Билет 13: Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенстве (в двух неравенствах) для функций. Пользуясь определением предела функции по Гейне и соответствующей теоремой для последовательностей, докажите одну из них.

Теорема *(о переходе к пределу в неравенстве). Пусть функции* $f(x), g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности точки* a - $\overset{\circ}{O}_r(a)$*, и пусть в этой окрестности выполнено неравенство* $f(x) \le g(x)$*, а также существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$*. Тогда* $b \le c$*.*

Доказательство. ▸ Из определения предела по Гейне следует, что для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \ne a$ $(n \in \mathbf{N})$ будет справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$. Кроме того, с некоторого номера n_0 (когда члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$) будет выполняться неравенство $f(x_n) \le g(x_n)$. Применив теорему о предельном переходе в неравенстве к последовательностям $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$, получим нужное нам неравенство $b \le c$. ◂

Теорема *(о переходе к пределу в двух неравенствах). Пусть функции* $f(x), g(x), h(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности точки* a - $\overset{\circ}{O}_r(a)$*, и пусть в этой окрестности выполнено неравенство* $f(x) \le h(x) \le g(x)$*, а также существуют и равны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$*. Тогда существует предел* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$*.*

Доказательство. ▸ Из условий теоремы следует, что для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \ne a$ $(n \in \mathbf{N})$ будет справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, а также, что с некоторого номера n_0 (когда члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$) будет выполняться неравенство $f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n)$. Применим теорему о предельном переходе в двух неравенствах к последовательностям $\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}, \{h(x_n)\}$. Получим существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a ($x_n \ne a$). Следовательно, для функции $h(x)$ в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$ выполнены все условия существования предела по Гейне. ◂