Moscow Institute of Electronics and Mathematics
12 Malaya Paveletskaya Street
Moscow
Russian Federation

Типы простейших ОДУ

Types of differential equations

Pavel Borisov

2014

1 Уравнения первого порядка

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

1.1.1 Вид

$$\boxed{M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0} \qquad \boxed{y' = f(x)g(y)} \tag{1.1.1}$$

1.1.2 Пример

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

1.1.3 Решение

1. приводим к виду $M(x)N(y)dx = P(x)Q(y)dy$
2. в левой части делим на $N(y)$, в левой на $P(x)$, разделяем x и y между разными частями уравнения; учитываем решения, упущенные при делении
   Получаем вид $\widetilde{Q}(x)dx = \widetilde{P}(y)dy$
3. интегрируем обе части уравнения
4. делаем вид y=f(x), если необходимо (выражение легко упрощается)
5. PROFIT!

1.2 Однородные уравнения

1.2.1 Вид

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad \boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{1.2.1}$$

1.2.2 Пример

$$xdy = (x+y)dx$$

1.2.3 Решение

1. Проверка на однородность:
   $$\begin{cases} M(kx,ky) \equiv k^n M(x,y) & n \in \mathbb{R} \\ N(kx,ky) \equiv k^n M(x,y) & n \text{ is the same as above} \end{cases}$$
2. Приводим к виду (**??**)
3. Полагаем
   $$y = tx \qquad dy = xdt + tdx$$
4. Решаем уравнение формы (**??**)
5. возвращаемся к переменному y
6. PROFIT!

1.3 Уравнения вида y' = f(ax+by+c)

1.3.1 Вид

$$y' = f(ax + by + c) \tag{1.3.1}$$

1.3.2 Решение

Делаем замену $z = ax + by + c$, тогда $z' = a + by'$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными вида (??).

1.3.3 Пример

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{x + 2y} \\
x + 2y &= z && ax + by + c = z \\
1 + 2y' &= z' \\
\frac{z' - 1}{2} &= \frac{1}{z} && \cdot 2z \\
z'z - z &= 2 \\
z'z &= 2 + z \\
\frac{dz}{dz} &= \frac{2 + z}{z} \\
\frac{z}{2 + z} dz &= dx
\end{aligned}$$

далее решаем (??) и возвращаемся к x и y.

1.4 Линейные уравнения первого порядка

1.4.1 Вид

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)} \tag{1.4.1}$$

1.4.2 Алгоритм решения

1. Решаем $y' + a(x)y = 0$ (соответствующее линейное однородное уравнение по форме (??) (с разделяющимися переменными. В результате получаем $y = C \cdot z(x)$.
2. Применяем метод вариации постоянной:
   a) $C = C(x) \Rightarrow y = C(x) \cdot z(x)$.
   b) Выражаем y' через $C'(x)$ и подставляем в исходное уравнение
   c) Записываем ответ в удобном виде с зависимой переменной y (или x в некоторых случаях).

1.4.3 Пример решения

$$(xy + e^x)dx - xdy = 0 \qquad \text{перепишем в виде (??)}$$
$$(xy + e^x) - x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad x \equiv 0 \text{ является решением } (dx_o = 0; x_o = 0 = const)$$
$$x(y - y') + e^x = 0 \qquad b(x) = e^x \tag{1.4.2}$$
$$x(y - y') = 0$$
$$xy - xy' = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = y$$
$$\frac{dy}{y} = dx$$
$$x = \ln|y| + C_0 \qquad C_0 \in \mathbb{R} \tag{1.4.3}$$
$$e^x = |y| \cdot C_1 \qquad C_1 = e^{C_0}$$
$$e^x = y \cdot C_2 \qquad C_2 = \pm C_1$$
$$y = C_3 e^x \qquad C_3 = \frac{1}{e^C 2} \tag{1.4.4}$$

Применим метод вариации постоянной.

$$y' = C_3'(x)e^x + C_3(x)e^x \qquad \text{выразили } y' \text{ через } C_3'(x)$$

$$x(C_3'(x) + C_3(x) - C_3(x))e^x = e^x \qquad \text{подставили } C_3(x) \text{ и } C_3'(x) \text{ в (??)} \tag{1.4.5}$$
$$xC_3'(x) = 1 \qquad C_3'(x) = \frac{1}{x}$$
$$C_3(x) = \ln(x) + C \tag{1.4.6}$$

Ответ: $y = e^x(\ln|x| + C); x \equiv 0$ (подставили (?? в ??))

1.5 Уравнение Бернулли

1.5.1 Вид

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^\alpha; \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq 0} \tag{1.5.1}$$

1.5.2 Решение

1. разделить на y^α
2. проанализировать существование решения $y = 0$
3. сделать замену $\frac{1}{y^{n-\alpha}} = z \Rightarrow z' = (\alpha - 1)\frac{y'}{y^\alpha}$
4. Решить уравнение вида (??)
5. PROFIT!!!

1.6 Уравнение в полных дифференциалах

1.6.1 Вид

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0} \tag{1.6.1}$$

1.6.2 Алгоритм решения

Хотим найти функцию u, такую, что в левой части уравнения записан её дифференциал, т.е. уравнение имеет вид:

$$du(x, y) = 0$$

Тогда его интеграл записывается так:

$$u(x, y) = C$$

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= P(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= Q(x, y) \end{cases} u(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) \tag{1.6.2}$$

Получаем $C'(y)$ путём вычисления частной производной полученного выражения: $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и выражаем через имеющееся выражение $Q(x, y)$ (??).

1.6.3 Пример

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$$

$$\begin{cases} P(x, y) = \dfrac{3x^2 + y^2}{y^2} \\ Q(x, y) = -\dfrac{2x^3 + 5y}{y^3} \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{6x^2}{y^3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{3x^2}{y^2} + 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2x^3}{y^3} - \dfrac{5}{y^2} \end{cases}$$

$$u(x, y) = \int \left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right) dx + C(y) = \frac{x^3}{y^2} + x + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^3}{y^3} + C'(y) = -\frac{2x^3}{y^3} - \frac{5}{y^2}$$

$$C'(y) = -\frac{5}{y^2}$$

$$C(y) = \frac{5}{y} + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^3}{y^2} + x + \frac{5}{y} + C_1 = C_2$$

Ответ: $\dfrac{x^3}{y^2} + x + \dfrac{5}{y} = C_3$.

1.7 Уравнение Клеро

1.7.1 Вид и решение

$$y = xy' + \varphi(y') \tag{1.7.1}$$

Пусть $y'_x = \rho$

$$y = x\rho + \varphi(\rho)$$
$$\rho = x\rho' + \rho + \varphi'(\rho)\rho'$$

$$\begin{cases} y = x\rho + \varphi(\rho) \\ \left[\begin{array}{l} \rho' = 0 \\ x + \varphi(\rho) = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \rho = c = const \\ y = cx + \varphi(c) \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\varphi'(\rho) \\ y = x\rho + \varphi(\rho) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = cx + \varphi(c) \\ \begin{cases} x = \varphi'(\rho) \\ y = -\varphi'(\rho) \cdot \rho + \varphi(\rho) \end{cases} \end{array}\right.$$

1.7.2 Пример

$$y = xy' - (y')^2 \tag{1.7.2}$$
$$y' = \rho$$
$$y = \rho x - \rho^2 \tag{1.7.3}$$
$$\rho = x\rho' + \rho - 2\rho \cdot \rho'$$
$$x\rho' - 2\rho\rho' = 0$$
$$\rho'(x - 2\rho) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \rho' = 0 \\ x - 2\rho = 0 \end{array}\right. \\ y = \rho x - \rho^2 (\mathbf{??}) \end{cases}$$

1.

$$\rho' = 0$$
$$p = C \qquad\qquad y = Cx - C^2 \tag{1.7.4}$$

2.

$$\begin{cases} x = 2\rho \\ y = \rho x - \rho^2 = \rho^2 \end{cases} \qquad\qquad y = \frac{x^2}{4}$$

Ответ:

$$\boxed{y = Cx - C^2}$$
$$\boxed{y = \frac{x^2}{4}}$$

1.8 Уравнение Лагранжа

1.8.1 Вид и решение

$$y = x\psi(\rho) + \varphi(\rho)\psi(y') \neq y' \tag{1.8.1}$$

Пусть $y'_x = \rho$:

$$y = x\psi(\rho) + \varphi(\rho)$$
$$\rho = x\psi'(\rho)\rho' + \psi(\rho) + \varphi'(\rho)\rho'$$
$$\rho - \psi(\rho) = \frac{d\rho}{dx}(x\psi'(\rho) + \varphi'(\rho)) \qquad \cdot \frac{dx}{d\rho}$$
$$\frac{dx}{d\rho}(\rho - \psi(\rho)) - x\psi'(\rho) = \varphi'(\rho) \qquad \text{кроме того, } \rho = const \text{ может являться решением, если } d\rho = 0$$

Далее решается линейное однородное уравнение (**??**) (x - функция, ρ - аргумент).

1.8.2 Пример

$$y + xy' = 4\sqrt{y'}$$
$$y = -xy' + 4\sqrt{y'}$$

Пусть $y' = \rho$

$$y = -x\rho + 4\sqrt{\rho}$$
$$\rho = -x\rho' - \rho + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \rho'$$
$$2\rho = \rho'(-x + \frac{2}{\rho})$$
$$2\rho\frac{dx}{d\rho} + x = \frac{2}{\rho} \tag{1.8.2}$$

Решаем линейное однородное уравнение вида (**??**).

$$a(\rho) = 2\rho \qquad b(\rho) = \frac{2}{\rho}$$

$$2\rho dx d\rho = -x$$
$$2\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\frac{d\rho}{\rho}$$
$$\ln|x| = \ln\frac{1}{\sqrt{|\rho|}} + \ln C_1, C_1 > 0$$
$$|x| = \frac{C_1}{\sqrt{|\rho|}}$$
$$x = \frac{C_2}{\sqrt{|\rho|}}, C_2 = \pm C_1 \qquad \text{опускаем модульные скобки, т.к. } y' \geqslant 0$$
$$x = \frac{C_2(\rho)}{\sqrt{\rho}} \tag{1.8.3}$$

Подставляем (??) в (??):

$$\begin{aligned}
&2\rho\left(\frac{C_2'(\rho)}{\sqrt{\rho}}-\frac{1}{2}\frac{C_2(\rho)}{\rho^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{C_2(\rho)}{\sqrt{\rho}}=\frac{2}{\rho}\\
&C_2'(\rho)=\frac{1}{\rho}\\
&C_2(\rho)=\ln|p|+C_3
\end{aligned} \tag{1.8.4}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\ln|p|+C_3}{\sqrt{\rho}}\\ y=-x\rho+4\sqrt{\rho}\end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{\ln|p|+C_3}{\sqrt{\rho}}\\ y=-\dfrac{\ln|p|+C_3}{\sqrt{\rho}}\rho+4\sqrt{\rho}\\ y\equiv 0\end{cases}$$

1.9 Уравнения вида x =f(y')

1.9.1 Вид и решение

$$x=f(y') \tag{1.9.1}$$

Пусть $y'=\rho$

$$\begin{aligned}
x&=f(\rho)\\
\frac{dy}{dx}&=\rho\\
dy=\rho dx&=\rho\cdot f'(\rho)d\rho\\
y&=\int\rho f'(\rho)d\rho+C
\end{aligned}$$

1.9.2 Пример

$$\begin{aligned}
&x=(y')^3+y'\\
&y'=\rho\\
&x=\rho^3+\rho\\
&\frac{dy}{dx}=\rho\\
&dy=\rho dx=\rho d(\rho^3+\rho)=\rho(3\rho^2+1)d\rho\\
&y=\int(3\rho^3+\rho)d\rho=\frac{3\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2}+C
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x=\rho^3+\rho\\ y=\frac{3\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2}+C\quad C\in\mathbb{R}\end{cases}$$

1.10 Уравнения вида y = f(y')

1.10.1 Вид и решение

$$y = f(y') \qquad y' = \rho \qquad y = f(\rho)$$

$$\frac{dy}{dx} = \rho$$

$$\rho = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = f(0)$$

$$dx = \frac{dy}{\rho} = \frac{df(\rho)}{\rho} = \frac{f'(\rho)d\rho}{\rho}$$

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(\rho)}{\rho} d\rho + C \\ y = f(\rho) \\ y = f(0) \end{cases}$$

2 Понижение порядка уравнений

Цель понижения порядка уравнений - сведение уравнений к ОДУ первого порядка

2.1 В левую часть уравнения явно не входит y

2.1.1 Вид и решение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} = 0 \tag{2.1.1}$$

Делаем замену: $y^{(k)} = z \Rightarrow y^{(k+1)} = z'$

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{2.1.2}$$

Пусть $y' = z, y'' = z'$. Пример:

$$\begin{aligned}
&x^2y'' = (y')^2 && z = y' \\
&x^2z' = z^2 && z = 0 \\
&x^2\frac{dz}{dx} = z^2 \\
&\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \\
&\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1 \\
&z = \frac{1}{1/x + C_1}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} z = \frac{x}{C_1x+1} \\ z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' = \frac{x}{C_1x+1} \\ y' = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \int\left(\frac{x}{C_1x+1}\right)dx \\ y = C \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \int\frac{x}{C_1x+1}dx = \int\frac{1}{C_1}dx - \int\frac{\frac{1}{C_1}}{C_1x+1}dx = \frac{x}{C_1} - \ln|C_1x+1| \\ C_1 = 0 \Rightarrow z = x \Rightarrow y' = x \Rightarrow y = x^2 + C_2 \end{array}\right.$$

2.2 В левую часть явно не входит x

2.2.1 Вид и пример

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{2.2.1}$$

Пусть $y'_x = \rho(y)$

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(\rho(y)) = \frac{d}{dy}\rho(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\rho}{dy}\rho$$

$$F(y, \rho, \frac{d\rho}{dy}\rho) = 0$$

$$y'' = 2yy'$$

$$y'_x = \rho(y)$$

$$y''_{xx} = \frac{d\rho}{dy}\rho$$

$$\frac{d\rho}{dy}\rho(y) = 2y\rho(y)$$

$$\rho = 0 \Rightarrow y = C$$

$$d\rho = 2y\,dy$$

$$\rho = y^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{y^2 + C_1} = dx$$

$$x + C_2 = \left[\begin{array}{ll} -\frac{1}{y} + C_3 & C_1 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} & C_1 > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln\left|\frac{y-\sqrt{-C_1}}{y+\sqrt{-C_1}}\right| & C_1 < 0 \end{array}\right.$$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} y = C & \\ y = -\frac{1}{x+C_2} & C_1 = 0 \\ x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} & C_2 > 0 \\ x + C_2 = \frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln\left|\frac{y-\sqrt{C_1}}{y+\sqrt{C_1}}\right| & C_2 < 0 \end{array}\right.$$

2.3 Однородные по y и его производным уравнения

2.3.1 Вид

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2.3.1}$$

где $F(x, ky, ky', ky'') = k^l F(x, y, y', y'')$

Сначала следует рассмотреть существование решений $y = const : dy = 0$. Пусть $\frac{y'}{y} = u$

$$y' = uy$$

$$y'' = u'y + uy' = u'y + u^2 y = y$$

$$F(x, y, yu, y(u' + u^2)) = 0$$

$$y^l F(x, l, u, u' + u^2) = 0$$

2.3.2 Пример

$$xyy'' - xy'^2 = yy'$$

Пусть $\dfrac{y'}{y} = u$:

$$\frac{y'}{y} = u, y \neq 0$$

$$y' = uy \qquad\qquad y'' = (u' + u^2)y'$$

$$xy^2(u' + u^2) - xy^2u^2 = y^2u$$

$$x(u' + u^2) - xu^2 = u$$

$$xu' + xu^2 - xu^2 = u$$

$$xu' = u$$

$$u = Cx + C_1$$

$$\frac{y'}{y} = Cx \qquad\qquad \frac{dy}{y} = Cxdx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \pm C_2 e^{\frac{Cx^2}{2}} \quad C_2 = e^{C_1} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $\boxed{y = C_3 \cdot e^{\frac{Cx^2}{2}}, C_3 \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}}$

2.4 Уравнение, левая часть которого представляет собой полный дифференциал

2.4.1 Вид

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2.4.1}$$

где $F(x, y, y', y'') = \dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y')$

$$\Phi(x, y, y') = C$$

2.4.2 Пример

$$xy'' - y' = x^2yy'$$

$$\frac{d}{dx}y^2 = 2yy'$$

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{1}{2}\left(y^2\right)'$$

$$\frac{y'}{x} = \frac{1}{2}y^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{\frac{1}{2}y^2 + C_1} = xdx \qquad\qquad 2\int \frac{2y}{y^2 + 2C_1} = \int xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-2C_1}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{x^2}{2} + C = \frac{2}{C_2}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_2} & C_1 > 0, C_2 = \sqrt{2C_1} \\ \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{C_2}\ln\left|\frac{y - C_2}{y + C_2}\right| & C_1 < 0, C_2 = \sqrt{-2C_1} \end{array}\right.$$

3 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1 Однородные (с правой частью = 0)

3.1.1 Вид

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0 \tag{3.1.1}$$

(??) в дальнейшем используется как ссылка на левую часть данного выражения.

3.1.2 Решение

1. Составить характеристическое уравнение вида $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n -$ $const \in \mathbb{R}$ и найти его корни и кратность каждого корня.
2. Общим решение будет сумма из слагаемых
   - $C_je^{\lambda_i x}$ для каждого j-го простого вещественного корня уравнения
   - $(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda_i x}$ для каждого i-го вещественного корня уравнения с кратностью k.
   - $C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x$ для каждой пары простых комплексных корней уравнения вида $\alpha \pm \beta i$
   - $P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\alpha x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ для каждой пары комплексных корней кратности k вида $\alpha \pm \beta i$ с многочленами как в (??).

3.2 Неоднородные тип 1

3.2.1 Вид

$$(??) = (b_o + b_1x + \ldots + b_mx^m) \cdot e^{\alpha x} \tag{3.2.1}$$

3.2.2 Решение

1. Для левой части уравнения, приравненной к 0, выполнить (??) (найти общее решение)
2. Для правой части уравнения найти общий вид многочлена $y_1 = x^sQ_m(x)e^{\Upsilon x}$ (частное решение неоднородного уравнения), где:
   - Υ - коэффициент перед x в степени экспоненты в данной правой части (или 0, если нет экспоненты).
   - s - кратность корня Υ характеристического уравнения, полученного на шаге (??) (или 0, если такого корня нет)
   - m - Степень многочлена Q, совпадающая со степенью многочлена перед e в данной правой части
   - $Q(x)$ - многочлен в общем виде $(a_0 + a_1^x + \ldots)$
3. Подставить многочлен из предыдущего шага в левую часть дифференциального уравнения (??), предвадительно найдя необходимые производные.
4. Приравнять коэффициенты при степенях многочленов в левой и правой части и найти коэффициенты многочлена частного решения,
5. Сложить общее решение с полученным на шаге ?? частным решением

3.3 Неоднородные тип 2

3.3.1 Вид

$$(\mathbf{??}) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x) \tag{3.3.1}$$

3.3.2 Решение

Аналогично (**??**), но многочлен частного решения имеет вид: