Функции многих переменных.

В данном разделе нам понадобятся некоторые понятия из теории метрических пространств.

Определение. *Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре элементов* $x, y \in X$ *поставлено в соответствие неотрицательное число* $\rho(x, y)$, *называемое расстоянием между этими элементами или метрикой пространства X и удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрики):*

1. $\rho(x, y) \ge 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(аксиома тождества)*

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(аксиома симметрии)*

3. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(аксиома треугольника)*

Элементы метрического пространства называются также точками этого пространства.

Нас будет интересовать класс метрических пространств R^n, это - множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} .$$

Определение. *Пространством* $\mathbf{R}^n$ *называется линейное пространство* $n-$*мерных векторов*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

с введенными на нем операциями сложения и умножения на скаляр и расстоянием, определяемым по формуле

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} .$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет всем аксиомам расстояния.

Два первых утверждения очевидны. Остановимся на доказательстве справедливости третьей аксиомы. Нам понадобится следующее неравенство:

Утверждение (неравенство Коши-Буняковского). *Для любых* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} .$$

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k - b_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

Она представляет собой неотрицательный квадратный трехчлен, дискриминант которого, соответственно, должен быть неположительным, то есть

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le 0 \Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} . \triangleleft$$

Докажем теперь неравенство треугольника: $\triangleright$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} = \begin{Bmatrix} a_k = x_k - z_k \\ b_k = z_k - y_k \end{Bmatrix} =$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Leftarrow \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} . \triangleleft$$

Определение. *Окрестностью радиуса* ε *точки* $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ *называется множество*

$$O_\varepsilon(\vec{a})=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\rho(\vec{x},\vec{a})<\varepsilon\right\}.$$

Определение. *Точка* $\vec{x}$, *принадлежащая множеству* $G\subset\mathbf{R}^n$, *называется внутренней точкой этого множества, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью, то есть*

$$\exists O_\varepsilon(\vec{x})\subset G.$$

Определение. *Множество* $G\subset\mathbf{R}^n$, *называется открытым, если все его точки – внутренние.*

Пример. $O_h(a)$ - h – окрестность точки $a\in\mathbf{R}^n$ является открытым множеством в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x_0\in O_h(a)$, тогда $\rho(x_0,a)=h-\delta\quad(0<\delta<h)$. Положим $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}$ и рассмотрим точку $x\in O_\varepsilon(x_0)$. Воспользовавшись неравенством треугольника, получим:

$$\rho(x,a)\le\rho(x,x_0)+\rho(x_0,a)<\varepsilon+h-\delta=\frac{\delta}{2}+h-\delta<h\Rightarrow x\in O_h(a).$$

Определение. *Точка* $\vec{x}_0$ *называется граничной точкой множества* F, *если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие множеству* F, *так и не принадлежащие ему (принадлежащие его дополнению* CF*), то есть*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists x,y\in O_\varepsilon(x_0):x\in F,\ y\in CF.$$

Определение. *Объединение всех граничных точек множества называется границей этого множества.*

Определение. *Множество* F *называется замкнутым, если оно содержит* ***всю*** *свою границу.*

Из определений внутренней и граничной точки видим, что каждая точка множества является либо внутренней, либо граничной. Граничная точка множества является также граничной и для его дополнения. Открытое множество не должно содержать ни одной граничной точки. Если множество содержит только часть своей границы, оно не является ни открытым, ни замкнутым.

Теорема. *Дополнение к замкнутому множеству открыто, а к открытому – замкнуто.*

Доказательство. Поскольку у множества и его дополнения граничные точки общие, то получаем, что, если множество открыто, то есть не содержит ни одной граничной точки, то все они принадлежат дополнению (дополнение замкнуто). И наоборот, замкнутое множество содержит все свои граничные точки, а значит, дополнение не содержит ни одной (открыто).

Пример. Множество $F=\left\{x\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\rho(x,a)\ge h\right\}$ является замкнутым множеством в пространстве $\mathbf{R}^n$, поскольку оно является дополнением к открытому множеству (см. предыдущий пример).

Определение. *Отрезком* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\subset\mathbf{R}^n$ $\left(\vec{a}=(a_1,\dots,a_n),\ \vec{b}=(b_1,\dots,b_n)\right)$ *называется множество точек* $\vec{x}$, *координаты которых удовлетворяют уравнениям:*

$x_k=a_k+t(b_k-a_k),\quad k=1,\dots,n;\ 0\le t\le1.$

Определение. *Шаром* $U_r(\vec{a})$ *радиуса* r *с центром в точке* $\vec{a}$ *называется замкнутая окрестность*

$$U_r(\vec{a})=\left\{\vec{x}\in\mathbf{R}^n:\rho(\vec{x},\vec{a})\le r\right\}.$$

Определение. *Параллелепипедом (* $n-$ *мерным) называется множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам*

$$a_k \le x_k \le b_k, \quad k = 1,\dots,n.$$

Определение. *Множество* E *называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса или в параллелепипеде с ребрами конечной длины.*

Пример. Эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$ (изобразите его) является ограниченным множеством в пространстве $\mathbf{R}^2$ (содержится в шаре радиуса 3 с центром в 0).

Определение. *Ломаной* $\gamma \subset \mathbf{R}^n$ *с узлами в точках* $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m$ *называется объединение отрезков:* $\gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m}[\vec{a}_k,\vec{a}_{k+1}]$.

Определение. *Множество* E *называется связным, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком содержащейся в* E.

Пример. Множество точек (x,y) с координатами, удовлетворяющими неравенству $x^2-y^2<1$, является связным, а множество, определяемое неравенством $x^2-y^2>1$, несвязным в пространстве $\mathbf{R}^2$ (изобразите эти множества).

Определение. *Областью в пространстве* $\mathbf{R}^n$ *называется открытое связное множество. Область с границей называется замкнутой областью.*

Предел и непрерывность функции многих переменных.

Определение. *Пусть дана функция* $\overline{y}=\overline{f}\left(\overline{x}\right)$, *с областью определения* $X\subset\mathbf{R}^n$ *и множеством значений* $Y\subset\mathbf{R}^m$. *Говорят, что вектор* $\overline{b}\in\mathbf{R}^m$ *является пределом функции* $\overline{f}\left(\overline{x}\right)$ *при* $\overline{x}\to\overline{a}\in\mathbf{R}^n$ *и пишут* $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}}\overline{f}\left(\overline{x}\right)=\overline{b}$, *если для любого положительного* ε *найдется такое положительное* $\delta(\varepsilon)$ *такое, что образ проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_\delta\left(\overline{a}\right)\subset\mathbf{R}^n$ *будет принадлежать окрестности* $O_\varepsilon\left(\overline{b}\right)\subset\mathbf{R}^m$, *то есть*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\left(\overline{x}\in\overset{\circ}{O}_\delta\left(\overline{a}\right)\cap X\Rightarrow\overline{f}\left(\overline{x}\right)\in O_\varepsilon\left(\overline{b}\right)\right).$$

Поскольку, в основном, нас будут интересовать пределы действительнозначных функций двух и трех переменных, распишем подробно определения предела функции для этих двух случаев.

Определение. *Пусть дана функция* $z=f\left(x,y\right)$ *с областью определения* $X\subset\mathbf{R}^2$ *и множеством значений* $Y\subset\mathbf{R}$. *Говорят, что точка* $A\in\mathbf{R}$ *является пределом функции* $z=f\left(x,y\right)$ *при* $\left(x,y\right)\to\left(a,b\right)$ *и пишут* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f\left(x,y\right)=A$ *или* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f\left(x,y\right)=A$, *если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\left(x,y\right):0<\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2}<\delta\Rightarrow\left|f\left(x,y\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Определение. *Пусть дана функция* $u=f\left(x,y,z\right)$ *с областью определения* $X\subset\mathbf{R}^3$ *и множеством значений* $U\subset\mathbf{R}$. *Говорят, что точка* $A\in\mathbf{R}$ *является пределом функции* $u=f\left(x,y,z\right)$ *при* $\left(x,y,z\right)\to\left(a,b,c\right)$ *и пишут* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)}f\left(x,y,z\right)=A$, *если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\left(x,y,z\right):0<\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2}<\delta\Rightarrow\left|f\left(x,y,z\right)-A\right|<\varepsilon.$$

В двух последних определениях мы предполагаем точки $\left(a,b\right)$ и $\left(a,b,c\right)$ внутренними точками X.

Пример 1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

Доказательство. $\triangleright$ Если $(x,y)\in \overset{\circ}{O}_\delta(0,0)$, то
$\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{|x|}{2}\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{|x|}{2} \le \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{\delta}{2}$. Поэтому для того, чтобы $\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \in O_\varepsilon(0)$ достаточно взять $\delta = 2\varepsilon$. $\triangleleft$

Пример 2. Не существует предела функции $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$ при $(x,y)\to(0,0)$.

Доказательство. $\triangleright$ В самом деле, рассмотрим поведение функции на прямой $y = kx$ при $x\to 0$:

$$f(x,kx) = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

откуда мы видим, что при стремлении к нулю по разным направлениям, мы получим разные предельные значения для функции, а это означает, что общего предела не существует. $\triangleleft$

Определение. *Скажем, что функция* $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$ *непрерывна в точке* $\overline{a}$ *, если*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{a}):$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \left(\overline{x}\in O_\delta(\overline{a})\cap X \Rightarrow \overline{f}(\overline{x})\in O_\varepsilon\left(\overline{f}(\overline{a})\right)\right)$$

Пример 3. Функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$ непрерывна в нуле.

Для функций многих переменных справедливы теоремы об арифметических действиях с пределами и непрерывными функциями, о непрерывности сложной функции:

Теорема. *Пусть функция* $g: X\subset \mathbf{R}^n \to Y \subset \mathbf{R}^m$ *непрерывна в точке* $x_0\in X$ *, а функция* $f: Y\to Z\subset \mathbf{R}^k$ *непрерывна в точке* $y_0 = g(x_0)\in Y$ *. Тогда сложная функция* $z = f(g(x)) : X\to Z$ *будет непрерывной в точке* x_0*.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Из непрерывности функции $f(y)$ в y_0 следует, что найдется $\delta>0$ такое, что

$$y\in O_\delta(y_0)\cap Y \Rightarrow f(y)\in O_\varepsilon(f(y_0)),$$

а из непрерывности $g(x)$ в x_0 вытекает существование $\sigma>0$, при котором

$$x\in O_\sigma(x_0)\cap X \Rightarrow g(x)\in O_\delta(g(x_0)),$$

то есть

$$x\in O_\sigma(x_0)\cap X \Rightarrow f(g(x))\in O_\varepsilon\left(f(g(x_0))\right).$$

Что касается функций многих переменных, заданных аналитическими выражениями, то вопрос об их непрерывности часто можно свести к непрерывности функций одной переменной с помощью следующего приема.

Утверждение. *Пусть функция* $z = f(x)$ *непрерывна как функция одной переменных на промежутке* $\langle a,b\rangle$, *тогда* $z = f(x)$ *будет непрерывной как функция двух переменных в полосе* $x\in\langle a,b\rangle$, $y\in(-\infty,+\infty)$ *(аналогично для* $z = f(y)$*).*

Поэтому функция, заданная аналитическим выражением с использованием элементарных функций будет непрерывна на своей области определения.

Пример 4. Рассмотрим функцию двух переменных $z=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$. Функции $x,\ x^2,\ y,y^2$ непрерывны как функции одной переменной на всей оси (Ox или Oy), следовательно, они непрерывны как функции двух переменных на всей плоскости; функция xy непрерывна как произведение непрерывных функций, а $z=\sin(xy)$ непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции. Наконец, частное непрерывных функций $\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ непрерывно везде, за исключением точки $(0,0)$.

Справедливы также следующие теоремы.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве* $D\in \mathbf{R}^n$, *то функция ограничена на этом множестве.*

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве* $D\in \mathbb{R}^n$, *то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней границ.*

Теорема (Кантора). *Если функция* $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to Y\subseteq\mathbb{R}^m$ *непрерывна на ограниченном замкнутом множестве* X, *то она равномерно непрерывна на нем, то есть*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x',x''\in X\quad \rho_{\mathbb{R}^n}(x',x'')<\delta\Rightarrow\rho_{\mathbb{R}^m}\left(f(x'),f(x'')\right)<\varepsilon.$$

Аналогом теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции является следующая теорема, которую мы докажем в двухмерном варианте (идеологически ничем не отличающимся от $n-$мерного).

Теорема. *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна в некоторой связной области* G. *Если в двух точках* $A(a',a'')$ *и* $B(b',b'')$, *принадлежащих* G, *функция принимает значения разных знаков (* $f(A)\cdot f(B)<0$ *), то в этой области найдется точка* $C(c',c'')$, *в которой* $f(C)=0$.

Без доказательства.

Дифференцируемость функций нескольких переменных.

Рассмотрим действительнозначную функцию n переменных $y=f(\overline{x})$ $\left(\overline{x}=(x_1,...,x_n)\right)$. Обозначим через Δx_i приращение $i-$й координаты вектора $\overline{x}$, а через $\Delta\overline{x}_i$ вектор, у которого все координаты кроме $i-$й – нулевые, а $i-$я равна Δx_i. Пусть $\Delta\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\overline{x}_i$ - приращение аргумента, $\Delta f(\overline{x})=f(\overline{x}+\Delta\overline{x})-f(\overline{x})$ - приращение функции, а $\Delta_{x_i}f(\overline{x})=f(\overline{x}+\Delta\overline{x}_i)-f(\overline{x})$ - частное приращение функции., $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$ - длина приращения.

Определение. *Функция* $y=f(\overline{x})$ *называется дифференцируемой в точке* $\overline{x}$, *если ее приращение можно представить в виде*

$$\Delta f\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+o\left(\rho\right),\quad \rho\to 0. \tag{1}$$

При этом линейная часть приращения дифференцируемой функции называется ее дифференциалом в точке $\overline{x}$ *, что записывается как*

$$df\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i .$$

Замечание. $\varphi\left(\Delta\overline{x}\right)=o\left(\rho\right)\Leftrightarrow\varphi\left(\Delta\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$ *, где* α_i *- бесконечно малые функции при* $\Delta\overline{x}\to 0$.

Доказательство. $\triangleright$

$$\varphi\left(\Delta\overline{x}\right)=o\left(\rho\right)\Rightarrow\varphi=\varepsilon\rho=\frac{\varepsilon\rho^2}{\rho}=\varepsilon\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon\Delta x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}}\Delta x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i,$$

поскольку $\Delta x_i\le\rho$. С другой стороны, если

$$\varphi\left(\Delta\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=\rho\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\Delta x_i}{\rho}=\rho\varepsilon. \triangleleft$$

Поэтому мы будем пользоваться любой формой записи остатка, а именно, кроме записи (1) еще и

$$\Delta f\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i,\quad \rho\to 0.$$

Если $f\left(\overline{x}\right)=x_i$, то

$$\Delta f=x_i+\Delta x_i-x_i=1\cdot\Delta x_i+0\cdot\rho=df+o\left(\rho\right).$$

То есть в случае независимой переменной x_i .имеем $\Delta x_i=dx_i$. Поэтому дифференциал обычно записывают в виде $df\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i dx_i$.

Запишем определение дифференцируемости действительнозначной функций двух переменных.

Определение. *Функция* $y=f\left(x,y\right)$ *называется дифференцируемой в точке* $\left(x,y\right)$, *если ее приращение можно представить в виде*

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\rho\right),\quad \rho\to 0.$$

Линейная часть приращения дифференцируемой функции называется ее дифференциалом в точке $\left(x,y\right)$, *что записывается как*

$$df\left(x,y\right)=A\Delta x+B\Delta y \text{ или } df\left(x,y\right)=Adx+Bdy$$

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Утверждение. *Если функция* $y=f\left(\overline{x}\right)$ *дифференцируема в точке* $\overline{x}$ *, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. $\triangleright$ Функция $y=f\left(\overline{x}\right)$ непрерывна в точке $\overline{x}$, если $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f=0$. Если же функция дифференцируема в данной точке, то

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta f=\lim_{\rho\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+o\left(\rho\right)\right)=0. \triangleleft$$

Обратное неверно, а именно, существуют непрерывные в точке функции, недифференцируемые в этой точке.

Пример. Рассмотрим функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в нуле. Очевидно, что

$$\lim_{x,y\to 0} z(x,y)=z(0,0)=0,$$

то есть функция непрерывна в нуле. Если бы она была в нуле еще и дифференцируемой, то было бы

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,\quad \rho\to 0,$$

то есть

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,\quad \rho\to 0.$$

Положим $\Delta y=0$, и пусть $\Delta x\to 0$, тогда

$$\sqrt{\Delta x^2} = A\Delta x + \alpha\Delta x,\quad \sqrt{\Delta x^2}\to 0.$$

В таком случае разделим обе части равенства на Δx и перейдем к пределу:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}-\alpha\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Последний предел, как нам известно, не существует, поскольку

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\neq \lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Частные производные функции нескольких переменных.

Определение. *Частной производной функции $y=f(\overline{x})$ по переменной x_i в точке $\overline{x}$ называется предел (если он существует)*

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i} f(\overline{x})}{\Delta x_i}.$$

Запишем это определение для функции двух переменных:

Определение. *Частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной x в точке (x,y) называется предел (если он существует)*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Связь между непрерывностью, дифференцируемостью функции и существованием ее частных производных.

Теорема. *Если функция $y=f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x}$, то у нее существуют все частные производные $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}$, причем*

$$df(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}dx_i.$$

Доказательство. $\triangleright$ Так как функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x}$, то

$$\Delta f(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i,\quad \rho\to 0,$$

а если $\Delta x_j = 0 \ (j \neq i)$, то

$$\Delta_{x_i} f = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i \to 0,$$

поэтому

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\overline{x})}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i}{\Delta x_i} = A_i. \lhd$$

Из существования частных производных непрерывность и дифференцируемость функции, вообще говоря, не вытекает, что мы продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=y=0 \end{cases}.$$

Эта функция, как нам известно, разрывна в нуле, а, следовательно, и не дифференцируема в нем. Тем не менее, имеем

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично можно показать, что $f'_y(0,0) = 0$.

Справедлива, однако, следующая теорема (мы ее докажем для случая функции двух переменных).

Теорема. *Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными $f_x(x,y), f_y(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0). Тогда она будет дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. $\rhd$ Представим полное приращение функции Δz в виде

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

Каждая из этих разностей представляет частное приращение функции лишь по одной переменной. Применяя к ним формулу конечных приращений, получим

$$\Delta z = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

Из непрерывности частных производных в окрестности точки (x_0,y_0) следует, что

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,y_0) + \alpha, \qquad f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = f'_y(x_0,y_0) + \beta,$$

где α и β - бесконечно малые функции при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Используя полученные выражения, получим

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad \Delta x, \Delta y \to 0. \lhd$$

Производная от сложной функции.

Пусть в открытой области $G \subset \mathbf{R}^2$ задана функция $z = f(x,y)$, непрерывная вместе со своими частными производными z'_x, z'_y в G, и пусть переменные x, y являются непрерывно дифференцируемыми функциями от переменной t на промежутке (α,β) $(x = x(t), y = y(t))$, причем при $t \in (\alpha,\beta)$ точка $(x(t), y(t)) \in G$. Тогда мы можем рассмотреть сложную функцию $f(x(t), y(t))$, определенную на (α,β).

Покажем, что эта функция дифференцируема, и вычислим ее производную. Итак, фиксируем точку $(x,y) \in G$. Придадим переменной t некоторое приращение Δt, ему будут соответствовать приращения $\Delta x, \Delta y$ переменных x, y. Поскольку частные производные функции z непрерывны в окрестности этой точки, она дифференцируема в (x, y) и соответствующее ее приращение представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где α, β - бесконечно малые функции при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Разделив обе части последнего равенства на Δt, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Так как $x(t), y(t)$ непрерывны, то при $\Delta t \to 0$ будет $\Delta x, \Delta y \to 0$ и, соответственно, $\alpha, \beta \to 0$. Воспользовавшись также существованием производных $x'(t), y'(t)$, в пределе получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда x, y зависят от нескольких переменных, например, от двух: $x = x(t,s), y = y(t,s)$ ($(t,s) \in U \subset \mathbf{R}^2$). Будем предполагать по аналогии с одномерным случаем, что x, y имеют непрерывные частные производные по переменным t и s.

Вопрос существования частных производных z'_t и z'_s существенно не отличается от рассмотренного ранее, поскольку при вычислении частной производной одну из двух переменных мы фиксируем, и у нас остается функция, зависящая только от одной переменной. Для этого случая получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

аналогичная формула получается для производной по переменной s:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

В общем случае, если функции $f_i(x_1,...,x_m)$ $(i = 1,...,n)$ имеют непрерывные частные производные в области $G \subset \mathbf{R}^n$, а функции $x_i(t_1,...,t_k)$ $(i = 1,...,m)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(i = 1,...,m,\ j = 1,...,k)$ в области $U \subset \mathbf{R}^k$, причем $(t_1,..,t_k) \in U \Rightarrow (x_1(t_1,..,t_k),...,x_m(t_1,..,t_k)) \in G$, то в области U функции $f_i(x_1(t_1,...,t_k),...,x_m(t_1,...,t_k))$ $(i = 1,...,n)$ будут иметь непрерывные частные производные, вычисляемые по формулам

$$\frac{\partial f_i(x_1(t_1,...,t_k),...,x_m(t_1,...,t_k))}{\partial t_j} = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial t_j}\ (i = 1,...,n,\ j = 1,...,k).$$

Матрица Якоби, определитель Якоби

Рассмотрим набор функций $f_i(x_1,...,x_m)$ $(i = 1,...,n)$ непрерывных в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^m$ и имеющих в этой области непрерывные частные производные по всем переменным. Матрица размерностью $n \times m$, составленная из частных производных этих функций, определенная в G

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}(\overline{x})$$

называется матрицей Якоби функций $f_i(\overline{x})$ $(i=1,\dots,n)$. Если $m=n$, то определитель такой квадратной матрицы называется определителем Якоби и часто обозначается как

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}=\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|(\overline{x})\quad (i,j=1,\dots,n).$$

Вспомним формулы вычисления частных производных при замене переменных. Пусть функции $f_i(x_1,\dots,x_m)$ $(i=1,\dots,n)$ имеют непрерывные частные производные в области $G\subset\mathbf{R}^n$, функции $x_i(t_1,\dots,t_k)$ $(i=1,\dots,m)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,k)$ в области $U\subset\mathbf{R}^k$, причем если $\overline{t}\in U$, то $(x_1(\overline{t}),\dots,x_m(\overline{t}))\in G$. Тогда в области U

$$\frac{\partial f_i(x_1(t_1,\dots,t_k),\dots,x_m(t_1,\dots,t_k))}{\partial t_j}=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial t_j}\ (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,k).$$

Эти же выражения получатся при перемножении матриц $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}$ и $\frac{\partial(x_1,\dots,x_m)}{\partial(t_1,\dots,t_k)}$ поэтому

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(t_1,\dots,t_k)}=\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\times\frac{\partial(x_1,\dots,x_m)}{\partial(t_1,\dots,t_k)}.$$

Пример. Пусть $f(x,y)=x^2y,\quad y=\sin x\ (n=1,\ m=2,\ k=1)$. Тогда

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\times\frac{\partial(x,y)}{\partial(x)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ \frac{dy}{dx}\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2xy+x^2\cos x=2x\sin x+x^2\cos x$$

(тот же результат мы бы получили, если бы дифференцировали $x^2\sin x$).

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=f(x,y)$, где $\begin{cases}x=u\sqrt{v},\\ y=\frac{v}{\sqrt{u}}.\end{cases}$ Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial(u,v)}=\frac{\partial z}{\partial(x,y)}\times\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix},$$

то есть $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{v}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{v}{2\sqrt{u^3}}\right)$, а $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{u}{2\sqrt{v}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{u}}$.

Формула конечных приращений.

Утверждение. *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна в замкнутой области* D *и имеет непрерывные частные производные* f'_x, f'_y *внутри этой области. Пусть отрезок* $[M_0, M_1]$ $\left(M_0(x_0, y_0),\ M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\right)$ *целиком лежит в области* D.

Тогда справедлива формула

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta<1).$$

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим замену переменных $x = x_0 + t\Delta x,\quad y = y_0 + t\Delta y$. Сложная функция $F(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, а внутри его имеет производную, равную

$$F'(t) = f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y.$$

По формуле конечных приращений для функции одной переменной имеем

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0) = F'(\theta).$$

Подставив вместо F и F' их выражения через функцию f, получим нужную нам формулу.

Производная по заданному направлению.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и дифференцируема в открытой области G, и пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in G$. Нас будет интересовать поведение функции вдоль прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\overline{a} = (a_1, a_2)$ единичной длины $(|\overline{a}| = 1)$, то есть поведение функции на множестве точек $M(x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t)$:

$$\varphi(t) = f(x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t).$$

Определение. *Производной функции* f *по направлению* $\overline{a}$ *в точке* M_0 *называется величина*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = f'_x(M_0)a_1 + f'_y(M_0)a_2.$$

Производная по направлению характеризует рост функции в направлении $\overline{a}$ аналогично тому, как частная производная характеризует рост функции в направлении соответствующей оси.

Градиент функции.

Определение. *Градиентом действительнозначной функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *называется вектор* $\overrightarrow{grad} f(M_0) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0)\right)$.

Из формулы для производной по направлению видим, что

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{a}} = \left(\overrightarrow{grad} f(M_0), \overline{a}\right).$$

Скалярное произведение будет максимальным, если векторы будут сонаправлены, то есть, если направление вектора $\overline{a}$ будет совпадать с направлением градиента функции в данной точке. Таким образом, заключаем, что градиент указывает направление наибольшего возрастания функции, а модуль его говорит о скорости этого роста.

Инвариантность формы первого дифференциала.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x, z'_y в открытой области $G \subset \mathbf{R}^2$. Тогда она будет дифференцируема в G, а ее дифференциал имеет вид $dz = z'_x dx + z'_y dy$, где dx, dy совпадают с приращениями переменных x, y.

Пусть теперь переменные x, y в свою очередь являются функциями от новых переменных t, s, причем функции $x(t,s), y(t,s)$ имеют непрерывные частные в открытой области $U \subset \mathbf{R}^2$ $\left((t,s) \in U \Rightarrow (x(t,s), y(t,s)) \in G\right)$ производные x'_t, x'_s, y'_t, y'_s. Тогда функция $z(t,s) = f(x(t,s), y(t,s))$ будет иметь непрерывные частные производные. Выпишем ее дифференциал в этом случае:

$$dz = \left(z'_x x'_t + z'_y y'_t\right)dt + \left(z'_x x'_s + z'_y y'_s\right)ds = z'_x\left(x'_t dt + x'_s ds\right) + z'_y\left(y'_t dt + y'_s ds\right) = z'_x dx + z'_y dy .$$

Видим, что дифференциал имеет прежнюю форму, только dx, dy здесь уже не совпадают с приращениями переменных x, y, а являются главными линейными частями этих приращений. Это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Если функция $u = f(x_1, ..., x_n)$, определенная в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$, имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$ по переменной x_i, то эта частная производная вновь является некоторой функцией, которая в свою очередь может иметь частную производную $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_1, ..., x_n)$. Эта функция называется второй производной функции f по переменным x_i, x_j и обозначается символом $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Порядок индексов указывает, в каком порядке производится дифференцирование по соответствующим переменным.

Мы определили частные производные второго порядка.

Если определена частная производная

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x_1, ..., x_n)$$

порядка k, то по индукции определяем частную производную порядка $k+1$ соотношением

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k} \partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}\right)(x_1, ..., x_n).$$

Когда функции записываются в виде $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, вторые или третьи частные производные часто обозначаются следующим образом: $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f'''_{xzy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$, $f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f'''_{z^2 y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$ и так далее.

Возникает вопрос о том, влияет ли порядок дифференцирования на вычисленную частную производную. В общем случае влияет, но если функция удовлетворяет некоторым условиям, то нет. Сформулируем соответствующую теорему для случая функции двух переменных.

Теорема (Шварца). *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна вместе со своими вторыми смешанными производными в некоторой окрестности* $O_r(x,y)$*, точки* (x,y)*, то*

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

(Без доказательства)

Следствие. *Пусть функция* $u=f(x_1,...,x_n)$ *определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до* $k-$*го порядка включительно.*

Тогда значение любой $k-$*й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.*

Дифференциалы высших порядков.

Пусть в области G задана некоторая функция $u=f(x_1,...,x_n)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда она будет дифференцируема в этой области, и ее дифференциал имеет вид

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n,$$

где $dx_1,...,dx_n$ - произвольные приращения независимых переменных $x_1,...,x_n$.

Видим, что du также является функцией от $x_1,...,x_n$. Если существуют непрерывные частные производные второго порядка функции для u, то можно говорить о дифференциале от первого дифференциала $d(du)$, который называется дифференциалом второго порядка от u и обозначается символом d^2u.

Приращения $dx_1,...,dx_n$ **при этом рассматриваются как постоянные** и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему.

Запишем формулу второго дифференциала для функции двух переменных $u=f(x,y)$:

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Если первый дифференциал символически записать следующим образом

$$du=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)\cdot u,$$

то второй будет иметь вид

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot u.$$

Можно показать, что аналогичная формула справедлива для дифференциалов любого порядка от функций любого же количества переменных $u=f(x_1,...,x_n)$:

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m\cdot u$$

Дифференциалы сложных функций.

Рассмотрим сложную функцию $u=f(x,y)$, где, в свою очередь, $x=x(t),\quad y=y(t)$. В этом случае первый дифференциал имеет прежнюю форму

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

но здесь уже dx и dy являются дифференциалами не независимых переменных, а функций.

Вычислим теперь второй дифференциал данной функции:

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial f}{\partial x}d(dx) + \frac{\partial f}{\partial y}d(dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy + \frac{\partial f}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2 y =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) + \frac{\partial f}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2 y.$$

Видим, что для дифференциала второго порядка инвариантность формы, вообще говоря, уже не имеет места (если $\frac{\partial f}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2 y \neq 0$). Однако, *если функции* $x(t), y(t)$ *линейные, то* $d^2 x = d^2 y = 0$ *и инвариантность формы сохраняется.*

То есть в этом случае $d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k \cdot f$, кроме того, в этом случае $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Аналогичный факт будет справедлив для функций большего числа переменных и дифференциалов произвольных порядков.

Формула Тейлора-Лагранжа

Теорема. *Если функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка* n *включительно в некоторой окрестности* $O_r(x, y)$ *точки* (x, y), *то для* $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ *справедлива формула*

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^k f(x, y) + \frac{1}{n!}d^n f(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) \quad (0 < \theta < 1).$$

Доказательство. ⊳ Формула Тейлора является следствием соответствующей формулы для функции одной переменной. В самом деле, введем вспомогательную функцию $F(t) = f(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$, которая определена на отрезке $[0,1]$ и имеет на нем производные до порядка n включительно. Запишем для нее формулу Тейлора

$$\Delta F = F(t + \Delta t) - F(t) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^k F(t) + \frac{1}{n!}d^n F(t + \theta\Delta t) = \begin{Bmatrix} t = 0 \\ \Delta t = 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= F(1) - F(0) = \Delta f = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^k F(0) + \frac{1}{n!}d^n F(\theta), \quad (0 < \theta < 1). \qquad (3)$$

Так как зависимость переменных (x, y) от переменной t линейная, то форма дифференциалов сохраняется, то есть (учитываем, что $d(x + t\Delta x) = \Delta x\Delta t$, $d(y + t\Delta y) = \Delta y\Delta t$)

$$d^k F(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x + t\Delta x, y + t\Delta y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\Delta t + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\Delta t\right)^k f(x + t\Delta x, y + t\Delta y) =$$

$\Delta t^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f\left(x+t\Delta x, y+t\Delta y\right)$. Тогда, если $t=0,\ \Delta t=1,\ 0\le k\le n-1$, то $d^k F\left(0\right)=d^k f\left(x,y\right)$, а если $k=n$ и $t=\theta$, а $\Delta t=1$, то $d^n F\left(\theta\right)=d^n f\left(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y\right)$.

Подставив полученные выражения в равенство (3), получим нужную нам формулу.

Формула Тейлора-Пеано

Теорема. *Если функция $f\left(x,y\right)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка $n+1$ включительно в некоторой замкнутой окрестности $O_r\left(x,y\right)$ точки $\left(x,y\right)$, то для $\Delta f=f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)$ справедлива формула*

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f\left(x,y\right)+o\left(\rho^n\right),\ \rho\to 0\quad\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

Доказательство. Запишем формулу Тейлора-Лагранжа для этого случая:

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f\left(x,y\right)+\frac{1}{\left(n+1\right)!}d^{n+1}f\left(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y\right)\quad\left(0<\theta<1\right).$$

Поскольку все частные производные функции $f\left(x,y\right)$ непрерывны на ограниченном замкнутом множестве, то по теореме Вейерштрасса они ограничены на нем, то есть

$$\left|\frac{\partial^k f\left(x,y\right)}{\partial^m x\partial^{k-m}y}\right|\le M,\quad 0\le m\le k,\quad 0\le k\le n+1,\quad \left(x,y\right)\in O_r\left(x,y\right).$$

Тогда

$$\left|d^{n+1}f\left(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y\right)\right|=\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1}\cdot f\left(...\right)\right|=\left|\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m\frac{\partial^{n+1}f\left(...\right)}{\partial^m x\partial^{n+1-m}y}dx^m dy^{n+1-m}\right|\le$$

$$\le M\left|\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m dx^m dy^{n+1-m}\right|=M\left|\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m\Delta x^m\Delta y^{n+1-m}\right|\le\left\{\begin{matrix}\left|\Delta x\right|\le\rho\\ \left|\Delta y\right|\le\rho\end{matrix}\right\}\le M\rho^{n+1}\left|\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m\right|=M\rho^{n+1}2^{n+1}.$$

То есть

$$\frac{1}{\left(n+1\right)!}d^{n+1}f\left(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y\right)=O\left(\rho^{n+1}\right)\text{ или }\frac{1}{\left(n+1\right)!}d^{n+1}f\left(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y\right)=o\left(\rho^n\right),\ \rho\to 0.$$

Неявные функции.

Рассмотрим множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F\left(x,y\right)=0.$$

Если для каждого значения x в некотором промежутке существует одно значение y, которое вместе с исходным значением x удовлетворяет данному уравнению, то этим определяется однозначная функция $y=f\left(x\right)$, для которой равенство

$$F\left(x,f\left(x\right)\right)=0$$

имеет место тождественно относительно x. Такая функция $y=f\left(x\right)$ называется неявной, поскольку она задана уравнением, неразрешенным относительно y.

Займемся вопросом существования и непрерывности неявной функции.

Теорема (Юнга). *Пусть в некоторой окрестности $O_h\left(x_0,y_0\right)$ точки $\left(x_0,y_0\right)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными функция $F\left(x,y\right)$, и пусть, кроме того, $F\left(x_0,y_0\right)=0$ и $F'_y\left(x_0,y_0\right)\ne 0$.*

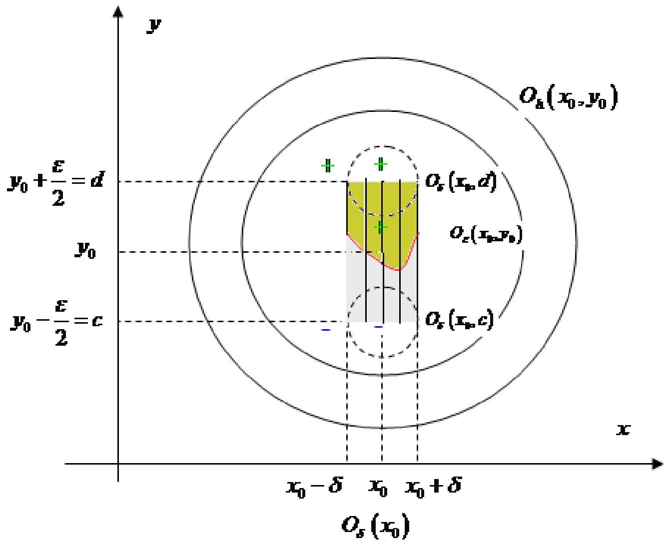
Тогда в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ *точки* x_0 *уравнением (1) определяется однозначная функция* $y = f(x)$ *такая, что:*

1) $f(x_0) = y_0$,

2) $F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in O_\delta(x_0)$,

3) функция $y = f(x)$ *непрерывна в окрестности* $O_\delta(x_0)$, *дифференцируема в точке* x_0, *и*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$



Доказательство. $\triangleright$ Из непрерывности $F'_y(x, y)$ в $O_h(x_0, y_0)$ и того, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, например, для определенности $F'_y(x_0, y_0) > 0$, следует, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$ в некоторой окрестности $O_\varepsilon(x_0, y_0) \subset O_h(x_0, y_0)$.

Тогда на отрезке $[c, d] = \left[y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ функция одной переменной $F(x_0, y)$ возрастает, и, следовательно, $F(x_0, c) < 0,\ F(x_0, d) > 0$. Выберем положительное $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ так, чтобы $F(x, y) < 0$ при $(x, y) \in O_\delta(x_0, c)$ и $F(x, y) > 0$ при $(x, y) \in O_\delta(x_0, d)$. Это можно сделать, поскольку функция $F(x, y)$ непрерывна в $O_h(x_0, y_0)$.

Фиксируем произвольную точку $x \in O_\delta(x_0)$. На отрезке $[c, d]$ функция $F(x, y)$ одной переменной y непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков. По теореме Коши о нуле непрерывной функции существует точка $y \in [c, d]$, в которой $F(x, y) = 0$, а так как функция $F(x, y)$ (как функция от переменной y) к тому же возрастает на $[c, d]$, то эта точка единственная. Таким образом, мы определили на $O_\delta(x_0)$ однозначную функцию $y = f(x)$ такую, что $f(x_0) = y_0$ и $F(x, f(x)) = 0$.

Заметим, что при наших построениях для всех $x \in O_\delta(x_0)$ значение $y = f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$. Так как радиус окрестности ε можно взять сколь угодно малым, то мы тем самым доказали не только существование функции $y = f(x)$, но и ее непрерывность в точке x_0. Наши рассуждения можно провести для любой точки $(x, f(x))$ при $x \in O_\delta(x_0)$.

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна во всей окрестности $O_\varepsilon(x_0)$.

Перейдем к вопросу о дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0. Сейчас мы под y будем подразумевать значения определенной нами функции $y = f(x)$. Придадим переменной x приращение Δx. Ему будет соответствовать приращение переменной $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. При $\Delta x \to 0$ приращение $\Delta y \to 0$. Воспользуемся дифференцируемостью функции $F(x, y)$:

$$0 = F(x, y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

$$F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \beta\Delta y = -F'_x(x_0, y_0)\Delta x - \alpha\Delta x,$$

$$\Delta y = \frac{-\left(F'_x(x_0, y_0) + \alpha\right)\Delta x}{F'_y(x_0, y_0) + \beta},$$

где α, β - бесконечно малые функции при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\left(F'_x(x_0, y_0) + \alpha\right)}{F'_y(x_0, y_0) + \beta} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \triangleleft$$

Замечание. *Производная функции $y = f(x)$, определенной в предыдущей теореме, непрерывна в окрестности $O_\delta(x_0)$.*

Доказательство. $\triangleright$ В самом деле, рассуждения, примененные в предыдущем доказательстве к точке (x_0, y_0) подходят к любой точке $(x, f(x))$ $x \in O_\delta(x_0)$, поэтому f будет дифференцируема во всей этой окрестности, а производная ее будет определяться формулой

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Непрерывность же нашей производной следует из непрерывности функций, стоящих в числителе и знаменателе последней дроби. $\triangleleft$

Аналогично предыдущей можно доказать **теорему о неявной функции n переменных.**

Теорема. *Пусть функция $F(x_1, ..., x_n, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0, ..., x_n^0, y^0\right) \in \mathbf{R}^{n+1}$, и пусть, кроме того,*

$$F\left(x_1^0, ..., x_n^0, y^0\right) = 0 \text{ и } F'_y\left(x_1^0, ..., x_n^0, y^0\right) \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности $O_\delta\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ точки $\left(x_1^0, ..., x_n^0\right) \in \mathbf{R}^n$ уравнением

$$F(x_1, ..., x_n, y) = 0$$

определяется однозначная функция $y = f(x_1, ..., x_n)$ такая, что:

1) $f\left(x_1^0, ..., x_n^0\right) = y^0$,

2) $F\left(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)\right) \equiv 0,\ (x_1, ..., x_n) \in O_\delta\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$,

3) функция $y = f(x_1, ..., x_n)$ непрерывна в окрестности $O_\delta\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные, равные

$$f'_{x_j}\left(x_1^0, ..., x_n^0\right) = -\frac{F'_{x_j}\left(x_1^0, ..., x_n^0, y^0\right)}{F'_y\left(x_1^0, ..., x_n^0, y^0\right)} \quad (j = 1, ..., n).$$

В общем случае может быть дана система из m уравнений с $n + m$ переменными

$$\begin{cases} F_1\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\right)=0 \\ F_1\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\right)=0 \\ \text{.....................................} \\ F_1\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\right)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Которой могут определяться m неявных функций $y_i = y_i\left(x_1,...,x_n\right)$ $\left(i=1,...,m\right)$.

Сформулируем эту теорему.

Теорема. *Пусть функции* $F_i\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\right)$ $\left(i=1,...,m\right)$ *определены и непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки* $\left(x_1^0,...,x_n^0,y_1^0,...,y_m^0\right)\in \mathbf{R}^{n+m}$*, и пусть, кроме того, в этой точке*

$$F_i=0\ \left(i=1,...,m\right),\ \text{а якобиан}\ J=\frac{D\left(F_1,...,F_m\right)}{D\left(y_1,...,y_m\right)}\neq 0 .$$

Тогда в некоторой окрестности $O_\delta\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ *точки* $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)\in \mathbf{R}^n$ *системой* $(*)$ *определяются m однозначных функций* $y_i = f_i\left(x_1,...,x_m\right)$ *таких, что:*

1) $f_i\left(x_1^0,...,x_n^0\right)=y_i^0 \quad \left(i=1,...,m\right)$,

2) $F\left(x_1,...,x_n,f_1\left(x_1,...,x_n\right),...,f_m\left(x_1,...,x_n\right)\right)\equiv 0,\ \ \left(x_1,...,x_n\right)\in O_\delta\left(x_1^0,...,x_n^0\right)\ \left(i=1,...,m\right)$,

3) функции $y_i = f_i\left(x_1,...,x_n\right)$ *непрерывны и дифференцируемы в окрестности* $O_\delta\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$*, а их дифференциалы можно определить из системы*

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}dy_k=0 \quad \left(i=1,...,m\right) .$$

Доказательство этой теоремы проводится по индукции. Мы докажем ее в «укороченном» варианте. При $m=1$ теорема справедлива (это теорема о неявной функции многих переменных). Предположим, что она справедлива для $m=2$ и выведем отсюда ее справедливость для $m=3$. Общее доказательство идеологически ничем не отличается от данного, но гораздо более громоздко в записи.

Введем обозначения: $M_3\left(x_1^*,...,x_n^*,y_1^*,y_2^*,y_3^*\right)\in \mathbf{R}^{n+3}$, $M_2\left(x_1^*,...,x_n^*,y_1^*,y_2^*\right)\in \mathbf{R}^{n+2}$, $M_1\left(x_1^*,...,x_n^*,y_1^*\right)\in \mathbf{R}^{n+1}$, $M_0\left(x_1^*,...,x_n^*\right)\in \mathbf{R}^{n}$. Последний столбец в определителе $J\left(M_3\right)$ не равен нулю

$$J\left(M_3\right)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}\left(M_3\right)\neq 0 .$$

Не нарушая общности, можно предположить, что $\dfrac{\partial F_3}{\partial y_3}\left(M_3\right)\neq 0$ (иначе мы просто перенумеруем функции). Из теоремы о неявной функции многих переменных следует, что в некоторой окрестности $O_{\delta_2}\left(M_2\right)$ уравнением

$$F_3\left(x_1,...,x_n,y_1,y_2,y_3\right)=0$$

определяется однозначная функция $y_3 = f_3\left(x_1,...,x_n,y_1,y_2\right)$ такая, что:

1) $f_3(M_2) = y_3^*$,

2) $F_3(x_1,...,x_n, y_1, y_2, f_3(x_1,...,x_n, y_1, y_2)) \equiv 0$ при $(x_1,...,x_n, y_1, y_2) \in O_{\delta_2}(M_2)$,

3) функция $y = f_3(x_1,...,x_n, y_1, y_2)$ непрерывна в окрестности $O_{\delta_2}(M_2)$ и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные по всем переменным.

Введем функции

$\Phi_i(x_1,...,x_n, y_1, y_2) = F_i(x_1,...,x_n, y_1, y_2, f_3(x_1,...,x_n, y_1, y_2))$ $(i = 1,2,3)$.

Продифференцировав тождество из второго пункта предыдущей формулировки, получаем (с учетом только что введенных обозначений):

$\dfrac{\partial \Phi_3(x_1,...,x_n, y_1, y_2)}{\partial y_j} = 0$ при $(j = 1,2)$ $(x_1,...,x_n, y_1, y_2) \in O_{\delta_2}(M_2)$.

Определитель J на множестве $(x_1,...,x_n, y_1, y_2, f_3(x_1,...,x_n, y_1, y_2))$, в окрестности $O_{\delta_2}(M_2)$ выглядит следующим образом

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial F_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_3}{\partial y_3} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_3}{\partial y_3} J^*.$$

Видим, что поскольку $J(M_3) = \dfrac{\partial F_3}{\partial y_3}(M_3)\, J^*(M_2)$, то $J^*(M_2) \neq 0$. Кроме того,

$\Phi_i(M_2) = F_i(x_1^*,...,x_n^*, y_1^*, y_2^*, f_3(x_1^*,...,x_n^*, y_1^*, y_2^*)) = F_i(M_3) = 0$ $(i = 1,2)$,

а также функции Φ_i непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности $O_{\delta_2}(M_2)$.

По предположению индукции переменные y_1, y_2 (а, следовательно, и y_3) могут быть явно выражены через переменные $x_1,...,x_n$ в некоторой окрестности $O_{\delta_0}(M_0)$. Продифференцировав равенства $F_i(x_1,...,x_n, y_1, y_2, y_3) = 0$ в этой окрестности с учетом свойства инвариантности первого дифференциала, получим равенства для определения производных функций $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}(M_0)$ $(i = 1,2,3;\ j = 1,...,n)$.

При $n = 1$ и $m = 2$ последняя теорема выглядит следующим образом.

Теорема. *Пусть функции* $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ *определены и непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0, z_0). *И пусть, кроме того,*

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{cases}$$

а определитель

$$J = \frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} F'_y(x_0, y_0, z_0) & F'_z(x_0, y_0, z_0) \\ G'_y(x_0, y_0, z_0) & G'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ *точки* x_0 *системой*

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

определяются однозначные функции $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ *такие, что:*

1) $\varphi(x_0)=y_0$, $\psi(x_0)=z_0$,

2) $\begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x))\equiv 0, \\ G(x,\varphi(x),\psi(x))\equiv 0, \end{cases} \quad x\in O_\delta(x_0),$

3) *функции* $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ *непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.*

Замечание. *В предположениях предыдущей теоремы производные функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *вычисляются по формулам:*

$$\varphi'(x)=-\frac{D(F,G)}{D(x,z)}:\frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \quad \psi'(x)=-\frac{D(F,G)}{D(y,x)}:\frac{D(F,G)}{D(y,z)},$$

где

$$\frac{D(F,G)}{D(x,z)}=\begin{vmatrix} F'_x(x,y,z) & F'_z(x,y,z) \\ G'_x(x,y,z) & G'_z(x,y,z) \end{vmatrix}, \qquad \frac{D(F,G)}{D(y,x)}=\begin{vmatrix} F'_y(x,y,z) & F'_x(x,y,z) \\ G'_y(x,y,z) & G'_x(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

Докажем это замечание. Для этого запишем систему для определения производных:

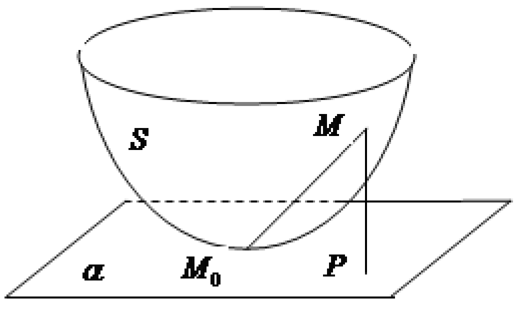
$$\begin{cases} F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz=0, \\ G'_x dx+G'_y dy+G'_z dz=0, \end{cases} \quad \begin{cases} F'_y y'_x dx+F'_z z'_x dx=-F'_x dx, \\ G'_y y'_x dx+G'_z z'_x dx=-G'_x dx, \end{cases} \quad \begin{cases} F'_y y'_x+F'_z z'_x=-F'_x, \\ G'_y y'_x+G'_z z'_x=-G'_x, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'_x \\ z'_x \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix}.$$

Формулы для определения производных в замечании получаются из формул решения последней системы по методу Крамера.

Касательная плоскость к явно заданной поверхности.

Определение. *Пусть* S *- поверхность, содержащая точку* M_0. *Плоскость* α, *проходящая через точку* M_0, *называется касательной к поверхности* S, *если расстояние* $|MP|$ *от точки* $M\in S$ *до плоскости* α, *при стремлении* $|M_0M|$ *к нулю, есть бесконечно малая высшего порядка, чем* $|M_0M|$ *(то есть* $\lim\limits_{|M_0M|\to 0}\frac{|MP|}{|M_0M|}=0$*).*



Возьмем поверхность, являющуюся графиком функции $z=f(x,y)$, дифференцируемой в точке (x_0,y_0), и покажем, что плоскость α, заданная уравнением

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

будет касательной к нашей поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$. В самом деле, расстояние от точки $M(x, y, z)$ $(z = f(x, y))$, поверхности S до плоскости α равно

$$|MP| = \frac{\left|(z - z_0) - f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\right|}{\sqrt{\left(f'_x(x_0, y_0)\right)^2 + \left(f'_y(x_0, y_0)\right)^2 + 1}} \le |\Delta z - dz| = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon\rho,$$

поскольку $f(x, y)$ дифференцируема в (x_0, y_0), а

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \rho\sqrt{1 + \frac{\Delta z^2}{\rho^2}} \ge \rho.$$

Получаем $0 \le \frac{|MP|}{|M_0M|} \le \varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. То есть α - касательная плоскость.

Таким образом, видим, что в случае функции двух переменных дифференциал – приращение координаты z касательной плоскости.

Если пересечь поверхность и касательную плоскость плоскостью, параллельной оси z, то в сечении получится кривая и касательная к ней прямая. В частности, в сечении поверхности плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$ получатся кривые, угловые коэффициенты которых равны, соответственно, $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$. Таким образом, частная производная функции по переменной x (y) характеризует рост этой функции в направлении оси Ox (оси Oy).

Касательная плоскость к неявно заданной поверхности.

Рассмотрим множество точек в пространстве $\mathbf{R}^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0.$$

В некоторых («хороших») случаях такие точки образуют поверхность, тогда она называется неявно заданной.

Сформулируем предыдущую теорему для случая функции трех переменных.

Теорема. *Пусть функция* $F(x, y, z)$ *определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$, *и пусть, кроме того,*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \ \text{ и } \ F'_z(x_0, y_0, z_0) \ne 0.$$

Тогда в некоторой окрестности $O_\delta(x_0, y_0, z_0)$ *точки* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^n$ *уравнением*

$$F(x, y, z) = 0$$

определяется однозначная функция $z = f(x, y)$ *такая, что:*

1) $f(x_0, y_0) = y_0$,

2) $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, \ (x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$,

3) функция $z = f(x, y)$ *непрерывна в окрестности* $O_\delta(x_0, y_0)$ *и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные, равные*

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_z(x_0, y_0)}, \qquad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_z(x_0, y_0)}.$$

Функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), плоскость α, заданная уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

будет касательной к ее графику в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\left(z_0 = f(x_0, y_0)\right)$. Подставим в последнее выражение значения производных $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_z(x_0, y_0)}(x - x_0) - \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_z(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0 .$$

Уравнение касательной плоскости, которое мы получили, симметрично относительно всех переменных и будет таким же, если $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, но $F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ или $F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Если все производные равны 0, то точка «особая», касательную плоскость к поверхности в такой точке построить нельзя.

Экстремумы функций многих переменных.

Определение. *Говорят, что действительнозначная функция $u = f(\overline{x})$, определенная на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ имеет локальный максимум (минимум) во внутренней точке $\overline{x}^*$ множества X, если существует окрестность $O_r(\overline{x}^*) \subset X$ такая, что $f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}^*)$ $\left(f(\overline{x}) \geq f(\overline{x}^*)\right)$ при $\overline{x} \in O_r(\overline{x}^*)$.*

Локальный минимум и локальный максимум функции называются ее локальными экстремумами.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $f(x_1, ..., x_n)$, определенная в окрестности точки $\overline{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, имеет в точке $\overline{x}^*$ частные производные по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$.*

Тогда, для того, чтобы функция имела в x^* локальный экстремум, необходимо, чтобы все частные производные в этой точке обращались в ноль.

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x, x_2^*, ..., x_n^*)$ одной переменной, определенную в некоторой окрестности точки x_1^*. В точке x_1^* она имеет локальный экстремум. А так как $\varphi'(x_1^*) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, ..., x_n^*)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = 0$.

Аналогично доказывается равенство нулю и остальных производных. $\triangleleft$

Равенство нулю частных производных дает лишь **необходимое, но не достаточное условие** существования экстремума функции многих переменных.

Примером может быть функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ в точке $(0,0)$. В самом деле, частные производные $f'_x = 2x$ и $f'_y = -2y$ обращаются в 0 в точке $(0,0)$, $f(0,0) = 0$, но в любой проколотой окрестности нуля при $x \neq 0$ будет $f(x,0) > 0$, а при $y > 0$ - $f(0, y) < 0$.

Определение. *Точка $\overline{x}^*$ называется критической (или стационарной) точкой функции $f : O_r(\overline{x}^*) \to \mathbf{R}$, если в этой точке существуют и обращаются в ноль и все частные производные функции f.*

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть действительнозначная функция f определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно в окрестности точки $\overline{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in \mathbf{R}^n$, и пусть $\overline{x}^*$ - критическая точка функции f.*

Если в тейлоровском разложении

$$f\left(x_1^*+h_1,\dots,x_n^*+h_n\right)-f\left(x_1^*,\dots,x_n^*\right)=\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\left(\overline{x}^*\right)h^ih^j+o\left(\rho^2\right)$$

функции в точке $\overline{x}^*$ квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\left(\overline{x}^*\right)h^ih^j$$

положительно определена, то в точке $\overline{x}^*$ функция имеет локальный минимум, если отрицательно определена, то локальный максимум, если же квадратичная форма принимает значения разных знаков, то экстремум отсутствует.

Доказательство. $\triangleright$ Обозначим

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(\overline{x}^*\right)$$

Непрерывная на единичной сфере $S=\left\{\overline{h}\in\mathbf{R}^n\wedge\left|\overline{h}\right|=1\right\}$ функция

$$\varphi\left(\overline{h}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}h^ih^j$$

принимает на этом отрезке свои минимальное и максимальное значения:

$$\varphi\left(\overline{h}_-\right)=m\le\varphi\left(\overline{h}\right)\le M=\varphi\left(\overline{h}_+\right)\quad\left(\overline{h}\in S\right).$$

На сфере радиуса ρ

$$\rho^2 m\le\varphi\left(\rho\overline{h}\right)\le\rho^2 M\quad\left(\overline{h}\in S\right).$$

Рассмотрим сначала случай положительно определенной формы. Тогда $m>0$, и в $O_\rho\left(\overline{x}^*\right)$ приращение функции

$$\Delta f=\rho^2\left(\varphi\left(\overline{h}\right)+o(1)\right)>\rho^2\left(m+o(1)\right)\quad\left(\rho\to 0\right).$$

Так как $m+o(1)\to m>0$ при $\rho\to 0$,то для достаточно малых значений ρ (например $\rho\le r$) сумма $m+o(1)$ будет больше нуля, а, следовательно, $\Delta f>0$ в $\overset{\circ}{O}_r\left(x_0,y_0\right)$.

Таким образом, мы имеем строгий локальный минимум.

Аналогично проверяется, что в случае отрицательно определенной формы мы получаем строгий локальный максимум.

Пусть форма меняет знак, тогда $m<0<M$. Если мы будем приближаться к нулю по лучу $\left(\rho\overline{h}_-\right)$ $\left(\rho\to 0\right)$, то приращение $\Delta f=\rho^2\left(\varphi\left(\overline{h}_-\right)+o(1)\right)=\rho^2\left(m+o(1)\right)$ будет отрицательным для достаточно малых значений ρ $\left(\rho\le r_1\right)$. А на луче $\left(\rho\overline{h}_+\right)$ $\left(\rho\to 0\right)$ приращение $\Delta f=\rho^2\left(\varphi\left(\overline{h}_+\right)+o(1)\right)=\rho^2\left(M+o(1)\right)$ будет для малых ρ $\left(\rho\le r_2\right)$ положительным. То есть в окрестности $\overset{\circ}{O}_r\left(\overline{x}^*\right)$ $\left(r=\min(r_1,r_2)\right)$ приращение будет менять знак.

Следовательно, в этом случае экстремум отсутствует. $\triangleleft$

Мы видим, что при исследовании функции на экстремум важным является вопрос определения знакопостоянства квадратичной формы.

Сформулируем достаточные условия знакопостоянства квадратичной формы для случая n переменных.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того, чтобы форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j$ $\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$ была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы были положительны определители $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ $(1 \le k \le n)$. Для отрицательной определенности формы необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^k \Delta_k > 0$.

Сформулируем и докажем этот критерий для случая $n = 2$.

Теорема. Квадратичная форма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ будет положительно определенной, если $A > 0$ и $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, отрицательно определенной, если $A < 0$, а $\delta > 0$, и будет менять знак, если $\delta < 0$.

Доказательство. Очевидно, что если A и C одновременно равны нулю, то квадратичная форма знакопеременна (принимает положительные значения, когда x и y одного знака и отрицательна, если разных). Предположим, что $A \ne 0$. Рассмотрим нашу форму как квадратичный трехчлен переменной x. Если квадратичный член не меняет знака, то его дискриминант отрицателен, то есть

$$\frac{D}{4} = B^2y^2 - Cy^2 = y^2\left(B^2 - AC\right) < 0 \Leftrightarrow AC - B^2 > 0$$

что и т.д.

Относительные экстремумы.

Рассмотрим вопрос об экстремуме функции $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ в предположении, что эти переменные подчинены m уравнениям связи $g_k\left(x_1,\dots,x_n\right) = 0 \ \left(k = 1,\dots,m; \ \ m < n\right)$. Эту задачу мы будем записывать следующим образом:

$$\begin{cases} f\left(x_1,\dots,x_n\right) \to extr, \\ g_1\left(x_1,\dots,x_n\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m\left(x_1,\dots,x_n\right) = 0. \end{cases}$$

Говорят, что в точке $M_0\left(x_1^0,\dots,x_n^0\right)$, удовлетворяющей уравнениям связи, функция $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ имеет относительный или условный максимум (минимум), если неравенство

$$f\left(x_1,\dots,x_n\right) \le f\left(x_1^0,\dots,x_n^0\right) \quad (\ge)$$

выполняется в некоторой окрестности точки M_0 для всех ее точек, удовлетворяющих уравнениям связи.

Необходимые условия относительного экстремума.

Рассмотрим случай поиска условного экстремума функции двух переменных при наличии одного уравнения связи.

$$\begin{cases} f\left(x,y\right) \to extr, \\ g\left(x,y\right) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Сформулируем определение условного экстремума для этой задачи.

Определение. Говорят, что в точке $\left(x_0,y_0\right)$, удовлетворяющей условию $g\left(x_0,y_0\right) = 0$, функция $f\left(x,y\right)$ имеет относительный или условный максимум (минимум), если найдется такая окрестность $O\left(x_0,y_0\right)$, что для всех точек $\left(x,y\right) \in O\left(x_0,y_0\right)$, удовлетворяющих условию $g(x,y)=0$ будет справедливо $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $\left(f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\right)$.

Теорема. *Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ имеют непрерывные смешанные производные в окрестности точки (x_0,y_0), причем*

$$\left|g'_x(x_0,y_0)\right|+\left|g'_y(x_0,y_0)\right|\ne 0,$$

и пусть (x_0,y_0) - точка условного экстремума в задаче (1).

Тогда существует число λ (множитель Лагранжа) такое, что $df+\lambda dg=0$.

Доказательство. ▹ Производные $g'_x(x_0,y_0)$ и $g'_y(x_0,y_0)$ не могут быть равны нулю одновременно. Пусть, например, $g'_y(x_0,y_0)\ne 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ переменную y можно явно выразить через переменную x, причем функция $y=y(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в этой окрестности, а ее производная вычисляется по формуле $y'=-\dfrac{g'_x}{g'_y}$.

Точка x_0 в таком случае будет точкой абсолютного экстремума сложной функции $f(x,y(x))$. Необходимым условием экстремума дифференцируемой функции одной переменной является равенство нулю производной. Запишем это условие:

$$f'(x,y(x))=f'_x+f'_y y'=f'_x-f'_y\frac{g'_x}{g'_y}=\frac{f'_x g'_y-f'_y g'}{g'_y}=0.$$

То есть $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}=0$. Равенство нулю определителя означает линейную зависимость его строк, то есть существование пары коэффициентов c_1,c_2 $\left(|c_1|+|c_2|\ne 0\right)$ таких, что:

$$c_1\left(f'_x,f'_y\right)+c_2\left(g'_x,g'_y\right)=0..$$

Так как $\left(g'_x,g'_y\right)\ne(0,0)$, то $c_1\ne 0$ и можно положить $\lambda=\dfrac{c_2}{c_1}$. И мы получаем равенство

$$df+\lambda dg=0.$$

Тот же результат получится, если $g'_x(x_0,y_0)\ne 0$ ◃

Итак, в точке условного экстремума необходимо должно выполняться

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda g'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'_y(x_0,y_0)=0, \\ g(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

Если ввести вспомогательную функцию (функцию Лагранжа) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$, то уравнения последней системы означают равенство нулю ее дифференциала, то есть решение этой системы (x_0,y_0,λ_0) является точкой стационарности функции F.

В общем случае надо искать точки стационарности функции

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g_k(x_1,\ldots,x_n).$$

Достаточные условия относительного экстремума.

Вернемся к задаче (1)

$$\begin{cases} f(x,y) \to extr, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ имеют непрерывные вторые смешанные производные в окрестности точки (x_0,y_0), причем $\left|g'_x(x_0,y_0)\right| + \left|g'_y(x_0,y_0)\right| \neq 0$, и пусть (x_0,y_0,λ_0) - точка стационарности функции Лагранжа $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.

Отметим, что если переменные x,y удовлетворяют уравнению связи $\left(g(x,y)=0\right)$, то справедливо равенство $F \equiv f$, поэтому при этих условиях точка (x_0,y_0) будет точкой экстремума функций f и F одновременно. То есть в окрестности точки (x_0,y_0)

$$\begin{cases} \Delta F(x,y,\lambda) \geq 0 \ \ (\leq 0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta f(x,y) \geq 0 \ \ (\leq 0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Займемся вопросом существования экстремума функции F в точке (x_0,y_0,λ_0). Запишем приращение ΔF по формуле Тейлора, учитывая, что $dF(x_0,y_0,\lambda_0) = 0$:

$$\Delta F = \frac{1}{2} d^2F(x_0,y_0,\lambda_0) + o\left(\rho^2\right).$$

Можно показать, что при условии строгой положительности или отрицательности второго дифференциала, знак разности для достаточно малых приращений переменных определяется знаком первого слагаемого.

Распишем второй дифференциал:

$$d^2F = \left(f''_{x^2} + \lambda g''_{x^2}\right)dx^2 + \left(f''_{y^2} + \lambda g''_{y^2}\right)dy^2 + 2\left(f''_{xy} + \lambda g''_{xy}\right)dxdy + 2g'_x d\lambda dx + 2g'_y d\lambda dy =$$

$$= d^2 f + \lambda d^2 g + 2dgd\lambda.$$

Так как при условии $g(x,y) = 0$ в последнем выражении дифференциал

$$dg(x,y) = g'_x(x_0,y_0)dx + g'_y(x_0,y_0)dy \equiv 0,$$

то получаем, что знак приращения ΔF при условии $g(x,y) = 0$ и при малых приращениях переменных совпадает со знаком выражения

$$d^2 f(x,y) + \lambda_0 d^2 g(x,y).$$

Таким образом, в точке (x_0,y_0) будет относительный минимум, если

$$\begin{cases} d^2 f(x,y) + \lambda_0 d^2 g(x,y) > 0 \\ dg(x,y) = 0 \end{cases}$$

и максимум, если

$$\begin{cases} d^2 f(x,y) + \lambda_0 d^2 g(x,y) < 0 \\ dg(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Или

$$\begin{cases} F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 > 0 \ (<0) \\ g'_x dx + g'_y dy = 0. \end{cases}.$$

В общем случае

$$\begin{cases} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to extr \\ g_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \end{cases}, \quad (m<n),$$

достаточным условием существования относительного экстремума является сохранение в окрестности критической точки знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$F=f+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g_k$$

при условии, что переменные $dx_1,\ldots,dx_n$ связаны соотношениями

$$dg_k=0 \quad (k=1,\ldots,m).$$

Пример 1. Найти точки условного экстремума в задаче

$$\begin{cases} z=x+2y\to extr, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Решение. Введем функцию Лагранжа $F\left(x,y,\lambda\right)=x+2y+\lambda\left(x^2+y^2-5\right)$. Запишем условия стационарности для функции F:

$$\begin{cases} F'_x=1+2\lambda x=0, \\ F'_y=2+2\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-5=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x=-1, \\ \lambda y=-1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Находим две точки возможного экстремума: $M_1\left(1;2;-\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-1;-2;\frac{1}{2}\right)$.

Проверим достаточные условия экстремума:

$$\begin{cases} d^2F=d^2\left(x+2y+\lambda\left(x^2+y^2-5\right)\right), \\ d\left(x^2+y^2-5\right)=0, \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} d^2F=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right) \\ 2xdx+2ydy=0 \end{cases},$$

откуда мы видим, что характер экстремума зависит от знака множителя λ. При $\lambda=-\frac{1}{2}$, в точке $(1;2)$ будет максимум $z=5$, а при $\lambda=\frac{1}{2}$ в точке $(-1;-2)$ - минимум $z=-5$.

Пример 2. Найти точки условного экстремума в задаче

$$\begin{cases} z=x+2y\to extr, \\ xy^2=1, \end{cases} \quad x>0, y>0.$$

Решение. Введем функцию Лагранжа $F\left(x,y,\lambda\right)=x+2y+\lambda\left(xy^2-1\right)$. Запишем условия стационарности для функции F:

$$\begin{cases} F'_x=1+\lambda y^2=0, \\ F'_y=2+2\lambda xy=0, \\ F'_\lambda=xy^2-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda y^2=-1, \\ \lambda xy=-1, \\ xy^2=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y, \\ x^3=1. \end{cases}$$

Находим точку возможного экстремума: $M\left(1;1;-1\right)$.

Проверим достаточные условия экстремума:

$$\begin{cases} d^2F=d^2\left(x+2y+\lambda\left(xy^2-1\right)\right), \\ d\left(xy^2-1\right)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2F=\lambda\left(4ydxdy+2xdy^2\right), \\ y^2dx+2xydy=0. \end{cases}$$

В исследуемой точке M получаем

$$\begin{cases} d^2F = -\left(4dxdy + 2dy^2\right), \\ dx + 2dy = 0, \end{cases}$$

то есть при наших условиях

$$d^2F = -\left(-8dy^2 + 2dy^2\right) = 6dy^2 > 0\,.$$

Откуда видим, что в точке $(1;1)$ достигается условный минимум $z = 3$.

Решим последнюю задачу другим способом, а именно, выразим явно переменную x через y из уравнения связи $\left(x = \dfrac{1}{y^2}\right)$ и подставим в исследуемую функцию. Тогда задача сведется к отысканию экстремума функции одной переменной:

$$\varphi(y) = \frac{1}{y^2} + 2y \to extr\,.$$

Схема решения которой нам давно известна:

$$\varphi'(y) = -\frac{2}{y^3} + 2 = 0,\;\; y = 1,\;\; \varphi''(1) < 0 \;\; \Rightarrow (1;1) - \max\quad.$$

Но, к сожалению, уравнение связи не всегда можно просто разрешить.

Пример 3. Найти точки условного экстремума в задаче

$$\begin{cases} z = x^2 + 12xy + 2y^2 \to extr, \\ 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Решение. Введем функцию Лагранжа $F(x, y, \lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda\left(4x^2 + y^2 - 25\right)$. Запишем условия стационарности для функции F :

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 12y + 8\lambda x = 0, \\ F'_y = 12x + 4y + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4\lambda + 1)x + 6y = 0, \\ 6x + (\lambda + 2)y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Система из двух первых уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 4\lambda + 1 & 6 \\ 6 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 + 9\lambda - 34 = 0, \quad \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = -\frac{17}{4}\,.$$

Находим четыре точки возможного экстремума: $M_{1,2}\left(\pm 2; \mp 3; 2\right)$, $M_{3,4}\left(\pm\dfrac{3}{2}; \pm 4; -\dfrac{17}{4}\right)$.

Проверим достаточные условия экстремума:

$$\begin{cases} d^2F = d^2\left(x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda\left(4x^2 + y^2 - 25\right)\right), \\ d\left(4x^2 + y^2 - 25\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2F = 2dx^2 + 24dxdy + 4dy^2 + 8\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2, \\ 8xdx + 2ydy = 0. \end{cases}$$

В точке $M_1(2;-3;2)$ получаем

$$\begin{cases} d^2F = 18dx^2 + 24dxdy + 4dy^2, \\ 8dx - 3dy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2F = \left(18 + 16 + \dfrac{64}{9}\right)dx^2, \\ dy = \dfrac{8}{3}dx, \end{cases}$$

откуда видим, что при наших условиях

$$d^2F(M_1) > 0\,.$$

То есть в точке $(2,3)$ достигается условный минимум, который равен $z=-50$. Из соображений симметрии заключаем, что в точке M_2 достигается такой же условный минимум.

Аналогичным образом показываем, что в точках $M_{3,4}$ достигается условный максимум, равный $106\frac{1}{4}$.

Пример 4. Найти точки условного экстремума в задаче

$$\begin{cases} u = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \to extr, \\ ax+by+cz=1, \end{cases} \quad \alpha,\beta,\gamma>0, \;\; x,y,z>0.$$

Решение. Так как функции $u = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ и $\ln u = \alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z$ достигают экстремума в одной точке, мы будем искать точки условного экстремума в задаче

$$\begin{cases} v = \alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z \to extr, \\ ax+by+cz=1, \end{cases} \quad \alpha,\beta,\gamma>0.$$

Введем функцию Лагранжа $F(x,y,z,\lambda) = \alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z + \lambda(ax+by+cz-1)$. Запишем условия стационарности для функции F:

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{\alpha}{x} + a\lambda = 0, \\ F'_y = \dfrac{\beta}{y} + b\lambda = 0, \\ F'_z = \dfrac{\gamma}{z} + c\lambda = 0, \\ F'_\lambda = ax+by+cz-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} = -a\lambda, \\ \dfrac{\beta}{y} = -b\lambda, \\ \dfrac{\gamma}{z} = -c\lambda, \\ ax+by+cz=1. \end{cases}$$

Находим точку возможного экстремума: $M\left(\dfrac{\alpha}{a(\alpha+\beta+\gamma)}, \dfrac{\beta}{b(\alpha+\beta+\gamma)}, \dfrac{\gamma}{c(\alpha+\beta+\gamma)}, -(\alpha+\beta+\gamma)\right)$.

Проверим достаточные условия экстремума:

$$\begin{cases} d^2F = d^2\left(\alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z + \lambda(ax+by+cz-1)\right), \\ d(ax+by+cz-1)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2F = -\dfrac{\alpha}{x^2}dx^2 - \dfrac{\beta}{y^2}dy^2 - \dfrac{\gamma}{z^2}dz^2 < 0, \\ adx+bdy+cdz=0. \end{cases}$$

Видим, что в нашей точке достигается условный максимум.

Пример 5. Среди всех вписанных в данный круг радиуса R треугольников найти тот, площадь которого наибольшая.

Решение. Пусть x, y, z - центральные углы, опирающиеся на стороны треугольника. Тогда наша задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2}R^2(\sin x + \sin y + \sin z) \to \max, \\ x+y+z=2\pi. \end{cases}.$$

$x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0.$

Введем функцию Лагранжа

$F\left(x,y,z,\lambda\right)=\frac{1}{2}R^2\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)+\lambda\left(x+y+z-2\pi\right)$. Запишем условия стационарности для функции F :

$$\begin{cases} F'_x=\frac{1}{2}R^2\cos x+\lambda=0, \\ F'_y=\frac{1}{2}R^2\cos y+\lambda=0, \\ F'_z=\frac{1}{2}R^2\cos z+\lambda=0, \\ F'_\lambda=x+y+z-2\pi=0. \end{cases}$$

Если $x>0,\ y>0,\ z>0,$ то $x=y=z=\frac{2\pi}{3}$, то есть треугольник равносторонний.

Проверим достаточные условия экстремума:

$$\begin{cases} d^2F=-\frac{1}{2}R^2\left(\sin x dx^2+\sin y dy^2+\sin z dz^2\right)<0, \\ dx+dy+dz=0. \end{cases}$$

Итак, площадь равностороннего треугольника – максимальная.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Пусть функция $u=f\left(x_1,...,x_n\right)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D и имеет внутри этой области конечные частные производные. По теореме Вейерштрасса она достигает в этой области своих максимального и минимального значений, а если точка экстремума лежит внутри области, то по теореме о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции эта точка является точкой стационарности нашей функции. Экстремальное значение может приниматься также и на границе. Тогда надо искать точки, в которых может достигаться условный экстремум. После этого надо вычислить значения функции во всех этих точках и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2y$ в круге $x^2+y^2\le 1$.

Решение. Найдем точки стационарности функции внутри области

$$\begin{cases} z'_x=2xy=0, \\ z'_y=x^2=0, \end{cases} \quad x=0,\ y=0,\ z\left(0,0\right)=0.$$

Теперь будем искать точки возможного экстремума на границе:

$$\begin{cases} z=x^2y\to extr, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$F\left(x,y,\lambda\right)=x^2y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

Точки ее стационарности удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F'_x=2xy+2\lambda x=0, \\ F'_y=x^2+2\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(y+\lambda\right)=0, \\ x^2+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

Если $x=0$ то $z=0$. Если же $x\neq 0$ то $y=-\lambda,\ x^2=2\lambda^2,\ \lambda^2=\dfrac{1}{3},$ и мы получаем

$$z_{\min}=x^2y_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad z_{\max}=x^2y_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=x^2+4y^2+9z^2-\left(x^2+2y^2+3z^2\right)^2$ в шаре $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

Решение. Сначала рассмотрим поведение функции на границе. Составим функцию Лагранжа: $F\left(x,y,z,\lambda\right)=x^2+4y^2+9z^2-\left(x^2+2y^2+3z^2\right)^2+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$.

Найдем ее точки стационарности:

$$\begin{cases} F'_x=2x-4x\left(x^2+2y^2+3z^2\right)+2\lambda x=0,\\ F'_y=8y-8y\left(x^2+2y^2+3z^2\right)+2\lambda y=0,\\ F'_z=18z-12z\left(x^2+2y^2+3z^2\right)+2\lambda z=0,\\ F'_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1+\lambda-2\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\right)=0,\\ y\left(4+\lambda-4\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\right)=0,\\ z\left(9+\lambda-6\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\right)=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x=0\right)\vee\left(\left(x^2+2y^2+3z^2\right)=\dfrac{1+\lambda}{2}\right),\\ \left(y=0\right)\vee\left(\left(x^2+2y^2+3z^2\right)=\dfrac{4+\lambda}{4}\right),\\ \left(z=0\right)\vee\left(\left(x^2+2y^2+3z^2\right)=\dfrac{9+\lambda}{6}\right),\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

Так как $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{4+\lambda}{4}$ при $\lambda=2$, $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{9+\lambda}{6}$ при $\lambda=3$, а $\dfrac{9+\lambda}{6}=\dfrac{4+\lambda}{4}$ при $\lambda=6$, то x,y и z не могут одновременно быть ненулевыми. Имеем:

1. $x=0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$ тогда $\lambda=6$,

$$\begin{cases} 2y^2+3z^2=\dfrac{5}{2},\\ y^2+z^2=1,\end{cases} \Rightarrow\ y^2=z^2=\frac{1}{2}.$$

Получаем точки $x=0,\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ u=\dfrac{1}{4}.$

2. $x\neq 0,\ y=0,\ z\neq 0$ тогда $\lambda=3$,

$$\begin{cases} x^2+3z^2=2,\\ x^2+z^2=1,\end{cases} \Rightarrow\ x^2=z^2=\frac{1}{2}.$$

Получаем точки $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=0,\ z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ u=1.$

3. $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z=0$ тогда $\lambda=2$,

$$\begin{cases} x^2+2y^2=\dfrac{3}{2},\\ x^2+y^2=1,\end{cases} \Rightarrow\ x^2=y^2=\frac{1}{2}.$$

Получаем точки $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=0,\ u=\dfrac{1}{4}.$

4. $x=y=0,\ z^2=1, u=0.$

5. $x = z = 0,\ \ y^2 = 1,\ u = 0.$

6. $z = y = 0,\ \ x^2 = 1,\ u = 0.$

Теперь запишем уравнения для точек стационарности функции u внутри шара. Они получаются из предыдущих при $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} (x=0) \vee \left(\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right) = \dfrac{1}{2} \right), \\ (y=0) \vee \left(\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right) = 1 \right), \\ (z=0) \vee \left(\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right) = \dfrac{3}{2} \right). \end{cases}$$

Видим, что ненулевой может быть только одна координата. Если $x = y = z = 0$, то $u = 0$. В остальных случаях мы попадаем на границу.

Окончательно получаем $u_{\min} = 0,\ \ u_{\max} = 1.$