24 .Дайте определение равномерной непрерывности функции на промежутке. Докажите по определению, что функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на полуоси $[1;+\infty)$, а функция $y = \frac{1}{x}$ равномерно непрерывна полуоси $[1;+\infty)$, но не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$. Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке. Покажите, что отрезок в условии теоремы нельзя заменить интервалом.

Равномерная непрерывность

Определение. *Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке X. Она называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x_1, x_2 \in X$ будет справедливо*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Запишем это определение при помощи кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x_1, x_2 \in X \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right).$$

Пример 1. Функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. ►Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| < \varepsilon \overset{|x_1|,|x_2|<1}{\Leftarrow} 2|x_1 - x_2| < \varepsilon \Leftarrow |x_1 - x_2| < \delta,$$

если $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.◄

Пример 3. Функция $y = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0,1)$.

Доказательство. Запишем сначала при помощи кванторов отрицание равномерной непрерывности функции на промежутке $\langle a,b \rangle$:

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\right).$$

В нашем случае последнее утверждение выглядит следующим образом:

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in (0,1) \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge \ \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| \geq \varepsilon\right).$$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим произвольное $\delta \in (0,1)$. Пусть $x_1 = \delta$, а $x_2 = \frac{\delta}{2}$. Очевидно, что $|x_1 - x_2| < \delta$, но при этом

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\delta} > \varepsilon.$$

Пример 4. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей оси.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим произвольное $\delta > 0$. Положим $x_1 = \frac{1}{\delta}$, а $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$. Имеем $|x_1 - x_2| < \delta$, но при этом

$$|x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) > 1.$$