

**Билет 5: Дайте определение монотонных функций и последовательностей. Приведите примеры.**

**Монотонные функции.**

**Определение.** Функция  $y = f(x)$ , определенная на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , называется  
возрастающей на  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X \left( (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2)) \right)$ ,  
неубывающей на  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X \left( (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)) \right)$ ,  
невозрастающей на  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X \left( (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2)) \right)$ ,  
убывающей на  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X \left( (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2)) \right)$ .

Все эти функции называются **монотонными** на  $X$ .

Примеры. На своей области определения  $(\mathbb{R})$  функция  $y = x^3$  - возрастает,  $y = e^{-x}$  - убывает, функция  $y = \operatorname{sgn} x$  - неубывающая, а функция  $y = x^2 \cdot (1 - \operatorname{sgn} x)$  - невозрастающая.

Для последовательностей, с учетом свойств их области определения и принятой формы обозначений, сформулированные выше определения выглядят следующим образом.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется  
возрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} (a_{n+1} > a_n)$ ,  
неубывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} (a_{n+1} \geq a_n)$ ,  
невозрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} (a_{n+1} \leq a_n)$ ,  
убывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} (a_{n+1} < a_n)$ .

Такие последовательности называются монотонными.

Пример. Исследуем последовательность  $\{a_n\} = \left\{ \frac{n-1}{2n+3} \right\}$  на монотонность:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{2n+5} - \frac{n-1}{2n+3} = \frac{5}{(2n+5)(2n+3)} > 0.$$

Следовательно, последовательность монотонно возрастает. Отсюда сразу вытекает, что она ограничена снизу  $\forall n \in \mathbb{N} (a_n \geq a_1)$ . Покажем, что она ограничена сверху:

$$\frac{n-1}{2n+3} \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

то есть  $C = \frac{1}{2}$  - верхняя граница значений последовательности (можно показать, что она также является и верхней гранью ее значений).

Билет 6 смотри в тетради!