

Билет 15: Дайте определение функции, непрерывной в точке, непрерывной на интервале. Докажите, что функция $y = \cos x$ непрерывна на всей оси.

Непрерывность

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a . Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в a , если существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow a$, равный $f(a)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Запишем это определение с кванторами:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall x (x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(a))),$$

или в неравенствах:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall x (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in (a, b)$, то говорят, что она непрерывна на этом интервале.

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a , то a называется точкой разрыва $f(x)$ и говорят, что $f(x)$ разрывна в a .

Задача. Докажите, что функция $y = \sin x$ непрерывна на всей оси.

Утверждение. Основные элементарные функции $x^\alpha, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \dots$ непрерывны на своей области определения.
(без доказательства)