

**Билет 3:** Дайте определение функции, ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) на множестве  $X$ . Приведите примеры ограниченных и неограниченных функций.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)* на множестве  $X$ , если множество ее значений  $f(X)$  ограничено (соответственно, ограничено сверху или снизу).

Запишем определения ограниченности функции с помощью кванторов:

*ограниченность:*  $\exists C \forall x ((x \in X) \Rightarrow (|f(x)| \leq C))$ .

*ограниченность сверху:*  $\exists C \forall x ((x \in X) \Rightarrow (f(x) \leq C))$ .

*ограниченность снизу:*  $\exists C \forall x ((x \in X) \Rightarrow (C \leq f(x)))$ .

Примеры. На своей области определения  $(\mathbb{R})$  функция  $y = \frac{1}{1+x^2}$  - ограничена, функция  $y = 1 - e^x$  - ограничена сверху, но не ограничена снизу, а функция  $y = x^2 + 2x - 3$  - ограничена снизу, но не ограничена сверху.