Функциональные ряды – определения и основные теоремы.

Определения.

Функциональный ряд – ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, элементами которого являются функции.

Множество X *называется* ***множеством сходимости функционального ряда****, если на нем последовательность частичных сумм* $U_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ *сходится.* ***Предел последовательности частичных сумм называется суммой ряда.***

Пример 1. Определить множество сходимости и предельную функцию ряда $\sum_{k=0}^{\infty} x^n$.

Решение. Ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии. Он сходится на множестве $X=(-1,1)$ к функции

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x},$$

а при $|x|\geq 1$ расходится.

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ***сходится равномерно на множестве*** X ***к*** $U(x)$***, если к*** $U(x)$ ***на этом множестве равномерно сходится последовательность частичных сумм ряда, то есть***

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\left|U_n(x)-U(x)\right|=0.$$

или

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\left((x\in X)\wedge(n>N)\Rightarrow\left|U_n(x)-U(x)\right|<\varepsilon\right).$$

Критерии Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ **сходится равномерно на** X **тогда и только тогда, когда**

$$\lim_{n,m\to\infty}\sup_{X}\left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right|=0.$$

Доказательство. $\triangleright$

Запишем формулировку критерия Коши для равномерной сходимости частичных сумм нашего ряда.

Последовательность частичных сумм $U_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n,m\to\infty}\sup_{X}\left|U_m(x)-U_n(x)\right|=0.$$

Последнее утверждение эквивалентно

$$\lim_{n,m\to\infty}\sup_{X}\left|U_m(x)-U_n(x)\right|=0\Leftrightarrow\lim_{n,m\to\infty}\sup_{X}\left|U_m(x)-U_{n-1}(x)\right|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n,m\to\infty}\sup_{X}\left|\sum_{k=1}^{m} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n-1} u_k(x)\right|=0\overset{m>n}{\Leftrightarrow}\lim_{n,m\to\infty}\sup_{X}\left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right|=0.$$

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема (признак Вейерштрасса). **Пусть функции $u_k(x)$ удовлетворяют на множестве X неравенству $\left|u_k(x)\right| \le c_k$. Тогда, если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X.**

Доказательство. $\triangleright$ Из сходимости числового ряда следует (критерий Коши сходимости числовых рядов), что

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} c_k = 0.$$

Тогда

$$\sup_X \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| \le \sup_X \sum_{k=n}^{m} \left|u_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{m} c_k \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, исходный ряд удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости. $\triangleleft$

Пример 2. Исследовать сходимость функционального ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{(n+1)^2(2+\cos kx)}$ на оси $(-\infty,+\infty)$.

Решение. Оценим по абсолютной величине общий член ряда:

$$\left|\frac{\sin kx}{(n+1)^2(2+\cos kx)}\right| \le \frac{1}{(n+1)^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ сходится. Поэтому исходный ряд сходится равномерно на всей числовой оси по признаку Вейерштрасса.

Определение. Говорят, что *последовательность функций* $f_n(x)$ ***равномерно ограничена на множестве*** X, если существует такое число M, что для всех номеров n будет справедливо $\sup\limits_{x\in X} \left|f_n(x)\right| \le M$.

Определение. *Последовательность функций* $f_n(x)$ *называется* ***неубывающей (невозрастающей) на множестве*** X, если для всех $x \in X$ таковой является числовая последовательность $f_n(x)$. Неубывающие и невозрастающие на множестве последовательности функций называются *монотонными* последовательностями на этом множестве.

Теорема (признак Дирихле). *Для равномерной сходимости на множестве X ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) последовательность функций $a_n(x)$ монотонна и равномерно стремится к нулю на множестве X;

2) частичные суммы $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$ равномерно ограничены на X.

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $\left|B_n(x)\right| \le M \quad (x \in X,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Поскольку последовательность $a_n(x)$ монотонна, то для каждого $x \in X$ мы можем воспользоваться оценкой, доказанной на основании преобразования Абеля при доказательстве признака Дирихле сходимости числовых рядов (см. «Лекции 3 модуль», стр. 36-37):

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| \le 2M\left(\left|a_m(x)\right| + \left|a_n(x)\right|\right) \le 4M \max\left\{\left|a_m(x)\right|, \left|a_n(x)\right|\right\}.$$

Если последовательность $a_n(x)$ равномерно стремится к нулю, то начиная с некоторого номера N будет $\sup\limits_{x\in X}\left|a_n(x)\right| < \varepsilon \quad (n \ge N)$. Тогда при $n, m \ge N$ получим

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| \le 4M\varepsilon,$$

а это означает, что для нашего ряда справедлив критерий Коши равномерной сходимости. ⊲

Пример 3. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \quad (\varepsilon \in (0, \pi))$.

При $\alpha > 0$ ряд сходится равномерно по признаку Дирихле на всем отрезке, так как последовательность функций $a_n(x) = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ равномерно стремится к нулю, а частичные суммы $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \dfrac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} < \infty$ - равномерно ограничены на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

(доказательство последнего неравенства см. «Лекции 3 модуль», стр. 37).

Можно показать, что на интервале $(0, 2\pi)$ сходимость только поточечная, но не равномерная.

Непрерывность суммы сходящегося функционального ряда

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывны на множестве X и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X к функции $U(x)$.

Тогда сума ряда $U(x)$ непрерывна на X.

Доказательство. ⊳ Заметим, что последовательность частичных сумм $U_n(x)$ непрерывна и сходится равномерно, а далее применяем к $U_n(x)$ теорему о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. ⊲

Почленное интегрирование сходящегося функционального ряда

Теорема. Пусть функции $u_k(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $U(x)$. Тогда

$$\int_a^b U(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx.$$

Доказательство. ⊳ Частичные суммы ряда - $U_n(x)$ непрерывны, кроме того, $\int\limits_a^b U_n(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)\,dx$. По предыдущей теореме о почленном интегрировании равномерно сходящейся функциональной последовательности

$$\int_a^b U(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b U_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx\,.\triangleleft$$

Почленное дифференцирование функционального ряда

Теорема. Пусть функции $u_k(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$ и пусть на этом отрезке ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится к функции $U(x)$, а ряд, составленный из производных сходится равномерно. Тогда

$$U'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

Для доказательства достаточно применить теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности к последовательности частичных сумм ряда.

Степенные ряды

Определение. *Степенным рядом с центром в точке x_0 называется ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\,. \tag{1}$$

Пример 1. Определить множества сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}n^2}{(n+1)^2(x-1)^n}\right| = |x-1|$.

Видим, что $|x-1|<1$ на интервале $(0,2)$ и больше единицы вне отрезка $[0,2]$.

При $x=0$ и $x=2$ получаем абсолютно сходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Область сходимости ряда – отрезок $[0,2]$.

Пример 2. Определить множества сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}2^n}{2^{n+1}(x+2)^n}\right| = \frac{|x+2|}{2}$.

$\frac{|x+2|}{2}<1$ на интервале $(-4,0)$ и больше единицы вне отрезка $[-4,0]$. При $x=-4$ и $x=0$ получаем расходящиеся ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$. Область сходимости ряда – интервал $(-4,0)$.

Пример 3. Определить множества сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!\,x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$ для всех $x\in(-\infty,\infty)$. Область сходимости ряда – вся ось.

Пример 4. Определить множества сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n!$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)!}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$ для всех $x \neq 0$. Область сходимости ряда – точка $x = 0$.

Пример 5. Определить множества сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n}\right| = |x| < 1$ на интервале $(-1,1)$ и больше единицы вне отрезка $[-1,1]$. При $x=-1$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, а при $x=1$ - расходящийся $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Область сходимости ряда – полуинтервал $[-1,1)$.

Видим, что множества сходимости этих степенных рядов представляют собой промежутки с центром в точке x_0 и с включенными или нет одним или двумя концами. Это будет справедливо для всех степенных рядов.

Заметим, что ряд (1) заменой переменной $t = x - x_0$ переводится в ряд с центром в нуле, поэтому все теоремы для степенных рядов мы будем доказывать для $x_0 = 0$.

Теорема (Абеля). Пусть дан степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \qquad \textbf{(2)}$$

тогда:

1. **Если ряд (2) сходится в некоторой точке x_0, то он сходится, и притом абсолютно, в любой точке x_1 такой, что $|x_1| < |x_0|$.**
2. **Если ряд (2) расходится в x_0, то он расходится во всех точках x_1 таких, что $|x_1| > |x_0|$.**

Доказательство. $\triangleright$ Пусть числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \qquad (3)$$

сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, и, следовательно, сходящаяся последовательность $a_n x_0^n$ ограничена, то есть

$$\exists M:\ \forall n\ \left|a_n x_0^n\right| < M\,.$$

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \qquad (4)$$

Пусть $|x_1| < |x_0|$. Имеем $\left|a_n x_1^n\right| = \left|a_n x_0^n\right|\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n$ сходится, то по признаку сравнения для числовых рядов сходится и ряд (4).

Пусть теперь ряд (3) расходится и $|x_1| > |x_0|$. Если бы ряд (4) сходился, то, по доказанному выше, сходился бы и ряд (3), что неверно. Следовательно, ряд (4) расходится.$\triangleleft$

Область сходимости степенного ряда.

Теорема. Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, область сходимости которого состоит более, чем из одной точки, существует такой интервал $(-R;R)$ (конечный или бесконечный), внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне отрезка $[-R,R]$ ряд расходится.

Доказательство. $\triangleright$ Обозначим через X множество сходимости нашего ряда. Так как этот ряд всегда сходится при $x=0$, то $X \neq \varnothing$. Положим $R = \sup X$.

Если $R=0$, то множество сходимости состоит из одной точки. В самом деле, если бы ряд сходился в некоторой точке $x_0<0$, то сходился бы для всех x таких, что $|x|<|x_0|$, в том числе и в точке $x=\dfrac{|x_0|}{2}>R$.

Пусть теперь $R>0$. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in (-R;R)$. По определению верхней грани (так как $|x_1|<R$) найдется $x_2 \in X$ такое, что $|x_1|<|x_2|\le R$. Следовательно, по теореме Абеля в точке x_1 наш ряд сходится абсолютно.

С другой стороны, пусть $|x_1|>R$. Тогда выберем точку x_2 так, чтобы $R<x_2<|x_1|$. Поскольку рассматриваемый ряд в точке x_2 расходится (точка x_2 лежит правее верхней грани множества сходимости), то по теореме Абеля ряд расходится в точке x_1. $\triangleleft$

Определение. *Интервал $(-R;R)$ называется интервалом сходимости, а число R радиусом сходимости ряда.*

Замечание. *Интервал сходимости ряда (1) имеет вид $(x_0-R;x_0+R)$.*

Формулы для вычисления радиуса сходимости

Теорема. Пусть для коэффициентов степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (ряда (2)) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=R; \qquad \textbf{(5)}$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R. \qquad \textbf{(6)}$$

Тогда R будет радиусом сходимости ряда (2).

Доказательство. $\triangleright$ Покажем, что предел в (5) – радиус сходимости ряда (2). Возьмем произвольную точку $x\in(-R;R)$. Для исследования абсолютной сходимости ряда (2) в точке x воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|x|}{R}<1,$$

(если $R=\infty$, то предел равен нулю) то есть ряд (2) в точке x сходится абсолютно. Если $|x|>R$, то

$$\lim_{n\to\infty}|a_n x^n|=\lim_{n\to\infty}\left(|x|\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n=\left(\frac{|x|}{R}\right)^{\infty}=\infty,$$

а, следовательно, ряд (2) в x расходится.

Теперь обратимся к формуле (6). Пусть $x \in (-R; R)$. Для исследования абсолютной сходимости ряда (2) в точке x воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{R} < 1,$$

то есть ряд сходится. Пусть теперь $|x| > R$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{R} > 1,$$

и по признаку Даламбера ряд (2) в точке x расходится.◁

Пример 6. Найти множества сходимости степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n}$.

Решение. Радиус сходимости ряда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)2^{n+1}}{2^n (n+1)} \right| = 2$, следовательно, интервал сходимости – $(-1,3)$. В точке $x=-1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n} \Bigg|_{x=-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ сходится (по признаку Лейбница), а в $x=3$ – $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n} \Bigg|_{x=3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$ – расходится. Множество сходимости рассматриваемого ряда – полуинтервал $[-1,3)$

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена степенным рядом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \textbf{(2)}$$

то есть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, и пусть R - радиус сходимости этого ряда.

Тогда внутри интервала сходимости исходный степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, то есть при всех $x \in (-R, R)$ будет верно

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1};$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Причем радиусы сходимости полученных рядов тоже будут равны R.

Доказательство. ▷ Докажем возможность почленного интегрирования. Возьмем $x \in (-R, R)$ и выберем r так, чтобы $0 < |x| < r < R$. Тогда для всех $t \in [0; x]$ (или $[x; 0]$, если $x < 0$) и $n \geq 0$ будет справедливо неравенство

$$|a_n t^n| \leq |a_n||x|^n = |a_n| r^n \left|\frac{x}{r}\right|^n.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ вытекает ограниченность последовательности $a_n r^n$, а так как $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$, то получается, что последовательность $|a_n t^n|$ мажорируется на отрезке $[0; x]$ ($[x; 0]$) элементами сходящегося числового ряда. В таком случае, по теореме

Вейерштрасса степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится равномерно на этом отрезке и допускает почленное интегрирование на нем. Из произвольности выбора точки x следует, что радиус сходимости R_I проинтегрированного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{7}$$

не меньше R:

$$R \le R_I .$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} , \tag{8}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (2). Выберем r и r_2 так, чтобы $0 < r_1 < r_2 < R$. Тогда для любой точки $x \in [-r_1; r_1]$ будет справедливо

$$\left|a_n n x^{n-1}\right| \le |a_n| r_2^n \frac{n}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n .$$

Так как последовательность $|a_n|\frac{r_2^n}{r_1}$ ограничена $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n r_2^n = 0\right)$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд из производных (8) сходится равномерно на $[-r_1; r_1]$, а значит, поскольку ряд (2) сходится на этом отрезке, то он допускает почленное дифференцирование на $[-r_1; r_1]$. Из произвольности выбора r_1 следует, что радиус сходимости продифференцированного ряда R_D не меньше, чем радиус сходимости исходного:

$$R \le R_D .$$

Так как ряд (2) получен почленным дифференцированием ряда из интегралов (7) и (с точностью до одного слагаемого) и почленным интегрированием ряда из производных (8), то

$$R_I \le R \text{ и } R_D \le R .$$

Объединяя все неравенства, связывающие три радиуса сходимости, убеждаемся в том, что эти радиусы равны.

Ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда для всех значений x из этой окрестности имеет место ***формула Тейлора***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x).$$

При этом n может быть любым. Остаточный член в формуле может быть представлен в форме Лагранжа (тогда мы получаем формулу Тейлора-Лагранжа, см. «Лекции, 2 модуль», стр. 57)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ при $\theta \in (0;1)$.

Определение. Рядом Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0 называется ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Для того чтобы имело место равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k , \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора при этом значении x стремился к нулю с возрастанием n.

Часто приходится иметь дело со случаем, когда $x_0 = 0$. Тогда функция $f(x)$ порождает ряд непосредственно по степеням x:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$

Формула Тейлора-Лагранжа для этого случая выглядит следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (\theta \in (0;1)).$$

Примеры разложений в ряд Тейлора.

Теорема. Если функция $f(x)$ в окрестности $O_R(x_0)$ имеет производные всех порядков, и все эти производные в данной окрестности ограничены в совокупности, то есть

$$\exists M \left(x \in O_R(x_0) \Rightarrow \left| f^{(n)}(x) \right| \le M \right),$$

то во всей окрестности имеет место разложение (9).

Доказательство. ⊳ В самом деле, оценим остаточный член формулы Тейлора-Лагранжа для этого случая:

$$\left| r_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le M \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} .$$

При стремлении n к бесконечности последнее выражение стремится к нулю, что следует из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$. ⊲

Эта теорема применима к функциям e^x, $\sin x$, $\cos x$ на любом конечном промежутке $(-R;R)$. Выпишем их разложения:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} .$$

Теорема. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри интервала сходимости является рядом Маклорена (рядом Тейлора с центром в нуле) для своей суммы.

Доказательство. ⊳ Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Вычислим значения функции $f(x)$ и всех ее производных в нуле, пользуясь возможностью почленного дифференцирования степенного ряда:

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big|_{x=0} = a_0 \Rightarrow a_0 = f(0);$$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n x^{n-1},\;\; f'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}\Big|_{x=0}=a_1 \Rightarrow a_1=f'(0);$$

$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2},\;\; f''(0)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}\Big|_{x=0}=a_2 2!\Rightarrow a_2=\frac{f''(0)}{2!};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(0)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)x^{n-k}\Big|_{x=0}=a_k k!,\;\; \Rightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.\lhd$$

Запишем формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\qquad |x|<1,$$

а также два ее варианта:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\qquad |x|<1, \tag{10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\qquad |x|<1. \tag{11}$$

Ряды (10) и (11) внутри области сходимости (на интервале $(-1;1)$) можно почленно интегрировать, интервал сходимости полученных рядов будет таким же. Получим два разложения:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \qquad\qquad arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Вспомним формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k x^k=1+\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k. \tag{12}$$

Сумма в (12) - это разложение в ряд Тейлора с центром в нуле функции $(1+x)^m$. Эта сумма конечна, так как все производные $(1+x)^m$ порядка выше m равны нулю, равенство справедливо для любого x. Оказывается, что на интервале $(-1;1)$ аналогичное равенство будет верным и для произвольной степени α.

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(1-\alpha)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^k}{k!}+\ldots$$

(без доказательства).

Покажем, что не каждая функции представима своим рядом Тейлора. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

При $x\neq 0$ функция бесконечно дифференцируема, и ее $k-$я производная имеет вид $f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\sum_{m=3}^{3k}\frac{c_m}{x^m}$. Покажем, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в нуле, и все ее производные равны нулю. Воспользуемся методом математической индукции. При $k=1$ получаем $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$.

Пусть $f^{(k)}(0)=0$. Тогда $f^{(k+1)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sum\limits_{m=3}^{3k}\dfrac{c_m}{x^m}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{m=3}^{3k}\dfrac{c_m}{x^{m+1}}}{e^{1/x^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{m=3}^{3k}c_m t^{m+1}}{e^{t^2}}=0$.

Таким образом, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0\neq f(x)$.

Ряды Фурье

Элементы теории евклидовых пространств.

Определение. Евклидовым пространством называется множество, на котором определены операции сложения и умножения на число (с обычными свойствами), а также функция двух аргументов, называемая скалярным произведением, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(x,x)\geq 0,\ (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0,$
2. $(x,y)=(y,x),$
3. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\quad \forall\lambda\in R,$
4. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z).$

Условия 1-4 называются аксиомами скалярного произведения.

Элементы евклидова пространства называются векторами. Норма (длина вектора) определяется по формуле $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Расстояние между элементами x и y - норма (длина) разности: $\rho(x,y)=\|x-y\|$. Последовательность векторов x_n называется сходящейся к вектору x, если $\rho(x_n,x)\underset{n\to\infty}{\to}0$. Векторы f и g евклидового пространства называются ортогональными, если $(f,g)=0$.

Из аксиом 1-4 вытекает ***неравенство Коши-Буняковского***

$$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Геометрический смысл: модуль скалярного произведения векторов не превосходит произведения их длин.

Доказательство. $\triangleright$ Возьмем произвольные векторы $x,\ y$ и определим следующим образом функцию от действительного аргумента λ

$$0\leq\varphi(\lambda)=(\lambda x+y,\lambda x+y)=(\lambda x,\lambda x)+(\lambda x,y)+(y,\lambda x)+(y,y)=\lambda^2(x,x)+2\lambda(x,y)+(y,y).$$

Из неотрицательности квадратного трехчлена $\varphi(\lambda)$ следует, что его дискриминант неположителен:

$$\frac{D}{4}=(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leq 0,$$

а из последнего неравенства уже непосредственно следует нужное нам неравенство.

Примеры евклидовых пространств.

Пространство $\mathbf{R}^n$ ***(*** $n-$ мерное евклидово пространство***).***

Это пространство $n-$ мерных векторов $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ с действительными координатами и обычными операциями сложения и умножения на число. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ определяется по формуле $(\overline{x},\overline{y})=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k$, а норма, соответственно, $\|\overline{x}\|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$. Справедливость аксиом 1-4 для так определенного скалярного произведения очевидна. При $n = 1$ получаем пространство $\mathbf{R}$, элементами которого являются действительные числа, скалярное произведение совпадает с обычным произведением, а норма равна абсолютной величине числа.

Пространство $\tilde{C}_2[a,b]$.

Рассмотрим множество ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций, имеющих на нем не более чем конечное число точек разрыва и только первого рода.

Нормируем наши функции в точках разрыва, полагая

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right),$$

и введем на этом множестве обычным образом операции сложения и умножения на число, а скалярное произведение определим по формуле (мы знаем, что такие функции дифференцируемы по Риману)

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{1}$$

Определенное таким образом множество функций образует евклидово пространство, которое обозначается $\tilde{C}_2[a,b]$.

Справедливость аксиом (2)-(4) для определенного в (1) скалярного произведения очевидна. Проверим вторую часть 1-й аксиомы. Пусть

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что если $f(x) \not\equiv 0$, то она будет отлична от нуля в некоторой точке своей непрерывности. Пусть это будет точка $x_0 \in (a,b)$ $\left(\left|f(x_0)\right| = h > 0\right)$. Тогда по теореме о сохранении знака непрерывной функцией в некоторой $O_\delta(x_0) \subset (a,b)$ будет справедливо $\left|f(x)\right| > \dfrac{h}{2}$. Получим

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx > \frac{h^2}{4} \cdot 2\delta > 0,$$

что противоречит (2).

Норма вектора в пространстве $\tilde{C}_2[a,b]$ определяется, в соответствии с введенным скалярным произведением, по формуле

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx},$$

расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ равно

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx}.$$

Это расстояние называется среднеквадратическим расстоянием. Если последовательность функций $f_n(x)$ сходится в метрике пространства $\tilde{C}_2[a,b]$, то есть $\rho(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то говорят, что последовательность f_n сходится к f в смысле среднего квадратического отклонения**.** Неравенство Коши-Буняковского в $\tilde{C}_2[a,b]$ выглядит следующим образом:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\,.$$

Пример. Рассмотрим $f(x)=x,\ \ g(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ \ 0, \text{ если } \ x=\dfrac{1}{2},\\ -1, \text{ если } \dfrac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$ в пространстве $\tilde{C}_2[0,1]$.

Поведя несложные выкладки, убеждаемся в том, что $\|f\|=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ \|g\|=1,\ \ (f,g)=-\dfrac{1}{4},$

$\rho(f,g)=\sqrt{\dfrac{11}{6}}$. Убедимся в справедливости неравенства Коши-Буняковского для этих функций: $\left|-\dfrac{1}{4}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1$.

Ортогональные системы в евклидовых пространствах.

Определение. Система векторов $\{f_1,\ldots,f_n,\ldots\}$ ***называется ортогональной в евклидовом пространстве, если для любых номеров*** $n\ne m$ ***будет выполнено*** $(f_n,f_m)=0$ ***(функции попарно ортогональны).***

Определение. Ортогональная система векторов $\{e_1,\ldots,e_n,\ldots\}$ ***называется ортонормированной, если длины всех ее векторов равны единице:*** $\|e_n\|=1\ (n=1,2,\ldots)$**.**

В евклидовом пространстве справедлива ***теорема Пифагора***. Докажем ее для системы из n ортогональных векторов.

Теорема. Пусть $f_1,\ldots,f_n$ **попарно ортогональные векторы евклидова пространства. Тогда**

$$\|f_1+\ldots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\ldots+\|f_n\|^2\,.$$

Доказательство. $\triangleright$

$$\left\|\sum_{k=1}^n f_k\right\|^2=\left(\sum_{k=1}^n f_k,\sum_{l=1}^n f_l\right)=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{l=1}^n (f_k,f_l)\right)=\sum_{k=1}^n\|f_k\|^2\,.\triangleleft$$

Примеры ортогональных и ортонормированных систем в евклидовых пространствах.

В пространстве $\mathbf{R}^3$ ортогональную систему составляют, например, векторы

$$\overline{f}_1=(1;1;0),\ \overline{f}_2=(1;-1;0),\ \overline{f}_3=(0;0;2).$$

Если мы в этой системе каждый вектор разделим на его длину (нормируем его), то получится ортонормированная система

$$\overline{g}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right),\ \overline{g}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right),\ \overline{g}_3=(0;0;1).$$

Самая естественная ОНС в $\mathbf{R}^3$ - канонический базис

$$\overline{i}=(1;0;0),\overline{j}=(0;1;0),\ \overline{k}=(0;0;1).$$

Тригонометрическая система.

Определение. Тригонометрической называется система функций

$$1,\ \sin x,\ \sin 2x,\ldots,\sin nx,\ldots\cos x,\cos 2x,\ldots,\cos nx,\ldots\ . \qquad (3)$$

Она является ортогональной системой в пространстве $\tilde{C}_2[-\pi,\pi]$.

Проверим это утверждение. Возьмем произвольное $n \geq 1$:

$$\left(1, \sin nx\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad \left(1, \cos nx\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

что означает, что $f\left(x\right) = 1$ ортогональна функциям $\sin nx,\ \cos nx$ при всех номерах n.

Теперь возьмем пару чисел $n \neq m$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(n-m\right)x - \cos\left(n+m\right)x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(n-m\right)x}{n-m} - \frac{\sin\left(n+m\right)x}{n+m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(n-m\right)x + \cos\left(n+m\right)x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(n-m\right)x}{n-m} + \frac{\sin\left(n+m\right)x}{n+m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

то есть функции $\sin nx$ и функции $\cos nx$ попарно ортогональны.

Наконец покажем, что функция $\sin nx$ ортогональна функции $\cos mx$ для любых номеров n и m:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\left(n+m\right)x + \sin\left(n-m\right)x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(n+m\right)x}{n+m} + \frac{\cos\left(n-m\right)x}{n-m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично проверяется взаимная ортогональность функций

$$1,\ \sin\frac{\pi x}{l},\ ..., \sin n\frac{\pi x}{l}, ...\ \cos\frac{\pi x}{l}, ..., \cos n\frac{\pi x}{l}, ... \tag{4}$$

в пространстве $\tilde{C}_2\left[-l, l\right]$.

Если мы нормируем системы (3) и (4), то получим примеры ортонормированных систем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, ...\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, ...$$

в пространстве $\tilde{C}_2\left[-\pi, \pi\right]$ и

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ ..., \frac{1}{\sqrt{l}}\sin n\frac{\pi x}{l}, ...\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, ..., \frac{1}{\sqrt{l}}\cos n\frac{\pi x}{l}, ...$$

в пространстве $\tilde{C}_2\left[-l, l\right]$.

Задача наилучшего приближения в евклидовом пространстве

Определение. *Подмножество* L *евклидова пространства* X *называется подпространством, если оно само по себе является евклидовым пространством.*

Примеры подпространств в евклидовых пространствах

В пространстве $\mathbf{R}^3$ подпространствами являются $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$.

В пространстве $\tilde{C}_2\left[-\pi, \pi\right]$ подпространством является T_n - множество тригонометрических полиномов n-го порядка. Это $\left(2n+1\right)$-мерное пространство с базисом $\left\{1,\ \sin x,\ \sin 2x, ..., \sin nx,\ \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\right\}$, состоящее из функций вида

$$p\left(x\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right). \tag{5}$$

Определение*. Скажем, что вектор h ортогонален подпространству L евклидова пространства X (пишут $h \perp L$), если он ортогонален всем векторам подпространства L $\left(p \in L \Rightarrow (h, p) = 0\right)$.*

Разложение вектора на перпендикуляр и проекцию

Следующие две теоремы справедливы для любых, в том числе бесконечномерных подпространств L, но мы ограничимся конечномерным случаем.

Теорема*. Пусть X - евклидово пространство, а L - n-мерное подпространство X с ортогональным базисом $\left\{g_1, \ldots g_n\right\}$. Тогда любой вектор $f \in X$ может быть представлен единственным образом в виде суммы*

$$f = h + p, \tag{6}$$

где $h \perp L$, а $p \in L$.

Вектор p в разложении (6) называется проекцией вектора f на подпространство L.

Доказательство. $\triangleright$ Допустим, что разложение (6) имеет место. Пусть $p = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k$.

Из линейности скалярного произведения замечаем, что ортогональность вектора h подпространству L эквивалентна его ортогональности всем векторам базиса. Тогда для любого номера $k = 1, \ldots, n$

$$(p, g_k) = (f - h, g_k) = (f, g_k) - (h, g_k) = (f, g_k),$$

а с другой стороны

$$(p, g_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l g_l, g_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_l (g_l, g_k) = c_k (g_k, g_k).$$

То есть, если разложение (6) возможно, то необходимо

$$c_k = \frac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)}. \tag{7}$$

Возьмем теперь сразу вектор $p = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k$, где коэффициенты c_k вычислены по формулам (7). Положим $h = f - p$ и вычислим скалярное произведение h с произвольным базисным вектором g_k:

$$(h, g_k) = (f - p, g_k) = (f, g_k) - (p, g_k) = (f, g_k) - c_k (g_k, g_k) = 0,$$

то есть $h \perp L$. Следовательно, разложение возможно, а единственность его доказана в начале рассуждений. $\triangleleft$

Замечание*. Если в подпространстве L задан ортонормированный ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$, то проекция вектора f на L будет равна*

$$p = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

где коэффициенты c_k определяются по формуле

$$c_k = (f, e_k). \tag{8}$$

Теорема*. Проекция p вектора f на подпространство L является вектором наилучшего приближения вектора f среди векторов L, то есть для любого отличного от p вектора g из L*

$$\|f - p\| < \|f - g\|.$$

Доказательство. $\triangleright$ Возьмем произвольный вектор $g \in L$. Для оценки расстояния между f и g воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\| f-g\|^2 = \|h+p-g\|^2 = \|h\|^2 + \|p-g\|^2 \ge \|h\|^2,$$

причем $\| f-g\| = \|h\| \iff g = p$. $\triangleleft$

Определение*. Рядом Фурье вектора f евклидова пространства X по ортогональной системе $\{g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$ называется ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k g_k$, где коэффициенты c_k вычисляются по формулам $c_k = \dfrac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)}$.*

Применим теорему о проекции вектора на подпространство к проекции элемента пространства $\tilde{C}_2[-\pi,\pi]$ на подпространство T_n (тригонометрических полиномов n-го порядка).

Теорема*. Среди всех тригонометрических полиномов n-го порядка наилучшим образом в смысле среднего квадратического отклонения функцию $f(x) \in \tilde{C}_2[-\pi,\pi]$ аппроксимирует многочлен*

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с коэффициентами, определенными по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{9}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad 1 \le k \le n, \tag{10}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad 1 \le k \le n. \tag{11}$$

Доказательство. $\triangleright$ Наилучшим приближением вектора $f(x)$ является его проекция на подпространство T_n с ортогональным базисом

$$1, \sin x, \sin 2x, ..., \sin nx, \ \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx.$$

Формулы же (9)-(11) являются вариантами формулы (8). $\triangleleft$

Определение*. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x) \in \tilde{C}_2[-\pi;\pi]$ называется ряд*

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где коэффициенты a_k $(k \ge 0)$ и b_k $(k \ge 1)$ вычисляются по формулам (9)-(11).

Коэффициенты a_k и b_k называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Если функция $f \in \tilde{C}_2[-l,l]$, то она раскладывается в ряд Фурье

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right)$$

с коэффициентами, вычисляемыми по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n \ge 1,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n \ge 1.$$

Неравенство Бесселя.

Пусть $\{g_1,...,g_n,...\}$ - бесконечная ортогональная система евклидова пространства X. Рассмотрим n-мерное подпространство L_n пространства X с базисом $g_1,...,g_n$.

Возьмем произвольный вектор $f \in X$ и спроектируем его на L_n:

$$f = p + h, \quad p \in L_n, \ h \perp L_n.$$

Выше было доказано, что проекция

$$p = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k$$

есть частичная сумма ряда Фурье вектора f по системе $\{g_1,...,g_n,...\}$, коэффициенты в котором вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)}.$$

Из ортогональности векторов в разложении f на перпендикуляр и проекцию и теоремы Пифагора следует, что

$$\|p\|^2 \le \|f\|^2.$$

Учитывая ортогональность базиса $g_1,...,g_n$ и разложение вектора p, последнее неравенство запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(f, g_k)^2}{(g_k, g_k)} \le \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)^2}{(g_k, g_k)}$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)^2}{(g_k, g_k)} \le \|f\|^2.$$

Это неравенство называется ***неравенством Бесселя.***

В случае бесконечной ортонормированной системы $\{e_1,...e_n,...\}$ неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)^2 \le \|f\|^2.$$

Очевидным следствием из неравенства Бесселя является тот факт, что *коэффициенты Фурье стремятся к нулю при* $n \to \infty$ ***(теорема Римана)****.*

Определение. *Система векторов* $\{g_1, g_2,..., g_n,...\}$ *называется замкнутой в евклидовом пространстве* X *, если любой вектор* $f \in X$ *с любой степенью точности в смысле расстояния в пространстве* X *можно приблизить линейной комбинацией векторов из* $\{g_1, g_2,..., g_n,...\}$.

Теорема. *Если ортогональная система векторов* $\{g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$ *замкнута в евклидовом пространстве* X *, то имеет место равенство (равенство Парсеваля):*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)^2}{(g_k, g_k)} = \| f \|^2 .$$

Доказательство. $\triangleright$ Из замкнутости системы $\{g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$ следует, что существует последовательность линейных комбинаций $p_m = \sum_{k=1}^{n_m} \alpha_{m,k} g_k$ такая, что $\lim_{m\to\infty} \| f - p_m \| = 0$. Соответствующая частичная сумма ряда Фурье приближает вектор f не хуже, чем p_m , то есть

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_m} c_k g_k - f \right\| \leq \| p_m - f \| .$$

Поэтому

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n_m} c_k g_k - f \right\| = 0 .$$

Из последнего неравенства вытекает

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n_m} c_k g_k \right\| = \| f \| ,$$

что, с учетом ортогональности системы $\{g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$ дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (g_k, g_k) = \| f \|^2 ,$$

а если учесть выражения для коэффициентов c_k $\left(c_k = \dfrac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)} \right)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)^2}{(g_k, g_k)} = \| f \|^2 \; -$$

нужное нам равенство. $\triangleleft$

Запишем неравенство Бесселя для пространства $\tilde{C}_2[-\pi, \pi]$ и тригонометрической системы, учитывая формулы (9)-(11):

$$2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\pi a_k^2 + \pi b_k^2 \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx ,$$

или в виде:

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx .$$

Тригонометрическая система замкнута в пространстве $\tilde{C}_2[-\pi, \pi]$ (это далеко не очевидно! но примем этот факт без доказательства), поэтому для тригонометрических рядов Фурье справедливо ***равенство Парсеваля***:

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx .$$

(без доказательства)

Ряд Фурье можно рассматривать на всей оси, он состоит из $2l$ -периодических функций и сходиться может только к функции с таким же периодом, но даже и при таких условиях порожденный функцией ряд Фурье может расходиться в точке. Сформулируем теорему о достаточных условиях, при которых имеет место поточечная сходимость.

Теорема (Дирихле). *Если ограниченная* $2l$ *-периодическая функция кусочно-монотонна в промежутке* $[-l;l]$ *и имеет в нем не более, чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к сумме* $f(x_0)$ *в каждой точке непрерывности и к сумме* $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *в каждой точке разрыва.*

(без доказательства)

В терминах пространства $\tilde{C}_2[-l,l]$ это означает, что если функция $f\in\tilde{C}_2[-l,l]$ и кусочно-монотонна, то ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней поточечно.

Ряды Фурье четных и нечетных периодических функций

Если заданная на промежутке $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывная ограниченная функция $f(x)$ будет ***нечетной***, то для нее

$$a_0=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0,$$

а так как нечетными будут также и все функции $f(x)\cos kx$, то нулевыми будут все коэффициенты Фурье a_k функции $f(x)$. Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы: $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx$, причем, учитывая четность произведения $f(x)\sin kx$, коэффициент b_k можно вычислять по формуле $b_k=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$.

Пусть теперь $f(x)$ будет кусочно-непрерывной ограниченной в промежутке $[-\pi,\pi]$ ***четной*** функцией. Тогда все произведения $f(x)\sin kx$ будут нечетными функциями, и коэффициенты при синусах в разложении Фурье $f(x)$ будут равны 0. То есть ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы и константу:

$$f(x)\sim a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx.$$

Так как произведение $f(x)\cos kx$ тоже будет четной функцией, то

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx,\quad (k\ge 1).$$

Если нечетная функция $f(x)$ задана в промежутке $[-l,l]$, то мы будем раскладывать ее в ряд по синусам $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\dfrac{\pi kx}{l}$, при этом коэффициенты разложения вычисляем по формулам $b_k=\dfrac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\dfrac{\pi kx}{l},\quad (k\ge 1)$.

Если же функция $f(x)$ четная на $[-l,l]$, то в ряд по косинусам

$$f(x)\sim a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi kx}{l}$$

с коэффициентами $a_0=\dfrac{1}{l}\int_0^{l} f(x)\,dx,\quad a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\dfrac{\pi kx}{l},\quad (k\ge 1)$.

Интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную для всех значений x в некотором промежутке $[a,b]$ и всех значений y из Y. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема при каждом $y\in Y$. Тогда интеграл

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (1)$$

будет функцией от параметра y.

Теорема (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра). *Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна как функция двух переменных в прямоугольнике $\Pi=[a,b]\times[c,d]$, то интеграл (1) будет непрерывной функцией от параметра y в промежутке $[c,d]$.*

Доказательство. $\triangleright$ Фиксируем произвольные точку $y_0\in[c,d]$ и число $\varepsilon>0$. Непрерывная в замкнутом прямоугольнике функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на нем, то есть существует такое $\delta>0$, что

$$\forall (x',y'),(x'',y'')\in\Pi \quad \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\delta \Rightarrow \left|f(x',y')-f(x'',y'')\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда, если $|y-y_0|<\delta$, то $\sqrt{(x-x)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ и $\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, поэтому

$$\left|I(y)-I(y_0)\right|=\left|\int_a^b\left(f(x,y)-f(x,y_0)\right)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|dx<\varepsilon.\triangleleft$$

Дифференцирование под знаком интеграла

Теорема (о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра). *Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна как функция двух переменных в прямоугольнике $\Pi=[a,b]\times[c,d]$, и пусть в этом прямоугольнике существует и непрерывна как функция двух переменных частная производная $f'_y(x,y)$. Тогда функция*

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

дифференцируема на $[c,d]$ и

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим произвольную точку $y_0\in(c,d)$. Покажем, что существует

$$I'(y_0)=\lim_{h\to0}\frac{I(y_0+h)-I(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Из непрерывности функции $f'_y(x,y)$ в замкнутом прямоугольнике следует ее равномерная непрерывность на нем, то есть существует такое $\delta>0$, что для любой пары точек $(x',y'),(x'',y'')\in\Pi$ из неравенства

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\delta \qquad (2)$$

следует

$$\left| f'_y(x',y') - f'_y(x'',y'') \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (3)$$

Тогда при $h<\delta$ и таком, что $y_0 \pm h \in (c,d)$ получим

$$\left| \frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h} - \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h} dx - \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left(f'_y(x,y_0+\theta h) - f'_y(x,y_0) \right) dx \right| \le \int_a^b \left| f'_y(x,y_0+\theta h) - f'_y(x,y_0) \right| dx,$$

где $0<\theta<1$. Мы можем воспользоваться оценкой (3), так как набор $x'=x,\ y'=y+\theta h,\ x''=x,\ y''=y$ удовлетворяет (2):

$$\int_a^b \left| f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y) \right| dx \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для правой производной в c и левой в d. ◁

Утверждение. *Если пределы интегрирования являются дифференцируемыми функциями* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *параметра* y *и* $a \le \varphi(y), \psi(y) \le b$ *при* $c \le y \le d$, *то*

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{h}\left(\int_{\varphi(y+h)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) =$$

$$\frac{1}{h}\left(\int_{\varphi(y+h)}^{\varphi(y)} f(x,y+h)\,dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+h)\,dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) =$$

$$\frac{1}{h}\left(-\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x,y+h)\,dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(f(x,y+h) - f(x,y) \right) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx \right).$$

Преобразуем каждый из трех интегралов отдельно. Имеем

$$-\frac{1}{h} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x,y+h)\,dx = -\frac{1}{h} f(c,y+h)\left(\varphi(y+h)-\varphi(y)\right) = -f(c,y+h)\varphi'(y+\theta h),$$

где c лежит между $\varphi(y)$ и $\varphi(y+h)$, а $\theta \in (0;1)$. Тогда

$$-\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x,y+h)\,dx = -\lim_{h\to 0} f(c,y+h)\varphi'(y+\theta h) = f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Аналогично для третьего интеграла:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx = f(\psi(y),y)\psi'(y).$$

Оценим средний интеграл:

$$\frac{1}{h} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(f(x,y+h) - f(x,y) \right) dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y+\theta(x)h)\,dx, \quad \theta(x) \in (0;1).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $\Delta y < \delta$ было $\left| f'_y(x, y+\Delta y) - f'_y(x,y)\right| < \dfrac{\varepsilon}{|c-d|}$, тогда при $h < \delta$

$$\left| \frac{1}{h}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(f(x,y+h) - f(x,y)\right)dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx \right| =$$

$$\left| = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(f'_y(x,y+\theta(x)h) - f'_y(x,y)\right)dx \right| \le \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left| f'_y(x,y+\theta(x)h) - f'_y(x,y)\right| dx < \varepsilon,$$

то есть

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(f(x,y+h) - f(x,y)\right)dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

Формула доказана.

Пример. Вычислить производную от интеграла $\int_a^y f(x,y)\,dx$, где $y \in [a,b]$, а функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x,y)$ на квадрате $[a,b]\times[a,b]$.

Решение:

$$\frac{d}{dy}\int_a^y f(x,y)\,dx = f(y,y)\cdot 1 - f(a,y)\cdot 0 + \int_a^y f'_y(x,y)\,dx = f(y,y) + \int_a^y f'_y(x,y)\,dx.$$

Интегрирование под знаком интеграла

Теорема (об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна (по обеим переменным) в прямоугольнике $\Pi = [a,b]\times[c,d]$, то имеет место формула*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. $\triangleright$ Докажем более общее равенство

$$\int_c^u dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^u f(x,y)\,dy.$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(u) = \int_c^u \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{и} \quad \psi(u) = \int_a^b \left(\int_c^u f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то функция $\int_a^b f(x,y)\,dx$ Будет непрерывной на отрезке $[c,d]$, а функция $\varphi(u)$ будет дифференцируемой, и по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом получаем

$$\varphi'(u) = \int_a^b f(x,u)\,dx.$$

Функция $\int\limits_c^u f(x,y)\,dy$ непрерывна в прямоугольнике Π и имеет непрерывную частную производную $\frac{d}{du}\int\limits_c^u f(x,y)\,dy = f(x,u)$. Поэтому по теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, существует производная

$$\psi'(u) = \int\limits_a^b \frac{d}{du}\left(\int\limits_c^u f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_a^b f(x,u)\,dx.$$

Получаем $\varphi'(u) = \psi'(u)$, то есть $\varphi(u) = \psi(u) + C$. Но так как $\varphi(c) = \psi(c) = 0$, то $\varphi(u) = \psi(u)$. При $u = d$ получаем нужную нам формулу. ⊲

Пример. ⊳ Рассмотрим функцию $f(x,y) = x^y$ в прямоугольнике $[0;1]\times[a,b]$. Условия предыдущей теоремы соблюдены. Имеем

$$\int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy.$$

Слева легко получаем окончательный результат

$$\int\limits_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln\frac{1+b}{1+a},$$

справа же мы приходим к интегралу

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx.$$

Таким образом, благодаря перестановке интегрирований, мы находим его значение. ⊲

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Введем понятие равномерной сходимости интеграла.

Определение. *Пусть функция $f(x,y)$ задана для $x \ge a$ и $y \in Y$, и пусть для каждого $y \in Y$ существует интеграл $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$. Скажем, что интеграл $I(y)$ равномерно сходится относительно $y \in Y$, если*

$$\lim_{A\to\infty}\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\right| = 0.$$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx$ при $y \ge 0$. Имеем

$$\int\limits_A^\infty ye^{-xy}dx = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ e^{-Ay}, & y > 0 \end{cases},$$

то есть

$$\lim_{A\to\infty}\sup_{y\ge 0}\left|\int\limits_A^\infty ye^{-xy}dx\right| = 1.$$

Но, если мы будем рассматривать этот интеграл на промежутке $y \ge a > 0$, то

$$\lim_{A\to\infty}\sup_{y\ge a}\left|\int\limits_A^\infty ye^{-xy}dx\right| = 0.$$

Следовательно, наш интеграл сходится равномерно на промежутке $[a;\infty)$ при $a > 0$, а на полуоси $[0;\infty)$ равномерной сходимости нет.

Для аналогов несобственных интегралов второго рода нам потребуется еще одно определение равномерной сходимости.

Определение. *Пусть функция* $f(x,y)$ *задана для* $x\in[a,b)$ *и* $y\in Y$ *, и пусть для каждого* $y\in Y$ *существует интеграл* $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. *Скажем, что интеграл* $I(y)$ *равномерно сходится относительно* $y\in Y$ *, если*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b-\varepsilon}^{b} f(x,y)\,dx\right|=0.$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x,y)$ **интегрируема для всех** $y\in Y$ **по** x **в каждом конечном промежутке** $[a,A]$ $(A\geq a)$**, и пусть существует интегрируемая на** $[a,\infty)$ **функция** $\varphi(x)$ **такая что**

$$|f(x,y)|\leq\varphi(x),\qquad x\geq a,\ y\in Y.$$

Тогда интеграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ **сходится равномерно относительно** y **в** Y**.**

Доказательство. $\triangleright$ Проверим определение равномерной сходимости:

$$\lim_{A\to\infty}\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\right|\leq\lim_{A\to\infty}\int\limits_A^\infty\sup_{y\in Y}|f(x,y)|\,dx\leq\lim_{A\to\infty}\int\limits_A^\infty|\varphi(x)|\,dx=0.\triangleleft$$

При указанных условиях говорят, что функция $f(x,y)$ имеет интегрируемую мажоранту $\varphi(x)$.

Сформулируем (без доказательства) достаточный признак равномерной сходимости зависящих от параметра несобственных интегралов второго рода.

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ **интегрируема (в несобственном смысле) для всех** $y\in Y$ **по** x **в промежутке** $[a,b]$**, и пусть существует интегрируемая (тоже в несобственном смысле) на** $[a,b]$ **функция** $\varphi(x)$ **такая что**

$$|f(x,y)|\leq\varphi(x),\qquad x\in[a,b),\ y\in Y.$$

Тогда интеграл $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ **сходится равномерно относительно** y **в** Y**.**

Теорема (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x,y)$ **определена и непрерывна для** $x\geq a$ **и** $y\in[c,d]$**. Если интеграл**

$$I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y **в промежутке** $[c,d]$**, то он представляет собою непрерывную функцию от параметра** y **в этом промежутке.**

Доказательство. $\triangleright$ Докажем непрерывность $I(y)$ в точке $y_0\in[c,d]$. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как интеграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно, то существует $A>a$, при котором

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_A^\infty f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Из теоремы о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, следует, что для некоторого $\delta>0$ из $|y-y_0|<\delta$ будет следовать

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,dx-\int_a^A f(x,y_0)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)\,dx-\int_a^\infty f(x,y_0)\,dx\right|=\left|\int_a^A f(x,y)\,dx+\int_A^\infty f(x,y)\,dx-\int_a^A f(x,y_0)\,dx-\int_A^\infty f(x,y_0)\,dx\right|\le$$

$$\le\left|\int_a^A f(x,y)\,dx-\int_a^A f(x,y_0)\,dx\right|+\left|\int_A^\infty f(x,y)\,dx\right|+\left|\int_A^\infty f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

То есть $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$. ◁

Теорема (о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна по двум переменным вместе со своей частной производной $f_y(x,y)$ для $x\ge a$ и $y\in[c,d]$. Предположим, далее, что интеграл $I(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится для всех $y\in[c,d]$, а интеграл

$$\int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y в указанном промежутке. Тогда при любом $y\in[c,d]$ имеет место формула

$$I'(y)=\int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx.$$

Без доказательства.

.

Аналогичная теорема будет справедлива и для несобственного интеграла второго рода.

Теорема (об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна для $x\ge a$ и $y\in[c,d]$. Если интеграл

$$I(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y в промежутке $[c,d]$, то имеет место формула

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^\infty f(x,y)\,dx=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Без доказательства.

Теорема. Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна для $x\ge a$ и $y\ge c$, и пусть оба интеграла

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

сходятся равномерно: первый – относительно y, а второй – относительно x, в любом конечном промежутке. Тогда, если хоть один из двух повторных интегралов

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} \left| f(x,y) \right| dx \qquad \textbf{или} \qquad \int_c^{\infty} dx \int_a^{\infty} \left| f(x,y) \right| dy$$

существует, то существуют и равны повторные интегралы

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_c^{\infty} dx \int_a^{\infty} f(x,y)\, dy .$$

(Без доказательства)

Пример: ***интеграл Эйлера-Пуассона.***

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Положив здесь $x = ut$, где u - любое положительное число, получим

$$J = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt .$$

Умножим теперь обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем по u от 0 до ∞:

$$J \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt .$$

Переставим интегралы и получим

$$J^2 = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{\left(1+t^2\right)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда получаем

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поверим без доказательства в тот факт, что перестановка интегралов в данном случае законна.

Эйлеровы интегралы

Эйлеров интеграл первого рода

Так называется интеграл вида

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx , \qquad (4)$$

где $a, b > 0$. Он представляет функцию от двух переменных параметров a и b, которая называется «Бета».

Убедимся в том, что рассматриваемый интеграл сходится. Для этого рассмотрим поведение подынтегральной функции в окрестности особых точек $x = 0$ и $x = 1$. При $x \to 0$ будет $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \sim x^{a-1}$, а интеграл $\int_0^1 x^{a-1} dx$ при $a > 0$ сходится. Аналогичная ситуация будет и при $x \to 1$. Следовательно, интеграл в (1) действительно может быть положен в основу определения функции B. Установим некоторые ее свойства.

Прежде всего, подстановкой $x = 1 - t$ получаем:

$$\mathrm{B}(a,b) = \mathrm{B}(b,a),$$

так что функция B является симметричной относительно a и b.

Дадим для функции B другое аналитическое представление, для этого в интеграле, ее определяющем, произведем подстановку $x = \dfrac{y}{1+y}$:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \left\{\begin{matrix} y = \dfrac{x}{1-x};\ x = \dfrac{y}{1+y} \\ dx = \dfrac{dy}{(1+y)^2} \\ x\big|_0^1 \Rightarrow y\big|_0^\infty \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy. \quad (5)$$

Эйлеров интеграл второго рода.

Так называется интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \quad (6)$$

который сходится при любом $a > 0$ и определяет функцию Γ (Гамма). Функция Γ, после элементарных, является одной из важнейших функций для анализа и его приложений.

Простейшие свойства функции Γ.

1. *Функция* $\Gamma(a)$ *при всех значениях* $a > 0$ *непрерывна и имеет непрерывные же производные всех порядков.*

Продифференцируем (6) под знаком интеграла, получим

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\ln x \cdot e^{-x}dx.$$

Применение правила Лейбница оправдано тем, что оба интеграла

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln x \cdot e^{-x}dx \qquad \text{и} \qquad \int_1^\infty x^{a-1}\ln x \cdot e^{-x}dx$$

сходятся равномерно относительно a: первый при $x \to 0$ для $a \ge a_0 > 0$ (мажоранта $x^{a_0-1}|\ln x|$), а второй при $x \to \infty$ для $a \le A < \infty$ (мажоранта $x^A e^{-x}$).

Таким же образом можно убедиться и в существовании 2-й производной

$$\Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^2 \cdot e^{-x}dx \quad (7)$$

и всех остальных.

2. Из (6), интегрированием по частям, получаем

$$a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a e^{-x}dx,$$

то есть

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

или

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)a\Gamma(a). \quad (8)$$

Если в (8) взять $a = 1$, то, учитывая, что

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

получим

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Функция Γ является естественным распространением – на область любых положительных значений аргумента – факториала $n!$, определенного лишь для натуральных значений n.

3***. Ход изменения функции*** Γ**.**

Так как $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, то по теореме Ролля между $a=1$ и $a=2$ находится ноль производной $\Gamma'(a)$ – точка a_0. Обращаясь к формуле (4), видим, что $\Gamma''(a)>0$, а, следовательно, первая производная $\Gamma'(a)$ возрастает. Точка a_0 – минимум, значение которого (без доказательства) примерно равно

$$a_0=1,4616\ldots,\ \min\Gamma(a)=\Gamma(a_0)=0,8856\ldots.$$

Связь между функциями В ***и*** Γ**.**

Преобразуем интеграл, определяющий Γ функцию

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx=\{x=ty\}=t^a\int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy,$$

Перепишем предыдущую формулу, заменив a на $a+b$, а t на $1+t$:

$$\Gamma(a+b)=(1+t)^{a+b}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy,$$

то есть

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

Умножим обе части последнего равенства на t^{a-1} и проинтегрируем по t от 0 до ∞:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_0^\infty t^{a-1}dt\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

В интеграле справа переставим интегралы:

$$\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\int_0^\infty e^{-ty}t^{a-1}dt=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\frac{1}{y^a}dy\int_0^\infty e^{-ty}(ty)^{a-1}d(ty)=\Gamma(b)\Gamma(a),$$

а теперь вспомним формулу (5) и получим

$$\Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)$$

или

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

В приведенном выше выводе надо еще обосновать перестановку интегралов, но мы ее правомерность оставим без доказательства.

Формула дополнения.

Так называется формула

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

В общем случае мы ее примем без доказательства, а докажем только при $a=\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} t=x^{\frac{1}{2}} \\ dx=2tdt \end{matrix}\right\}=\int_0^\infty t^{-1}e^{-t^2}2tdt=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

То есть

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}.$$

Пример. Вычислить $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Имеем:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\ldots=$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$