Вопросник к итоговому экзамену (1-6 модули)

1. Дайте определение ограниченного сверху, ограниченного снизу, ограниченного множеств. Запишите эти определения с помощью кванторов, приведите примеры ограниченных множеств. Определите множества: неограниченное сверху, неограниченное снизу, неограниченное. Приведите примеры неограниченных множеств.
2. Дайте определение максимального и минимального элементов множества. Приведите примеры. Дайте определение верхней и нижней граней множества, приведите примеры.
3. Дайте определение функции, ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) на множестве X. Приведите примеры ограниченных и неограниченных функций.
4. Дайте определение ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) числовой последовательности. Приведите примеры ограниченных и неограниченных последовательностей.
5. Дайте определение монотонных функций и последовательностей. Приведите примеры.
6. Дайте определение в терминах окрестностей и в терминах неравенств пределов
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b,$
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty.$
проиллюстрируйте эти определения графически.
7. Дайте определение предела числовой последовательности. Запишите это определение с помощью кванторов в терминах окрестностей и в терминах неравенств (для конечного и бесконечных пределов).
8. Дайте определение бесконечно малых и бесконечно больших функций и последовательностей. Приведите примеры. Как связаны бесконечно малые и бесконечно большие? Докажите теоремы о сумме бесконечно малых и произведении бесконечно малой на ограниченную.
9. Дайте определение предела функции по Гейне.
10. Сформулируйте теоремы о пределе суммы, произведения и частного сходящихся последовательностей. Докажите две из них.
11. Пользуясь определением предела функции по Гейне и соответствующими свойствами сходящихся последовательностей, докажите теорему об арифметических операциях с функциями, имеющими конечный предел.
12. Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенстве (в двух неравенствах) для последовательностей. Докажите одну из них.
13. Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенстве (в двух неравенствах) для функций. Пользуясь определением предела функции по Гейне и соответствующей теоремой для последовательностей, докажите одну из них.
14. Объясните смысл записей $f(x)=o\big(g(x)\big),\ f(x)=O\big(g(x)\big),\ f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$.
Приведите примеры. Выпишите основные асимптотические соотношения для функций $\sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x),\ e^x,\ (1+x)^\alpha$ при $x\to 0$.
15. Дайте определение функции, непрерывной в точке, непрерывной на интервале. Докажите, что функция $y=\cos x$ непрерывна на всей оси.
16. Пользуясь теоремой об арифметических действиях с функциями, имеющими предел, сформулируйте и докажите теорему об арифметических действиях с непрерывными функциями.

17. Докажите теорему о пределе сложной функции.
18. Пользуясь теоремой о втором замечательном пределе: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Выведите следствия из этой теоремы: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$
19. Дайте определение в терминах окрестностей и в терминах неравенств односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty,$ $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$. Проиллюстрируйте эти определения графически.
20. Изложите классификацию точек разрыва, приведите примеры.
21. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках.
22. Докажите теорему о нуле непрерывной функции. Докажите теорему Коши о промежуточном значении для непрерывной функции.
23. Сформулируйте первую и вторую теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке. Покажите, что отрезок в условии теоремы нельзя заменить интервалом, а также, что нельзя отказаться от непрерывности функции.
24. .Дайте определение равномерной непрерывности функции на промежутке. Докажите по определению, что функция $y=x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на полуоси $[1;+\infty)$, а функция $y=\frac{1}{x}$ равномерно непрерывна полуоси $[1;+\infty)$, но не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$. Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке. Покажите, что отрезок в условии теоремы нельзя заменить интервалом.
25. Дайте определение функции, дифференцируемой в точке, функции, имеющей производную в точке. Приведите примеры. Докажите теорему о связи между дифференцируемостью и существованием производной функции в точке. Какая связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке?
26. Запишите формулы для производной суммы, произведения и частного двух функций. Докажите две из них.
27. Запишите формулы для производной обратной функции и для производной сложной функции. Выведите одну из них.
28. Выведите формулы для производных основных элементарных функций: $c,\ x,\ x^n,\ \sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx,\ e^x,\ a^x,\ \ln x,\ \log_a x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$.
29. Дайте определение $n-$й производной и $n-$го дифференциала функции $f(x)$. Приведите примеры.
30. Дайте определение локального максимума (минимума) функции $f(x)$. Докажите теорему Ферма о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.
31. Докажите теорему Ролля.
32. Докажите теорему Лагранжа о приращении дифференцируемой функции на отрезке.
33. Сформулируйте теорему Коши о приращениях дифференцируемых функций на отрезке.

34. Сформулируйте правило Бернулли-Лопиталя раскрытия неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to a+0$ и $x \to +\infty$. Докажите его для случая раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a+0$.
35. Определите многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0, запишите формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, с остаточным членом в форме Лагранжа.
36. Выведите формулы для многочленов Маклорена функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^m$.
37. Докажите теорему о связи между монотонностью и знаком производной дифференцируемой функции.
38. Сформулируйте теорему о достаточных условия экстремума дифференцируемой функции в терминах первой производной.
39. Сформулируйте теорему о достаточных условия экстремума дифференцируемой функции в терминах второй производной.
40. Дайте определение выпуклости вверх (вниз) дифференцируемой функции в точке, на интервале, точки перегиба. Сформулируйте теорему о достаточных условиях выпуклости вверх (вниз) в точке дважды дифференцируемой функции.

41. Дайте определение первообразной и неопределенного интеграла от функции $f\;\;x$ на промежутке $\langle a,b\rangle$. Докажите теорему об общем виде первообразной. Докажите свойство линейности неопределенного интеграла. Докажите теорему о замене переменной под знаком неопределенного интеграла. Приведите пример. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Приведите примеры..
42. Расскажите, как интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильных дробей. Объясните, как интегрируются простейшие дроби 1-3 типов. Выведите формулу понижения для интеграла $\int \frac{dx}{1+x^2\;\;^n}$.
43. Изложите метод вычисления интегралов вида $\int R\;\;\sin x, \cos x\;\;dx$, где R - знак рациональной функции; приведите пример. Объясните, как вычисляется интегралы $\int \sin^n x \cos^m xdx$, $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$.
44. Изложите метод вычисления интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)dx$, где R - знак рациональной функции; приведите пример.
45. Объясните, как вычисляются интегралы $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$.
46. Дайте определение функции, интегрируемой на отрезке, и определенного интеграла.
47. Выведите свойства верхних и нижних сумм Дарбу. Сформулируйте критерий интегрируемости функции.
48. Выведите свойство линейности определенного интеграла.
49. Выведите свойство аддитивности определенного интеграла.

50. Докажите теорему об интегрировании неравенств. Выведите из нее оценки для определенного интеграла. Докажите интегральную теорему о среднем для непрерывной функции.
51. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема на нем. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
52. Докажите теорему о замене переменной под знаком определенного интеграла. Приведите пример. Выведите формулу интегрирования по частям для $\int_a^b u\,dv$, где $u(x), v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции.
53. Дайте определение несобственных интегралов 1-го рода $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Проверьте свойство линейности. Исследуйте на сходимость по определению интегралы $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$.
54. Выведите условие, необходимое и достаточное для сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции.
55. Докажите теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода от неотрицательных функций. Приведите примеры.
56. Сформулируйте критерий Коши сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Докажите, что если $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.
57. Дайте определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла 1-го рода. Исследуйте на абсолютную и условную сходимости интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.
58. Дайте определение несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ 2-го рода от функции, неограниченной в $O^+(a)$ $(O^-(b))$. Исследуйте на сходимость по определению интегралы $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Сформулируйте теоремы сравнения для несобственных интегралов второго рода от неотрицательных функций. Приведите примеры.
59. Дайте определение числового ряда, сходящегося и расходящегося числовых рядов, суммы числового ряда. Приведите примеры.
60. Докажите признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.
61. Докажите радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами.
62. Докажите интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами.
63. Дайте определение абсолютно и условно сходящихся числовых рядов. Приведите примеры.
64. Докажите признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.
65. Дайте определение $\varepsilon-$окрестности точки в R^n, внутренней и граничной точек множества, открытого и замкнутого множеств, связного множества, области.

66. Дайте определение предела функции многих переменных в точке, приведите примеры функций, имеющих и не имеющих предела.
67. Дайте определение функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса и Кантора о свойствах таких функций.
68. Дайте определение дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в данной точке. Покажите, что из дифференцируемости следует непрерывность функции и существование частных производных в этой точке.
69. Покажите на примере, что из непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке не следует существование частных производных и тем более не следует дифференцируемость в этой точке. Покажите на примере, что из существования частных производных функции $z = f(x, y)$ в точке не следует непрерывность и тем более не следует дифференцируемость в этой точке.
70. Докажите, что непрерывность частных производных функции $z = f(x, y)$ в окрестности некоторой точки достаточна для ее дифференцируемости в этой точке.
71. Дайте определение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$; выведите уравнение касательной плоскости к этой поверхности. Запишите уравнение касательной плоскости к неявно заданной поверхности $F(x, y, z) = 0$.
72. Выведите формулу для производной сложной функции $f(x(t), y(t))$.
73. Дайте определение частных производных 2-го и высших порядков. Сформулируйте теорему Шварца о равенстве смешанных производных 2-го порядка. Приведите примеры.
74. Дайте определение дифференциалов высших порядков функции $z = f(x, y)$. Запишите формулу для вычисления дифференциала $n-$ го порядка от функции двух переменных.
75. Запишите формулу Тейлора-Лагранжа для функции $z = f(x, y)$. Запишите формулу Тейлора-Лагранжа для функции $y = f(x_1, ..., x_n)$.
76. Дайте определение экстремумов функции $y = f(x_1, ..., x_n)$. Выведите необходимое условие экстремума. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
77. Сформулируйте условия, достаточные для того, чтобы функция $z = f(x, y)$ 1) имела строгий экстремум; 2) не имела экстремума в данной точке.
78. Сформулируйте теорему Юнга о существовании и дифференцируемости неявной функции.
79. Дайте определения градиента функции $z = f(x, y)$. Приведите пример. Дайте определение производной по направлению и выведите ее связь с градиентом функции.
80. Дайте определение условного (относительного) экстремума. Сформулируйте теорему о необходимых условиях относительного экстремума функции двух переменных в случае одного ограничения. Сформулируйте правило множителей Лагранжа для задачи с несколькими ограничениями.
81. Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности, равномерно сходящегося функционального ряда. Какова связь между поточечной и равномерной сходимостью?
82. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, функционального ряда.
83. Выведите достаточное условие Вейерштрасса для равномерной сходимости функционального ряда.

84. Докажите теоремы о непрерывности равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций.
85. Докажите теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящейся функциональной последовательности, равномерно сходящегося функционального ряда.
86. Докажите теоремы о возможности почленного дифференцирования функциональной последовательности, функционального ряда.
87. Дайте определение степенного ряда. Докажите теорему Абеля.
88. Сформулируйте теорему об интервале сходимости степенного ряда.
89. Выведите формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.
90. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда.
91. Дайте определение ряда Тейлора. Сформулируйте достаточное условие сходимости ряда Тейлора для функций с ограниченными производными. Запишите разложения в ряд Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $arctgx$, $(1+x)^m$, $(1+x)^\alpha$.
92. Определите евклидовы пространства $\mathbf{R}^n$ и $\tilde{C}_2[a,b]$. Проверьте аксиомы евклидова пространства для $\tilde{C}_2[a,b]$. Приведите примеры вычисления норм векторов, скалярного произведения в этих пространствах. Выведите неравенство Коши-Буняковского.
93. Дайте определение ортогональной системы, ортонормированной системы. Приведите примеры ортогональной и ортонормированной систем в $\mathbf{R}^3$. Докажите теорему Пифагора для конечной ортогональной системы векторов евклидова пространства.
94. Проверьте ортогональность тригонометрической системы в $\tilde{C}_2[-\pi,\pi]$. Найдите нормирующие множители. Выпишите ортогональную систему из тригонометрических функций для пространства $\tilde{C}_2[-l,l]$.
95. Дайте определение подпространства евклидова пространства. Приведите примеры подпространств в $\mathbf{R}^3$ и $\tilde{C}_2[-\pi,\pi]$. Дайте определение вектора, перпендикулярного подпространству. Докажите теорему о разложении вектора на перпендикуляр и проекцию в случае конечномерного подпространства с ортонормированным базисом. Выведите формулы для коэффициентов разложения проекции по ортогональному базису, по ортонормированному базису.
96. Докажите теорему о свойствах проекции на конечномерное подпространство в евклидовом пространстве. Сформулируйте теорему о наилучшем среднеквадратическом приближении функции тригонометрическим многочленом. Дайте определение тригонометрического ряда Фурье для пространства $\tilde{C}_2[-\pi,\pi]$, для $\tilde{C}_2[-l,l]$.
97. Запишите неравенство Бесселя для произвольной ортогональной системы в евклидовом пространстве. Дайте определение замкнутой системы. Запишите равенство Парсеваля для замкнутой ортогональной системы в евклидовом пространстве.
98. Сформулируйте теорему Дирихле о достаточных условиях поточечной сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе.
99. Докажите теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра для прямоугольной области.
100. Докажите теоремы о дифференцировании и интегрировании под знаком интеграла, зависящего от параметра для прямоугольной области.
101. Выведите формулу для производной интеграла $I(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt$.

102. Дайте определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Сформулируйте условие Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Выведите условие Вейерштрасса, достаточное для равномерной сходимости.
103. Сформулируйте теоремы о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра. о дифференцируемости и об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.
104. Дайте определение бета и гамма-функций Эйлера, расскажите об их свойствах. Запишите формулу связи между бета и гамма функциями. Запишите формулу дополнения, выведите ее для частного случая $a=\frac{1}{2}$ (используя мнтеграл Эйлера-Пуассона).
105. Дайте определение двойного интеграла $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$ по ограниченной области. $(P)\subset\mathbf{R}^2$, тройного интеграла $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$ по ограниченной области. $(V)\subset\mathbf{R}^3$, Каков их геометрический смысл? Сформулируйте достаточные условия существования двойного (тройного) интеграла. Приведите примеры классов интегрируемых функций. Сформулируйте основные свойства кратных интегралов.
106. Докажите теорему о сведении двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу. Сформулируйте обобщение этой теоремы для двойных интегралов на случай области, элементарной относительно одной из осей координат.
107. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла по области, элементарной относительно одной из осей координат к повторному интегралу.
108. Определите гладкую (кусочно гладкую) поверхность в $\mathbf{R}^3$. Запишите уравнения нормальных векторов и касательной плоскости к параметрически заданной гладкой поверхности. Определите ориентируемую поверхность Выведите формулу для элемента площади гладкой поверхности. Запишите формулы для вычисления площади гладкой поверхности, заданной параметрически, заданной явно.
109. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле. Рассмотрите в качестве примера переход к полярным координатам.
110. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле. Рассмотрите в качестве примеров переход к цилиндрическим и сферическим координатам.
111. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода от функции $F(x,y,z)$ по кривой (Γ) в $\mathbf{R}^3$: $\int\limits_{(\Gamma)} Fds$. Расскажите об его свойствах. Поясните его физический смысл.
112. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода от векторного поля $\mathbf{F}$ по кривой (Γ) в $\mathbf{R}^3$: $\int\limits_{(\Gamma)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$. Расскажите об его свойствах Поясните его физический смысл.
113. Выведите формулу Грина.
114. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования (плоский случай).
115. Дайте определение плоского потенциального поля и его потенциала. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии потенциальности непрерывно дифференцируемого поля для односвязной области (плоский случай) Укажите метод восстановления потенциала.

116. Определите поверхностный интеграл первого рода от функции $F(x,y,z)$ по поверхности (S): $\int\limits_{(S)} FdS$. Приведите формулы вычисления этого интеграла для случая параметрически заданной гладкой поверхности, поверхности, заданной явно.
117. Определите поток вектор-функции $\mathbf{F}(x,y,z)$ через ориентированную поверхность (S) (поверхностный интеграл второго рода: $\int\limits_{(S)} (\mathbf{F},\mathbf{n})dS$). Приведите формулы вычисления этого интеграла для случая параметрически заданной гладкой поверхности, поверхности, заданной явно.
118. Дайте определение дивергенции и ротора векторного поля. Приведите примеры.
119. Сформулируйте теорему Гаусса-Остроградского.
120. Сформулируйте теорему Стокса.
121. Дайте определение потенциального поля и его потенциала в $\mathbf{R}^3$. Укажите метод восстановления потенциала.

Примерный вариант экзаменационного билета

Билет № 0

1. Докажите теорему о предельном переходе в двух неравенствах для последовательностей.
2. Сформулируйте правило Бернулли-Лопиталя раскрытия неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to a+0$ и $x \to +\infty$. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg4x-12tgx}{3\sin 4x-12\sin x}$.
3. Выведите свойства верхних и нижних сумм Дарбу. Выведите критерий интегрируемости функции.
4. Найдите максимум и минимум функции $z = x + 2y$ на окружности $x^2 + y^2 = 5$.
5. Сформулируйте теорему об интервале сходимости степенного ряда. Найдите область определения функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.
6. Дайте определение интеграла от векторного поля $\mathbf{F}$ по кривой (Γ) в $\mathbf{R^2}$ $\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{F},d\mathbf{r})$.

   Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{(AB)} ydx - xdy$ по отрезку $[A,B]$ с концами в точках $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

Студент обязан знать все определения и формулировки всех теорем, относящиеся к вопросам билета.