

19 Дайте определение в терминах окрестностей и в терминах неравенств односторонних пределов: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Проиллюстрируйте эти определения графически.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в левой полуокрестности точки a . Говорят, что она имеет предел b при x , стремящемся к a слева и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ или } f(x) \rightarrow b \ (x \rightarrow a-0)$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ при $x \in O_\delta^-(a)$.

Запишем это определение с неравенствами

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b =: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

и «в окрестностях»:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x ((x \in O_\delta^-(a)) \Rightarrow (f(x) \in O_\varepsilon(b))).$$

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$ ($\delta(\varepsilon)$ - произвольно).

Упражнение. По аналогии с предыдущим запишите определение $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, приведите пример.

Для конечных односторонних пределов в точке a используются обозначения $f(a-0)$ (предел слева) и $f(a+0)$ (предел справа).

Упражнение. Дайте определение односторонних пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty,$$

приведите примеры.