем произвольно в каждой области* $(P_k)$ *по точке* $(x_k,y_k)$. *Обозначим через* $P_k$ *площадь фигуры* $(P_k)$, *а через* $\lambda$ *наибольший из диаметров частичных областей* $(P_k)$ *(диаметром точечного множества называется верхняя грань расстояний между двумя произвольными точками множества). Сумму*

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot P_k\ .$$

*будем называть интегральной суммой для функции* $f(x,y)$ *в области* $(P)$. *Конечный предел* $I$ *интегральных сумм при* $\lambda \to 0$ *называется двойным интегралом функции* $f(x,y)$ *в области* $(P)$ *и обозначается символом*

$$I = \iint_{(P)} f(x,y)\,dP. \qquad (1)$$

*Функция, имеющая интеграл, называется интегрируемой в* $(P)$.

Геометрический смысл двойного интеграла (1) от неотрицательной функции – это объем тела, ограниченного снизу – плоской фигурой $(P) \subset xOy$, сверху – поверхностью $z = f(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $z$.

***Условия существования двойного интеграла.***

Как и в случае функции одной переменной введем понятия верхней и нижней сумм Дарбу:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k P_k, \quad S = \sum_{k=1}^{n} M_k P_k,$$

где $m_k = \inf\limits_{(x,y)\in P_k} f(x,y)$, $M_k = \sup\limits_{(x,y)\in P_k} f(x,y)$.

Очевидно, что $s \le \sigma \le S$.

Для сумм Дарбу, как и в одномерном случае справедливы следующие свойства:

1. *С добавлением новых линий деления, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя – не возрастает.*
2. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому способу разложения области* $(P)$.

А также справедлива теорема:

*Теорема. Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было* $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$, *или*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_k \omega_k P_k = 0, \qquad (2)$$

*где* $\omega_k = M_k - m_k$ *- колебание функции* $f(x,y)$ *в области* $(P_k)$.

Доказательство проводится аналогично одномерному случаю с учетом, что при двух измерениях надо говорить не о точках, а о линиях деления.

*Интегрируемая функция ограничена.* Действительно, в противном случае при любом заданном способе разложения области $(P)$ на части можно было бы за счет выбора точек $(x_k, y_k)$ сделать интегральную сумму произвольно большой.

При этом *не всякая ограниченная функция интегрируема*. Примером может служить заданная на единичном квадрате функция $f(x,y) = D(x)D(y)$, где $D(x)$ - функция Дирихле (равная 1 в рациональных и 0 в иррациональных точках).

**Теорема. Всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области $(P)$ функция $f(x,y)$ интегрируема.**

Доказательство. $\triangleright$ Если функция непрерывна в $(P)$, то по свойству равномерной непрерывности каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что в любой части области $(P)$ с диаметром, меньшим чем $\delta$, колебание функции будет меньше, чем $\varepsilon$. Рассмотрим разбиение области $(P)$ с $\lambda < \delta$. Тогда все колебания $\omega_k < \varepsilon$, и

$$\sum_k \omega_k P_k < \varepsilon \sum_k P_k = \varepsilon P ,$$

откуда следует выполнение условия (2). $\triangleleft$

***Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов.***

***Аддитивность.***

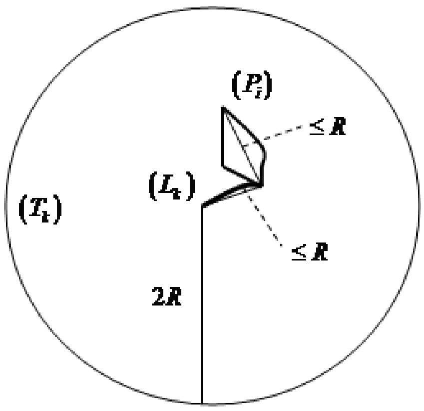
**Лемма. Пусть в области $(P)$ задана гладкая кривая $(L)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, лишь только область $(P)$ разложена на части с диаметрами, меньшими $\delta$, сумма площадей тех из них, которые имеют с $(L)$ общие точки, будет меньше $\varepsilon$.**

Доказательство. $\triangleright$ Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Гладкую кривую $(L)$ можно задать параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$. Непрерывные функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ ограничены на $[\alpha, \beta]$, то есть существуют такие $A$ и $B$, что $|\varphi'(t)| \le A$ и $|\psi'(t)| \le B$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на $n$ равных частей точками $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $(t_0 = \alpha,\ t_n = \beta)$, им соответствуют точки $(x_k, y_k) = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ кривой $(L)$. Обозначим через $(L_k)$ части кривой $(L)$, расположенные между точками $(x_k, y_k)$ и $(x_{k+1}, y_{k+1})$ $(k = 0,\ldots,n-1)$. Для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ расстояние между точками $(x_k, y_k)$ и $(\varphi(t), \psi(t))$ равное $\Delta\rho = \sqrt{\Delta\varphi^2 + \Delta\psi^2}$ не превосходит (теорема Лагранжа)

$$\Delta\rho \le \sqrt{A^2 + B^2}\,\Delta t_k = M\,\Delta t_k = M\,\frac{(\beta - \alpha)}{n}.$$




Последняя оценка означает, что вся дуга $(L_k)$ лежит в круге с центром в точке $(x_k, y_k)$ и радиусом $R = \dfrac{M(\beta - \alpha)}{n}$. Обозначим через $(T_k)$ круг с центром в $(x_k, y_k)$ и радиусом $2R$. Из предыдущих рассуждений видно, что расстояние между любой точкой дуги $(L_k)$ и границей $(T_k)$ больше $R$. Вся кривая $(L)$, соответственно, лежит в объединении $(T) = \bigcup_k (T_k)$, причем расстояние между любой точкой $(L)$ и границей множества $(T)$ больше $R$. Оценим площадь множества $(T)$:

$$T \le \sum_k T_k = 4n\pi \left( \frac{M(\beta - \alpha)}{n} \right)^2 = \frac{4\pi M^2 (\beta - \alpha)^2}{n}.$$

Эта площадь будет меньше $\varepsilon$ для достаточно большого $n$. Тогда, если мы возьмем разбиение $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$ с параметром $\lambda < R$, то все части $(P_i)$, имеющие общие точки с $(L)$, будут содержаться в $(T)$, а, значит, площадь их объединения не превзойдет площади $(T)$ и будет меньше $\varepsilon$.

**Теорема. Если область $(P)$, в которой задана функция $f(x, y)$ кусочно-гладкой кривой разложена на две области $(P')$ и $(P'')$, то из интегрируемости**

**функции во всей области $(P)$ следует ее интегрируемость на частях, и обратно – из интегрируемости функции в обеих областях $(P')$ и $(P'')$ вытекает интегрируемость в $(P)$. При этом**

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP = \iint\limits_{(P')} f(x,y)\,dP + \iint\limits_{(P'')} f(x,y)\,dP.$$

Доказательство. ▷ Рассмотрим произвольное разложение области $(P)$. Присоединив к линиям деления кривую $(L)$, получим новое разложение, параметр которого $\lambda$ не будет больше, чем у исходного разложения. Пусть $(P_1),(P_2),\dots,(P_n)$ - получившиеся части области $(P)$. Если значком $k'$ отметить части, содержащиеся в $(P')$, а значком $k''$ - части, содержащиеся в $(P'')$, то можно записать

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\cdot P_k = \sum_{k'}\omega_{k'}\cdot P_{k'} + \sum_{k''}\omega_{k''}\cdot P_{k''}. \tag{3}$$

Так как функция $f(x,y)$ интегрируема на $(P)$, то сумма слева стремится к нулю при $\lambda\to 0$, а поскольку суммы справа тоже положительны, то к нулю стремятся и они, что означает интегрируемость функции на $(P')$ и $(P'')$. Обратно, если $f(x,y)$ интегрируема на $(P')$ и $(P'')$, то суммы справа стремятся к нулю при $\lambda\to 0$, откуда следует стремление к нулю суммы слева. Не рассмотренным остался только тот случай, когда нам известна интегрируемость нашей функции на $(P')$ и $(P'')$, но разбиение $(P)$ не является объединением разбиений $(P')$ и $(P'')$ (среди линий деления нет $(L)$). Но тогда чем отличаются левые суммы в (3) для исходного разбиения и разбиения с добавлением кривой $(L)$? Только теми элементами, которые пересекаются с $(L)$. Интегрируемая функция $f(x,y)$ ограничена на $(P)$, то есть ограничены все $\omega_k$, а площадь всех задевающих кривую $(L)$ участков стремится к нулю при $\lambda\to 0$, следовательно, сумма изменяется на бесконечно малую.◁

Из доказательства видно, что, если функция ограничена, то ее значения на конечном числе гладких кривых не влияют ни на факт интегрируемости, ни на величину интеграла.

Воспользуемся последней теоремой для описания еще одного класса интегрируемых функций.

**Теорема. Если ограниченная в $(P)$ функция $f(x,y)$ имеет разрывы разве лишь на конечном числе гладких кривых, то она интегрируема в $(P)$.**

Доказательство. ▷ Пусть $(L_1),(L_2),\dots,(L_m)$ - тот набор гладких кривых, на которых находятся точки разрыва функции $f(x,y)$, и пусть $(P_1),(P_2),\dots,(P_n)$ - области, на которые эти кривые разбивают $(P)$. В каждой из областей $(P_k)$ функция непрерывна, а, следовательно, интегрируема. В таком случае она будет интегрируемой и на объединении частей – области $(P)$.

Из рассмотрения интегральных сумм с помощью перехода к пределу получаются следующие свойства.

***Линейность.***

*Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в $(P)$, то для любых чисел $a$ и $b$ линейная комбинация $af(x,y)+bg(x,y)$ также интегрируема, причем*

$$\iint\limits_{(P)} \left(af(x,y)+bg(x,y)\right)dP = a\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP + b\iint\limits_{(P)} g(x,y)\,dP\,.$$

***Интегрирование неравенств.***

*Если для интегрируемых в* $(P)$ *функций* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *выполнено неравенство* $f(x,y)\le g(x,y)$, *то*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP \le \iint\limits_{(P)} g(x,y)\,dP\,.$$

***Оценка модуля интеграла.***

*Если функция* $f(x,y)$ *интегрируема в* $(P)$, *то интегрируемой будет и функция* $|f(x,y)|$, *причем*

$$\left|\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP\right| \le \iint\limits_{(P)} |f(x,y)|\,dP\,.$$

Доказательство. $\triangleright$ Интегрируемость $|f|$ следует из того, что колебание $\tilde{\omega}_k$ этой функции в любой области $P_k$ не превосходит соответствующего колебания $\omega_k$ функции $f$, откуда следует $\sum\limits_k \tilde{\omega}_k P_k \le \sum\limits_k \omega_k P_k$. Доказываемое же неравенство получается предельным переходом из неравенства

$$\left|\sum_k f(x_k,y_k)P_k\right| \le \sum_k |f(x_k,y_k)|P_k\,.$$

***Лемма*** *(об оценке интеграла). Если интегрируемая в* $(P)$ *функция удовлетворяет неравенству* $m\le f(x,y)\le M$, *то* $mP \le \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP \le MP$.

Последняя оценка получается предельным переходом из очевидного неравенства

$$mP \le \sum_k f(x_k,y_k)P_k \le MP\,.$$

## *Вычисление двойного интеграла*

***Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области.***

**Теорема. Если для функции $f(x,y)$, определенной в прямоугольнике $(P)=[a,b]\times[c,d]$, существует двойной интеграл $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$ и – при каждом постоянном значении $x$ из $[a,b]$ - интеграл**

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (a\le x\le b),$$

**то существует также повторный интеграл $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ и выполняется равенство**

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

Доказательство. $\triangleright$ Разобьем отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно на части $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < \ldots . < y_n = d$. Тогда прямоугольник $(P)$ разобьется на части $(P_{k,l}) = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ $(1 \le k \le n, \quad 1 \le l \le m)$.

Обозначим через $m_{k,l}$ и $M_{k,l}$, соответственно, точную верхнюю и нижнюю границы функции $f(x,y)$ в прямоугольнике $P_{k,l}$. Тогда для $(x,y) \in P_{k,l}$

$$m_{k,l} \le f(x,y) \le M_{k,l}.$$

Зафиксируем произвольную точку $\xi_k$ из отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ и проинтегрируем $f(\xi_k, y)$ от $y_l$ до $y_{l+1}$, применяя последнюю оценку:

$$m_{k,l}\Delta y_l \le \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y)\, dy \le M_{k,l}\Delta y_l.$$

Просуммируем полученные неравенства по $l$ от 0 до $m-1$:

$$\sum_{l=0}^{m-1} m_{k,l}\Delta y_l \le I(\xi_k) = \int_c^d f(\xi_k, y)\, dy \le \sum_{l=0}^{m-1} M_{k,l}\Delta y_l,$$

а теперь, умножив на $\Delta x_k$, просуммируем по $k$ от $0$ до $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \sum_{l=0}^{m-1} m_{k,l}\Delta y_l \le \sum_{k=0}^{n-1} I(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \sum_{l=0}^{m-1} M_{k,l}\Delta y_l$$

или

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} m_{k,l}P_{k,l} \le \sum_{k=0}^{n-1} I(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} M_{k,l}P_{k,l}.$$

Переходя к пределу в последних неравенствах при $\Delta x_k, \Delta y_l \to 0$, получим

$$\iint_{(P)} f(x,y)\, dP \le \int_a^b I(x)\, dx \le \iint_{(P)} f(x,y)\, dP,$$

то есть

$$\iint_{(P)} f(x,y)\, dP = \int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy. \triangleleft$$

Меняя роли переменных $x$ и $y$, можно, разумеется, доказать и формулу

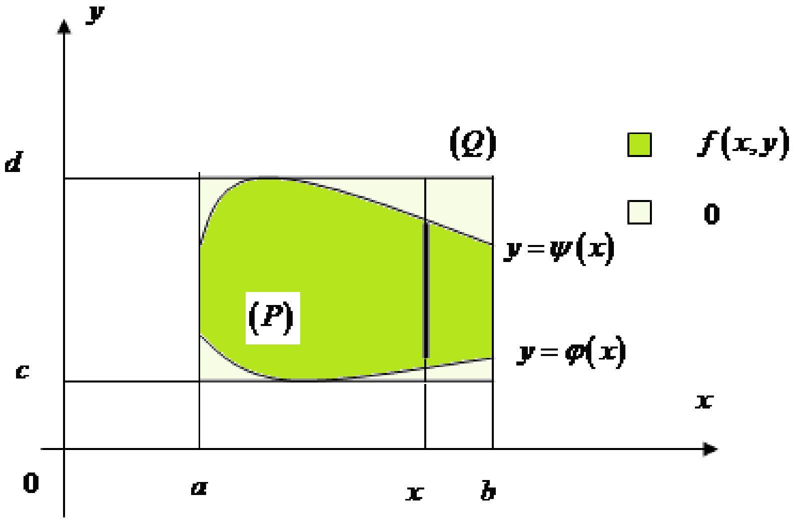
$$\iint_{(P)} f(x,y)\, dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

***Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области.***

**Теорема. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $(P)$, ограниченной снизу и сверху двумя гладкими кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ $(a \le x \le b)$, а с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$, то выполняется равенство**

$$\iint_{(P)} f(x,y)\, dP = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy. \qquad (1)$$

Доказательство. $\triangleright$




Возьмем

$$c = \min_{a \le x \le b} \varphi(x),$$

$$d = \max_{a \le x \le b} \psi(x),$$

$$(Q) = [a,b] \times [c,d]$$

и определим в прямоугольнике $(Q)$ функцию

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \text{ } \textit{если} \text{ } (x,y) \in (P) \\ 0, \text{ } \textit{если} \text{ } (x,y) \in (Q) \setminus (P) \end{cases}.$$

Функция $f^*(x,y)$ ограничена на $(Q)$ и может иметь разрывы только в точках, лежащих на гладких кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Следовательно, она интегрируема на $(Q)$, причем

$$\iint\limits_{(Q)} f^*(x,y)\,dQ = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP + \iint\limits_{(Q \setminus P)} f(x,y)\,dP = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP \qquad (2)$$

Очевидно также, что при каждом $x \in [a,b]$ существует интеграл

$$I^*(x) = \int_c^d f^*(x,y)\,dy = \int_c^{\varphi(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\psi(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \quad (3)$$

Таким образом, для функции $f^*(x,y)$ на $(Q)$ выполнены все условия предыдущей теоремы и справедлива формула

$$\iint\limits_{(Q)} f^*(x,y)\,dP = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)\,dy. \qquad (4)$$

Подставив (2) и (3) в (4), получим (1). ◁

Область, описанная в условиях теоремы называется элементарной относительно оси $y$.

Если функция $f(x,y)$ будет непрерывной в области $(P)$, ограниченной слева и справа двумя гладкими кривыми $x = \varphi(y)$ и $x = \psi(y)$ $(c \le y \le d)$, а снизу и сверху – прямыми $y = c$ и $y = d$, то выполняется равенство

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

Такая область называется элементарной относительно оси $x$.

В случае более сложного контура область $(P)$ можно попробовать разложить на конечное число областей рассмотренных типов.

### ***Поверхности в*** $\mathbf{R}^3$

Пусть $(\Omega)$ - ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, а функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы на замыкании области, - $(\bar{\Omega})=(\Omega)\cup\delta(\Omega)$, тогда отображение $(\bar{\Omega})\to\mathbf{R}^3$, определяемое формулами

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v) \tag{1}$$

называется непрерывно дифференцируемым. Если же при этом в каждой точке $(u,v)\in\Omega$ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v) & z'_u(u,v) \\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v) & z'_v(u,v) \end{pmatrix}.$$

равен двум, то это отображение называется гладким, а его образ в пространстве $\mathbf{R}^3$ **гладкой поверхностью**.

**Пример**. График функции $z=f(x,y)$ непрерывно дифференцируемой на замкнутом ограниченном множестве $(\bar{\Omega})\subset\mathbf{R}^2$ есть гладкая поверхность, поскольку ранг матрицы $\begin{pmatrix} x'_x(x,y) & y'_x(x,y) & z'_x(x,y) \\ x'_y(x,y) & y'_y(x,y) & z'_y(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x(x,y) \\ 0 & 1 & f'_y(x,y) \end{pmatrix}$ равен двум.

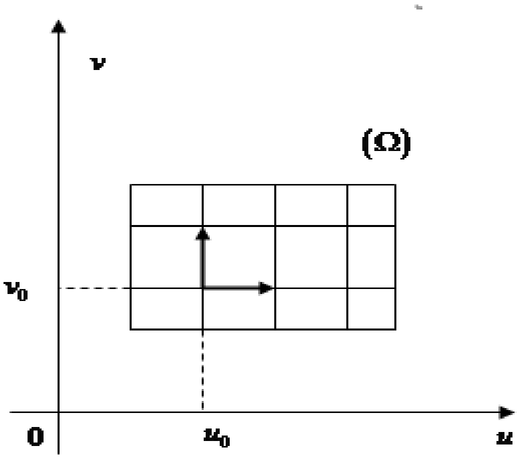
Уравнения (1) можно записать в векторной форме

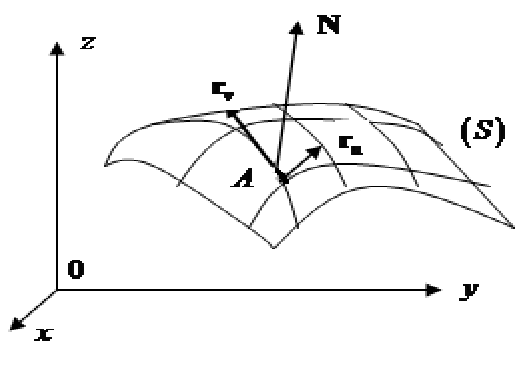
$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),\ \ (u,v)\in(\bar{\Omega}), \tag{2}$$

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k}.$$

Пусть $(S)$ есть гладкая поверхность, задаваемая уравнениями (1) или (2). Пусть точка $(u_0,v_0)\in(\bar{\Omega})$ Образ отрезка $(u_0,v)\subset(\bar{\Omega})$ , - кривую $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v)$, лежащую на поверхности $(S)$будем называть координатной кривой. Аналогично определяется координатная кривая $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v_0)$ $\left((u,v_0)\in(\bar{\Omega})\right)$, Векторы $\mathbf{r}'_u(u_0,v_0)$, $\mathbf{r}'_v(u_0,v_0)$ будут касательными к координатным кривым . Векторы $\pm\mathbf{N}=[\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v]$ будем называть векторами **нормали** к поверхности $(S)$ в точке $A(u_0,v_0)$ $\left(A(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\right)$.

Плоскость, проходящая через точку $A(u_0,v_0)$ и перпендикулярная вектору нормали $\mathbf{N}$, называется **касательной плоскостью** к поверхности $(S)$ в точке $A$. (не судите строго, - вектор нормали должен торчать из жирной точки, но не получилось:))



Можно показать, что направление вектора нормали и, соответственно, уравнение касательной плоскости не меняется при изменении параметризации поверхности.

Поверхность, которую можно разрезать на конечное число гладких кусков, будем называть **кусочно гладкой**.

Гладкая поверхность называется ориентируемой, если на этой поверхности можно построить непрерывное поле единичных нормалей. Это поле нормалей определяет ориентацию (сторону) поверхности. Поменяв направление всех нормалей на противоположное, снова получим непрерывное поле нормалей, это поле определяет противоположную ориентацию (другую сторону) поверхности. На гладкой поверхности единичные нормали задаются формулой $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \dfrac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u]|}$.

Гладкие поверхности могут быть как ориентируемыми (двусторонними), так и неориентируемыми (односторонними). Сфера, тор, конус, - поверхности ориентируемые, а вот «лента Мебиуса» и «бутылка Клейна» - нет. Желающие могут посмотреть виде про «бутылочку Клейна», пройдя по ссылке http://www.youtube.com/watch?v=sRTKSzAOBr4&fmt=22 (Википедия «Бутылка Клейна» Ссылки. Анимационный фильм о Бутылке Клейна, созданный в 2010 г. при Свободном Университете г. Берлин (Freie Universität Berlin), включает изображение поездки по Бутылке и изначальное описание Феликса Клейна.)

Пусть гладкая поверхность задана уравнением (1). Выделим на поверхности криволинейный параллелограмм, ограниченный координатными кривыми, соответствующими прямоугольнику с вершинами в точках $(u,v), (u+\Delta u, v), (u, v+\Delta v)$, $(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Векторы $\mathbf{r}'_u(u,v)$, $\mathbf{r}'_v(u,v)$ будут касательными к координатным линиям, проходящим через точку $A(u,v)$ поверхности. Естественно считать (у этого факта есть и строгое математическое обоснование, но мы его за недостатком времени приводить не будем), что площадь криволинейного параллелограмма, ограниченного криволинейными координатными кривыми, приближенно равна площади $dS$ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}'_u \Delta u$ и $\mathbf{r}'_v \Delta v$. Выражение $dS = \left|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\right| \Delta u \Delta v$ называется **элементом площади поверхности**.

Выведем формулу для вычисления элемента площади поверхности:

$$\left|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\right| = |\mathbf{r}'_u||\mathbf{r}'_v|\left|\sin \widehat{\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v}\right| = \sqrt{|\mathbf{r}'_u|^2|\mathbf{r}'_v|^2\left(1-\cos^2 \widehat{\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v}\right)} = \sqrt{|\mathbf{r}'_u|^2|\mathbf{r}'_v|^2 - (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)^2} == \sqrt{EG-F^2}.$$

То есть

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\,dudv = dudv\sqrt{\left(x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2\right)\left(x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2\right) - \left(x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v\right)^2}\ .$$

Определим формально площадь поверхности, заданной формулами (1):

$$S = \iint\limits_{(\Omega)} \left|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]\right| dudv = \iint\limits_{(\Omega)} \sqrt{EG-F^2}\,dudv\,.$$

Если поверхность задана явно как график непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x,y)$, $(x,y) \in (\Omega)$, то $E = 1 + f_x'^2$, $G = 1 + f_y'^2$, $F = f'_x f'_y$, $EG - F^2 = 1 + f_x'^2 + f_y'^2$, и

$$S = \iint\limits_{(\Omega)} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy$$

## ***Замена переменных в двойном интеграле.***

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy\,, \tag{3}$$

где область $(S)$ ограничена кусочно-гладким контуром $(L)$, а функция $f(x,y)$ непрерывна в $(S)$ или ограничена и допускает разрывы лишь вдоль конечного числа кусочно-гладких кривых.

Предположим теперь, что формулы

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{4}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между областью $(S)$ и областью $(\Omega)$ плоскости $(u,v)$, ограниченной кусочно-гладким контуром $(\Gamma)$.

Относительно функций из (4) будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы в $(\Omega)$, а якобиан $J(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v) \\ x'(u,v)_v & y'_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$ в $(\Omega)$.

Наша задача – заменить переменные в интеграле (3) и представить его в виде интеграла, распространенного на область $(\Omega)$.

Область $(S)$ - гладкая поверхность в $\mathbf{R}^3$. Ее уравнение можно представить в векторной форме: $(S) = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v),\ \ (u,v) \in (\Omega)\}$, где $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$.

Для вычисления элемента площади $dS$ получим следующую формулу:

$$dS = \left\| \left[ \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v \right] \right\| \Delta u \Delta v = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{matrix} \right\| \Delta u \Delta v = \left| \mathbf{k} \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v) \\ x'(u,v)_v & y'_v(u,v) \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v =$$

$$= \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \Delta u \Delta v = \left| J(u,v) \right| \Delta u \Delta v.$$

Разобьем плоскость $(u,v)$ на квадраты вертикальными и горизонтальными прямыми с шагом $\Delta u = \Delta v = \delta$. Пусть $(u_k, v_k)$ точки пересечения этих прямых, попавшие в область $(\Omega)$. Таким образом в $(S)$ будет определена сеть координатных линий $\mathbf{r}(u_k, v)$ и $\mathbf{r}(u, v_k)$ (некоторые из них могут совпадать). Обозначим через $(\Delta S_k)$ часть области $(S)$, ограниченную координатными линиями $\mathbf{r}(u_k, v)$, $\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v)$, $\mathbf{r}(u, v_k)$ и $\mathbf{r}(u, v_k + \Delta v)$. Площадь поверхности $(\Delta S_k)$ приблизительно равна $dS_k = \left| J(u_k, v_k) \right| \Delta u \Delta v$.

Составим интегральную сумму для интеграла (3)

$$\sigma = \sum_k f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{5}$$

и рассмотрим

$$\tilde{\sigma} = \sum_k f(x_k, y_k) dS_k \,.$$

Имеем

$$\tilde{\sigma} = \sum_k f\left( x(u_k, v_k), y(u_k, v_k) \right) \left| J(u_k, v_k) \right| \Delta u \Delta v \,. \tag{6}$$

А это интегральная сумма интегрируемой на $(\Omega)$ функции $f\left( x(u,v), y(u,v) \right) \left| J(u,v) \right|$.

Перейдем к пределу в (5) и (6), принимая без доказательства, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \left| \sigma - \tilde{\sigma} \right| = 0$, а также тот факт, что площадь объединения квадратиков, имеющих общие точки с границей $(\Omega)$, есть бесконечно малая величина. Получим

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(\Omega)} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\left|J(u,v)\right| dudv \;-$$

формулу замены переменных в двойном интеграле.

***Полярные координаты***

Простейшим и важнейшим примером криволинейных координат являются полярные координаты $\rho, \varphi$ . Они имеют наглядное геометрическое истолкование, как полярный радиус-вектор и полярный угол, но могут быть введены и формально, с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Якобиан в данном случае равен

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\ .$$

*Задача*. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xdxdy\ ,$$

где $(S)$ - верхняя половина круга $x^2 + y^2 \le 4$ .

***Геометрические и механические приложения двойных интегралов***

***Объем цилиндрического тела***

При определении двойного интеграла уже упоминалось, что интеграл

$$I = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dxdy$$

определяет объем тела, ограниченного снизу – плоской фигурой $(P) \subset xOy$ , сверху – поверхностью $z = f(x,y)$ , а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $z$ .

*Задача*. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0,\ x = 0,\ y = 0,\quad x + y + z = 5$ и $x^2 + y^2 = 1$ и содержащего точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

***Площадь плоской фигуры.***

Если функция в предыдущем примере $f(x,y) \equiv 1$ , то объем полученного цилиндрического тела численно будет равен площади основания, то есть

$$S = \iint\limits_{(S)} dxdy\ .$$

***Масса плоской фигуры.***

Пусть на плоскости $xOy$ задана плоская фигура $(S)$ , и пусть непрерывная функция $\rho(x,y)$ - плотность распределения ее массы. Разобьем фигуру на части $(S_k)$ сетью гладких кривых и, предполагая, что в пределах одной части плотность распределения масс постоянна, получаем приближенное выражение для массы:

$$M \approx \sum_k \rho(x_k, y_k) S_k\ .$$

В пределе имеем

$$M = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y)\,dxdy\ .$$

**_Площадь поверхности, заданной параметрически._**

Пусть $(S)$ есть гладкая поверхность, задаваемая уравнениями $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ или $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, где $(u,v) \in (\bar{\Omega})$

Площадь поверхности $(S)$ равна

$$S = \iint\limits_{(\Omega)} \left\| \left[ \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v \right] \right\| dudv = \iint\limits_{(\Omega)} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

где

$E = \left|\mathbf{r}'_u\right|^2 = \left(x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u\right),\ G = \left|\mathbf{r}'_v\right|^2 = \left(x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v\right),\ F = \left(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v\right)^2 = \left(x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v\right)^2.$

*Задача*. Найти площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (поверхность сферы можно задать следующим образом: $x = R\cos\varphi\sin\psi,\ y = R\sin\varphi\sin\psi,\ x = R\cos\psi,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le \pi$ ).

**_Площадь явно заданной поверхности_**

Пусть поверхность $(S)$ задается *явно* уравнением

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in (P),$$

где $(P)$ - замкнутая ограниченная область на плоскости $(x,y)$, а функция $f$ непрерывно дифференцируема в $(P)$.

Площадь поверхности в этом случае равна

$$S = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy.$$

*Задача*. Найти площадь поверхности части параболоида

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le 1.$$

## **_Тройные интегралы_**

Пусть в трехмерной области $(V)$ определена функция $f(x,y,z)$. Разобьем область $(V)$ сетью гладких поверхностей на конечное число областей $(V_1),(V_2),\ldots,(V_n)$. Возьмем произвольно в каждой области $(V_k)$ по точке $(x_k, y_k, z_k)$. Обозначим через $V_k$ объем фигуры $(V_k)$, а через $\lambda$ наибольший из диаметров частичных областей $(V_k)$. Сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot V_k.$$

будем называть интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ в области $(V)$. Конечный предел $I$ интегральных сумм при $\lambda \to 0$ называется тройным интегралом функции $f(x,y,z)$ в области $(V)$ и обозначается символом

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\, dxdydz. \tag{1}$$

Функция, имеющая интеграл, называется интегрируемой в $(V)$.

Геометрический смысл тройного интеграла (1) – масса тела, ограниченного областью $(V)$, с плотностью масс $f(x,y,z)$.

***Теорема.*** Всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области $(V)$ функция $f(x,y,z)$ интегрируема.

(без доказательства)

### ***Свойства интегрируемых функций и тройных интегралов***

### ***Аддитивность***

***Теорема***. Если трехмерная область $(V)$, в которой задана функция $f(x, y, z)$ гладкой поверхностью разложена на две области $(V')$ и $(V'')$, то из интегрируемости функции во всей области $(V)$ следует ее интегрируемость на частях, и обратно – из интегрируемости функции в обеих областях $(V')$ и $(V'')$ вытекает интегрируемость в $(V)$. При этом

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_{(V')} f(x, y, z)\,dV + \iiint\limits_{(V'')} f(x, y, z)\,dV .$$

(без доказательства)

***Теорема***. Если ограниченная в $(V)$ функция $f(x, y, z)$ имеет разрывы разве лишь на конечном числе гладких поверхностей, то она интегрируема в $(V)$.

(без доказательства)

### ***Линейность***

Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в $(V)$, то для любых чисел $a$ и $b$ линейная комбинация $af(x, y, z) + bg(x, y, z)$ также интегрируема, причем

$$\iiint\limits_{(V)} \big(af(x, y, z) + bg(x, y, z)\big)\,dV = a\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV + b\iiint\limits_{(V)} g(x, y, z)\,dV .$$

(без доказательства)

### **Интегрирование неравенств**

Если для интегрируемых в $(V)$ функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ выполнено неравенство $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV \le \iiint\limits_{(V)} g(x, y, z)\,dV .$$

(без доказательства)

### **Оценка модуля интеграла**

Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в $(V)$, то интегрируемой будет и функция $\left|f(x, y, z)\right|$, причем

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV\right| \le \iiint\limits_{(V)} \left|f(x, y, z)\right| dV .$$

(без доказательства)

### ***Оценка интеграла***

Если интегрируемая в $(V)$ функция удовлетворяет неравенству

$$m \le f(x, y, z) \le M ,$$

то

$$mV \le \iint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV \le MV .$$

(без доказательства)

## *Вычисление тройного интеграла*

***Определение***. Элементарной относительно оси $z$ называется область, ограниченная с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $z$, а сверху и снизу гладкими поверхностями $z = Z(x, y)$ и $z = z(x, y)$, проектирующимися на плоскость $xy$ в некоторую фигуру $(P)$, ограниченную кусочно-гладким контуром.

Аналогично определяются области, элементарные относительно осей $x$ или $y$.

***Теорема***. Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области $(V)$, элементарной относительно оси $z$, ограниченна сверху и снизу гладкими поверхностями $z = Z(x, y)$ и $z = z(x, y)$, проектирующимися на плоскость $xy$ в область $(P)$.

Тогда $f(x, y, z)$ интегрируема в $(V)$, и справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_{z=z(x,y)}^{z=Z(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{2}$$

Если область $(P)$ - правильная в направлении оси $y$, ограничена снизу и сверху двумя гладкими кривыми $y = y(x)$ и $y = Y(x)$ $\quad (x \in [a, b])$, то выполняется равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z=z(x,y)}^{z=Z(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Аналогичные формулы справедливы для областей, элементарных относительно осей $x$ и $y$ с различными вариантами направления «элементарности» проекций.

В случае более сложной формы область $(V)$ можно попробовать разложить на конечное число областей рассмотренных типов.

### *Замена переменных в тройном интеграле*

Пусть в пространстве с системой координат $xyz$ задана область $(V)$, а в пространстве с системой координат $uvw$ область $(\Delta)$, и пусть области $(V)$ и $(\Delta)$ связаны между собой взаимно однозначным непрерывным соответствием, которое осуществляется формулами

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \tag{3}$$

причем функции, задающие отображение в (3), имеют в $(\Delta)$ непрерывные частные производные и якобиан

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0.$$

Тогда для заданной в области $(V)$ непрерывной функции $f(x, y, z)$, справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{(\Delta)} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\left|J\right| dudvdw.$$

(без доказательства)

### *Сферические координаты*

Сферические координаты связаны с декартовыми формулами

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\sin\theta.$$

Здесь $\rho$ - расстояние от центра координат до точки $M(x, y, z)$, $\theta$ - угол между вектором $OM$ плоскостью $xy$, а $\varphi$ - угол между проекцией вектора $OM$ на плоскость $xy$ и осью $x$. Вычислим значение якобиана этого отображения

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -\rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \sin\theta \begin{vmatrix} -\rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} +$$

$$+\rho\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ -\rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = \sin\theta\left(\rho^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cos^2\varphi\right) +$$

$$+\rho\cos\theta\left(\rho\cos^2\theta\cos^2\varphi + \rho\cos^2\theta\sin^2\varphi\right) = \rho^2\sin^2\theta\cos\theta + \rho^2\cos^3\theta = \rho^2\cos\theta .$$

### ***Приложения тройных интегралов к механике***

Если тело занимает объем $(V)$ и плотность распределения его массы равна $\rho(x, y, z)$, то масса тела вычисляется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(V)} m(x, y, z)\,dxdydz .$$

Координаты центра масс тела вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{(V)} xm(x, y, z)\,dxdydz \\ y_c = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{(V)} ym(x, y, z)\,dxdydz \\ z_c = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{(V)} zm(x, y, z)\,dxdydz \end{cases}$$

Вычислим координаты центра тяжести полушара

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0 .$$

Перейдем к сферическим координатам

$$M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R \rho^2\cos\theta d\rho = 2\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\frac{R^3}{3}d\theta = \frac{2\pi R^3}{3};$$

из соображений симметрии ясно, что $x_c = y_c = 0$, вычислим $z_c$:

$$z_c = \frac{3}{2\pi R^3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R \rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho = \frac{3R}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{3R}{16}.$$

## ***Криволинейные интегралы***

### ***Криволинейные интегралы первого рода***

Пусть на некотором множестве, содержащим кривую $(\Gamma) = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ \alpha \le t \le \beta\}$, задана непрерывная функция $F(x, y, z)$. Криволинейным интегралом первого рода от функции $F(x, y, z)$ по кривой $(\Gamma)$ называется интеграл

$$\int\limits_{(\Gamma)} F(x, y, z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F\left(x(t), y(t), z(t)\right)\left|\mathbf{r}'(t)\right|dt .$$

### ***Свойства криволинейного интеграла первого рода***

***Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации кривой.***

Доказательство. Предположим, что при помощи допустимой замены параметра мы перешли от задания кривой уравнением $(\Gamma)=\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ \alpha\le t\le\beta\}$ к уравнению

$$(\Gamma)=\{\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(\tau)=(\varphi(\tau),\psi(\tau),\xi(\tau))=(x(t(\tau)),y(t(\tau)),z(t(\tau))),\ a\le\tau\le b\}.$$

Допустимой называется замена параметра $t=t(\tau)$, если функция $t(\tau)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, отображает этот отрезок на $[\alpha,\beta]$, $t(a)=\alpha$, $t(b)=\beta$ и $t'(\tau)\ne 0$ $(t'(\tau)>0)$, $a\le\tau\le b$. Тогда, воспользовавшись формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))|\mathbf{r}'(t)|dt=\int_a^b F(x(t(\tau)),y(t(\tau)),z(t(\tau)))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(\tau))\right|t'(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_a^b F(x(t(\tau)),y(t(\tau)),z(t(\tau)))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(\tau))t'(\tau)\right|d\tau=\int_a^b F(\varphi(\tau),\psi(\tau),\xi(\tau))|\boldsymbol{\rho}'(\tau)|d\tau.$$

***Криволинейный интеграл второго рода не зависит от ориентации кривой*** $(\Gamma)$***, то есть***

$$\int_{(\Gamma)}F(x,y,z)\,ds=\int_{(\Gamma^-)}F(x,y,z)\,ds.$$

Доказательство. Кривую $(\Gamma^-)$ зададим уравнением

$$(\Gamma^-)=\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(\beta+\alpha-t),\ \alpha\le t\le\beta\}.$$

Получаем

$$\int_{(\Gamma)}F(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))|\mathbf{r}'(t)|dt=\left\{\begin{matrix}\tau=\alpha+\beta-t,\ \tau\Big|_\beta^\alpha\\ t=\alpha+\beta-\tau,\ dt=-d\tau\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\int_\beta^\alpha F(x(\alpha+\beta-\tau),y(\alpha+\beta-\tau),z(\alpha+\beta-\tau))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\alpha+\beta-\tau)\right|d\tau=$$

$$=\int_\alpha^\beta F(x(\alpha+\beta-\tau),y(\alpha+\beta-\tau),z(\alpha+\beta-\tau))|\mathbf{r}'(\alpha+\beta-\tau)|d\tau=\int_{(\Gamma^-)}F(x,y,z)\,ds.$$

***Криволинейный интеграл первого рода аддитивен относительно кривой: если*** $(\Gamma)=(\Gamma_1)(\Gamma_2)...(\Gamma_n)$, то

$$\int_{(\Gamma)}F(x,y,z)\,ds=\sum_{k=1}^n\int_{(\Gamma_k)}F(x,y,z)\,ds.$$

Это свойство следует из свойства аддитивности определенного интеграла.

### ***Физическая интерпретация криволинейного интеграла первого рода.***

Если функция $F(x,y,z)$ неотрицательна, то ее можно интерпретировать как линейную плотность массы материальной кривой. Тогда $\int\limits_{(\Gamma)}F(x,y,z)\,ds$ - масса этой кривой.

### *Криволинейные интегралы второго рода*

Пусть в области $(\Omega)\subset\mathbf{R}^3$ определено непрерывное векторное поле $\mathbf{F}=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ и пусть $(\Gamma)=\big\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big),\ \alpha\le t\le\beta\big\}$ - кусочно-гладкая кривая, лежащая в $(\Omega)$.

Криволинейным интегралом второго рода от векторного поля $\mathbf{F}$ по кривой $(\Gamma)$ называется интеграл

$$\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})=\int\limits_{(\Gamma)}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big),\mathbf{r}'(t)\big)dt=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt.$$

Если система декартовых координат фиксирована, то, полагая $Q=R=0$, получим

$$\int\limits_{(\Gamma)}Pdx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Аналогично получаются интегралы

$$\int\limits_{(\Gamma)}Qdx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)\,dt \text{ и } \int\limits_{(\Gamma)}Pdx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\,dt.$$

В отличие от $\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})$ последние интегралы зависят от выбора декартовой системы координат.

### *Свойства криволинейного интеграла второго рода*

***Криволинейный интеграл второго рода не зависит от способа параметризации кривой.***

Доказывается аналогично соответствующему свойству интеграла первого рода.

***Криволинейный интеграл второго рода при изменении ориентации кривой на противоположную меняет знак:***

$$\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})=-\int\limits_{(\Gamma^-)}(\mathbf{F},d\mathbf{r}).$$

Доказательство. Пусть кривая $(\Gamma)=\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$, а противоположно ориентированная кривая $(\Gamma^-)=\{\boldsymbol{\rho}(t)=\mathbf{r}(\beta+\alpha-t),\ \alpha\le t\le\beta\}$. Тогда

$$\int\limits_{(\Gamma^-)}(\mathbf{F},d\boldsymbol{\rho})=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\rho}(t)\big),\boldsymbol{\rho}'(t)\big)dt=-\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\alpha+\beta-t)\big),\mathbf{r}'(\alpha+\beta-t)\big)dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\tau=\alpha+\beta-t,\ \tau\big|_{\beta}^{\alpha}\\ t=\alpha+\beta-\tau,\ dt=-d\tau\end{array}\right\}=\int\limits_{\beta}^{\alpha}\big(\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\tau)\big),\mathbf{r}'(\tau)\big)d\tau=-\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\mathbf{F},d\mathbf{r}).$$

***Криволинейный интеграл второго рода аддитивен относительно кривой.***

Доказывается так же, как и для интеграла первого рода.

### *Криволинейный интеграл второго рода, плоский случай*

В плоском случае $(\Gamma)=\big\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=\big(x(t),y(t)\big),\ \alpha\le t\le\beta\big\}$, $\mathbf{F}=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ и

$$\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})=\int\limits_{(\Gamma)}Pdx+Qdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big),\mathbf{r}'(t)\big)dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

В случае, когда плоская кривая $(\Gamma)$ есть график непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $y=\varphi(x)$, формула для интеграла приобретает следующий вид:

$$\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})=\int\limits_{(\Gamma)}Pdx+Qdy==\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x,\varphi(x)\big)+Q\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)\Big)dx.$$

Если же $Q(x,y)=0$, то

$$\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})=\int\limits_{(\Gamma)}Pdx=\int\limits_{a}^{b}P\big(x,\varphi(x)\big)dx. \qquad (1)$$

Или, если $P(x,y)=0$, а $(\Gamma)=\{(x,y)=(\psi(y),y),\ c\le y\le d\}$, то

$$\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})=\int\limits_{(\Gamma)}Qdy=\int\limits_{c}^{d}Q\big(\psi(y),y\big)dy. \qquad (2)$$

Последние две формулы понадобятся нам при выводе формулы Грина.

***Механический смысл криволинейного интеграла второго рода.***

Пусть $\mathbf{F}(x,y,z)$ - силовое поле в области $(\Omega)\subset\mathbf{R}^3$, и пусть $(\Gamma)=\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$ - кусочно гладкая кривая, лежащая в $(\Omega)$.

Интеграл $\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})$ есть работа силового поля при движении материальной точки по кривой $(\Gamma)$.

## *Формула Грина на плоскости*

### *Ориентация контура*

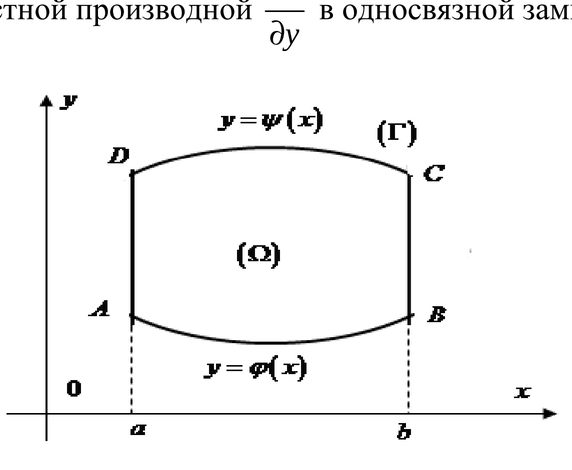
Рассмотрим кусочно-гладкую кривую $(\Gamma)=\{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$. Если существуют точки $t_1\ne t_2$ из отрезка $[\alpha,\beta]$, в которых $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}(t_2)$, то говорят, что точка $\mathbf{r}(t_1)$ является точкой самопересечения $(\Gamma)$. Если $\mathbf{r}(\alpha)=\mathbf{r}(\beta)$, то кривую называют замкнутой.

Замкнутая кривая без других точек самопересечения называется простым контуром.

Теорема Жордана утверждает, что любой простой контур разделяет плоскость на две области – ограниченную и неограниченную, общей границей которых он является.

Будем говорить, что простой контур ориентирован положительно, если при обходе контура ограничиваемая им область остается слева. Противоположно ориентированный контур будем обозначать $(\Gamma^-)$.

***Теорема (формула Грина)***. Пусть функция $P(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной замкнутой области $(\Omega)\subset\mathbf{R}^2$ с кусочно гладкой границей $(\Gamma)$.




Тогда

$$\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=-\int\limits_{(\Gamma)}P(x,y)dx.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим область $(\Omega)$, элементарную относительно оси $y$, то есть ограниченную сверху и снизу графиками функций $y=\psi(x)$ и $y=\varphi(x)$, а слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$.

Вычислим двойной интеграл от $\frac{\partial P}{\partial y}$ по области $(\Omega)$:

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\,dx .$$

С учетом формулы (1) получим

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_{(DC)} P(x,y)\,dx - \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx = \int\limits_{(DC)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(BA)} P(x,y)\,dx .$$

Заметим, что $\int\limits_{(CB)} P(x,y)\,dx = \int\limits_{(AD)} P(x,y)\,dx = 0$, поскольку $dx = 0$ на этих участках.

Поэтому мы можем записать

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_{(DC)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(CB)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(BA)} P(x,y)\,dx \int\limits_{(AD)} P(x,y)\,dx .$$

Правая часть этого равенства представляет собой интеграл, взятый по всему замкнутому контуру $(\Gamma)$, который проходится в отрицательном направлении. То есть

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{(\Gamma)} P(x,y)\,dx .$$

Выведенная формула справедлива и для областей, которые можно разрезать прямыми, параллельными оси $y$ на конечное число криволинейных трапеций указанного типа.

Аналогично можно вывести формулу

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{(\Gamma)} Q(x,y)\,dy$$

в предположении, что функция $Q$ непрерывна в замкнутой области $(\Omega)$ вместе со своей производной $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. При этом сначала область $(D)$ берут элементарной относительно оси $x$, а потом рассматривают области, которые можно разрезать прямыми, параллельными оси $x$ на конечное число областей указанного типа.

Если область $(\Omega)$ одновременно удовлетворяет условиям обоих случаев, то есть разлагается на конечное число частей, элементарных относительно оси $x$, а также на конечное число частей (других!), элементарных относительно оси $y$, причем во всей области будут непрерывны частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то будет справедлива формула

$$\int\limits_{(\Gamma)} Pdx + Qdy = \iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy ,$$

которая называется **формулой Грина.**

Можно доказать, что формула Грина справедлива для любой области, ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами.

### ***Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Потенциальное поле (плоский случай)***

Пусть в области $(G) \subset \mathbf{R}^2$ задано непрерывное векторное поле $(P(x,y), Q(x,y))$. Поле $(P(x,y), Q(x,y))$ называется **потенциальным**, если существует непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y)$ такая, что $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y)$. Функция $U(x,y)$ называется потенциалом поля. Справедливы соотношения:

$$P(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},\qquad Q(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}.$$

***Теорема***. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *для любой замкнутой ломаной* $(L)\subset(G)$

$$\int\limits_{(L)} Pdx+Qdy=0\,;$$

2) *интеграл* $\int\limits_{(L)} Pdx+Qdy=0$ *не зависит от ломаной* $(L_{AB})\subset(G)$, *соединяющей точки* $A$ *и* $B$*;*

3) *поле* $\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ *потенциально.*

Доказательство. Покажем, что $1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)\Rightarrow 1)$.

Пусть справедливо 1). Рассмотрим две ломаные $(L_{AB}),(L'_{AB})\subset(G)$, соединяющие точки $A$ и $B$. Контур $(L)=(L_{AB})(L'_{BA})\subset(G)$ будет замкнутым, поэтому

$$0=\int\limits_{(L)} Pdx+Qdy=\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy+\int\limits_{(L'_{BA})} Pdx+Qdy=\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy-\int\limits_{(L'_{AB})} Pdx+Qdy\,,$$

то есть

$$\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy=\int\limits_{(L'_{AB})} Pdx+Qdy\,.$$

Теперь пусть выполнено 2). Фиксируем точку $A(x_0,y_0)\in(G)$ и рассмотрим произвольную точку $B(x,y)\in(G)$. Интеграл $\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy$ зависит только от точки $B$. Таким образом, в области $(G)$ определена функция $U(x,y)=\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy$. Покажем, что она является потенциалом поля.

Если точка $C(x+\Delta x,y)\in(G)$ (этого всегда можно добиться дл достаточно маленького приращения $\Delta x$, так как $(G)$ - открытое множество), то

$$\frac{1}{\Delta x}\big(U(x+\Delta x,y)-U(x,y)\big)=\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_{(L_{ABC})} Pdx+Qdy-\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{[BC]} Pdx+Qdy=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{[BC]} Pdx=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt=P(x+\theta\Delta x,y),\ \ 0<\theta<1$$

(для последней оценки мы воспользовались теоремой о среднем интегральном для непрерывной функции).

Получаем:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\big(U(x+\Delta x,y)-U(x,y)\big)=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y),$$

поскольку функция $P(x,y)$ непрерывна в $(G)$.

Аналогично можно получить $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$.

Соотношение $3)\Rightarrow 1)$ выведем из более общего утверждения. А именно, покажем, что если поле потенциально, то $\int\limits_{(\Gamma)} Pdx+Qdy=0$ для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $(\Gamma)\subset(G)$. Итак, предположим, что поле $(P,Q)$ потенциально и рассмотрим кусочно-гладкий контур $(\Gamma)=(\Gamma_1)(\Gamma_2)...(\Gamma_n)$, где
$(\Gamma_k)=\{(x_k(t),y_k(t)),\ \alpha_k\le t\le\beta_k\}$ $(k=1,...,n)$. Будем иметь в виду, что
$(x_k(\beta_k),y_k(\beta_k))=(x_{k+1}(\alpha_{k+1}),y_{k+1}(\alpha_{k+1}))$ $(k=1,...,n-1)$
и
$(x_1(\alpha_1),y_1(\alpha_1))=(x_n(\beta_n),y_n(\beta_n))$.
Имеем

$$\int\limits_{(\Gamma)} Pdx+Qdy=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{(\Gamma_k)} Pdx+Qdy=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\left(P(x_k(t),y_k(t))x_k'(t)+Q(x_k(t),y_k(t))y_k'(t)\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k(t),y_k(t))x_k'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}(x_k(t),y_k(t))y_k'(t)\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{d}{dt}\left(U(x_k(t),y_k(t))\right)dt=\sum_{k=1}^{n}\left(U(x_k(\beta_k),y_k(\beta_k))-U(x_k(\alpha_k),y_k(\alpha_k))\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}U(x_k(\beta_k),y_k(\beta_k))-\sum_{k=1}^{n}U(x_k(\alpha_k),y_k(\alpha_k))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}U(x_k(\beta_k),y_k(\beta_k))+U(x_n(\beta_n),y_n(\beta_n))-U(x_1(\alpha_1),y_1(\alpha_1))-\sum_{k=2}^{n}U(x_k(\alpha_k),y_k(\alpha_k))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}U(x_{k+1}(\alpha_{k+1}),y_{k+1}(\alpha_{k+1}))-\sum_{k=2}^{n}U(x_k(\alpha_k),y_k(\alpha_k))=0.$$

***Следствие.*** *Если интеграл* $\int\limits_{(L)} Pdx+Qdy=0$ *для любой замкнутой кривой* $(L)\subset(G)$, *то он равен нулю и по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру из* $(G)$.

### *Условие потенциальности непрерывно дифференцируемого поля*

***Теорема.*** *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое в области* $(G)$ *поле* $(P,Q)$ *было потенциальным необходимо, а в случае односвязной области и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\qquad ((x,y)\in(G)).$$

Доказательство. Необходимость. Если поле $(P,Q)$ потенциально, то

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x},\qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

А так как смешанные производные непрерывны, то они равны.

Достаточность. Рассмотрим произвольную замкнутую ломаную $(L)\subset(G)$ без самопересечений. Так как область $(G)$ односвязна, то ограниченная контуром $(L)$ область $(\Omega)$ принадлежит $(G)$. Применим к ней формулу Грина:

$$\int\limits_{(L)} Pdx+Qdy=\iint\limits_{(\Omega)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

Можно показать, что интеграл будет равен нулю для любой замкнутой ломаной, даже и с самопересечениями, принадлежащей $(G)$.

В таком случае поле будет потенциальным в силу предыдущей теоремы.

Восстановление потенциала (плоский случай)

Если поле $(P,Q)$ потенциально в $(G)$, то для восстановления потенциала воспользуемся формулой из доказательства теоремы 1. Фиксируем произвольную точку $A(x_0,y_0)\in(G)$, тогда $U(x,y)=\int\limits_{(L_{AB})} Pdx+Qdy$, где $(L_{AB})$ - ломаная, соединяющая точки $A$ и $B(x,y)\in(G)$.

Пример. Докажите, что поле $\mathbf{F}=\left(\dfrac{1}{\cos^2 2x}+6xy^3\right)\mathbf{i}+\left(9x^2y^2-3\sin 3y\right)\mathbf{j}$ является потенциальным. Найдите потенциал и вычислите работу этого поля на пути от $A(1;0)$ до $B(0;1)$.

Решение. Покажем, что поле потенциально:

$$P'_y=\left(\frac{1}{\cos^2 2x}+6xy^3\right)'_y=18xy^2,\quad Q'_x=\left(9x^2y^2-3\sin 3y\right)'_x=18xy^2\ \Rightarrow\ P'_y=Q'_x.$$

Восстановим потенциал. Рассмотрим ломаную с узлами в точках $O(0;0)$, $M(x;0)$ и $N(x;y)$. Имеем: $(OM)=\{\mathbf{r}(t)=(t;0),\ 0\le t\le x\}$, $(MN)=\{\mathbf{r}(t)=(x;t),\ 0\le t\le y\}$.

Потенциал $U(x,y)=\int\limits_{(OMN)} Pdx+Qdy=\int\limits_{(OM)} Pdx+\int\limits_{(MN)} Qdy=\int\limits_0^x P(t,0)\,dt+\int\limits_0^y Q(x,t)\,dt=$

$$=\int\limits_0^x\frac{dt}{\cos^2 2t}+\int\limits_0^y\left(9x^2t^2-3\sin 3t\right)dt=\frac{1}{2}tg\,2t\Big|_0^x+\left(3x^2t^3+\cos 3t\right)\Big|_0^y=\frac{1}{2}tg\,2x+3x^2y^3+\cos 3y-1.$$

Работа поля на пути от $A(1;0)$ до $B(0;1)$ равна

$$E=U(B)-U(A)=U(0;1)-U(1;0)=\cos 3-1-\frac{1}{2}tg\,2.$$