Введение

Некоторые общие свойства множества действительных чисел.

В математическом анализе изучаются числовые функции, заданные на множествах конечномерных числовых пространств.

Символом $\mathbf{R}$ мы будем обозначать все множество действительных (вещественных) чисел. Это множество с определенными на нем операциями сложения и умножения, а также отношения неравенства ($x \le y$), удовлетворяющее известным аксиомам, перечислять которые подробно мы здесь не будем. Подробно прочитать о них можно (рекомендуется) в книге В.А.Зорич «Математический анализ», т. 1, гл.2, § 1.

Важнейшие классы действительных чисел

1. Множество натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
2. Множество целых чисел $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$.
3. Множество рациональных чисел $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \right\}$.
4. Множество иррациональных чисел $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Некоторые характеристики действительных чисел

Модулем действительного числа a (или его абсолютной величиной) называется число

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если}\, a \ge 0, \\ -a, \text{если}\, a < 0. \end{cases}$$

Вспомним свойства модуля действительного числа:

$$|a| \ge 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

$$|a - b| \ge |a| - |b|.$$

Целой частью действительного числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a:

$$[a] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le a\}.$$

Пример. $[2,5] = 2$; $[-2,5] = -3$.

Дробной частью числа a называется разность между ним и его целой частью:

$$\{a\} = a - [a].$$

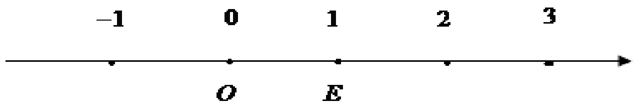
Пример. $\{2,5\} = 0,5$; $\{-2,5\} = 0,5$.

Связь между действительными числами и точками на числовой оси

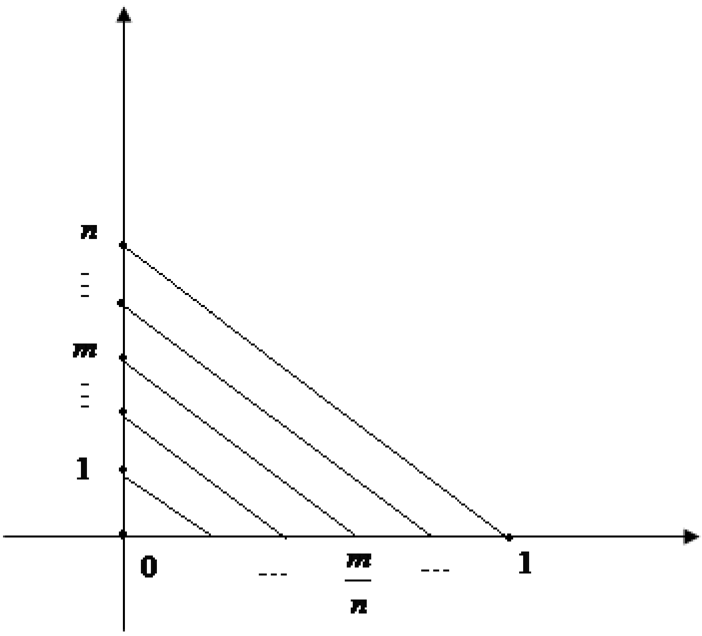
Введем в рассмотрение числовую ось. Числовой осью мы будем называть прямую, на которой выбраны определенная точка O (начало отсчета), масштабный отрезок OE (длину его мы считаем равной 1) и положительное направление (обычно от O к E).

Между точками числовой оси и множеством действительных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Опишем его поэтапно.

Целые числа:



Рациональные числа:



Рассмотрим теперь иррациональное число a, представленное бесконечной десятичной дробью: $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$.

Если мы будем последовательно отмечать на числовой оси точки, соответствующие числам приближения числа a «с недостатком»: a_0, a_0, a_1; $a_0, a_1 a_2 \ldots$ и «с избытком»: $a_0 + 1$, $a_0, (a_1 + 1)$; $a_0, a_1 (a_2 + 1) \ldots$, (если появится 10-ка, то мы её в разряде, разумеется, не ставим, а пользуемся переносом в соответствии с правилами сложения) то увидим, что точки из последовательности «с недостатком» смещаются направо, а «с избытком» - налево. При этом любая из точек «с недостатком» лежит левее точки «с избытком». Расстояние же между $a_0, a_1 a_2 \ldots a_k$ и $a_0, a_1 a_2 \ldots (a_k + 1)$ равно 10^{-k}, сокращается и стремится к 0.

Так вот, точке, к которой эти последовательности «стягиваются», и присваивается координата a.

Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Опишем процесс представления действительных чисел с помощью бесконечных десятичных дробей.

Сначала отметим на числовой оси все точки с целыми координатами. Пусть теперь x - точка, лежащая справа от нуля, координата которой x не является целой. В таком случае x принадлежит интервалу с концами в точках с натуральными координатами: $x \in \Delta^{(0)} = (n, n+1) \quad (n = [x])$. Положим $\alpha_0 = n$, тогда $x = \alpha_0, \ldots$. Разделим отрезок $\Delta^{(0)}$ на десять равных отрезков $\Delta_k^{(1)} \ (k = 0, \ldots, 9)$. Если x является точкой деления, то есть $x = \Delta_k^{(1)} \bigcap \Delta_{k+1}^{(1)}$, то положим $\alpha_1 = k + 1$ и $x = \alpha_0, \alpha_1 00 \ldots$. Процесс окончен. Если же x лежит внутри $k-го$ отрезка, то положим $\alpha_1 = k$, этот $k-й$ отрезок обозначим $\Delta^{(1)}$, разделим его на десять равных отрезков $\Delta_k^{(2)}$ $(k = 0,...,9)$. Таким же образом, как α_1, определим α_2 и так далее.

Координата точки, симметричной точке x относительно нуля, будет такой же, как у x, но со знаком минус.

Пример. Точке с рациональной координатой $\frac{2}{3}$ будет соответствовать десятичная дробь $0,666...$.

Промежутки на числовой оси

Промежутками на числовой оси называются:
отрезок $[a,b] := \{x | a \le x \le b\}$, интервал $(a,b) := \{x | a < x < b\}$, полуинтервалы $[a,b) := \{x | a \le x < b\}$, $(a,b] := \{x | a < x \le b\}$ и полуоси $(-\infty; a) := \{x | x < a\}$, $(-\infty; a] := \{x | x \le a\}$, $[a; +\infty) := \{x | x \ge a\}$, $(a; +\infty) := \{x | x > a\}$.

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, ее содержащий, а $\varepsilon-$окрестностью x_0 (окрестностью радиуса ε с центром в x_0) называется интервал длины 2ε, с центром в x_0: $O_\varepsilon(x_0) := \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Аналогичным образом обозначается проколотая $\varepsilon-$окрестность $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0) = \{x : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$, правая $\varepsilon-$полуокрестность $O_\varepsilon^+(x_0) := (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и левая $\varepsilon-$полуокрестность $O_\varepsilon^-(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Определим теперь окрестности радиуса R «бесконечно удаленной точки»:

$$O_R(+\infty) = (R, +\infty),\ O_R(-\infty) = (-\infty, -R),\ O_R(\infty) = (-\infty, -R) \cup (+\infty, -R).$$

Метод математической индукции

Если предложение $A(n)$, где $n \in \mathbf{N}$, истинно для $n = 1$ и из предположения о том, что оно истинно для некоторого натурального числа $n = k$ вытекает, что оно истинно для следующего числа $n = k+1$, то предложение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Задача. Доказать равенство

$$1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \ne 1).$$

Решение. ▸ При $n = 1$ равенство $1 + q = \frac{1 - q^2}{1 - q}$ очевидно.

Предположим, что формула верна для $n = k$, то есть

$$1 + q + ... + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Покажем, что тогда верно

$$1 + q + ... + q^{k+|1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$

В самом деле,

$$1 + q + ... + q^k + q^{k+|1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1} - q^{k+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}. ◂$$

Задача. Доказать ***неравенство Бернулли***:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \ge 1+x_1+x_2+\dots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - числа одного и того же знака, большие -1.

Доказательство. $\triangleright$ При $n=1,2$ неравенство очевидно. Пусть неравенство справедливо при $n=k$. Покажем его справедливость при $n=k+1$. Имеем $(x_{k+1}>-1)$:

$(1+x_1)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \ge (1+x_1+x_2+\dots+x_k)(1+x_{k+1}) =$

$=(1+x_1+x_2+\dots+x_k)+(1+x_1+x_2+\dots+x_k)x_{k+1} =$

$=1+x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}+(x_1+x_2+\dots+x_k)x_{k+1} \ge 1+x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}$,

так как $(x_1+x_2+\dots+x_k)x_{k+1} \ge 0$. $\triangleleft$

Бином Ньютона

Так называется очень важная формула, которой мы часто будем пользоваться.

Сделаем сначала несколько предварительных замечаний.

Если из множества, содержащего n различных элементов (например, группы людей) мы будем выбирать подмножества, состоящие из m элементов (группы представителей), то число разных групп (представителей) называется числом сочетаний из n по m и обозначается C_n^m. Примем без доказательства, что

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (0 \le m \le n; \text{ по определению } 0!=1).$$

Задача. Доказать, что $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Решение: $\blacktriangleright$ $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}+\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}=\dfrac{n!(m+1+n-m)}{(m+1)!(n-m)!}=$

$$=\frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!}=C_{n+1}^{m+1}. \blacktriangleleft$$

Бином Ньютона

Пусть $n \in \mathbf{N}$, тогда для произвольных чисел a и b справедливо

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,$$

где C_n^m - *биномиальные коэффициенты*, равные числу сочетаний из n по m.

Доказательство. $\blacktriangleright$ Докажем сначала формулу $(1+x)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m x^m$.

При $n=1$ равенство $1+x = C_1^0 x^0 + C_1^1 x^1 = \dfrac{1!}{0!1!} + \dfrac{1!}{1!0!}x = 1+x$ очевидно.

Предположим, что формула верна для $n=k$, то есть

$$(1+x)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^m.$$

Покажем, что тогда верно

$$(1+x)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m x^m.$$

В самом деле,

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)\sum_{m=0}^{k}C_k^m x^m=\sum_{m=0}^{k}C_k^m x^m+\sum_{m=0}^{k}C_k^m x^{m+1}=$$

$$=C_k^0x^0+C_k^1x^1+C_k^2x^2+C_k^3x^3+\ldots+C_k^kx^k+$$

$$+C_k^0x^1+C_k^1x^2+C_k^2x^3+\ldots+C_k^{k-1}x^k+C_k^kx^{k+1}=$$

$$=C_k^0x^0+\left(C_k^1+C_k^0\right)x^1+\left(C_k^2+C_k^1\right)x^2+\left(C_k^3+C_k^2\right)x^3+\ldots+\left(C_k^k+C_k^{k-1}\right)x^k+C_k^kx^{k+1}=$$

$$=C_k^0x^0+C_{k+1}^1x^1+C_{k+1}^2x^2+C_{k+1}^3x^3+\ldots+C_{k+1}^kx^k+C_k^kx^{k+1}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m x^m\,.$$

Теперь вернемся к основной формуле:

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{b^m}{a^m}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m\,.\lhd$$

Для того, чтобы заполнить страницу, приведем решения (поскольку место позволяет, то архиподробные) двух задач из семинарского списка.

Задача. Используя формулу Бинома Ньютона, показать, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\quad(n\ge 2).$$

Решение:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{1}{n^m}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-m+1)}^{m}}{m!}\cdot\frac{1}{n^m}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{m}}\cdot\frac{1}{m!}=$$

$$\sum_{m=0}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{m!}<\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Задача. Пользуясь предыдущим неравенством, показать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

Решение;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<$$

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1/2}=3.$$

Ограниченные множества.

Говорят, что множество $X\subset\mathbf{R}$ *ограничено сверху (снизу), если существует число* $C\in\mathbf{R}$ $(c\in\mathbf{R})$ *такое, что для любого* $x\in X$ *будет справедливо* $x\le C$ *(соответственно* $c\le x$*).*

Запишем определение ограниченного сверху множества с использованием кванторов:

$$\exists C\ \ \forall x\in X\ \ (x\le C)$$

А теперь определение ограниченного снизу множества:

$$\exists c\ \ \forall x\in X\ \ (c\le x).$$

Число C в этом случае называется *верхней (а* c *соответственно нижней) границей множества* X .

Определение. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется ограниченным.

Если c нижняя, а C - верхняя границы ограниченного множества, то это означает, что оно целиком содержится в отрезке $[c;C]$. Очевидно, что в таком случае оно содержится в некотором отрезке с центром в нуле. Отсюда следует еще одно определение ограниченного множества.

Определение. Множество X ограничено, если

$$\exists M > 0 \ \forall x \in X \ \left(|x| \le M\right).$$

Если множество не является ограниченным, то оно не может содержаться ни в каком конечном отрезке. Запишем отрицание ограниченности с помощью кванторов (о построении отрицаний высказываний, содержащих кванторы см. Приложение 1 с. 4).

Определение. Множество X не ограничено, если

$$\forall M > 0 \ \exists x \in X \ \left(|x| > M\right).$$

Упражнение. Записать определение неограниченного сверху (снизу) множества.

Определение. *Элемент a множества X называется максимальным (соответственно минимальным) элементом этого множества, если для всех $x \in X$ будет выполнено соотношение $x \le a$ (соответственно $a \le x$):*

$$a = \max X := \left(a \in X \wedge \forall x \in X \left(x \le a\right)\right);$$

$$a = \min X := \left(a \in X \wedge \forall x \in X \left(x \ge a\right)\right).$$

Из определения максимального (соответственно минимального) элемента множества видно, что, если такой элемент существует, то он единственный.

Не во всяком множестве найдется максимальный или минимальный элемент. Например, в полуинтервале $[0;1)$ существует минимальный, но не существует максимального элемента, а в полуинтервале $(0;1]$ наоборот, существует максимальный, но нет минимального.

Определение. *Если множество X ограничено сверху, то наименьшая из его верхних границ называется точной верхней границей или верхней гранью множества X и обозначается* $\sup X$.

Записанное с помощью кванторов это определение выглядит следующим образом.

$$s = \sup X := \forall x \in X \left(x \le s\right) \wedge \left(\forall s' < s \ \exists x' \in X \left(x' > s'\right)\right)$$

Аналогично определяется нижняя грань множества.

Определение. Если множество X ограничено снизу, то наибольшая из нижних границ множества называется точной нижней границей или нижней гранью множества X и обозначается $\inf X$.

То же с кванторами:

$$i = \inf X := \forall x \in X \left(i \le x\right) \wedge \left(\forall i' > i \, \exists x' \in X \left(x' < i'\right)\right).$$

Обозначения верхней и нижней граней происходят от латинских слов supremum – наивысшее, infimum – наинизшее.

Используются также обозначения $\inf\limits_{x \in X} x,\ \sup\limits_{x \in X} x,\ \min\limits_{x \in X} x,\ \max\limits_{x \in X} x$.

Примеры. $\sup(0;1) = 1, \quad \inf[0;1] = 0$.

Так как не всякое множество содержит свой максимум или минимум, то существование верхней (соответственно нижней грани) надо обосновать.

Для доказательства соответствующего утверждения воспользуемся аксиомой полноты.

Аксиома полноты (непрерывности) *Если X и Y - непустые подмножества $\mathbf{R}$, такие, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \le y$, то существует такое $c \in \mathbf{R}$, что $x \le c \le y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Лемма (принцип верхней грани). *Всякое не пустое ограниченное сверху подмножество множества вещественных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $X \subset \mathbf{R}$ - ограниченное сверху множество, а Y - множество всех его верхних границ. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$ будет справедливо неравенство $x \le y$. В силу аксиомы полноты найдется число $c \in \mathbf{R}$ такое, что $x \le c \le y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Из левой части этого неравенства следует, что c - верхняя граница множества X, то есть $c \in Y$, что вместе с правой частью неравенства дает $c = \min Y$. Минимальный же элемент в множестве – единственный. $\triangleleft$

Упражнение. *Докажите, что всякое непустое ограниченное снизу подмножество множества вещественных чисел имеет нижнюю грань.*

Функции

Пусть заданы два множества X и Y.

Говорят, что имеется ***функция,*** *определенная на X со значениями в Y, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ (обозначается $y = f(x)$).*

Функция f называется также отображением множества X на множество Y. Мы будем употреблять следующие обозначения:

$f : X \to Y;\ X \xrightarrow{f} Y;\ x \to f(x);\ y = f(x)$.

Значение $f(x) \in Y$, которое принимает функция на элементе $x \in X$, называют образом элемента x. Образом множества $A \subset X$ при отображении $f : X \to Y$ называют множество

$$f(A) := \left\{ y \in Y \middle| \exists x (x \in A) \wedge (f(x) = y) \right\}$$

Множество X называется ***областью определения*** *функции, а множество $f(X)$ всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X называется* ***множеством значений*** *f на X.*

Подробно прочитать об отображениях можно (рекомендуется) в книге В.А.Зорич «Математический анализ», т. 1, гл.I, § 3.

Рассмотрим некоторые примеры отображений.

Пример 1. Формула $y = f_1(x) = x^2 + 1$ или совокупность формул

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{если} \quad x < 0, \\ 2x-1, & \text{если} \quad x \ge 0, \end{cases}$$

Задают функции с областью определения $\mathbb{R}$ и значениями тоже в $\mathbb{R}$. При этом $f_1(\mathbb{R}) = [1; +\infty)$, а $f_2(\mathbb{R}) = (-\infty; 2)$.

Пример 2. Таблица

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25

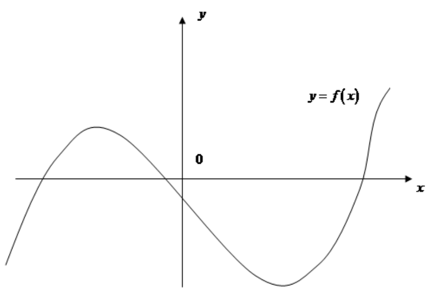
Задает функцию с областью определения $X = \{2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5\}$ и множеством значений $Y = \{4;\ 6,\ 25;\ 9; 12,25; 16;\ 20,25;\ 25\}$.

Пример 3. Функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррационально,} \end{cases}$$

Отображает множество действительных чисел $\mathbb{R}$ в конечное множество $Y=\{0;1\}$.

Функцию можно также представлять графиком.



Графиком функции $f: X \to Y$ *называется подмножество* Γ *прямого произведения* $X \times Y$, *элементы которого имеют вид* $(x, f(x))$, *то есть*

$$\Gamma := \{(x,y) \in X \times Y \,|\, y = f(x)\}.$$

Пример 4. Рассмотрим множество M всех вещественнозначных функций, определенных на всей числовой оси. Обозначим через X множество графиков всех этих функций. Фиксировав число $a \in \mathbb{R}$, каждому графику функции $f \in M$ поставим в соответствие график функции $f_a \in M$, связанной с f соотношением $f_a(x) = f(x+a)$.

Возникающее при этом отображение $X \to X$ называют оператором сдвига.

Пример 5. Пусть $X(M)$ - множество всех подмножеств множества M. Каждому множеству $A \in X(M)$, поставим в соответствие его дополнение в M: $f(A) := C_M A$. Таким образом, получим отображение $f: X(M) \to X(M)$.

Очень важный класс функций носит название **последовательностей.**

Определение. Функция $f: \mathbb{N} \to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется **последовательностью.**

Значения $f(n)$ функции называются членами последовательности. Их принято обозначать символом элемента этого множества с индексом аргумента, $x_n = f(n)$. Саму последовательность обозначают $\{x_n\}$ или $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и называют последовательностью в X или последовательностью элементов множества X. Элемент x_n называют $n-$м членом последовательности.

Пример 6. Формула $a_n = \dfrac{n-2}{n+1}$ задает последовательность $-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}, ...$.

Простейшая классификация отображений

Говорят, что отображение $f: X \to Y$ ***сюръективно*** (или сюръекция), если

$$f(X) = Y,$$

инъективно (или инъекция), если для любых элементов x_1, x_2 множества X

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2),$$

биективно (или взаимно однозначно), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Примеры. Отображение, задаваемое функцией $y = \sin x$ является сюръективным (но не инъективным) отображением множества $X = \mathbf{R}$ на множество $Y = [-1;1]$, инъективным (но не сюръективным) отображением множества $X=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ на $Y=[-1;1]$ и биективным отображением множества $X=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ на $Y=[-1;1]$.

Если функция $y=f(x)$ с областью определения X и множеством значений Y осуществляет биекцию между X и Y, то можно определить ***обратную функцию*** $f^{-1}(y)=x$ с областью определения Y и множеством значений X, полагая $f^{-1}(y)=x$, если $f(x)=y$.

Очевидно, что из сюръективности отображения для любого $y\in Y$ такой элемент x всегда найдется, а из инъективности, что он единственный. То есть отображение определено корректно.

Очевидно также, что справедливы тождества $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ и $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$, и функция f будет обратной к f^{-1} (f и f^{-1} называют взаимообратными).

Пример. Функция $y=2^x$ с областью определения $\mathbb{R}$ и множеством значений $\mathbb{R}^+$ взаимообратная с функцией $x=\log_2 y$ с областью определения $\mathbb{R}^+$ и множеством значений $\mathbb{R}$.

Композиция функций

Пусть заданы отображения $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$, причем $f(X)\subset Y$. Тогда ***композицией функций*** f и g называется функция $g\circ f$, определяемая формулой $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)$, при этом g называют внешней функцией, а f - внутренней функцией.

Пример. $z=\sin\left(x^2\right)$ $(x\in\mathbf{R})$ - сложная функция, составленная из внешней функции $z=\sin y$ и внутренней функции $y=x^2$, $z=(\sin x)^2$ - сложная функция, составленная из внешней $z=y^2$ и внутренней $y=\sin x$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)*** *на множестве* X, если множество ее значений $f(X)$ ограничено (соответственно, ограничено сверху или снизу).

Запишем определения ограниченности функции с помощью кванторов:

ограниченность: $\exists C\,\forall x\left((x\in X)\Rightarrow\left(|f(x)|\le C\right)\right)$.

ограниченность сверху: $\exists C\ \forall x\left((x\in X)\Rightarrow\left(f(x)\le C\right)\right)$.

ограниченность снизу: $\exists C\ \forall x\left((x\in X)\Rightarrow\left(C\le f(x)\right)\right)$.

Примеры. На своей области определения $(\mathbb{R})$ функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ - ограничена, функция $y=1-e^x$ - ограничена сверху, но не ограничена снизу, а функция $y=x^2+2x-3$ - ограничена снизу, но не ограничена сверху.

Ограниченность или неограниченность последовательностей.

Для последовательности $\{x_n\}$ определение ограниченности выглядит следующим образом.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется

Ограниченной, если: $\exists C\ \ \forall n \in \mathbb{N}\left(\left|x_n\right| \le C\right)$ *(существует число* C *такое, что* $\left|x_n\right| \le C$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$*),*
ограниченной сверху, если: $\exists C\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \left(x_n \le C\right)$,
ограниченной снизу, если: $\exists C\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \left(C \le x_n\right)$.

Пример. Покажем, что последовательность $\left\{a_n\right\} = \left\{2n - n^2 + 4\right\}$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

Предварительное замечание: ясно, что точки с координатами $\left(n, a_n\right)$ есть точки с натуральными абсциссами на графике функции $y = 2x - x^2 + 4$ - параболе с «ветвями вниз» и вершиной в точке $(1;5)$. Покажем, что $a_n \le 5$ для всех натуральных n:
$2n - n^2 + 4 \le 5 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \ge 0$ - всегда верно.

Запишем в кванторах отрицание ограниченности снизу:

$$\forall C\ \exists n \in \mathbb{N}\left(2n - n^2 + 4 < C\right).$$

Итак, фиксируем произвольное $C \in \mathbb{R}$

$$2n - n^2 + 4 < C \Leftrightarrow -\left(n^2 - 2n + 1\right) + 5 < C \Leftrightarrow \left(n-1\right)^2 > 5 - C \Leftarrow n > 1 + \sqrt{\left|5 - C\right|}\ ,$$

а такое n, очевидно, существует.

Определение*. *Верхней гранью* *последовательности* $\left\{a_n\right\}$ *называется верхняя грань множества ее значений:

$$s = \sup_n a_n := \forall n \in \mathbb{N}\left(a_n \le s \wedge \left(\forall s' < C\ \exists n' \in \mathbb{N}\left(a_{n'} > s'\right)\right)\right)$$

***Упражнение*.** *Дайте определение точной нижней грани последовательности.*

Монотонные функции.

Определение. Функция $y = f\left(x\right)$, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}$, называется
возрастающей на X, если $\forall x_1, x_2 \in X\ \left(\left(x_1 < x_2\right) \Rightarrow \left(f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)\right)\right)$,
неубывающей на X, если $\forall x_1, x_2 \in X\ \left(\left(x_1 < x_2\right) \Rightarrow \left(f\left(x_1\right) \le f\left(x_2\right)\right)\right)$,
невозрастающей на X, если $\forall x_1, x_2 \in X\ \left(\left(x_1 < x_2\right) \Rightarrow \left(f\left(x_1\right) \ge f\left(x_2\right)\right)\right)$,
убывающей на X*, если* $\forall x_1, x_2 \in X\ \left(\left(x_1 < x_2\right) \Rightarrow \left(f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)\right)\right)$.

Все эти функции называются ***монотонными*** на X.

Примеры. На своей области определения $\left(\mathbb{R}\right)$ функция $y = x^3$ - возрастает, $y = e^{-x}$ - убывает, функция $y = \operatorname{sgn} x$ - неубывающая, а функция $y = x^2 \cdot \left(1 - \operatorname{sgn} x\right)$ - невозрастающая.

Для последовательностей, с учетом свойств их области определения и принятой формы обозначений, сформулированные выше определения выглядят следующим образом.

***Определение*.** *Последовательность* $\left\{a_n\right\}$ *называется*
возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\left(a_{n+1} > a_n\right)$,
неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\left(a_{n+1} \ge a_n\right)$,
невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\left(a_{n+1} \le a_n\right)$,
убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\left(a_{n+1} < a_n\right)$.

Такие последовательности называются монотонными.

Пример. Исследуем последовательность $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{2n+3}\right\}$ на монотонность:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{2n+5} - \frac{n-1}{2n+3} = \frac{5}{(2n+5)(2n+3)} > 0.$$

Следовательно, последовательность монотонно возрастает. Отсюда сразу вытекает, что она ограничена снизу $\forall n \in \mathbb{N}\left(a_n \geq a_1\right)$. Покажем, что она ограничена сверху:

$$\frac{n-1}{2n+3} \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

то есть $C = \dfrac{1}{2}$ - верхняя граница значений последовательности (можно показать, что она также является и верхней гранью ее значений).

Предел функции

Сейчас мы обратимся к одному из важнейших понятий анализа – понятию предела функции.

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *определена в некоторой проколотой окрестности* U *точки* a. *Говорят, что функция* $y = f(x)$ *имеет предел* b *при* x, *стремящемся к* a, *и пишут*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \ (x \to a),$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любой точки* x *из этой окрестности такой, что* $0 < |x - a| < \delta$, *выполнено соотношение* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В логической символике сформулированные условия запишутся в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).$$

О существовании предела говорят также, что f стремится к b при x стремящемся к a, или что b есть предел f при x стремящемся к a.

Везде ниже, когда мы будем говорить о поведении функции в окрестности точки a, мы будем предполагать функцию определенной в этой окрестности, а слова «пусть функция определена в некоторой окрестности точки a», а также требование $\forall x \in U$ в случаях, когда это не приведет к недоразумениям, будем опускать, дабы не загромождать формулировки.

С учетом определений проколотой и «непроколотой» окрестностей, это определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \left(x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b) \right),$$

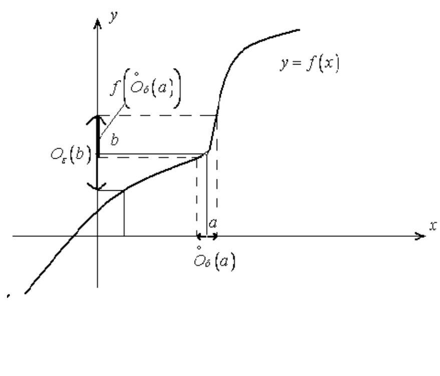
С использованием понятия образа множества при отображении f вид будет такой:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \left(f\left(\overset{\circ}{O}_\delta(a)\right) \subset O_\varepsilon(b) \right),$$

и совсем «в окрестностях»:

$$\forall O_\varepsilon(b) \ \exists \overset{\circ}{O}_\delta(a) \ \left(f\left(\overset{\circ}{O}_\delta(a)\right) \subset O_\varepsilon(b) \right).$$

Последнее определение проиллюстрируем «картинкой» (слева).



Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\cos x \in O_\varepsilon(1) \Leftrightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|2\sin^2\frac{x}{2}\right| < \varepsilon \Leftarrow 2\left|\frac{x^2}{4}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2\varepsilon} \Leftarrow x \in \overset{\circ}{O}_\delta(0),$$

если $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$.

Дадим определение предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Сначала запишем определение «в окрестностях»

$$\forall O_\varepsilon(-\infty)\ \exists \overset{\circ}{O}_\delta(a)\ \left(f\left(\overset{\circ}{O}_\delta(a)\right) \subset O_\varepsilon(\infty)\right).$$

Видим, что формально оно ничем не отличается от предыдущего аналогичного определения. Теперь будем двигаться в обратном порядке и дадим еще 3 варианта:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \left(f\left(\overset{\circ}{O}_\delta(a)\right) \subset O_\varepsilon(\infty)\right),$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \left(x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(\infty)\right),$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\right).$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty$. Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем:

$\frac{1}{x-1} \in O_\varepsilon(\infty) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right| > \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftarrow x \in \overset{\circ}{O}_\delta(1)$, если $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Теперь рассмотрим определение предела $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$. Начнем опять с определения «в окрестностях». Здесь, однако, будет небольшое отличие от двух предыдущих. Дело в том, что проколотых окрестностей бесконечности не существует, поскольку абсурдно требовать от действительного числа, чтобы оно не равнялось бесконечности. Поэтому соответствующее определение выглядит так:

$$\forall O_\varepsilon(b)\ \exists O_\delta(+\infty)\ \left(f\left(O_\delta(+\infty)\right) \subset O_\varepsilon(b)\right).$$

Остальные варианты строим по нему и соответствующим определениям окрестностей:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \left(f\left(O_\delta(+\infty)\right) \subset O_\varepsilon(b)\right),$$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \left(x \in O_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)\right),$$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \left(x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).$$

Пример. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1} = 1$. Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\frac{x}{x+1} \in O_\varepsilon(1) \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|-\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon \overset{x>0}{\Leftarrow} \frac{1}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftarrow x \in O_\delta(+\infty),$$

если $\delta = \max\left\{0; \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\}$.

Упражнение. Запишите разные варианты определения предела функции для случаев: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Нарисуйте соответствующие «картинки».

Предел последовательности

Последовательность – функция натурального аргумента. Натуральный аргумент может стремиться только к $+\infty$, поэтому определение предела последовательности «похоже» на определение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Часто в словах слова «при n стремящемся к $+\infty$» опускают «+», а то и вовсе не упоминают, куда стремится n (и так все понятно). Следующая разница в определениях связана с тем, что, поскольку аргумент принимает только натуральные значения, то и радиус окрестности бесконечности (δ) берется натуральным (N).

Итак, последовательность $\{a_n\}$ стремится к b (имеет предел b) при $n\to+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N, после которого будет выполняться неравенство $|a_n-b|<\varepsilon$.

В логической символике это определение записывается следующим образом

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\left(|a_n-b|<\varepsilon\right)$$

или

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\left(n>N\Rightarrow|a_n-b|<\varepsilon\right).$$

Определение «с окрестностями»

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\left(a_n\in O_\varepsilon(b)\right)$$

можно прочитать следующим образом: «Для любой окрестности точки b найдется номер N, после которого все члены последовательности попадают в эту окрестность».

На основе этого определения получается еще одно, эквивалентное предыдущим определение предела последовательности (не имеющее, кстати, аналога среди определений для функции).

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к b, если вне любой окрестности b может находиться не более конечного числа элементов этой последовательности.

Пример. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$. Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\frac{n}{n+1}\in O_\varepsilon(1)\Leftrightarrow\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1\Leftarrow n>N,$$

если $N=\max\left\{1;\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]\right\}$.

Определения «с окрестностями» для $b=\infty$ или $b=\pm\infty$ ничем не отличаются от соответствующего определения для конечного b, различны только определения с неравенствами. Например,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=-\infty:=\left(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\left(a_n\in O_\varepsilon(-\infty)\right)\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=-\infty:=\left(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\left(a_n<-\varepsilon\right)\right).$$

Пример. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-n^2\right)=-\infty$. Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем:

$2n-n^2 \in O_\varepsilon(-\infty) \Leftrightarrow 2n-n^2 < -\varepsilon \Leftrightarrow (n-1)^2 > \varepsilon+1 \Leftrightarrow n > \sqrt{\varepsilon+1}+1 \Leftarrow n > N$,

если $N = \left[\sqrt{\varepsilon+1}+1\right]$.

Упражнение. Запишите определения «с окрестностями» и «в неравенствах» для $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Приведите примеры.

Подпоследовательности

Определение. *Часть последовательности* $\{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$, *записанная в порядке возрастания номеров, называется ее подпоследовательностью и обозначается* $\left\{a_{n_k}\right\}$ $(k \in \mathbf{N})$.

Например, последовательность $\left\{a_{n_k}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2^k}\right\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$. Здесь $n_k = 2^k$.

Теорема. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится к* a, *то и любая ее подпоследовательность также имеет предел, равный* a.

Доказательство. ▸ Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Вне окрестности $O_\varepsilon(a)$ лежит лишь конечное число членов $\{a_n\}$. А так как множество элементов подпоследовательности является подмножеством множества элементов исходной последовательности, то вне $O_\varepsilon(a)$ находится не более конечного числа элементов и $\left\{a_{n_k}\right\}$. То есть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. ◂

Пример. Последовательность $(-1)^n$ - расходящаяся.

Доказательство (второе). ▸ Если $a_n = (-1)^n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$, что невозможно, если последовательность сходится.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции и последовательности

Определение. *Функция* $y = \alpha(x)$ *называется бесконечно малой при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Непосредственно из определений предела функции вытекает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно записать «в неравенствах» определение того, что $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - A\right) = 0$.

Пример. Функция $y = x^3$ - бесконечно малая при $x \to 0$. Доказательство.

$$\lim_{x\to 0} x^3 = 0 := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|x^3\right| < \varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\left|x^3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{\varepsilon} \Leftarrow 0 < |x| < \delta, \text{ если } \delta = \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Пример. Функция $y = \dfrac{1}{x^3}$ - бесконечно малая при $x \to \infty$. Доказательство.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0:=\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(|x|>\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x^3}\right|<\varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|\frac{1}{x^3}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\sqrt[3]{\varepsilon}\Leftarrow|x|>\delta,\text{ если }\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Определение. *Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.*

Так же, как и для предела функции $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow x_n=A+\alpha_n$, где α_n - б.м.

Пример. $\{e^{-n}\}$ - бесконечно малая последовательность. Доказательство.

$$\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0=:\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\left(n>N\Rightarrow\left|e^{-n}\right|<\varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|e^{-n}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow e^{-n}<\varepsilon\Leftrightarrow -n<\ln\varepsilon\Leftrightarrow n>\ln\frac{1}{\varepsilon}\Leftarrow n>N,\text{ если }N=\max\left\{1;\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Определение. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Пример. Функция $y=\dfrac{1}{x^3}$ - бесконечно большая при $x\to 0$. Доказательство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty:=\forall\varepsilon>0\exists\delta\left(0<|x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x^3}\right|>\varepsilon\right).$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|\frac{1}{x^3}\right|>\varepsilon\Leftrightarrow 0<\left|x^3\right|<\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow 0<|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Leftarrow 0<|x|<\delta,\text{ если }\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}.$$

Пример. Функция $y=x^3$ - бесконечно большая при $x\to\infty$. Доказательство:

$$\lim_{x\to\infty}x^3=\infty:=\forall\varepsilon>0\exists\delta\left(|x|>\delta\Rightarrow\leq\left|x^3\right|>\varepsilon\right).$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|x^3\right|>\varepsilon\Leftrightarrow 0<|x|>\sqrt[3]{\varepsilon}\Leftarrow|x|>\delta,\text{ если }\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.*

Пример. $\{e^{n}\}$ - бесконечно большая последовательность. Доказательство.

$$\lim_{n\to+\infty}e^{n}=\infty=:\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\left(n>N\Rightarrow\left|e^{n}\right|>\varepsilon\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$\left|e^{n}\right|>\varepsilon\Leftrightarrow n>\ln\varepsilon\Leftarrow n>N,\text{ если }N=\max\{1;[\ln\varepsilon]\}.$$

Определение предела по Гейне

Между понятием предела последовательности и понятием предела функции имеется тесная связь.

Теорема. *Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$ $(n \in \mathbf{N})$.*

Доказательство. ▸ Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \left(x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b) \right). \tag{1}$$

Из сходимости же последовательности $\{x_n\}$ к a следует существование такого номера N, что для всех $n > N$ будет $x_n \in O_\delta(a)$, а так как $x_n \neq a$, то

$$n > N \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{O}_\delta(a). \tag{2}$$

Объединяя (1) и (2), получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \left(n > N \Rightarrow f(x_n) \in O_\varepsilon(b) \right),$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$. Предположим, что b не является пределом $f(x)$ при $x \to a$.

Запишем это отрицание в «в кванторах»:

$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \left(0 < |x-a| < \delta\right) \wedge \left(|f(x) - b| \geq \varepsilon\right)$.

Поскольку число δ можно выбирать любым, рассмотрим серию $\delta = \dfrac{1}{n}$ и построим по ней последовательность $\{x_n\}$ такую, что $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ◂

Свойства предела функции

Функция не может иметь двух разных пределов.

Утверждение. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2\right) \Rightarrow A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $A_1 \neq A_2$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$. Очевидно, что окрестности $O_\varepsilon(A_1)$ и $O_\varepsilon(A_2)$ не имеют общих точек. Из определения предела вытекает:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A_1 \Rightarrow \exists \delta_1 \left(f\left(\overset{\circ}{O}_{\delta_1}(a)\right) \subset O_\varepsilon(A_1) \right)$$

и

$$\lim_{x\to a} f(x) = A_2 \Rightarrow \exists \delta_1 \left(f\left(\overset{\circ}{O}_{\delta_2}(a)\right) \subset O_\varepsilon(A_2) \right).$$

Рассмотрим окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(a) = \overset{\circ}{O}_{\delta_1}(a) \bigcap \overset{\circ}{O}_{\delta_2}(a)$, ее образ при отображении f должен принадлежать сразу двум окрестностям - $O_\varepsilon(A_1)$ и $O_\varepsilon(A_2)$, а это невозможно, потому что они не пересекаются. Следовательно, $A_1 = A_2$.

Это доказательство с минимальными изменениями (проколотая окрестность заменяется на обычную) переносится и на случай стремления x к бесконечности.

Для разнообразия приведем доказательство этого факта для последовательности, опирающееся на определение предела, у которого нет функционального аналога.

Утверждение. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_1\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_2\right) \Rightarrow A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $A_1 \neq A_2$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$. Очевидно, что окрестности $O_\varepsilon(A_1)$ и $O_\varepsilon(A_2)$ не имеют общих точек. Из определения предела вытекает, что после некоторого номера все элементы последовательности (бесконечное множество) лежат в окрестности $O_\varepsilon(A_1)$, а значит, вне окрестности $O_\varepsilon(A_2)$. Поэтому A_2 не может быть пределом.

Утверждение. *Функция, имеющая конечный предел при* $x \to a$, *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* a.

Доказательство.

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = A\right) \Rightarrow \exists\delta > 0\left(f\left(\overset{\circ}{O}_\delta(a)\right) \subset O_1(A)\right).$$

Следовательно, множество значений функции f на $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$ содержится в интервале $(A-1; A+1)$, то есть ограничено.

В случае последовательности можно говорить просто об ограниченности.

Теорема. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. ▸ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Полагая в определении предела $\varepsilon = 1$, найдем номер N такой, что $\forall n > N$ будет выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$ или $(a - 1 < a_n < a + 1)$. Возьмем $C = \max(a+1, a_1, a_2, .., a_N)$, а $c = \min(a-1, a_1, a_2, .., a_N)$.. Очевидно, что для всех номеров n будет выполнено $c \le a_n \le C$, что означает ограниченность последовательности $\{a_n\}$. ◂

Свойства бесконечно малых последовательностей

Произведением двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ будем называть последовательность $\{c_n\}$ с элементами $c_n = a_n b_n$.

Теорема. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. ▸ Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{b_n\}$ - ограниченная, то есть

$$\exists C: \forall n \quad \text{будет верно } |b_n| \le C.$$

Покажем, что последовательность $\{\alpha_n b_n\}$ является бесконечно малой, то есть, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N \quad \text{будет справедливо } |b_n \alpha_n| < \varepsilon.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{C}$ Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то найдется такой номер N, после которого $|\alpha_n| < \varepsilon_1$, но тогда при $n > N$ будет верно и $|b_n \alpha_n| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$. ◂

Следствие. *Произведение бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. ▷ Бесконечно малая последовательность – сходящаяся и, следовательно, ограниченная. Далее к произведению применим предыдущую теорему.◁

Теорема. *Сумма бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. ▶ Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Покажем, что последовательность $\{\gamma_n\}=\{\alpha_n+\beta_n\}$ также является бесконечно малой.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Возьмем $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}$ из определения бесконечно малых вытекает, что

$$\left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0\right)\Rightarrow\left(\exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1\quad\left(|\alpha_n|<\varepsilon_1\right)\right)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\beta_n=0\right)\Rightarrow\left(\exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2\quad\left(|\beta_n|<\varepsilon_1\right)\right)$$

Тогда для $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ будут выполнены оба эти неравенства, и мы получим

$$\forall n>N\left(\left(|\alpha_n|<\varepsilon_1\right)\wedge\left(|\beta_n|<\varepsilon_1\right)\right)\Rightarrow|\gamma_n|=|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\varepsilon\,.$$ ◀

Свойства бесконечно малых функций

Теорема. *Пусть* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *- бесконечно малые функции при* $x\to a$*, а функция* $f(x)$ *- ограничена в проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_r(a)$.

Тогда функции $f(x)\alpha(x),\ \alpha(x)+\beta(x),\ \alpha(x)\beta(x)$ *- бесконечно малые при* $x\to a$.

Доказательство. Возьмем произвольную сходящуюся к a последовательность x_n $(x_n\ne a)$. Из определения предела по Гейне следует, что $\alpha(x_n)$ и $\beta(x_n)$ - бесконечно малые последовательности, а из ограниченности функции $f(x)$, что последовательность $f(x_n)$ ограничена. Тогда из соответствующих утверждений для бесконечно малых последовательностей получаем: $\forall\{x_n\}\left((x_n\to a)\wedge(x_n\ne a)\right)\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)\alpha(x_n)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\alpha(x_n)+\beta(x_n)\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\alpha(x_n)\beta(x_n)=0.$$

Утверждение теоремы доказано.

Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. *Тогда последовательность* $\{c_n\}=\{a_n+b_n\}$ *также будет сходящейся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a+b$.

Доказательство. ►Из условия теоремы вытекает, что $a_n=a+\alpha_n$, а $b_n=b+\beta_n$ $(n\in\mathbf{N})$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$c_n-(a+b)=(a+\alpha_n+b+\beta_n)-(a+b)=\alpha_n+\beta_n=\gamma_n,$$

причем γ_n - бесконечно малая последовательность (как сумма бесконечно малых).◄

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. *Тогда последовательность* $\{c_n\}=\{a_n\cdot b_n\}$ *также будет сходящейся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a\cdot b$.

Доказательство. ►Из условия теоремы вытекает, что $a_n = a + \alpha_n$, а $b_n = b + \beta_n$ $(n \in \mathbf{N})$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$c_n - (a \cdot b) = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab = \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n = \gamma_n .$$

Последовательности $\alpha_n b,\ \beta_n a,\ \alpha_n \beta_n$ бесконечно малые как произведение бесконечно малой на ограниченную и произведение бесконечно малых последовательностей. Тогда $\{\gamma_n\}$ бесконечно малая как сумма бесконечно малых..◄

Для доказательства теоремы о пределе частного нам понадобится следующее свойство сходящихся последовательностей.

Лемма. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда последовательность* $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ *ограничена.*

Доказательство. ►Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ и найдем номер N, после которого $|b_n - b| < \varepsilon$. Для всех номеров $n > N$ будет справедлива оценка

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2}, \qquad \left(|b_n| > \frac{|b|}{2}\right),$$

а значит, для этих номеров $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{2}{|b|}$. Тогда для всех номеров n будет справедливо

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq C = \max\left\{\left|\frac{1}{b_1}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{b_N}\right|, \frac{2}{|b|}\right\},$$

что означает ограниченность последовательности $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$.◄

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ $(b \neq 0)$. *Тогда последовательность* $\{c_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ *также будет сходящейся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. ►Из условия теоремы вытекает, что $a_n = a + \alpha_n$, а $b_n = b + \beta_n$ $(n \in \mathbf{N})$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$c_n - \frac{a}{b} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha_n b - ab - a\beta_n}{b_n b} = \frac{\alpha_n b - a\beta_n}{bb_n} = \left(\alpha_n - \beta_n \frac{a}{b}\right)\frac{1}{b_n} = \gamma_n .$$

Последовательность $\{\gamma_n\}$, очевидно, бесконечно малая, а, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{a}{b}$.◄

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)(3n+5)}{n^2 - 2n + 6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2 + \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{5}{n}\right)}{1 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}} = \dfrac{(2+0)(3+0)}{1 - 0 + 0} = 6$.

Функции. Предельный переход и арифметические операции

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_r(a)$ *точки* a.

Тогда, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B$,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=A\cdot B$,

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ при $x\in \overset{\circ}{O}_r(a)$.

Доказательство. Возьмем произвольную сходящуюся к a последовательность $\{x_n\}$ $(x_n\neq a)$. Из определения предела по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)+g(x_n)\right)=A+B$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n)=A\cdot B$ для всех сходящихся к a (и не совпадающих с a) последовательностей $\{x_n\}$, то есть первые два утверждения доказаны. При $B\neq 0$ очевидна справедливость и третьего утверждения.

Переход к пределу в неравенствах

Теорема (о предельном переходе в неравенстве). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ *, и пусть* $a_n\le b_n$*, по крайней мере, начиная с некоторого номера* $(n\ge n_0)$*. Тогда* $a\le b$.

Доказательство. ►Рассмотрим последовательность $\{c_n\}=\{b_n-a_n\}$. Эта последовательность сходящаяся $\left(\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c=b-a\right)$, кроме того, $c_n\ge 0$ при $(n\ge n_0)$. Покажем, что $c\ge 0$.

Предположим, что $c<0$. Тогда возьмем $\varepsilon=\dfrac{|c|}{2}$ и выберем номер N такой, что при $n>N$

$$|c_n-c|<\frac{|c|}{2}, \text{ то есть } \begin{cases} c_n<c+\dfrac{|c|}{2} \\ c_n>c-\dfrac{|c|}{2} \end{cases}.$$

Но в таком случае, при $n>\max\{N,n_0\}$ будет (мы используем только верхнее неравенство) $c_n<c+\dfrac{|c|}{2}<0$. Мы пришли к противоречию. следовательно $c\ge 0$.◄

Теорема (о предельном переходе в двух неравенствах). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$*, и пусть* $a_n\le c_n\le b_n$*, по крайней мере, начиная с некоторого номера* $(n\ge n_0)$.

Тогда последовательность $\{c_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$.

Доказательство. ►Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. По условию теоремы, после некоторого номера N_1, элементы последовательности $\{a_n\}$ будут находиться в $O_\varepsilon(a)$, а, после номера N_2, в той же окрестности будут находиться все члены последовательности $\{b_n\}$. Тогда для номеров $n>N=\max\{N_1,N_2,n_0\}$ элемент последовательности $\{c_n\}$, находясь между a_n и b_n, тоже попадет в $O_\varepsilon(a)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$.◄

Теперь докажем аналогичные теоремы для функций.

Теорема *(о переходе к пределу в неравенстве). Пусть функции* $f(x), g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности точки* a *-* $\overset{\circ}{O}_r(a)$*, и пусть в этой окрестности выполнено неравенство* $f(x) \le g(x)$*, а также существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$*. Тогда* $b \le c$.

Доказательство. ▸ Из определения предела по Гейне следует, что для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \ne a$ $(n \in \mathbf{N})$ будет справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$. Кроме того, с некоторого номера n_0 (когда члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$) будет выполняться неравенство $f(x_n) \le g(x_n)$. Применив теорему о предельном переходе в неравенстве к последовательностям $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$, получим нужное нам неравенство $b \le c$. ◂

Теорема *(о переходе к пределу в двух неравенствах). Пусть функции* $f(x), g(x), h(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности точки* a *-* $\overset{\circ}{O}_r(a)$*, и пусть в этой окрестности выполнено неравенство* $f(x) \le h(x) \le g(x)$*, а также существуют и равны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$*. Тогда существует предел* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Доказательство. ▸ Из условий теоремы следует, что для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \ne a$ $(n \in \mathbf{N})$ будет справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, а также, что с некоторого номера n_0 (когда члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$) будет выполняться неравенство $f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n)$. Применим теорему о предельном переходе в двух неравенствах к последовательностям $\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}, \{h(x_n)\}$. Получим существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a ($x_n \ne a$). Следовательно, для функции $h(x)$ в $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$ выполнены все условия существования предела по Гейне. ◂

Лемма (о сохранении знака). *Пусть существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ne 0$*. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки* a *знаки функции и ее предела будут совпадать* $(f(x) \cdot b > 0)$.

Доказательство. ▸ Предположим для определенности, что $b > 0$. Положим $\varepsilon = \dfrac{b}{2}$. Из существования предела $f(x)$ при стремлении x к точке a следует, что существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$, в которой выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда для $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ будет верно

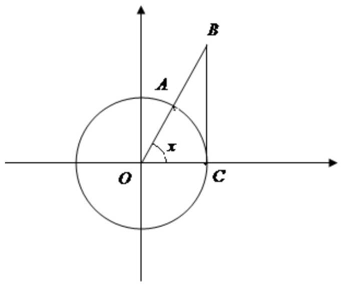
$$f(x) > b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0 . ◂$$

Первый замечательный предел

Теорема *(о первом замечательном пределе). Справедлива формула*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. ▸ Мы будем использовать школьное определение $\sin x$ как ординаты конца единичного вектора $(0;1)$ при повороте его (с центром в начале координат) на угол x радиан. Так как нас интересует случай $x\to 0$, то можно считать,



что $|x|<\dfrac{\pi}{2}$, а поскольку функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ четная, то достаточно рассмотреть углы из первой четверти: $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Из геометрических соображений ясно, что площадь кругового сектора OAC больше площади треугольника OAC и меньше площади треугольника OBC:

$$S_{\vartriangle OAC}<S_{\sphericalangle OAC}<S_{\vartriangle OBC},$$

то есть

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx \text{ или } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}1=1,$$

то по теореме о предельном переходе в двух неравенствах получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \text{ ◂}$$

Сравнение асимптотического поведения функций

Иногда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), в которой часто сама функция не определена. Тогда говорят, что интересуются асимптотикой или асимптотическим поведением функции в окрестности этой точки. При этом поведение функции сравнивают с поведением другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности данной точки приближает исследуемую функцию с малой относительной погрешностью.

Дадим определение некоторых элементарных понятий, относящихся к асимптотическому поведению функций.

Определение. *Говорят, что функция f есть бесконечно малая по сравнению с функцией g при $x\to a$ и пишут $f=o(g)$ $(x\to a)$, если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to a$.*

Замечание*. Если функция $g(x)\neq 0$ в $\overset{\circ}{O}(a)$, то последнее определение можно записать как*

$$f(x)=o\big(g(x)\big)\ (x\to a)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Пример 1. $x^2=o(x)$ при $x\to 0$.

Пример 2. $x=o\left(x^2\right)$ при $x\to\infty$.

Определение. *Запись*

$$f(x)=O\big(g(x)\big)\quad (x\to a)$$

означает, что

$$f(x)=g(x)h(x),$$

где $h(x)$ *- ограниченная функция в некоторой окрестности* $O(a)$ *или проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}(a)$.

Замечание. *Если* $g(x)\neq 0$ *в* $O(a)$ *(в* $\overset{\circ}{O}(a)$*), то*

$f(x)=O(g(x))$ $(x\to a)$, *когда функция* $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *будет ограниченной в этой окрестности.*

Пример. $\dfrac{x^3}{x^2+1}=O(x)$ $(x\to\infty)$. В самом деле, (при $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ и $g(x)=x$) имеем $|h(x)|=\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}\right|\le 1$ на всей оси.

Определение. *Говорят, что функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны при* $x\to a$ *и пишут* $f(x)\sim g(x)$ $(x\to a)$, *если* $f(x)=g(x)(1+\alpha(x))$, *где* $\alpha(x)$ *- бесконечно малая функция при* $x\to a$.

Если мы раскроем скобки в правой части равенства, то получим еще один вариант определения:

$$f(x)\sim g(x)\ \ (x\to a)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+o(g(x))\ \ (x\to a).$$

Замечание. Если $g(x)\neq 0$ в некоторой $\overset{\circ}{O}(a)$, то

$$f(x)\sim g(x)\ \ (x\to a)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Пример. $\sin x\sim x$ $(x\to 0)$ (первый замечательный предел);

Задача. Докажите, что

$$tgx\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ \ (x\to 0).$$

Утверждение. *Соотношение* $\sim$ *обладает всеми свойствами эквивалентности:*

1. $f(x)\sim f(x)$ $\quad (f(x)=f(x)+0)$ - очевидно.

2. $f(x)\sim g(x)\Rightarrow g(x)\sim f(x)$.

Доказательство: $f(x)=(1+\alpha(x))g(x)\Leftrightarrow g(x)=f(x)\dfrac{1}{1+\alpha(x)}$, а так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{1+\alpha(x)}=1$, то $\dfrac{1}{1+\alpha(x)}=1+\beta(x)$ ($\beta(x)$ - б.м. при $x\to a$), то и $g(x)\sim f(x)$.

3.$\left(f(x)\sim g(x)\right)\wedge\left(g(x)\sim h(x)\right)\Rightarrow\left(f(x)\sim h(x)\right)$.

Доказательство: $f(x)=\left(1+\alpha(x)\right)g(x)=\left(1+\alpha(x)\right)\left(1+\beta(x)\right)h(x)$, а так как $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)\left(1+\beta(x)\right)=1,$ то $f(x)=\left(1+\gamma(x)\right)h(x),$ где $\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x)$ - б.м. при $x\to a$.

Утверждение. *Если* $f(x)\sim f_1(x)\ \ (x\to a)$ *и* $g(x)\sim g_1(x)\ \ (x\to a)$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Доказательство.► $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\,f_1(x)\,g_1(x)}{f_1(x)\,g_1(x)\,g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$..

Разумеется, мы предполагаем здесь, что знаменатели всех дробей в некоторой окрестности точки a отличны от нуля.◄

Задача. Доказать, что *Если* $f(x)\sim f_1(x)\ \ (x\to a)$ *и* $g(x)\sim g_1(x)\ \ (x\to a)$, *то*

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f_1(x)g_1(x).$$

Замечание. Нельзя утверждать, что *если* $f(x)\sim f_1(x)\ \ (x\to a)$ *и* $g(x)\sim g_1(x)\ \ (x\to a)$, *то* $f(x)+g(x)\sim f_1(x)+g_1(x)\ \ (x\to a)$. Примером может послужить пара $f(x)=\sin x$ и $g(x)=-tgx$ при $x\to 0$. Так как

$\sin x\sim x,\ -tgx\sim(-x)$ при $x\to 0$, но, очевидно, $\sin x-tgx\neq(x-x)\left(1+\alpha(x)\right)$.

Замечание. *Пусть непрерывные в нуле функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны при* $x\to 0$, *а функция* $\alpha(x)$ *бесконечно малая при* $x\to a$.

Тогда функция $f\left(\alpha(x)\right)$ *будет эквивалентна функции* $g\left(\alpha(x)\right)$ *при* $x\to a$.

Доказательство будет приведено позднее.

Последнее замечание позволяет нам упрощать выкладки при вычислении пределов.

Пример.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{ctg\,2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{ctg\,2x}=\left\{\begin{aligned}&t=x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{4}\\&x\to\frac{\pi}{4}\Rightarrow t\to 0\end{aligned}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{ctg\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)}=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg\,2t}=-\frac{1}{2}.$$

Предел монотонной последовательности

Теорема Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности). *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. ►Рассмотрим, для определенности, неубывающую последовательность $\{a_n\}$. Ограниченное сверху множество значений последовательности имеет точную верхнюю грань $a=\sup_n\{a_n\}$. Покажем, что число a будет пределом нашей последовательности.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Из определения точной верхней грани следует, что существует элемент последовательности a_N такой, что $a-\varepsilon<a_N$. Так как последовательность $\{a_n\}$ неубывающая, а число a является верхней гранью множества всех значений последовательности, то для всех номеров $n>N$ будет справедливо $a-\varepsilon<a_N\le a_n\le a$, то есть $a_n\in O_\varepsilon(a)$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.◄

Задача. Доказать, что если $\{a_n\}$ - невозрастающая ограниченная последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\limits_n\{a_n\}$.

Задача. Доказать, что если $\{a_n\}$ - неубывающая не ограниченная сверху последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Задача. Доказать, что если $\{a_n\}$ - невозрастающая не ограниченная снизу последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

Число e.

Рассмотрим числовую последовательность

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n\ge1). \tag{1}$$

Покажем, что эта последовательность сходящаяся.

Теорема. *Последовательность (1) имеет конечный предел.*

Доказательство. ►Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n\ge1) \tag{2}$$

и докажем, что она имеет предел. Убедимся сначала, что последовательность (2) убывающая, для этого сравним с 1 отношение

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{(n+1)}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{(n+1)}.$$

Далее воспользуемся неравенством Бернулли:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}\ge\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1.$$

Последовательность (2) является ограниченной снизу:

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge0.$$

Итак, последовательность b_n монотонна и ограничена, следовательно, по теореме Вейерштрасса она имеет предел. Но тогда имеет предел и последовательность a_n, причем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)=1\cdot\lim_{x\to\infty}b_n\blacktriangleleft$$

Пределом последовательности (1) является число, обозначаемое буквой e, оно играет в анализе роль столь же важную как, например, единица в арифметике или π в геометрии.

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Число e иррациональное, представляется бесконечной десятичной дробью, а начало его десятичного разложения имеет вид:

$$e = 2,718281828...$$

Задача. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Второй замечательный предел

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{1}$$

Доказательство. ▸ Сначала покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2}$$

Заметим, что при $n \le x < n+1$ будет выполнено $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$, откуда, используя монотонность показательной (a^x при $a>1$ возрастает) и степенной (x^α возрастает при $\alpha > 0$ и $x > 0$) функций, получим

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3}$$

Положим $a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ и $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e. \tag{5}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (4) и (5) следует, что существует такое $N \in \mathbf{N}$, что при $n \ge N$ будет справедливо

$$|a_n - e| < \varepsilon \text{ и } |b_n - e| < \varepsilon. \tag{6}$$

Возьмем $x \in O_N(+\infty)$ $(x > N)$ и положим $n = [x]$. Тогда будет $N \le n \le x < n+1$, и в силу (3) и (6) имеем $e - \varepsilon < a_n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < b_n < e+\varepsilon$, то есть

$$x \in O_n(+\infty) \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \in O_\varepsilon(e).$$

Формула (2) доказана.

Пусть теперь $x \to -\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left\{\begin{matrix} t=-x \\ x\to-\infty \\ t\to+\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e,$$

то есть

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \blacktriangleleft$$

Следствие.

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Доказательство. $\blacktriangleright \lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\left\{\begin{matrix} t=\dfrac{1}{x} \\ x\to0 \\ t\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e. \blacktriangleleft$

Непрерывность

Определение*. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в a, если существует предел $f(x)$ при $x\to a$, равный $f(a)$:*

$$\exists\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Запишем это определение с кванторами:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall x\big(x\in O_\delta(a)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(f(a))\big),$$

или в неравенствах:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall x\big(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon\big).$$

Определение. *Если функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x\in(a,b)$, то говорят, что она непрерывна на этом интервале.*

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то a называется точкой разрыва $f(x)$ и говорят, что $f(x)$ разрывна в a.

Задача. Докажите, что функция $y=\sin x$ непрерывна на всей оси.

Утверждение*. Основные элементарные функции $x^\alpha, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \ldots$ непрерывны на своей области определения.*

(без доказательства)

Что касается свойств непрерывных функций, то ограниченность непрерывной функции в окрестности точки a, непрерывность линейной комбинации, произведения и частного (при условии отличия от нуля знаменателя в точке a) двух непрерывных функций являются тривиальными следствиями соответствующих свойств предела функции.

Для примера докажем утверждение о непрерывности суммы непрерывных функций.

Утверждение*. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда их сумма $f(x)+g(x)$ также будет непрерывной в точке a.*

Доказательство. $\triangleright$ Имеем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$. $\triangleleft$

Докажем вариант теоремы о предельном переходе в неравенстве для непрерывных функций.

Теорема *(о сохранении знака непрерывной функцией). Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* a *и пусть* $f(a) \neq 0$. *Тогда* $f(x)$ *сохраняет знак в некоторой окрестности точки* a.

Доказательство. $\blacktriangleright$ Непрерывность функции $f(x)$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \neq 0$. Тогда по лемме о сохранении функцией знака своего предела в некоторой проколотой окрестности точки a функция сохраняет знак $f(a)$, то есть во всей этой окрестности не меняет знак. $\blacktriangleleft$

Упражнение. Пользуясь теоремами об арифметических действиях с пределами функций сформулируйте и докажите теорему о непрерывности линейной комбинации непрерывных функций, теоремы о непрерывности произведения и частного.

Теорема *(о пределе сложной функции). Пусть функция* $y = g(x)$, *определенная в проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_h(a)$ *точки* a, *имеет предел* b *при* $x \to a$:

$$b = \lim_{x\to a} g(x). \tag{1}$$

И пусть функция $z = f(y)$ *определена в некоторой окрестности точки* b, *содержащей* $g\left(\overset{\circ}{O}_h(a)\right)$, *и непрерывна в точке* b.

Тогда сложная функция $z = f(g(x))$ *определена в* $\overset{\circ}{O}_h(a)$ *и существует предел*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b). \tag{2}$$

(Другими словами, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$).

Доказательство. $\blacktriangleright$ Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $f(y)$ в точке b следует

$$\exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall y\left(y \in O_\delta(b) \Rightarrow f(y) \in O_\varepsilon(f(b))\right), \tag{3}$$

а из существования предела (1), что

$$\exists\sigma(\delta) > 0\ \forall x\left(x \in \overset{\circ}{O}_\sigma(a) \Rightarrow y = g(x) \in O_\delta(b)\right). \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), получим

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\sigma > 0 \forall x\left(x \in \overset{\circ}{O}_\sigma(a) \Rightarrow f(g(x)) \in O_\varepsilon(f(b))\right).$$

Существование предела (2) доказано. $\blacktriangleleft$

Следствие. *Пусть функция* $y = g(x)$ *непрерывна в точке* a, *а функция* $z = f(y)$ *непрерывна в точке* $b = g(a)$. *Тогда сложная функция* $z = f(g(x))$ *будет непрерывной в точке* a.

Утверждение. $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0.$

Доказательство. ▸ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1.$ ◂

Утверждение. $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0.$

Доказательство. ▸ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \left\{\begin{matrix} e^x - 1 = t \\ x = \ln(t+1) \\ t \to 0 \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(t+1)} = 1.$ ◂

Примечание. Последние две формулы можно записать в следующем виде:

$$\ln(1+x) = x + o(x),\ x \to 0,$$

$$e^x - 1 = x + o(x),\ x \to 0,\ \text{или}\ e^x = 1 + x + o(x),\ x \to 0.$$

Замечание. *Пусть непрерывные в нуле функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны при* $x \to 0$, *а функция* $\alpha(x)$ *бесконечно малая при* $x \to a$.

Тогда функция $f(\alpha(x))$ *будет эквивалентна функции* $g(\alpha(x))$ *при* $x \to a$.

Доказательство. ► В самом деле, эквивалентность функций $f(x)$ и $g(x)$ означает, что

$$f(t) = g(t)(1 + \beta(t)), \tag{5}$$

где $\beta(t)$ - бесконечно малая функция при $t \to 0$. Доопределим $\beta(t)$ в нуле, положив $\beta(0) = 0$. Равенство (5) не изменится, а функция $\beta(t)$ будет в нуле непрерывной. Сделаем замену переменной $t = \alpha(x)$, получим

$$f(\alpha(x)) = g(\alpha(x))(1 + \beta(\alpha(x))),$$

где $\lim\limits_{x\to a}\beta(\alpha(x)) = 0$ в силу теоремы о пределе сложной функции. ◄

Воспользуемся последним утверждением для вывода еще одной асимптотической формулы.

Утверждение. $(1+x)^p - 1 \sim px,\ x \to 0.$

Доказательство: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p - 1}{px} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{p\ln(1+x)} - 1}{px} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p\ln(1+x)}{px} = 1.$

То есть мы можем записать:

$$(1+x)^\alpha - 1 = px + o(x),\ x \to 0\ \text{или}\ (1+x)^\alpha = 1 + px + o(x),\ x \to 0.$$

Здесь $f(x) = e^x - 1,\ g(x) = x,\ \alpha(x) = p\ln x.$

Мы показали, что при $x \to 0$ справедливо:

$\sin x \sim x,\ tgx \sim x,\ 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2},\ \ln(1+x) \sim x,\ e^x - 1 \sim x,\ (1+x)^p - 1 \sim px.$

Односторонние пределы и односторонняя непрерывность

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *определена в левой полуокрестности точки* a. *Говорят, что она имеет предел* b *при* x, *стремящемся к* a *слева и пишут*

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b \text{ или } f(x)\to b\ (x\to a-0)$$

если для любого $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что* $f(x)\in O_\varepsilon(b)$ *при* $x\in O_\delta^-(a)$.

Запишем это определение с неравенствами

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b =: \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\,\forall x\big(a-\delta<x<a\Rightarrow\left|f(x)-b\right|<\varepsilon\big).$$

и «в окрестностях»:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\Big(\big(x\in O_\delta^-(a)\big)\Rightarrow\big(f(x)\in O_\varepsilon(b)\big)\Big).$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0-0}\operatorname{sgn} x=-1$ ($\delta(\varepsilon)$ - произвольно).

Упражнение. По аналогии с предыдущим запишите определение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, приведите пример.

Для конечных односторонних пределов в точке a используются обозначения $f(a-0)$ (предел слева) и $f(a+0)$ (предел справа).

Упражнение. Дайте определение односторонних пределов:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty,$$

приведите примеры.

Утверждение. *Функция* $f(x)$ *имеет предел* b *при* $x\to a$ *тогда и только тогда, когда существуют и равны* b *оба односторонние предела:*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Доказательство. ▸ Пусть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$, тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x\left(x\in \overset{\circ}{O}_\delta(a)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(b)\right) \tag{1}$$

Так как $\overset{\circ}{O}_\delta(a)=O_\delta^-(a)\cup O_\delta^+(a)$, то из (1) вытекает

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\Big(\big(x\in O_\delta^-(a)\big)\Rightarrow\big(f(x)\in O_\varepsilon(b)\big)\Big),$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\Big(\big(x\in O_\delta^+(a)\big)\Rightarrow\big(f(x)\in O_\varepsilon(b)\big)\Big),$$

то есть

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Пусть теперь существуют и равны b оба односторонних предела. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Из существования односторонних пределов следует, что

$$\exists\delta_1>0\ \forall x\Big(\big(x\in O_{\delta_1}^-(a)\big)\Rightarrow\big(f(x)\in O_\varepsilon(b)\big)\Big),$$

$$\exists\delta>0\ \forall x\Big(\big(x\in O_{\delta_2}^+(a)\big)\Rightarrow\big(f(x)\in O_\varepsilon(b)\big)\Big),$$

Возьмем $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Очевидно, что $\overset{\circ}{O}_\delta(a)\subset O_{\delta_1}^-(a)\cup O_{\delta_2}^+(a)$. Но тогда из $x\in\overset{\circ}{O}_\delta(a)$ будет следовать $f(x)\in O_\varepsilon(b)$. ◂

Пример. Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

(от латинского signum - знак) определена на всей числовой оси. Покажем, что у нее нет предела при $x \to 0$.

Доказательство. ▸ Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$, а $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, то есть левый и правый пределы не равны, то есть $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. ◂

Предел монотонной функции

***Утверждение**. Если неубывающая на промежутке $(a;+\infty)$ функция $f(x)$ ограничена на нем, то у нее существует конечный предел при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Поскольку $f(x)$ ограничена на $(a;+\infty)$, у нее существует верхняя грань $\sup\limits_{(a;+\infty)} f(x) = A$ на этом множестве. Покажем, что

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A.$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани вытекает, что найдется точка $x > a$, в которой $A - \varepsilon < f(x_0) \le A.$ Из неубывания $f(x)$ вытекает, что для всех $x > x_0$ будет $A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A$, то есть $f(x) \in O_\varepsilon(A)$. Положим $\delta = x_0$ и получим

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \big(x \in O_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A) \big).$$

Существование предела доказано.

***Утверждение**. Если неубывающая на промежутке $(a;b)$ функция $f(x)$ ограничена на нем, то у нее существует конечный предел при $x \to b-0$.*

Доказательство. Поскольку $f(x)$ ограничена на $(a;b)$, у нее существует верхняя грань $\sup\limits_{(a;b)} f(x) = B$ на этом множестве. Покажем, что

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = B.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани вытекает, что найдется точка $x_0 > a$, в которой $B - \varepsilon < f(x_0) \le B.$ Из неубывания $f(x)$ вытекает, что для всех $x \in (x_0, b)$ будет $B - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le B$, то есть $f(x) \in O_\varepsilon(B)$. Положим $\delta = b - x_0$ и получим

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \big(b - \varepsilon < x < b \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(B) \big).$$

Существование предела доказано.

Докажите

***Утверждение**. Если неубывающая на промежутке $(a;b)$ функция $f(x)$ ограничена на нем, то у нее существует конечный предел при $x \to a+0$.*

Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для невозрастающих функций.

Односторонняя непрерывность

***Определение.** Пусть функция $f(x)$ определена на некотором полуинтервале $[a,b)$. Она называется непрерывной в точке a справа, если*

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Запишем это определение в терминах окрестностей

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\Big(\big(x\in O_\delta^+(a)\big)\Rightarrow\big(f(x)\in O_\varepsilon\big(f(a)\big)\big)\Big),$$

и в терминах неравенств

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ \Big(\big(a<x<a+\delta\big)\Rightarrow\big(\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon\big)\Big).$$

Аналогично определяется непрерывность в точке a слева.

Упражнение. Сформулируйте это определение.

Упражнение. Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в a слева и справа.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на интервале (a,b), а также непрерывна в точке a справа, а в точке b слева.*

Определение непрерывности по Гейне

Дадим определение непрерывности по Гейне. Здесь, в отличие от определения предела, можно отказаться от условия $x_n\neq a$.

Определение. *Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$ для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$*

Так же, как и в случае предела функции, определения непрерывности по Коши и по Гейне эквивалентны.

Упражнение. Докажите это утверждение.

Классификация точек разрыва.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки a. Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке a, если

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a).$$

В противном случае a будет точкой разрыва $f(x)$. Рассмотрим разные варианты нарушения этого условия.

1°. Точка a называется точкой ***устранимого разрыва***, если односторонние пределы существуют, совпадают, но не равны значению функции в точке a, или же $f(x)$ не определена в точке a.

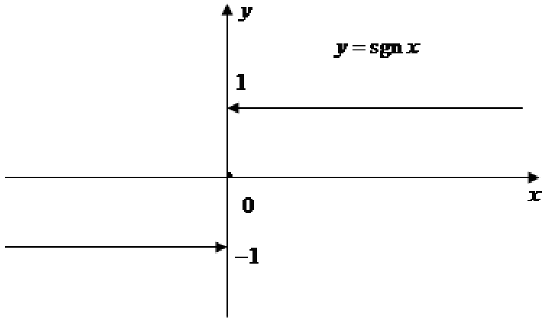
Пример 1. Функция $f(x)=\left|\operatorname{sgn}x\right|$ имеет устранимый разрыв в точке $x=0$, поскольку пределы слева и справа равны (единице), но не равны значению функции ф точке 0 (нулю).

Пример 2. Функция $f(x)=\operatorname{sgn}x^{-2}$ имеет устранимый разрыв в точке $x=0$, поскольку пределы слева и справа равны (единице), но сама функция в нуле не определена.

2°. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a ***скачок,*** если односторонние пределы $f(x)$ при $x\to a$ существуют, но не совпадают.

Разность $f(a+0)-f(a-0)$ называется *величиной скачка* в точке a или *скачком* функции в этой точке.

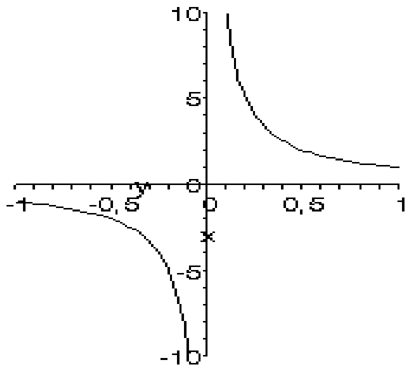
Пример 3. $f(x)=\operatorname{sgn} x$ при $x=0$ имеет скачок, равный 2.



Устранимый разрыв и скачок называются ***разрывами первого рода***.

3°. Точка a называется ***разрывом второго рода,*** если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ имеет разрыв второго рода при $x=0$ ($\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)=\pm\infty$).

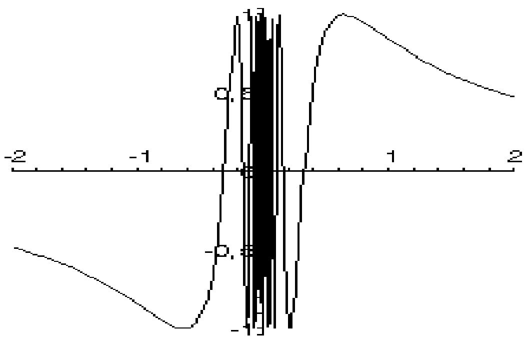


Пример 5. Функция $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ имеет разрыв второго рода при $x=0$, так

предела $f(x)$ при $x\to 0$ не существует. В самом деле, при $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}\to 0$ будет

выполнено $f(x_n)=\sin 2\pi n=0$, а при $x_n{}'=\dfrac{1}{2\pi n+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$ будет $f\left(x_n{}'\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$.

Это «график» этой функции. Близкие к нулю полуволны сливаются в «мазню».



Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши-Кантора)

Лемма (о вложенных отрезках). *Пусть* $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ *- последовательность вложенных друг в друга отрезков:*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \qquad (1)$$

И пусть длины этих отрезков стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0. \qquad (2)$$

Тогда пересечение этих отрезков непусто и состоит из одной точки c*:*

$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n],$$

Причем $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Доказательство. ►Из условия (1) следует, что последовательность $\{a_n\}$ неубывающая, а $\{b_n\}$ - невозрастающая. Кроме того, обе они являются ограниченными, что следует из неравенств $a_1 \le a_n < b_n \le b_1$. По теореме Вейерштрасса эти последовательности сходятся, то есть существуют пределы $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Из (2) следует, что

$$b - a = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

то есть $a = b = c$. Поскольку c является пределом монотонных последовательностей, то $a_n \le c \le b_n$, то есть $c \in [a_n, b_n]$ для всех n. Точка, принадлежащая всем отрезкам, единственна. В самом деле, допустим, есть еще точка $c' \in [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$, тогда $|c - c'| \le b_n - a_n$ для всех n, что может быть только при $|c - c'| = 0$.◄

Задача. Показать на примере, что аналогичное утверждение для интервалов (a_n, b_n) не справедливо.

Лемма Больцано-Вейерштрасса.

Лемма (Больцано-Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. ►Пусть $\{c_n\}$ - ограниченная последовательность, то есть существуют такие числа a и b, что при всех n будет $a \le c_n \le b$. Обозначим отрезок $[a, b]$ через $[a_1, b_1]$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. По крайней мере, одна из половинок содержит бесконечно много точек последовательности $\{c_n\}$, выберем ее, если бесконечно много точек содержат обе – возьмем любую. Выбранный отрезок обозначим через $[a_2, b_2]$. Его в свою очередь, тоже разделим пополам и выберем половинку, содержащую бесконечное подмножество элементов последовательности. Получи отрезок $[a_3, b_3]$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю. По лемме о вложенных отрезках существует единственная точка $c = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, при этом

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \qquad (3)$$

Построим теперь подпоследовательность $\{c_{n_k}\}$ последовательности $\{c_n\}$, сходящуюся к c. В качестве c_{n_1} возьмем произвольный элемент последовательности $\{c_n\}$,

например, c_1. Выберем теперь последовательно на каждом из отрезков $\left[a_k, b_k\right]$ $(k \ge 2)$ точку $c_{n_k} \in \left[a_k, b_k\right]$ так, чтобы выполнялось условие $n_k > n_{k-1}$. Это всегда можно сделать, так как наши отрезки содержат бесконечное число членов последовательности.
Полученная подпоследовательность $\left\{c_{n_k}\right\}$ сходится. Действительно, для каждого номера k имеем $a_k \le c_{n_k} \le b_k$, что вместе с (3) и теоремой о предельном переходе в двух неравенствах дает

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = c\,. ◄$$

Критерий Коши.

Определение. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если*

$$\lim_{n,m\to\infty}\left(a_n - a_m\right) = 0\,.$$

Последнее условие означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon):\ \forall n,m > N \ \left(\left|a_n - a_m\right| < \varepsilon\right).$$

Теорема (критерий Коши сходимости последовательности). *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. ►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ найдем номер N, после которого $\left|a_n - a\right| < \varepsilon_1$. Тогда для всех $n, m > N$ будет справедливо

$$\left|a_n - a_m\right| = \left|a_n - a + a - a_m\right| \le \left|a_n - a\right| + \left|a - a_m\right| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon\,.$$

Таким образом, мы проверили, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Пусть теперь $\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность. Она ограничена. В самом деле, для $\varepsilon = 1$ найдется номер N такой, что $\left|a_n - a_m\right| < 1$ при $n, m > N$. Тогда все члены последовательности с номерами $n > N$ будут лежать в $O_1\left(a_{N+1}\right)$, а вне этой окрестности, соответственно, будет находиться не более, чем конечное число членов последовательности, что означает ее ограниченность
$\left(\left|a_n\right| \le C = \max\left\{\left|a_{N+1} - 1\right|, \left|a_{N+1} + 1\right|, \left|a_1\right|, \ldots, \left|a_N\right|\right\}\right)$.

По лемме Больцано-Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$, тогда $a_{n_k} = a + \alpha_k$, где α_k - бесконечно малая последовательность.

Из фундаментальности последовательности $\{a_n\}$ и того очевидного факта, что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, следует $\lim\limits_{k\to\infty}\left(a_{n_k} - a_k\right) = 0$. То есть $a_{n_k} - a_k = \beta_k$, где β_k - бесконечно малая. Следовательно $a_k = a_{n_k} - \beta_k = a + \alpha_k - \beta_k = a + \gamma_k$ (γ_k - бесконечно малая последовательность).

Сходимость последовательности $\{a_k\}$ доказана. ◄

Пример. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

Поскольку для любого $n\in\mathbf{N}$ $\left|a_{2n}-a_n\right|=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, то в силу критерия Коши эта последовательность не имеет предела.

Теорема Коши о промежуточном значении

Теорема (о нуле непрерывной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и принимает на концах отрезка значения разных знаков* $\left(f(a)\cdot f(b)<0\right)$.

Тогда существует точка $c\in(a,b)$, *в которой* $f(c)=0$.

Доказательство. ►Предположим для определенности, что $f(a)<0, f(b)>0$. Построим систему стягивающихся отрезков $\left\{[a_n,b_n]\right\}$. Положим

$$a_0=a,\ b_0=b.$$

Пусть c_0 - середина отрезка $[a_0,b_0]$. Если $f(c_0)=0$, то положим $c=c_0$ - процесс завершен. Если нет, то в качестве $[a_1,b_1]$ выберем ту половину отрезка, на которой функция меняет знак:

$$\text{если } f(c_0)>0, \text{ то } a_1=a_0,\ b_1=c_0;$$

$$\text{если } f(c_0)<0, \text{ то } a_1=c_0,\ b_1=b_0.$$

Аналогично определяем отрезок $[a_2,b_2]$ по $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$:

$$\text{если } f(c_1)>0, \text{ то } a_2=a_1,\ b_2=c_1;$$

$$\text{если } f(c_1)<0, \text{ то } a_2=c_1,\ b_2=b_1,$$

и так далее. Если процесс оборвется на некотором шаге, то мы сразу определим нужную точку c, если нет, то мы получим систему отрезков

$$[a_0,b_0]\subset[a_1,b_1]\subset\ldots;\ \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

По лемме о вложенных отрезках существует точка c такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Из непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$.

Переходя к пределу в неравенствах $\begin{cases}f(a_n)<0\\ f(b_n)>0\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}$, получим $\begin{cases}f(c)\le 0\\ f(c)\ge 0\end{cases}$,

то есть $f(c)=0$.

Случай $f(a)>0,\ f(b)<0$ разбирается аналогично.◄

Теорема (о промежуточном значении). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(a)\neq f(b)$.

Тогда каждое число d, *принадлежащее интервалу с концами в точках* $f(a)$ *и* $f(b)$ *является значением функции хотя бы в одной точке* $c\in[a,b]$, *то есть* $f(c)=d$.

Доказательство. ►Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-d$. Очевидно, что $g(a)\cdot g(b)<0$ и $g(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда по предыдущей теореме существует точка $c\in[a,b]$: $g(c)=0$, откуда получаем $f(c)=d$.◄

Замечание. Требование непрерывности функции в последних теоремах существенно.

Примером, иллюстрирующим этот факт, может служить функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$, определенная на отрезке $[-1;1]$ и не принимающая значения $\frac{1}{2}\in(-1,1)=(\operatorname{sgn}(-1),\operatorname{sgn}(1))$.

Теорема о непрерывности обратной функции

Теорема. *Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда обратная к $f(x)$ функция $x=g(y)$ будет непрерывной на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. ►Для определенности предположим, что $y=f(x)$ возрастает на $[a,b]$. Положим $c=f(a),\ d=f(b)$. Обратная функция $x=g(y)$ также будет возрастать на своей области определения $Y=f([a,b])\subseteq[c,d]$. По теореме Коши о промежуточном значении для любого $y\in[c,d]$ существует такое $x\in[a,b]$, что $f(x)=y$, то есть функция $x=g(y)$ определена на всем отрезке $[c,d]$.

Рассмотрим точку $y_0\in(c,d)$. Очевидно, что $x_0=g(y_0)\in(a,b)$. Покажем, что $x=g(y)$ непрерывна в y_0.

Рассмотрим произвольное положительное ε. Будем считать, что оно достаточно мало, чтобы $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$. Положим $y_1=f(x_0-\varepsilon),\ y_2=f(x_0+\varepsilon)$. Из возрастания функции $f(x)$ следует, что $y_1<y_0<y_2$. Возьмем $\delta=\min\{y_2-y_0,y_0-y_1\}$. Тогда для любой точки $y\in O_\delta(y_0)$ в силу возрастания функции $g(y)$ имеем $x_0-\varepsilon=g(y_1)<g(y)<g(y_2)=x_0+\varepsilon$, или $g(y)\in O_\varepsilon(x_0)$, что означает непрерывность $g(y)$ в y_0.

Аналогично доказывается односторонняя непрерывность функции g в точках c и d, а также случай монотонностью убывающей функции f.◄

Следствия из теоремы о существовании и непрерывности обратной функции.

Следствие 1. *Пусть функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (a,b).*

Тогда обратная к $f(x)$ функция $x=g(y)$ будет непрерывной на интервале $(f(a+0),f(b-0))$ (соответственно на интервале $(f(b-0),f(a+0))$).

Замечание. Значения a или b в предыдущем утверждении могут быть бесконечными.

Упражнение. Докажите это следствие, а также сформулируйте и докажите соответствующие следствия для полуинтервалов.

Существование и непрерывность обратных тригонометрических функций.

Функция $y=\sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $X=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Множество ее значений на X - отрезок $Y=[-1;1]$. Следовательно, обратная функция с областью определения Y и множеством значений X будет непрерывной на Y.

Аналогично можно доказать непрерывность $\arccos y$, $arctgx$ и $arcctgx$.

Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$*, ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. ►Предположим, что это не так, и непрерывная на $[a,b]$ функция $y=f(x)$ не ограничена. Тогда для любого натурального n существует точка $x_n\in[a,b]$, такая, что $|f(x_n)|\geq n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ $(x_n\in[a,b])$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c\in[a,b], \tag{1}$$

$$\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k > k\,. \tag{2}$$

Из непрерывности функции $f(x)$ и (1) следует, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=f(c)<\infty$, а из (2) что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=\infty$.

Полученное противоречие доказывает теорему. ◄

Замечание. Отрезок в условии этой теоремы нельзя заменить интервалом. Так функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,1)$, но не ограничена на нем.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$*, достигает на нем нижней и верхней грани своих значений, а именно, существуют точки* $c_1,c_2\in[a,b]$ *такие, что*

$$f(c_1)=\inf_{x\in[a,b]} f(x),\quad f(c_2)=\sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство. ►Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ будет ограниченной на нем. Положим

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Если $f(x)\neq M$ на $[a,b]$, то функция $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ будет непрерывной на отрезке и, следовательно, ограниченной на нем, то есть

$$\exists C:\forall x\in[a,b]\Rightarrow \frac{1}{M-f(x)}<C. \tag{3}$$

Из (3) вытекает

$$\forall x\in[a,b]\Rightarrow M-f(x)>\frac{1}{C}. \tag{4}$$

Однако по определению точной верхней грани для $\varepsilon=\dfrac{1}{C}$ должна найтись точка $x_0\in[a,b]$, в которой $f(x_0)>M-\varepsilon$, то есть $M-f(x_0)<\varepsilon=\dfrac{1}{C}$, что противоречит (4).

Существование точки, в которой принимается наименьшее значение, доказывается аналогично. ◄

Замечание. В этой теореме также нельзя заменить отрезок интервалом. Например, функция $y=x$ непрерывна на интервале (a,b), но не достигает на нем нижней и верхней границ своих значений.

Равномерная непрерывность

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *задана на промежутке* X. *Она называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всех* $x_1, x_2 \in X$ *будет справедливо*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon .$$

Запишем это определение при помощи кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x_1, x_2 \in X\ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right).$$

Пример 1. Функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. ►Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\right| < \varepsilon \overset{|x_1|,|x_2|<1}{\Leftarrow} 2|x_1 - x_2| < \varepsilon \Leftarrow |x_1 - x_2| < \delta ,$$

если $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.◄

Пример 2. Функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна на всей оси.

Доказательство. ►Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, имеем

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| < \varepsilon \Leftarrow 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| < \varepsilon \Leftarrow |x_1 - x_2| < \delta ,$$

если $\delta = \varepsilon$.◄

Пример 3. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0,1)$.

Доказательство. Запишем сначала при помощи кванторов отрицание равномерной непрерывности функции на промежутке $\langle a,b \rangle$:

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle\ \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge\ |f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon\right).$$

В нашем случае последнее утверждение выглядит следующим образом:

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in (0,1)\ \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge\ \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| \ge \varepsilon\right).$$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим произвольное $\delta \in (0,1)$. Пусть $x_1 = \delta$, а $x_2 = \dfrac{\delta}{2}$. Очевидно, что $|x_1 - x_2| < \delta$, но при этом

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{1}{\delta} > \varepsilon .$$

Пример 4. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей оси.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим произвольное $\delta > 0$. Положим $x_1 = \dfrac{1}{\delta}$, а $x_2 = x_1 + \dfrac{\delta}{2}$. Имеем $|x_1 - x_2| < \delta$, но при этом

$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = \left|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\right| = \frac{\delta}{2}\cdot\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) > 1.$$

Упражнение. Проверьте, что функция $y = kx + b$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

Теорема (Кантора). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. ►Допустим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a,b]$, то есть

$$\exists\varepsilon>0:\ \forall\delta>0\ \exists x_1,x_2\in[a,b]\ \left(|x_1-x_2|<\delta\wedge\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\varepsilon\right).$$

То есть для каждого натурального n на отрезке $[a,b]$ найдутся точки x_n и x'_n такие, что

$$|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}, \qquad (1)$$

но

$$\left|f(x_n)-f(x'_n)\right|\geq\varepsilon. \qquad (2)$$

По лемме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $c=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$.

Из (1) следует $c=\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}$, а из непрерывности функции $f(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_{n_k}\right)-f\left(x'_{n_k}\right)\right|=\left|f(c)-f(c)\right|=0.$$

Последнее равенство противоречит (2). ◄

Замечание. Отрезок в формулировке теоремы Кантора нельзя заменить интервалом, что видно из рассмотренного нами примера 3.