Билет 20: Изложите классификацию точек разрыва, приведите примеры.

Классификация точек разрыва.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки a. Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке a, если

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a).$$

В противном случае a будет точкой разрыва $f(x)$. Рассмотрим разные варианты нарушения этого условия.

1°. Точка a называется точкой ***устранимого разрыва***, если односторонние пределы существуют, совпадают, но не равны значению функции в точке a, или же $f(x)$ не определена в точке a.

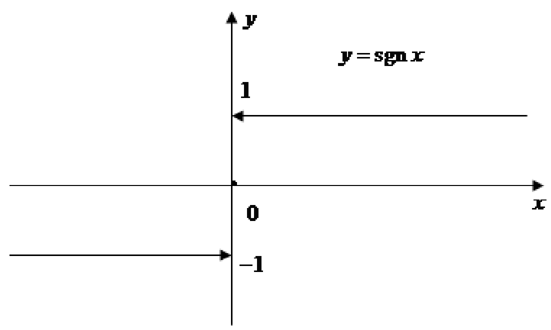
Пример 1. Функция $f(x)=|\operatorname{sgn} x|$ имеет устранимый разрыв в точке $x=0$, поскольку пределы слева и справа равны (единице), но не равны значению функции ф точке 0 (нулю).

Пример 2. Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x^{-2}$ имеет устранимый разрыв в точке $x=0$, поскольку пределы слева и справа равны (единице), но сама функция в нуле не определена.

2°. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a ***скачок,*** если односторонние пределы $f(x)$ при $x\to a$ существуют, но не совпадают.

Разность $f(a+0)-f(a-0)$ называется *величиной скачка* в точке a или *скачком* функции в этой точке.

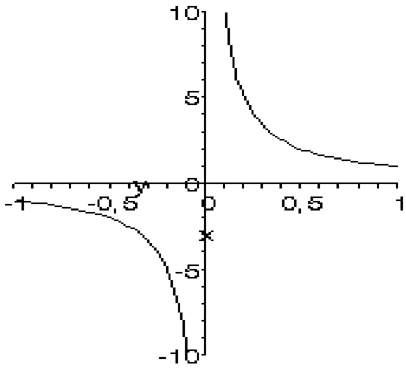
Пример 3. $f(x)=\operatorname{sgn} x$ при $x=0$ имеет скачок, равный 2.



Устранимый разрыв и скачок называются ***разрывами первого рода***.

3°. Точка a называется ***разрывом второго рода,*** если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ имеет разрыв второго рода при $x=0$ ($\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)=\pm\infty$).



Пример 5. Функция $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ имеет разрыв второго рода при $x=0$, так

предела $f(x)$ при $x\to 0$ не существует. В самом деле, при $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}\to 0$ будет

выполнено $f(x_n)=\sin 2\pi n=0$, а при $x_n'=\dfrac{1}{2\pi n+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$ будет $f\left(x_n'\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$.

Это «график» этой функции. Близкие к нулю полуволны сливаются в «мазню».