Ограниченные множества.

Говорят, что множество $X \subset \mathbf{R}$ ограничено сверху (снизу), если существует число $C \in \mathbf{R}$ $\left(c \in \mathbf{R}\right)$ такое, что для любого $x \in X$ будет справедливо $x \le C$ (соответственно $c \le x$).

Запишем определение ограниченного сверху множества с использованием кванторов:

$$\exists C \ \forall x \in X \ \left(x \le C\right)$$

А теперь определение ограниченного снизу множества:

Число C в этом случае называется *верхней (а c соответственно нижней) границей множества X .*

Определение. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется ограниченным.

Если c нижняя, а C - верхняя границы ограниченного множества, то это означает, что оно целиком содержится в отрезке $\left[c;C\right]$. Очевидно, что в таком случае оно содержится в некотором отрезке с центром в нуле. Отсюда следует еще одно определение ограниченного множества.

Определение. Множество X ограничено, если

$$\exists M > 0 \ \forall x \in X \ \left(|x| \le M\right).$$

Если множество не является ограниченным, то оно не может содержаться ни в каком конечном отрезке. Запишем отрицание ограниченности с помощью кванторов (о построении отрицаний высказываний, содержащих кванторы см. Приложение 1 с. 4).

Определение. Множество X не ограничено, если

$$\forall M > 0 \ \exists x \in X \ \left(|x| > M\right).$$

Упражнение. Записать определение неограниченного сверху (снизу) множества.

Определение. *Элемент a множества X называется максимальным (соответственно минимальным) элементом этого множества, если для всех $x \in X$ будет выполнено соотношение $x \le a$ (соответственно $a \le x$):*

$$a = \max X := \left(a \in X \wedge \forall x \in X \left(x \le a\right)\right);$$

$$a = \min X := \left(a \in X \wedge \forall x \in X \left(x \ge a\right)\right).$$

Из определения максимального (соответственно минимального) элемента множества видно, что, если такой элемент существует, то он единственный.

Не во всяком множестве найдется максимальный или минимальный элемент. Например, в полуинтервале $\left[0;1\right)$ существует минимальный, но не существует максимального элемента, а в полуинтервале $(0;1]$ наоборот, существует максимальный, но нет минимального.

Определение. *Если множество* X *ограничено сверху, то наименьшая из его верхних границ называется точной верхней границей или верхней гранью множества* X *и обозначается* $\sup X$.

Записанное с помощью кванторов это определение выглядит следующим образом.

$$s = \sup X := \forall x \in X\,(x \le s) \wedge \left(\forall s' < s\ \exists x' \in X\,(x' > s')\right)$$

Аналогично определяется нижняя грань множества.

Определение. Если множество X *ограничено снизу, то наибольшая из нижних границ множества называется точной нижней границей или нижней гранью множества* X *и обозначается* $\inf X$.

То же с кванторами:

$$i = \inf X := \forall x \in X\,(i \le x) \wedge \left(\forall i' > i\, \exists x' \in X\,(x' < i')\right).$$

Обозначения верхней и нижней граней происходят от латинских слов supremum – наивысшее, infimum – наинизшее.

Используются также обозначения $\inf x,\ \sup x,\ \min x,\ \max x$.