24 .Дайте определение равномерной непрерывности функции на промежутке. Докажите по определению, что функция $y=x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на полуоси $[1;+\infty)$, а функция $y=\dfrac{1}{x}$ равномерно непрерывна полуоси $[1;+\infty)$, но не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$. Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке. Покажите, что отрезок в условии теоремы нельзя заменить интервалом.

Равномерная непрерывность

Определение. *Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке X. Она называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех $x_1,x_2\in X$ будет справедливо*

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Запишем это определение при помощи кванторов:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x_1,x_2\in X\ \left(|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\right).$$

Пример 1. Функция $y=x^2$ равномерно непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. ►Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|(x_1-x_2)(x_1+x_2)\right|<\varepsilon \overset{|x_1|,|x_2|<1}{\Leftarrow} 2|x_1-x_2|<\varepsilon \Leftarrow |x_1-x_2|<\delta,$$

если $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.◄

Пример 3. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0,1)$.

Доказательство. Запишем сначала при помощи кванторов отрицание равномерной непрерывности функции на промежутке $\langle a,b\rangle$:

$$\exists\varepsilon>0:\ \forall\delta>0\ \exists x_1,x_2\in\langle a,b\rangle\ \left(|x_1-x_2|<\delta \wedge\ |f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon\right).$$

В нашем случае последнее утверждение выглядит следующим образом:

$$\exists\varepsilon>0:\ \forall\delta>0\ \exists x_1,x_2\in(0,1)\ \left(|x_1-x_2|<\delta \wedge\ \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\geq\varepsilon\right).$$

Возьмем $\varepsilon=1$ и рассмотрим произвольное $\delta\in(0,1)$. Пусть $x_1=\delta$, а $x_2=\dfrac{\delta}{2}$. Очевидно, что $|x_1-x_2|<\delta$, но при этом

$$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{\delta}>\varepsilon.$$

Пример 4. Функция $y=x^2$ не является равномерно непрерывной на всей оси.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon=1$ и рассмотрим произвольное $\delta>0$. Положим $x_1=\dfrac{1}{\delta}$, а $x_2=x_1+\dfrac{\delta}{2}$. Имеем $|x_1-x_2|<\delta$, но при этом

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|(x_1-x_2)(x_1+x_2)\right|=\frac{\delta}{2}\cdot\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)>1.$$