17. Докажите теорему о пределе сложной функции.

Теорема *(о пределе сложной функции). Пусть функция* $y = g(x)$*, определенная в проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_h(a)$ *точки* a*, имеет предел* b *при* $x \to a$*:*

$$b = \lim_{x \to a} g(x). \tag{1}$$

И пусть функция $z = f(y)$ *определена в некоторой окрестности точки* b*, содержащей* $g\left(\overset{\circ}{O}_h(a)\right)$*, и непрерывна в точке* b*.*

Тогда сложная функция $z = f(g(x))$ *определена в* $\overset{\circ}{O}_h(a)$ *и существует предел*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b). \tag{2}$$

(Другими словами, $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)$).

Доказательство. ▸ Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $f(y)$ в точке b следует

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall y \big(y \in O_\delta(b) \Rightarrow f(y) \in O_\varepsilon(f(b)) \big), \tag{3}$$

а из существования предела (1), что

$$\exists \sigma(\delta) > 0 \ \forall x \left(x \in \overset{\circ}{O}_\sigma(a) \Rightarrow y = g(x) \in O_\delta(b) \right). \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 \forall x \left(x \in \overset{\circ}{O}_\sigma(a) \Rightarrow f(g(x)) \in O_\varepsilon(f(b)) \right).$$

Существование предела (2) доказано. ◂