Дифференциальное исчисление

Обозначим через Δx **-** приращение аргумента функции $f(x)$, а через $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ - приращение самой функции на соответствующем промежутке.

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x*, если ее приращение можно представить в виде*

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

В этом случае линейная часть приращения называется дифференциалом и обозначается

$$df(x) = A\Delta x.$$

Пример 1. $y = x$, тогда $\Delta y = 1 \cdot \Delta x + 0$, то есть

$$dx = \Delta x. \qquad (1)$$

Пример 2. $y = x^2$. В этом случае (x - фиксировано! Это константа!) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Так как $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то мы заключаем, что $d(x^2) = 2x\Delta x$, а с учетом формулы (1), $d(x^2) = 2x dx$.

Определение. *Величина*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется производной функции $f(x)$ в точке x.

Пример 1. $c' = 0$ (c - постоянная):

$$c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

Пример 2. $f(x) = x$, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$.

Пример 3. $f(x) = \sin x$,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

Задача. Найдите производную функции $y = \cos x$.

Пример. 4. $f(x) = a^x$,

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \ln a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

частный случай - $\left(e^x\right)' = e^x$.

Пример 5. $f(x) = \log_a x$,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}\ln a}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

.

Пример 6. $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha = 0)$:

$$\left(x^\alpha\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Связь между производной и дифференциалом

Теорема. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(x)$, и в этом случае $df(x) = f'(x)dx$.*

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в x, тогда существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

то есть $f'(x) = A$ и, соответственно,

$$df(x) = f'(x)dx. \qquad (2)$$

Пусть теперь существует производная $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Тогда

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, но в этом случае

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

то есть $y = f(x)$ дифференцируема в x, причем $df(x) = f'(x)dx$.

Из (2) получаем $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$, то есть отношение функций $df(x)$ и dx постоянно и равно $f'(x)$. По этой причине, следуя Лейбницу, производную часто обозначают символом $\dfrac{df(x)}{dx}$ наряду с предложенным впоследствии Лагранжем символом $f'(x)$. В случаях, когда может возникнуть сомнение относительно переменной, по которой взята производная, эта переменная указывается в виде значка внизу: y'_x, $f'_x(x_0)$ и т.д.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке

Вспомним определение непрерывности функции в точке.

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Запишем это определение в терминах приращений.

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x, если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x) = 0$.*

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Запишем условие дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Очевидно, что при $\Delta x \to 0$ приращение $\Delta f \to 0$, что означает непрерывность функции в точке x.

Покажем, что обратное не всегда верно.

Пусть $f(x) = |x|$. Тогда в точке $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to -0}\frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{-x}{x} = -1,\quad \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to +0}\frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{x}{x} = 1.$$

Поскольку левый и правый пределы не равны, то «общего» предела не существует.

То есть в этой точке функция не имеет производной, а значит и не дифференцируема в ней.

Правила дифференцирования

Свойство 1. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в x, а c - произвольная константа, тогда $(cf(x))'=cf'(x)$.

Доказательство. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}=c\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=cf'(x)$.

Свойство 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в x, тогда $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=$$
$$=f'(x)+g'(x).$$

Свойство 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в x, тогда

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Свойство 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, причем в этой точке $g(x)\neq 0$, тогда $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(g(x)-g(x+\Delta x))}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Пример 7. $f(x) = tgx$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Задача. Докажите, что $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Производная обратной функции

Теорема. *Пусть непрерывная строго монотонная функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$.*

Тогда для обратной функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Придадим значению $y = y_0$ произвольное приращение Δy, пусть Δx - соответствующее ему приращение функции $x = g(y)$. Из монотонности функции $y = f(x)$ следует, что $\Delta x \neq 0$. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности функции $x = g(y)$ и $\Delta x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части последнего равенства стремится к $f'(x_0)$, то есть

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Эту формулу можно записать в виде $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Производные обратных тригонометрических функций

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$ $\left(-1 < x < 1,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$. Она является обратной для функции $x = \sin y$, которая имеет положительную производную на интервале $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

корень берем со знаком плюс, так как $\cos y > 0$.

Пример 9. Рассмотрим теперь функцию $y = arctgx$ $\left(-\infty < x < +\infty,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$.

Она является обратной функцией для $x = tgy$ $(x'_y > 0)$. Имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Задача. Докажите, что

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная сложной функции

Теорема. *Пусть функция* $u=\varphi(x)$ *имеет в некоторой точке* x_0 *производную* $u'_x=\varphi'(x_0)$, *а функция* $y=f(u)$ *имеет в соответствующей точке* $u_0=\varphi(x_0)$ *производную* $y'_u=f'(u_0)$.

Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ *в точке* x_0 *также имеет производную* $\left[f(\varphi(x))\right]'_x=f'_u(\varphi(x_0))\varphi'_x(x_0)$, *или, короче* $y'_x=y'_u u'_x$.

Доказательство. Придадим x_0 произвольное приращение Δx, пусть Δu - соответствующее ему приращение функции $\varphi(x)$: $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x)$, а Δy - приращение функции $f(u)$, вызванное Δu: $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)$. Тогда

$$\Delta y=y'_u\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u,$$

где $\alpha(\Delta u)$ - бесконечно малая при $\Delta u\to 0$. Доопределим функцию $\alpha(t)$ в нуле, положив $\alpha(0)=0$, чтобы она стала (если не была до этого) непрерывной при $\Delta x=0$. Разделим последнее равенство на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Так как функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в x_0, то при $\Delta x\to 0$, будет $\Delta u\to 0$, а значит, и $\alpha(\Delta u)\to 0$ (мы воспользовались теоремой о пределе сложной функции). Переходя в равенстве (1) к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $y'_x=y'_u u'_x$.

Пример 10. $(shx)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$.

Задача. Докажите, что $(chx)'=shx$, $(thx)'=\dfrac{1}{ch^2x}$, $(cthx)'=-\dfrac{1}{sh^2x}$, $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$.

С правилом дифференцирования сложной функции связано свойство, которое называется:

Инвариантность формы первого дифференциала.

Пусть функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y=f(\varphi(t))$, и пусть существуют производные y'_x и x'_t. Тогда существует и производная $y'_t=y'_x\cdot x'_t$.

Дифференциал функции y как функции от независимой переменной x выглядит следующим образом:

$$dy=y'_x dx.$$

Если рассматривать функцию $y=f(\varphi(t))$ от независимой переменной t, то дифференциал будет равен

$$dy=y'_t dt.$$

Применив формулу для производной сложной функции, получим $dy=y'_x x'_t dt$.

Так как $x_t'dt = dx$ - дифференциал функции $x = \varphi(t)$, то мы снова приходим к формуле $dy = y_x'dx$. Но здесь уже dx не является приращением независимой переменной и в случае нелинейной функции $x = \varphi(t)$ не совпадает с приращением Δx.

Таким образом, видим, что форма дифференциала даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.

Производная функции, заданной параметрически

Теорема. *Пусть функции* $x(t)$, $y(t)$ *определены и непрерывны на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *дифференцируемы на* (α, β), *а функция* $x(t)$ *строго монотонна на* $[\alpha, \beta]$. *Тогда система уравнений*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

определяет на отрезке $[a, b]$ *(с концами в точках* $x(\alpha)$, $x(\beta)$*) переменную* y *как однозначную функцию от* x*:* $y = f(x)$, *причем эта функция непрерывна на* $[a, b]$, *дифференцируема на* (a, b), *а ее производная в точке* $x_0 = x(t_0)$ (если $x'(t_0) \neq 0$) *вычисляется по формуле*

$$f'(x_0) = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)} \quad \text{(короче, } y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}\text{).}$$

Доказательство. Непрерывная строго монотонная функция $x = x(t)$ имеет непрерывную строго монотонную обратную функцию $t = t(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Так как функция $x = x(t)$ дифференцируема на интервале (α, β), то ее обратная функция $x = x(t)$ будет дифференцируемой на интервале (a, b), а ее производная будет равна $t_x' = \dfrac{1}{x_t'}$.

Выразим y через x: $y = y(t(x)) = f(x)$. Тогда

$$f'(x) = \big(y(t(x))\big)_x' = y_t' t_x' = y_t' \frac{1}{x_t'}.$$

Пример. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x = 2t - t^2 + 1,\ y = 3t - t^3 - 2$ в точке $t = 0$.

Решение. Имеем

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -2, \quad x_t' = (2 - 2t)\big|_{t=0} = 2, \quad y_t' = (3 - 3t^2)\big|_{t=0} = 3, \quad y_x'(0) = \frac{3}{2}.$$

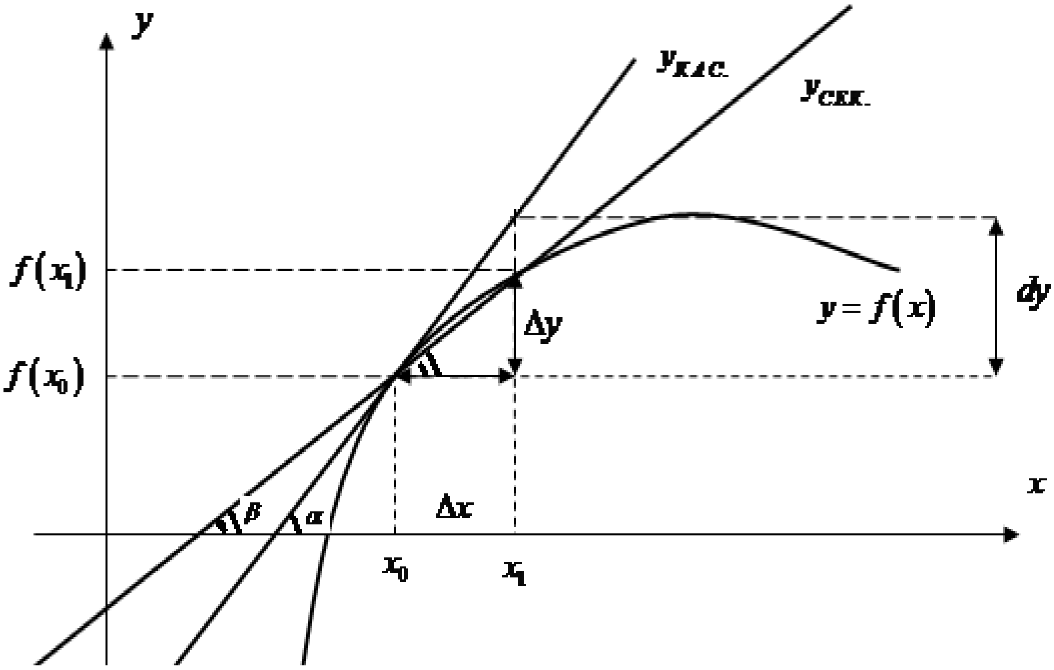
Окончательно получаем:

уравнение касательной $\quad y = \dfrac{3}{2}(x - 1) - 2$,

уравнение нормали $\quad y = -\dfrac{2}{3}(x - 1) - 2$.

Касательная, геометрический смысл производной и дифференциала

Определение. *Касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $(x_0, f(x_0))$ *называется предельное положение секущей, проведенной через точки* $(x_0, f(x_0))$ *и* $(x_1, f(x_1))$ *при* $x_1 \to x_0$.



Все описанные секущие проходят через одну точку, а при $\Delta x = (x_1 - x_0) \to 0$ их угловые коэффициенты (тангенсы углов наклона их к оси Ox) стремятся к определенному числу – угловому коэффициенту касательной: $tg\alpha = \lim\limits_{x_1 \to x_0} tg\beta$.

Пусть $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, тогда угловой коэффициент секущей равен $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, а его предельное значение при $\Delta x \to 0$ (если оно существует) совпадет с производной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Уравнение касательной в таком случае выглядит следующим образом:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Следовательно, **геометрический смысл производной** $f'(x_0)$ **– это тангенс угла наклона к оси** Ox **касательной, проведенной к графику функции** $y = f(x)$ **в точке** $(x_0, f(x_0))$**.**

Обратимся к геометрическому истолкованию понятия дифференциала. Итак,

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Нетрудно заметить, что это – **приращение ординаты касательной, соответствующее приращению абсциссы** Δx **.**

Односторонние производные.

Пусть функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. Говорят, что в точке a существует односторонняя правая производная, если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}$, который обозначается $f'_+(a)$. Аналогично определяется односторонняя левая производная $f'_-(b)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{f(b+\Delta x)}{\Delta x}$. Из свойств предела функции вытекает, что функция дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют и равны обе односторонние производные: $\exists\, f'(x_0)\Leftrightarrow\exists\, f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

Иногда и во внутренней точке существуют только односторонние производные. Примером может служить функция $y=|x|$. В точке $x=0$ она не дифференцируема, но в ней существуют обе односторонние производные: $|x|'_-=-1$, а $|x|'_+=1$.

Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в любой точке $x\in(a,b)$, то на интервале (a,b) возникает новая функция $y=f'(x)$. Функция $y=f'(x)$ сама может иметь производную $\left(f'(x)\right)'$ на (a,b), которая по отношению к исходной функции f называется второй производной от f и обозначается $f''(x)$ или $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$, а если хотят явно указать переменную дифференцирования, то пишут, например, $f''_{xx}(x)$.

Если определена производная $f^{(n)}(x)$ порядка n, то производная порядка $n+1$ определяется формулой $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'$. Для производной порядка n приняты обозначения $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$. Условились считать, что $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления производных высших порядков.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	………	$f^{(n)}(x)$
1	a^x	$a^x\ln a$	$a^x\ln^2 a$	………	$a^x\ln^n a$
2	e^x	e^x	e^x	………	e^x
3	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	………	$\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$
4	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	………	$\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$
5	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	………	$\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
6	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	………	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Формула Лейбница.

Теорема. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют на интервале* (a,b) *производные до порядка* n *включительно. Тогда для* n*-й производной их произведения справедлива следующая формула Лейбница:* $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m(u)^{(n-m)}(v)^{(m)}$.

Доказательство. При $n=1$ формула совпадает с уже доказанной формулой для производной произведения. Пусть формула верна при $n=k$, то есть

$$(uv)^{(k)}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m u^{(k-m)}v^{(m)} .$$

Тогда для $n=k+1$ имеем

$$(uv)^{(k+1)}=\left(\sum_{m=0}^{k}C_k^m u^{(k-m)}v^{(m)}\right)'=\sum_{m=0}^{k}C_k^m u^{(k+1-m)}v^{(m)}+\sum_{m=0}^{k}C_k^m u^{(k-m)}v^{(m+1)}=$$

$$=C_k^0u^{(k+1)}v+\sum_{m=1}^{k}C_k^m u^{(k+1-m)}v^{(m)}+\sum_{m=0}^{k-1}C_k^m u^{(k-m)}v^{(m+1)}+C_k^k uv^{(k+1)} .$$

Воспользуемся тем, что $C_{k+1}^0=C_k^0=C_k^k=C_{k+1}^{k+1}=1$ и перейдем в отдельных слагаемых последнего выражения к индексу $k+1$. Теперь займемся второй суммой:

$$\sum_{m=0}^{k-1}C_k^m u^{(k-m)}v^{(m+1)}=\left\{\begin{array}{c} m'=m+1\\ m=m'-1\\ m\Big|_0^{k-1}\Rightarrow m'\Big|_1^{k}\end{array}\right\}=\sum_{m'=1}^{k}C_k^{m'-1}u^{(k-(m'-1))}v^{(m')}=\{m'\to m\}=\sum_{m=1}^{k}C_k^{m-1}u^{(k+1-m)}v^{(m)} .$$

Имеем

$$(uv)^{(k+1)}=C_{k+1}^0u^{(k+1)}v+\sum_{m=1}^{k}C_k^m u^{(k+1-m)}v^{(m)}+\sum_{m=1}^{k}C_k^{m-1}u^{(k+1-m)}v^{(m)}+C_{k+1}^{k+1}uv^{(k+1)}=$$

$$C_{k+1}^0u^{(k+1)}v+\sum_{m=1}^{k}\left(C_k^m+C_k^{m-1}\right)u^{(k+1-m)}v^{(m)}+C_{k+1}^{k+1}uv^{(k+1)}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m u^{(k+1-m)}v^{(m)}$$

(мы вспомнили, что $\left(C_k^m+C_k^{m-1}\right)=C_{k+1}^m$).

Пример 1. Найти $d^{10}\left(x^2\sin x\right)$.

Решение: $\left(x^2\sin x\right)^{(10)}=C_{10}^0\sin^{(10)}x\cdot x^2+C_{10}^1\sin^{(9)}x\cdot 2x+C_{10}^2\sin^{(8)}x\cdot 2=$

$$\sin\left(x+10\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^2+10\sin\left(x+9\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\sin\left(x+8\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2=$$

$$\sin(x+\pi)\cdot x^2+20\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x+90\sin x=20x\cos x+\left(90-x^2\right)\sin x ,$$

$$d^{10}\left(x^2\sin x\right)=\left(20x\cos x+\left(90-x^2\right)\sin x\right)dx^{10}.$$

Пример 2. Найти $d^4\left(\dfrac{sh2x}{\sqrt[3]{x}}\right)$.

Решение.

Запишем формулы для производных функций, составляющих произведение.

Сначала вспомним, что, что $sh'x=chx$, а $ch'x=shx$, то есть $sh^{(2k)}x=shx$ и $sh^{(2k+1)}x=chx.$ В нашем случае $sh^{(2k)}(2x)=2^{2k}sh2x$ и $sh^{(2k+1)}(2x)=2^{2k+1}ch2x.$

Для вычисления производных второй функции воспользуемся формулой со страницы 47 при $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ или попросту продифференцируем функцию $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ четыре раза:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=-\frac{1}{3x^{4/3}},\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{(2)}=\frac{4}{9x^{7/3}},\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{(3)}=-\frac{28}{27x^{10/3}},\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{(4)}=\frac{280}{81x^{13/3}}.$$

А теперь вспомним, как выглядит «треугольник Паскаля», состоящий из биномиальных коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&&C_0^0&&&& \\ &&&C_1^0&&C_1^0&&& \\ &&C_2^0&&C_2^1&&C_2^2&& \\ &C_3^0&&C_3^1&&C_3^2&&C_3^3& \\ C_4^0&&C_4^1&&C_4^2&&C_4^3&&C_4^4 \end{array}$$

....

Окончательно получаем

$$d^4\left(\frac{sh2x}{\sqrt[3]{x}}\right)=\left(\frac{2^4 sh2x}{\sqrt[3]{x}}-\frac{4\cdot 2^3 ch2x}{3x^{4/3}}+\frac{6\cdot 2^2\cdot sh2x\cdot 4}{9x^{7/3}}-\frac{4\cdot 2\cdot ch2x\cdot 28}{27x^{10/3}}+\frac{sh2x\cdot 280}{81x^{13/3}}\right)dx^4.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

Определение. *Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума), а значение функции в ней – локальным максимумом (минимумом) функции $f(x)$, если существует окрестность $O_\delta(x_0)$ такая, что для любой точки $x\in O_\delta(x_0)$ будет справедливо неравенство $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$.*

Определение. *Точки локального максимума и минимуму называются точками локального экстремума, а значение функции в них – локальными экстремумами функции.*

Пример. Точка $x=0$ является точкой локального максимума, а точка $x=\pi$ точкой локального минимума для функции $y=\cos x$.

Определение. *Точка x_0 называется внутренней точкой промежутка X, если она принадлежит ему вместе со своей окрестностью.*

Теорема (Ферма). *Если функция $y=f(x)$ определенная на промежутке X, дифференцируема в точке внутреннего экстремума $x_0\in X$, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. $\triangleright$ Предположим для определенности, что x_0 - точка локального максимума, то есть для всех точек x из некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ будет справедливо

$$f(x)\le f(x_0).$$

Тогда

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

в то время как

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

Поскольку $f(x)$ дифференцируема в x_0, то левая и правая производные в этой точке совпадают между собой и значением производной:

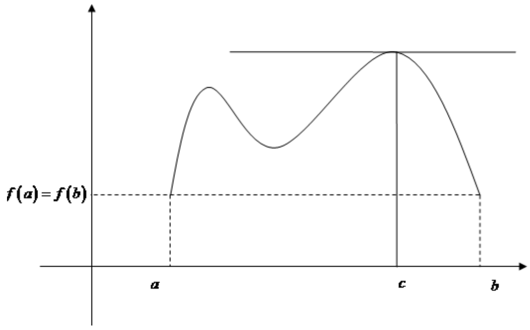
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0),$$

а это возможно только в случае $f'(x_0) = 0$. ◁

Замечание. Теорема Ферма дает необходимое условие внутреннего экстремума дифференцируемой функции, это условие не является достаточным.

Пример. У функции $y = x^3$ в нуле производная обращается в нуль, но $x = 0$ не является точкой локального экстремума этой функции.

Теорема (Ролля). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$, то найдется точка $c \in [a,b]$, в которой $f'(c) = 0$.*



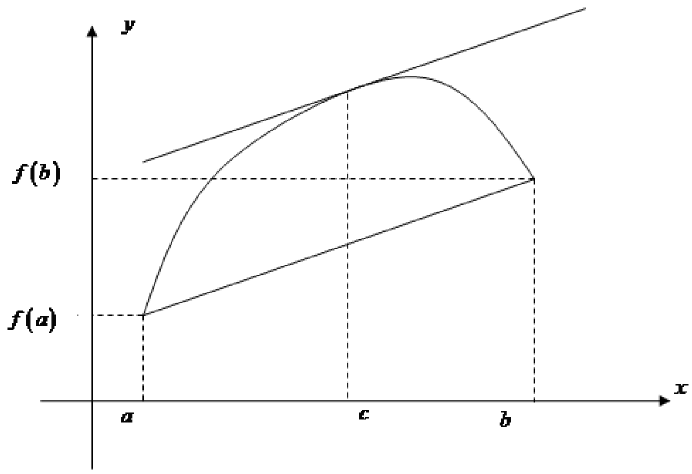
Доказательство. ▷ Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то по второй теореме Вейерштрасса найдутся точки c_1 и c_2, в которых она принимает соответственно минимальное и максимальное из своих значений на этом отрезке, то есть для

$$m = f(c_1) \le f(x) \le f(c_2) = M \qquad (x \in [a,b]).$$

Если $m = M$, то функция постоянна на $[a,b]$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a,b)$. Если же $m < M$, то поскольку $f(a) = f(b)$, одна из точек c_1, c_2 обязана лежать в интервале (a,b), а, следовательно, являться точкой внутреннего экстремума $f(x)$. По теореме Ферма производная в ней обращается в ноль. ◁

Теорема (Лагранжа о конечном приращении). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Доказательство.

▷ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

которая, очевидно, непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и принимает на концах этого отрезка равные значения: $F(a) = F(b) = f(a)$. По теореме Ролля найдется точка $c \in (a,b)$, в которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 . \lhd$$

Геометрически теорема Лагранжа означает, что в некоторой точке $c \in (a,b)$ касательная к графику функции $y = f(x)$ будет параллельна секущей, проведенной через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Доказанная формула

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{или} \quad \boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Она, очевидно, сохраняет силу и для случая $a > b$.

Теорема (Коши о конечных приращениях). *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируемы на интервале* (a,b), *причем* $g(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$.

Тогда найдется точка $c \in (a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Доказательство. $\rhd$ Перепишем нужную нам формулу в виде

$$\big(f(b) - f(a)\big) g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big) f'(c) = 0 .$$

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \big(f(b) - f(a)\big) g(x) - \big(g(b) - g(a)\big) f(x) .$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), а непосредственной подстановкой убеждаемся, что $\varphi(a) = \varphi(b)$:

$$\varphi(a) = \big(f(b) - f(a)\big) g(a) - \big(g(b) - g(a)\big) f(a) = f(b) g(a) - g(b) f(a),$$

$$\varphi(b) = \big(f(b) - f(a)\big) g(b) - \big(g(b) - g(a)\big) f(b) = -f(a) g(b) + g(a) f(b) .$$

Поэтому по теореме Ролля на интервале (a,b) найдется точка c, в которой $\varphi'(c) = 0$, то есть $\varphi'(c) = \big(f(b) - f(a)\big) g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big) f'(c) = 0$, а это и есть нужное нам равенство. $\lhd$

Правило Бернулли-Лопиталя.

Теорема*. Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и дифференцируемы на интервале* (a,b), *причем* $g'(x) \neq 0$ *на* (a,b), *и пусть* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$.

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K ,$$

то существует также и предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K .$$

Доказательство. $\rhd$ Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, полагая $f(a) = g(a) = 0$, тогда они будут непрерывны уже на всем отрезке $[a, x]$ при любом

$x \in (a,b)$. Применим к паре $f(x), g(x)$ на отрезке $[a,x]$ теорему Коши о приращениях двух функций:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Так как $c \to a+0$ при $x \to a+0$, то получаем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = K. \lhd$$

Аналогичное утверждение справедливо и для случая $x \to b-0$.

Задача*. Сформулируйте и докажите это утверждение.*

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^2+3x-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{2x+3} = -\dfrac{\pi}{10}.$

Применяя правило Лопиталя несколько раз, можно доказать следующее утверждение.

Теорема*. Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на некотором интервале* (a,b), n *раз дифференцируемы на этом интервале, причем производные* $g'(x),\dots,g^{(n)}(x)$ *не обращаются в ноль на* (a,b), *и пусть* $\lim\limits_{x\to a+0} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g^{(k)}(x) = 0, \quad (k=0,\dots,n-1)$.

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = K,$$

то существует также и предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = K \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = K \Rightarrow \dots \exists \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K.$

Аналогичная теорема справедлива и для случая $x \to b-0$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-3\cos^2 x\cdot\sin x}{6x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Теорема*. Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и дифференцируемы на* $(a,+\infty)$, *причем* $g'(x)\neq 0$ *на* $(a,+\infty)$, *и пусть* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$,

то существует также и предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

Доказательство. $\rhd$ Введем новую переменную $t=\frac{1}{x}$. Для функций $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ справедливы условия теоремы 1. В самом деле, $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ непрерывны на $\left(0,\frac{1}{a}\right]$ по теореме о непрерывности сложной функции, обе функции дифференцируемы на $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ $\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'=f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, (то же для $g\left(\frac{1}{t}\right)$), при этом $\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'=g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\neq 0$ на $\left(0,\frac{1}{a}\right)$,

а также существует предел $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$. Тогда

существует и предел $K=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. $\lhd$

Аналогичная теорема справедлива и для промежутка $(-\infty,a)$ при $x\to-\infty$.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{arcctgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^{-2}}{\frac{-1}{\left(x^2+1\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$. Мы доказали, что $arcctgx\sim\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

Выведем правило Бернулли-Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и дифференцируемы на интервале* (a,b), *причем* $g'(x)\neq 0$ *на* (a,b), *и пусть* $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$.

Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\,, \tag{1}$$

то существует также и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K\,. \tag{2}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Покажем, что существует $\delta>0$, при котором $\varepsilon>0$ в промежутке $(a,a+\delta)$ будет справедливо неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon$.

Из (1) следует, что в некотором интервале (a,d) будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

На любом отрезке $[x,d]$ $(x\in(a,d))$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Поэтому для некоторого $c\in(x,d)$ будет справедливо неравенство

$$\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Так как $c\in(a,d)$, то мы можем воспользоваться (3) и записать

$$\left|\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Последнее неравенство означает также, что функция $\dfrac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}$ ограничена на (a,d).

Функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно большие при $x\to a+0$, поэтому

$$\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}\sim\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\to a+0.$$

Это означает, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}\left(1+\alpha(x)\right),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to a+0$. Поскольку $\dfrac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}$ ограничена в нашей окрестности, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}+\beta(x), \tag{5}$$

где $\beta(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to a+0$. Возьмем $\delta>0$, при котором $\left|\beta(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ в (a,δ). Используя (4), (5) и последнюю оценку, получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|=\left|\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}+\beta(x)-K\right|\le\left|\frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}-K\right|+\left|\beta(x)\right|<\varepsilon.$$

Утверждение (2) доказано.

Пример. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim\limits_{x\to+0} x = 0.$

Алогичные теоремы справедливы и для случаев $x\to b-0,\ x\to\pm\infty.$

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{e^x} = 0.$

Формула Тейлора

Рассмотрим многочлен n-й степени $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.
Он однозначно определяется своими коэффициентами (алгебраический факт) в том смысле, что, если многочлен m-й степени $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ совпадает с $P(x)$, то $m = n$ и $b_k = a_k\ (k = 0,\ldots,n)$.

Сделав замену переменных $t = x - x_0$, можно получить разложение $P(x)$ по степеням $x - x_0$:

$$P(x) = a_0 + a_1(t+x_0) + a_2(t+x_0)^2 + \ldots + a_n(t+x_0)^n = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \ldots + c_nt^n =$$
$$= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n.$$

Такое представление тоже единственным образом определяется коэффициентами $c_k\ (k = 0,\ldots,n)$.

Выведем формулы, связывающие эти коэффициенты со значениями многочлена $P(x)$ и его производных в точке x_0. Для этого запишем

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots + c_n(x-x_0)^n \quad ,$$
$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \ldots + nc_n(x-x_0)^{n-1} \quad ,$$
$$P''(x) = 2c_2 + 3\cdot2\cdot c_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2},$$
……………………………………………………………..
$$P^{(n)}(x) = n!c_n.$$

Подставив в эти формулы $x = x_0$, получим

$$c_0 = P(x_0),\ c_1 = \frac{P'(x_0)}{1!},\ c_2 = \frac{P''(x_0)}{2!},\ldots,\ c_n = \frac{P^n(x_0)}{n!}. \qquad (1)$$

Пусть нам задана функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 все производные до порядка n включительно. И пусть нам надо найти многочлен $P_n(x) = P_n(x_0;x)$ степени не выше n такой, что $P_n(x_0) = f(x_0),\quad P_n(x_0) = f'(x_0),\ldots,\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Учитывая выведенные только что формулы (1), можем записать

$$P_n(x_0;x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2)$$

Определение. *Алгебраический полином, заданный соотношением* (2)*, называется полиномом Тейлора порядка* n *функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Определение. *Величина* $r_n(x_0;x) = f(x) - P_n(x_0;x)$
называется $n-$*м остатком или* $n-$*м остаточным членом формулы Тейлора* (3)*:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x). \quad (3)$$

Для того чтобы последнее равенство имело интерес, нам нужна информация об остаточном члене.

Формула Тейлора-Лагранжа.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ $(n+1)$ *раз дифференцируема в некоторой окрестности* $O_\delta(x_0)$*, тогда для любого* x *из этой окрестности справедлива формула*

$$r_n(x_0;x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \text{где}\ c=x_0+\theta(x-x_0)\quad(0<\theta<1).$$

Доказательство. ►Для удобства записи доказательства обозначим $r(x)=r_n(x_0;x)$ и $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$. Имеем

$$r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\ldots=r^{(n)}(x_0)=0,\ r^{(n+1)}(x)=f(x);$$

$$g(x_0)=g'(x_0)=g''(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0,\ g^{(n+1)}(x)=(n+1)!.$$

Применим к паре $r(x),g(x)$ последовательно $(n+1)$ раз теорему Коши о приращениях двух функций:

$$\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{r(x)-r(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{r'(c_1)}{g'(c_1)}=\frac{r'(c_1)-r'(x_0)}{g'(c_1)-g'(x_0)}=\frac{r''(c_2)}{g''(c_2)}=\ldots=\frac{R^{(n)}(c_n)-R^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(c_n)-g^{(n)}(x_0)}=\frac{r^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)},$$

где

$$c_1=x_0+\theta_1(x-x_0);\quad c_{k+1}=c_k+\theta_{k+1}(c_k-x_0)\ (k=1,\ldots,n-1);$$

$$c=c_n+\theta_{n+1}(c_n-x_0),\quad (0<\theta_k<1,\ k=0,\ldots,n+1).$$

Перепишем начало и конец цепочки равенств, получим $\dfrac{r(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ или

$$r_n(x_0;x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.◄$$

Формула Тейлора-Пеано.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и имеет все производные до* $(n-1)-$*го порядка включительно в некоторой окрестности* $O(x_0)$ *точки* x_0*, и пусть существует* $n-$*я производная* $f^{(n)}(x_0)$*. Тогда справедливо следующее представление*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

при $x\to x_0$.

Доказательство. ▷ Запишем нужное нам представление более кратко

$$f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Вспомним, что $P_n(x_0)=f(x_0),\quad P_n'(x_0)=f'(x_0),\ldots,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$, а также, что $r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Итак, вычислим нужный нам предел:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}.$$

Использовать далее правило Лопиталя мы не имеем права, поскольку нам не гарантировано существование $n-й$ производной функции $f(x)$ в окрестности $O(x_0)$. Но все-таки, поскольку $P_n^{(n-1)}(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)$ и $P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$, то имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-\left(P_n^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x_0)\right)}{n!(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}-\lim_{x\to x_0}\frac{\left(P_n^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x_0)\right)}{n!(x-x_0)}=f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)=0\,.$$

Нужное нам соотношение доказано. ⊲

Примеры.

Проще всего формула Тейлора выглядит при $x_0=0$ (часто ее в этом случае называют формулой Маклорена):

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

остаток в форме Пеано –

$$r_n(x)=o\left(x^n\right),$$

в форме Лагранжа –

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\text{ где } c=\theta x\quad (0<\theta<1).$$

1. Пусть $f(x)=e^x$. Тогда $f^{(k)}(x)=e^x$ $(k=1,2,3\ldots)$. В таком случае $f(0)=1$, $f^{(k)}(0)=1$ для всех $k\ge 1$, и $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$.

2. Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0)=\sin\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)$. Получаем

   $f(0)=0,\quad f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0,\quad f^{(2m+1)}(0)=\sin\left(m\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)^m\quad (m=0,1,2,..)$, и

   $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).$$

3. Пусть $f(x)=\cos x$. Тогда $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\dfrac{\pi}{2}\right)$. Получаем

   $f^{(2m)}(0)=\cos m\pi=(-1)^m$, $f^{(2m+1)}(0)=\cos\left(m\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0\quad (m=0,1,2,..)$, и

   $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^2 x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

4. Пусть $f(x)=\ln(1+x)$. Тогда $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}\quad (k=1,2,3\ldots)$. Получаем

   $f(0)=0$, $f^{(k)}(0)=(-1)^k(k-1)!$ $(k\ge 1)$, и

   $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o\left(x^n\right).$$

5. Пусть $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$. Тогда
$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ $(k=1,2,3\ldots)$. Получаем $f(0)=1$,
$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)$ $(k\geq 1)$, и

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^n}{n!}+o(x^n).$$

При $\alpha=-1$ будет

$$\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{-1(-2)x^2}{2!}+\frac{-1(-2)(-3)x^3}{3!}+\ldots+\frac{-1(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)x^n}{n!}+o(x^n)=$$
$$=1-x+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

Последняя формула чаще приводится в виде

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+o(x^n).$$

Пример. Вычислить число e с точностью $0,01$.

Решение. Запишем формулу Тейлора-Лагранжа для e^x при $x=1$:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!},\quad (0<c<1),$$

Для достижения требуемой точности нужно, чтобы

$$\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{1}{100}\Leftarrow\frac{e}{(n+1)!}<\frac{1}{100}\Leftarrow\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow(n+1)!>300.$$

Для этого достаточно взять $n=5$ $(6!=720)$. Получаем

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=2,71(6)\approx 2,72.$$

Пример. Вычислить число $\sin 1$ с точностью $0,01$.

Решение. Запишем формулу Тейлора-Лагранжа для $\sin x$ при $x=1$:

$$\sin 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\frac{\sin^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!},\quad (0<c<1).$$

Для достижения требуемой точности нужно, чтобы

$$\left|\frac{\sin^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}\right|\leq\frac{1}{(2n+3)!}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow(2n+3)!>100.$$

Для чего достаточно взять $n=1$ $(5!=120)$, то есть

$$\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=0,8(3)\approx 0,83.$$

Исследование функций методами дифференциального исчисления.

Условия монотонности функции

Теорема. *Между характером монотонности дифференцируемой на интервале (a,b) функции $f(x)$ и знаком ее производной на этом интервале существует следующая зависимость:*

1) $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)$ *не убывает,*

2) $f'(x)\equiv 0\Leftrightarrow f(x)\equiv conct$,

3) $f'(x)\leq 0\Leftrightarrow f(x)$ *не возрастает,* *4)* $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ *возрастает,*

5) $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ *убывает.*

Доказательство. $\triangleright$ 1) Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a,b), тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа при $x_1, x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть $f(x)$ не убывает.

Обратно, пусть $f(x)$ не убывает, тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

и если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$, если же $\Delta x < 0$, то и $f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$, поэтому выражение под знаком предела неотрицательно, а значит, предел неотрицателен.

Третье утверждение доказывается аналогично.

Пусть теперь $f(x) \equiv conct$, тогда $f'(x) \equiv 0$. Если же $f'(x) \equiv 0$, то для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ будет $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$, что означает постоянство нашей функции.

Доказательства четвертого и пятого утверждений аналогичны доказательствам соответствующих частей доказательств первого и третьего утверждений. Примеры функций $y = x^3$ и $y = -x^3$ на интервале $(-1;1)$ показывают, что следование в четвертом и пятом пункте – одностороннее. $\triangleleft$

Условия внутреннего экстремума функции.

Учитывая теорему Ферма, можно сформулировать следующее условие внутреннего экстремума функции:

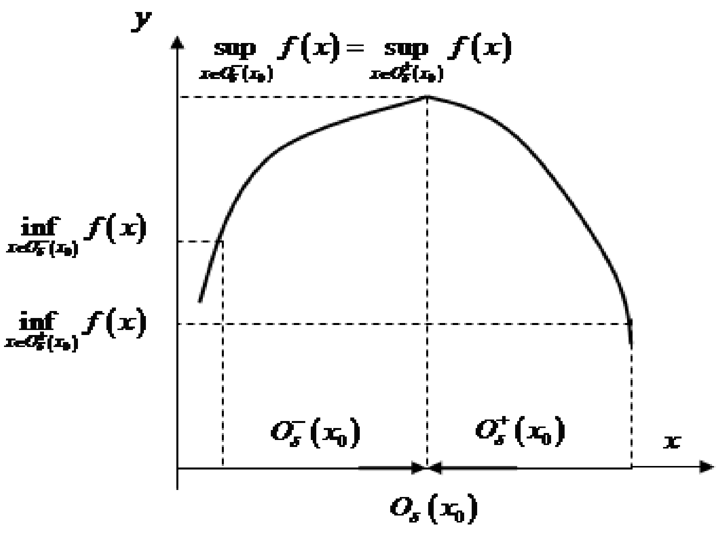
Утверждение (необходимое условие внутреннего экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *определена в некоторой окрестности* $O_\delta(x_0)$*, и пусть* x_0 *- точка экстремума* $f(x)$*, тогда либо функция недифференцируема в* x_0*, либо* $f'(x_0) = 0$.

Теорема (достаточные условия экстремума в терминах первой производной). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в окрестности* $O_\delta(x_0)$ *точки* x_0 *и дифференцируема в проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если* $f'(x) > 0$ *в* $O^-(x_0)$ *и* $f'(x) < 0$ *в* $O^+(x_0)$*, то* x_0 *- точка локального максимума* $f(x)$

2) *если* $f'(x) < 0$ *в* $O^-(x_0)$ *и* $f'(x) > 0$ *в* $O^+(x_0)$*, то* x_0 *- точка локального минимума* $f(x)$.



Доказательство. Докажем утверждение из первого пункта. Из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следует существование предела $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Так как (по предыдущей теореме)

$f(x)$ возрастает на $O_\delta^-(x_0)$, то по теореме о пределе монотонной функции (см. картинку слева)

$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\sup\limits_{x\in O_\delta^-(x_0)} f(x)$, а из трогой монотонности $f(x)$ следует, что

$f(x)<f(x_0)$ в $O_\delta^-(x_0)$.

Аналогично доказывается, что $f(x)<f(x_0)$ в $O_\delta^+(x_0)$.

То есть $f(x)<f(x_0)$ в $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$, а это означает, что x_0 - точка строгого локального максимума функции $f(x)$.

Аналогично доказывается, что x_0 - точка строгого локального минимума $f(x)$.

Теорема (достаточное условие экстремума в терминах второй производной). *Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности точки x_0, дважды дифференцируема в этой точке и $f'(x_0)=0$.*

Тогда если $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка локального минимума, а если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка локального максимума $f(x)$.

Доказательство. $\triangleright$ Запишем для функции $f(x)$ в точке x_0 формулу Тейлора-Пеано для $n=2$:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+o\left((x-x_0)^2\right).$$

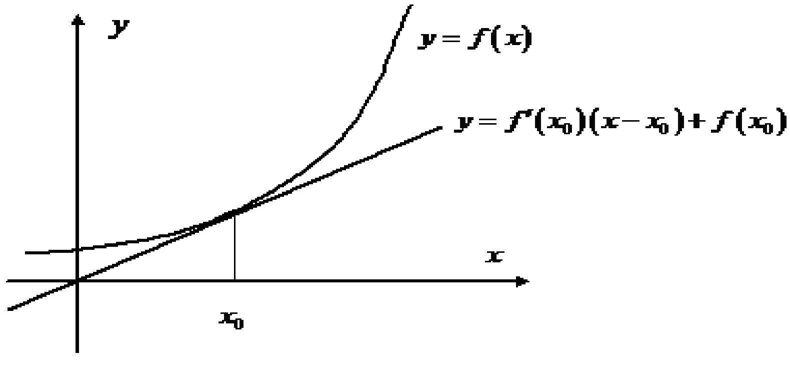
В нашем случае имеем $f(x)=f(x_0)+f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}+o\left((x-x_0)^2\right)$. Тогда

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\dfrac{f''(x_0)}{2}\neq 0$ и по теореме о сохранения знака функции, имеющей предел, существует окрестность $O(x_0)$, в которой знак $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, а поскольку $(x-x_0)^2>0$ в $O(x_0)$, то со знаком $f''(x_0)$ также будет совпадать и знак разности $f(x)-f(x_0)$. $\triangleleft$

Условия выпуклости функции.

Определение. *Дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ называется выпуклой вниз в этой точке, если в некоторой окрестности $O(x_0)$ будет выполнено*

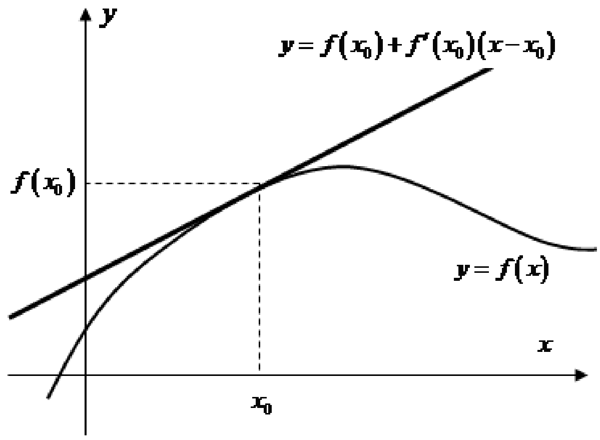
$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$



Геометрически условие выпуклости вниз функции в точке означает, что в окрестности $O(x_0)$ график функции $y = f(x)$ лежит выше касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$.

Определение. *Дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ называется выпуклой вверх в этой точке, если в некоторой окрестности $O(x_0)$ будет выполнено*

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Геометрически условие выпуклости вверх функции в точке означает, что в окрестности $O(x_0)$ график функции $y = f(x)$ лежит ниже касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$.

Определение. *Дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх) на этом интервале, если она выпукла вниз (вверх) во всех точках этого интервала.*

Достаточное условие выпуклости функции.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности точки x_0, дважды дифференцируема в этой точке, и пусть $f''(x_0) > 0$ $\left(f''(x_0) < 0\right)$.*

Тогда $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в этой точке.

Доказательство. $\triangleright$ Запишем для функции $f(x)$ в точке x_0 формулу Тейлора-Пеано для $n = 2$:

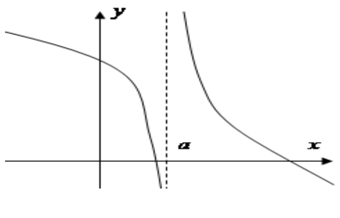
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \dfrac{f''(x_0)}{2} + o\left((x - x_0)^2\right)$. Так как

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \dfrac{f''(x_0)}{2} \ne 0$, то по теореме о сохранении знака функции, имеющей предел,

существует окрестность $\overset{\circ}{O}(x_0)$, в которой знак $g(x)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, а

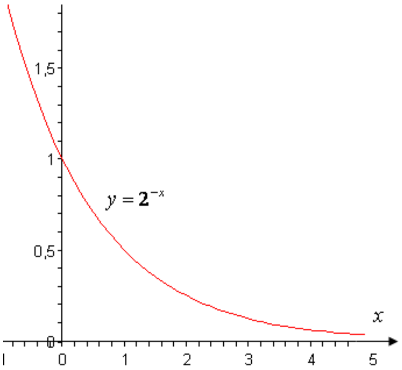
поскольку $(x - x_0)^2 > 0$ в $\overset{\circ}{O}(x_0)$, то со знаком $f''(x_0)$ также будет совпадать и знак разности $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. $\triangleleft$

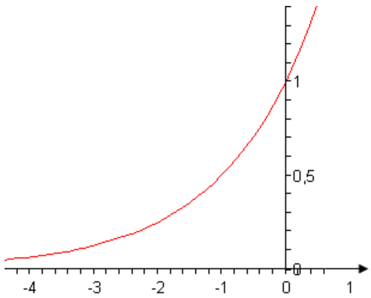


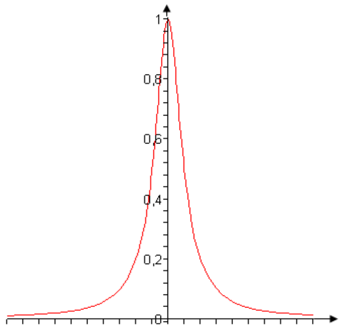
Асимптоты

Определение. *Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.*

Определение. *Прямая* $y = b$ *называется правой (левой) горизонтальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ *(* $x \to -\infty$ *для левой).*

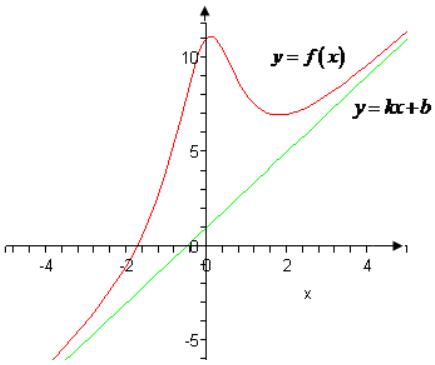






Если левый предел равен правому, то говорят просто о горизонтальной асимптоте.

Определение. *Прямая* $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если* $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *- бесконечно малая функция при* $x \to \infty$. *Если* $\alpha(x)$ *- бесконечно малая при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, *то говорят о правой (соответственно, левой) наклонной асимптоте.*



Утверждение. *Если прямая* $y = kx + b$ *- наклонная асимптота графика функции* $y = f(x)$, *то*

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ а } b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

и

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(kx + b + \alpha(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(b + \alpha(x) \right) = b.$$

Пример. Найдем наклонную асимптоту функции $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$.

Имеем:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^3 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right) = 1.$$

Наклонная асимптота графика прямая $y = 2x + 1$ (графики пары чуть выше).