3. Tasa de cambio promedio

Como ya hemos mencionado, la pregunta fundamental que podemos hacer una vez sepamos que $y = f(x)$, es ¿cómo cambia y cuando x cambia?. La forma en que el cálculo responde a esta pregunta de manera cuantitativa es en términos de **la tasa, o razón, de cambio de *y* respecto a *x***. Hay dos tipos de tasa de cambio: la tasa de cambio promedio y la instantánea. La tasa de cambio instantánea es precisamente **la derivada de la función**, que es el objeto central de este curso y veremos más adelante. Por ahora vamos a introducir el concepto de **tasa de cambio promedio**.

Para motivar la definición, consideremos la carrera con la que Usain Bolt rompió el récord mundial de los 100m planos en Beijing en el año 2008. Sea t el tiempo en segundos desde el disparo que inicia la carrera, y $B(t)$ la distancia recorrida por Usain. La siguiente tabla muestra los tiempos marcados a distancias espaciadas 10m.

$x_1 = 0$

$x_2 = 60$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6.32 - 0}{60 - 0}$

t	0	1.85	2.87	3.78	4.65	5.5	6.32	7.14	7.96	8.79	9.69
B	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

$y_1 = 0$

$y_2 = 6.32$

La velocidad de un objeto se calcula como: (distancia recorrida)/(tiempo transcurrido). Este cálculo para los primeros diez segundos da una velocidad de $10/1.85 = 5.4$ m/s. Pero esta no es la velocidad en los instantes $t = 0$ o $t = 10$, sino la **velocidad promedio** durante los primeros 10 segundos. Entre cada par de registros podemos calcular la velocidad promedio como

$\frac{50-40}{5.5-4.65} = \frac{10}{0.85}$

$$\begin{array}{c}\text{velocidad promedio}\\ \text{entre } t_2 \text{ y } t_1\end{array} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{B(t_2)-B(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

La letra griega mayúscula Δ, "delta", se usa en cálculo para denotar el "cambio de". Por ejemplo, en toda la carrera, su velocidad promedio fue $100/9.69 = 10.31$ m/s. La siguiente tabla muestra los valores de Δt, ΔB y las velocidades promedio V de Usain Bolt en m/s entre intervalos sucesivos de 10m.

$[5 - 4.65]x$

Δt	1.85	1.02	0.91	0.87	0.85	0.82	0.82	0.82	0.83	0.9
ΔB	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
V	5.405	9.804	10.99	11.49	11.76	12.2	12.2	12.2	12.05	11.11

La velocidad de un objeto es una tasa (o razón) de cambio porque compara, mediante la razón $\Delta B/\Delta t$, los cambios ΔB y Δt de dos variables. Este concepto se extiende a cualquier función:

Result $+40 =$

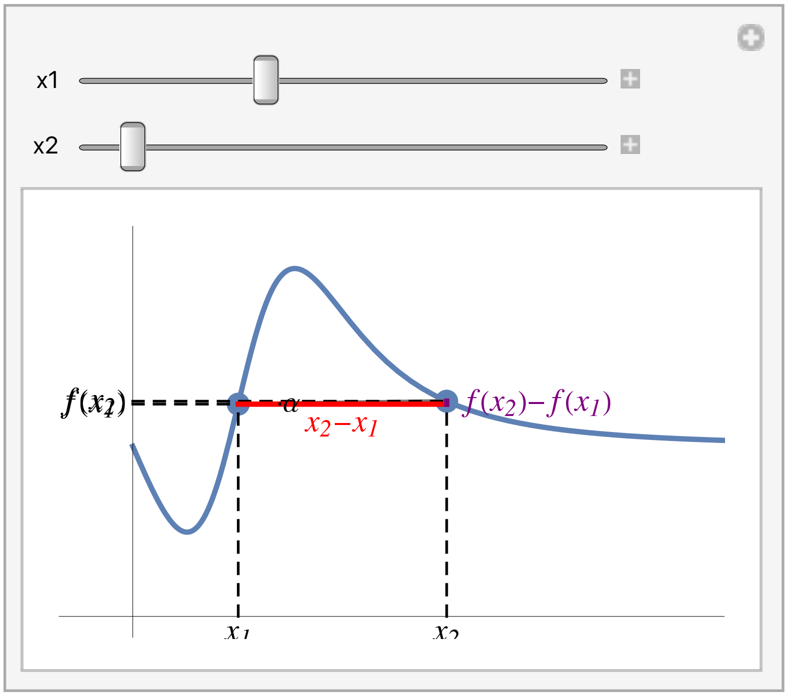
Definición 3.1. Tasa de cambio promedio. Consideremos la función $f(x)$ y dos valores $x_1 < x_2$ de la variable independiente tales que $[x_1, x_2] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Definimos:

- El cambio en la variable independiente es $\Delta x = x_2 - x_1$
- El cambio en la variable dependiente es $\Delta f(x_1, x_2) = f(x_2) - f(x_1)$

- La **tasa, o razón, de cambio promedio** de f entre x_1 y x_2 es

$$\frac{\Delta f(x_1, x_2)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La tasa de cambio promedio de una función tiene muchas interpretaciones dependiendo del contexto. Pero en general, siempre la podemos interpretar geométricamente. Consideremos el siguiente dibujo



El cambio en f es la longitud morada, mientras que el cambio en x es la longitud roja. La tasa de cambio promedio entre x_1 y x_2 es entonces la **tangente del ángulo α** que forma la recta que conecta los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, con el eje horizontal. A esa recta, de color gris en la figura anterior, se le llama la **recta secante a la gráfica de f** entre x_1 y x_2.

Ejemplo 3.1. Dosis de un medicamento. La dosis apropiada de una droga para un paciente depende de muchas variables, pero típicamente depende del peso corporal de la persona. Sea $D(w)$ la dosis adecuada en mL de cierto medicamento para un paciente que pesa w kg. Supongamos que el manual del medicamento trae la siguiente tabla

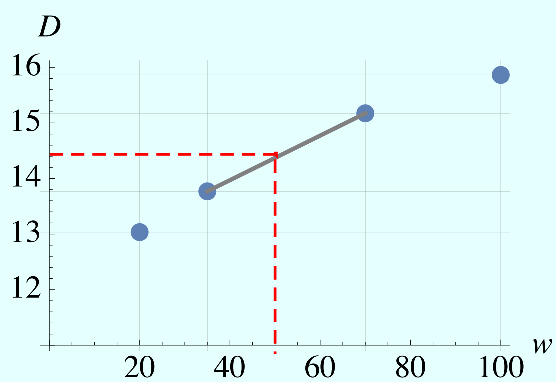
w (kg)	20	35	70	100
D (mL)	13.0	13.8	15.2	15.9

La tasa de cambio promedio de D respecto a w para pacientes que pesen entre 35 y 70 kg es

$$\frac{\Delta D(35,70)}{\Delta w} = \frac{15.2-13.8}{70-35} = \frac{1.4}{35} = 0.04\ \frac{\text{mL}}{\text{kg}}$$

y tiene una interpretación clave: dice que para pacientes que pesen entre 35 y 70 kg, por cada kg adicional de peso, la dosis de la droga se debe aumentar en 0.04 mL. Supongamos que necesitamos estimar la dosis para un paciente que pesa 50 kg. Si no tenemos más información sobre la función D podemos usar la tasa de cambio que acabamos de calcular así: si pesa 15 kg más que una persona de 35 kg, la dosis debe aumentar en $0.04\,\text{mL}/\text{kg} \times 15\,\text{kg} = 0.6\,\text{mL}$, y por tanto un buen estimativo es $13.8 + 0.6 = 14.4$ mL.

La siguiente gráfica muestra la función $D(w)$, e ilustra el cálculo que acabamos de realizar



Al usar la tasa de cambio promedio de D entre 35 y 70, estamos usando la recta secante entre los puntos correspondiente para **interpolar** la función y estimar su valor en un punto que no se nos había dado en la tabla.

Ejercicios.

3.1. Respecto a la tabla de t vs B durante la carrera de Usain Bolt. Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál fue la velocidad promedio de Usain Bolt en los últimos 60m de carrera?.

b. Use los datos de la tabla para B entre 40 y 50 m, para estimar cuánta distancia recorrió Usain Bolt en los primeros 5s de carrera.

Ejercicios. Suponga que usted trabaja en una fábrica donde se vende un producto al por mayor. Para determinar a qué precio se debe vender el producto, se hace un estudio de mercadeo durante cuatro semanas: cada semana se ofrece el producto a un precio de p pesos por unidad y se registra el número N de unidades vendidas por semana. Los resultados se muestran en la siguiente tabla ("*u*" significa unidad y "*sem*" denota semana):

x_1 x_2

p (\$ / u)	120	150	200	300
N (u / *sem*)	450	400	340	280

y_1 y_2

$\frac{\Delta N}{\Delta P} = \frac{sem}{\$}$

3.2. ¿Cuáles son las unidades de la tasa de cambio de N respecto a p?.

y x

a. $\frac{u}{\text{sem}}$ **b.** $\frac{\$/u}{u/\text{sem}}$ **c.** $\frac{u^2}{\text{sem } \$}$ **d.** No tiene

3.3. ¿Cuál es el valor de la tasa de cambio promedio de N respecto p entre los 150 y 200 pesos?.

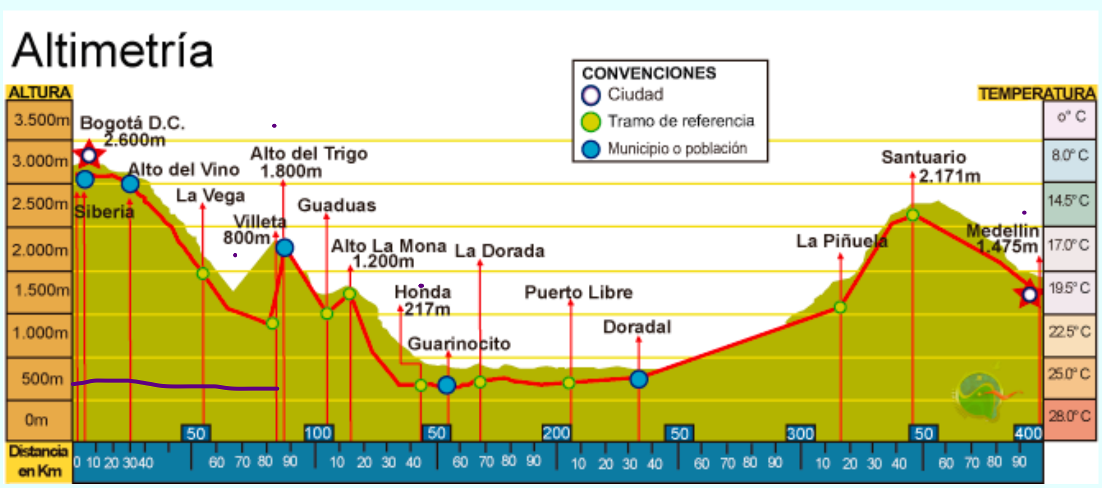
$\frac{340-400}{200-150} =$

3.4. Use los datos con $p = 150$ y $p = 200$ de la tabla, para estimar cuántas unidades se venderían a la semana si el precio unitario fuera de 180\$.

3.5. ¿En cuál de los intervalos sucesivos de p se observó que el aumento del precio produce el menor efecto sobre la cantidad vendida?

Ejemplo 3.2. La siguiente figura muestra la altimetría en la ruta Medellín-Bogotá. En el eje horizontal está la distancia horizontal x (en km) y en el vertical la altura h en metros sobre el nivel del mar. La distancia total entre las cuidades es de 400 km.

y



x

La tasa de cambio promedio de la función $h(x)$ entre x_1 y x_2 es la pendiente promedio la carretera entre esos puntos, en unidades de m/km. Por ejemplo, Honda está a 142 km de Bogotá y Santuario a 345 km. La pendiente promedio de la carretera en ese tramo es la tasa promedio de h entre $x = 142$ y 345:

$$\frac{\Delta h(142{,}345)}{\Delta x} = \frac{2171-217}{345-142} = 9.62 \ \frac{\text{m}}{\text{km}}\ .$$

Es decir que, en promedio, por cada km plano que uno conduce, sube 9.62 metros de altura. Si queremos representar esa pendiente como un porcentaje, pasamos los km planos a metros

$$9.62\ \frac{\text{m}}{\text{km}} = 9.62 \times 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

es decir, una pendiente promedio de 0.962%. Un tramo mucho mas pendiente es entre el Alto del Trigo y Guaduas:

$$\frac{\Delta h(88,105)}{\Delta x} = \frac{1000-1800}{105-88} = -47.06\ \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

lo cual corresponde a una bajada con pendiente de casi el 5%.

Ejercicios. Respecto al Ejemplo 3.2, responda las siguientes preguntas manteniendo las unidades de km para la distancia horizontal, y de m para las alturas sobre el nivel del mar.

3.6. ¿Cuál es la pendiente promedio (escrita como un porcentaje) en el trayecto completo de Bogotá a Medellín?

3.7. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de la temperatura respecto a la altura, para alturas entre 0 y 3500 msnm?

3.8. Si las temperaturas promedio en el Alto del Trigo y Honda son 15 °C y 27 °C respectivamente, ¿cuál es la tasa de cambio promedio de la temperatura respecto a la distancia plana en ese trayecto?. Tenga en cuenta que la distancia plana de Bogotá a el Alto del Trigo es de 88km y entre Bogotá y Honda hay 142km.

3.9. Si un bus sale de Bogotá a las 12m y llega a Honda a las 2:30 pm, calcule:

a. ¿Cuál fue la velocidad promedio del bus?

b. ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la altura sobre el nivel del mar respecto al tiempo?, es decir, ¿a qué velocidad descendió el bus?

c. ¿Suponiendo que la temperatura promedio en Bogotá es de 10°C, ¿cuál fue la tasa de cambio promedio de la temperatura respecto al tiempo durante ese trayecto?

3

Una librería de funciones

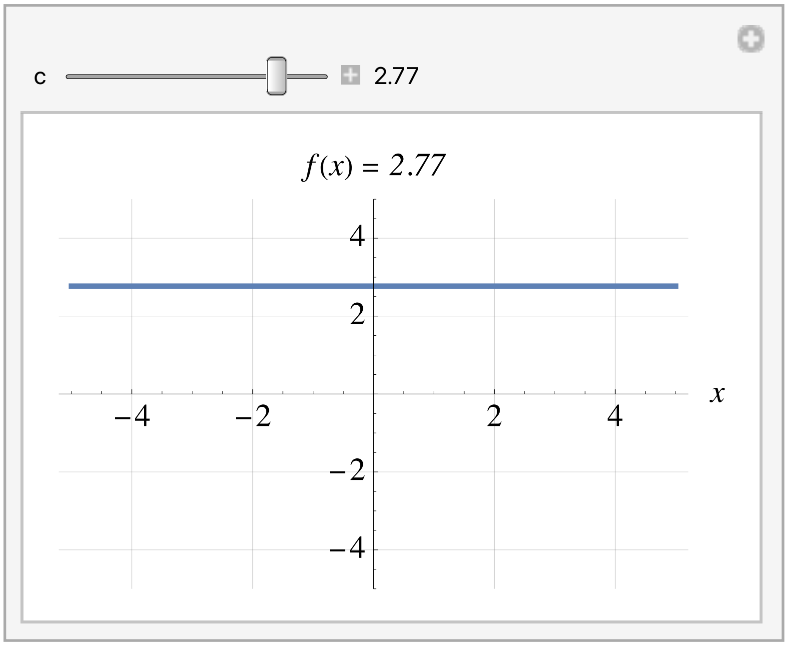
En esta parte construíremos una caja de herramientas con las llamadas **funciones elementales**, y aprenderemos cómo se pueden usar para modelar diferentes tipos de fenómenos y comportamientos. El foco va más allá de estudiar estas funciones y sus propiedades como objetos matemáticos, sino en cómo esas funciones se pueden usar para representar relaciones entre variables numéricas en la vida real.

Los **objetivos de aprendizaje** de este capítulo son los siguientes:

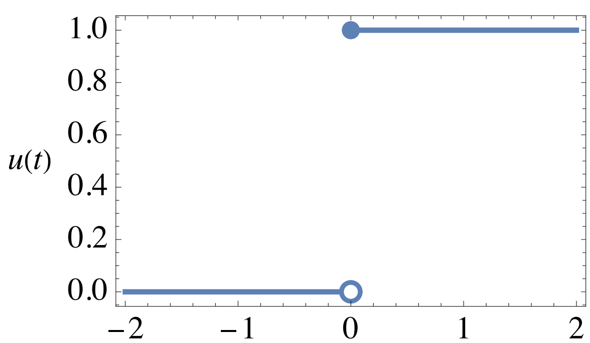
- Representar funciones lineales de manera gráfica y algebraica, interpretando correctamente el significado de la pendiente dependiendo del contexto.
- Identificar al crecimiento lineal y la proporcionalidad como formas comunes de describir la relación entre variables, y usar las funciones lineales para representar dichas situaciones.
- Usar las funciones potencia para expresar relaciones de variables asociadas a diferentes tipos de geometría.
- Reconocer las propiedades del crecimiento exponencial y cómo se investigan estas propiedades mediante manipulaciones algebraicas.
- Reconocer a la aplicación de las funciones trigonométricas más allá del contexto geométrico, y usarlas para modelar fenómenos periódicos.

1. Funciones constantes y similares

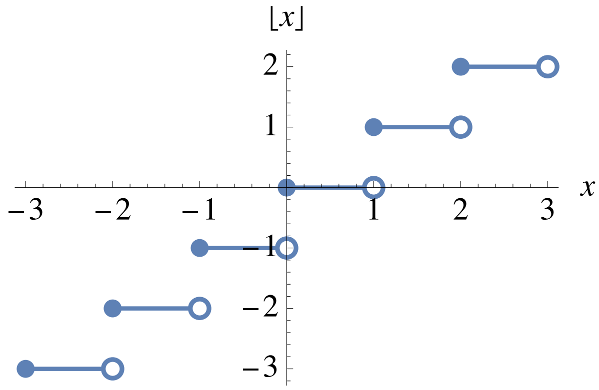
La primera familia de funciones que vamos a introducir es muy simple; son funciones que no varían. Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo, la **función constante** con valor c es $f(x) = c$, y es tal que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna el valor c. Su gráfica es una línea horizontal que pasa por $y = c$. En este caso $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}(f) = \{c\}$.



la función **interruptor** $u(t)$ (o función **escalón unitario**) es constante "por tramos" y discontinua en $t = 0$. Su nombre se refiere a cuando encendemos un interruptor de corriente, y parece que la luz pasara de manera instantánea de cero a un valor positivo. La función u definida como $u(t) = 0$ para $t < 0$, y $u(t) = 1$ para $t \geq 0$. Tenemos entonces $\mathrm{Dom}(u) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Ran}(u) = \{0, 1\}$. La gráfica de u es



Las funciones piso y techo también son constantes por tramos y representan el acto de redondear al entero más cercano. Dado un número real x, denotamos como $\lfloor x \rfloor$ el número entero más cercano pero menor o igual a x, y lo llamamos **el piso** de x. En otras palabras, la función $\lfloor x \rfloor$ "redondea" a x por debajo. Claramente, si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $\lfloor x \rfloor = x$. La gráfica de la función piso tiene saltos en todos los números enteros y es la siguiente



La función **techo** se denota $\lceil x \rceil$ y denota redondear a x por encima, es decir el número entero mas cercano pero mayor o igual a x. El dominio de las funciones techo y piso es $\mathbb{R}$, y su rango es $\mathbb{Z}$.

Ejercicio.

1.10. Para cada uno de los siguientes enunciados, indique si es verdadero o falso:

a. La función $f(x) = 4$ es creciente y decreciente en todo su dominio. V

b. La función constante $f(x) = 0$ es par e impar. V

c. La función escalón unitario u es creciente en $\mathbb{R}$. F

d. La función techo es periódica con periodo igual a uno. F

e. La tasa de cambio promedio una función constante, entre cualquier par de puntos, es cero. V

f. La tasa de cambio promedio de la función piso entre $x = -1$ y $x = 1$ es igual a $1/2$. V

2. Funciones lineales

Las funciones lineales representan el tipo más simple de cambio continuo. Se usan mucho en el lenguaje cotidiano (cada vez que vamos a una tienda, por ejemplo) y son tan fundamentales en ciencia e ingeniería que casi todos ustedes tienen en sus currículos la materia “álgebra lineal”, que se ocupa exclusivamente de estudiar las funciones lineales en gran detalle y generalidad.

2.1. Definición y propiedades

Las funciones lineales tienen varias propiedades importantes que las definen:

Definición 2.2. Función lineal. Una función lineal $f(x)$ tiene $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y cumple cualquiera y por tanto todas las siguientes propiedades:

- Su fórmula es de la forma $f(x) = m\,x + b$
- Su gráfica es una línea recta no vertical
- La tasa de cambio promedio entre cualquier par de valores es siempre la misma

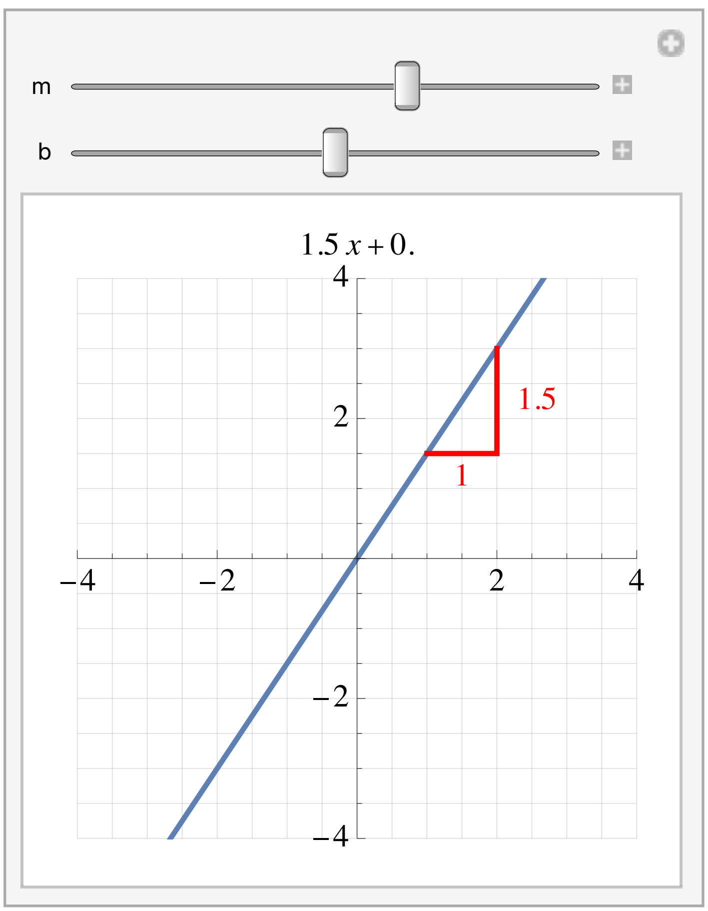
Toda función lineal $f(x) = m\,x + b$ tiene entonces dos parámetros:

- $b = f(0)$, es el **intercepto de la gráfica de f con el eje vertical**.
- m se llama la **pendiente de la función lineal**, es la tasa de cambio de f entre cualquier par de valores $x_2 \neq x_1$:

$$\frac{\Delta f(x_1, x_2)}{\Delta x} = \frac{(m\,x_2 + b) - (m\,x_1 + b)}{x_2 - x_1} = m$$

La pendiente también es la tangente del **ángulo** que la recta forma con el eje horizontal.

El siguiente objeto interactivo muestra la gráfica de la función $f(x) = m\,x + b$ para diferentes valores del intercepto b y la pendiente m. Una forma fácil de visualizar la pendiente es calcular cuánto sube o baja la función ante un incremento unitario de x, tal como lo muestra el triangulo rojo en la figura.



La función lineal con pendiente 1 e intercepto 0, $f(x) = x$ recibe el nombre de **función identidad** y es importante porque es la única función que no hace nada.

Modelos lineales: páginas 24 - 27

Ejercicio.

2.11. Para cada uno de los siguientes enunciados, indique si es verdadero o falso:

a. Toda función constante es una función lineal. V

b. Toda recta en el plano es la gráfica de una función. V

c. Una función lineal $f(x) = m\,x + b$ es creciente si y sólo sí $m \geq 0$. V

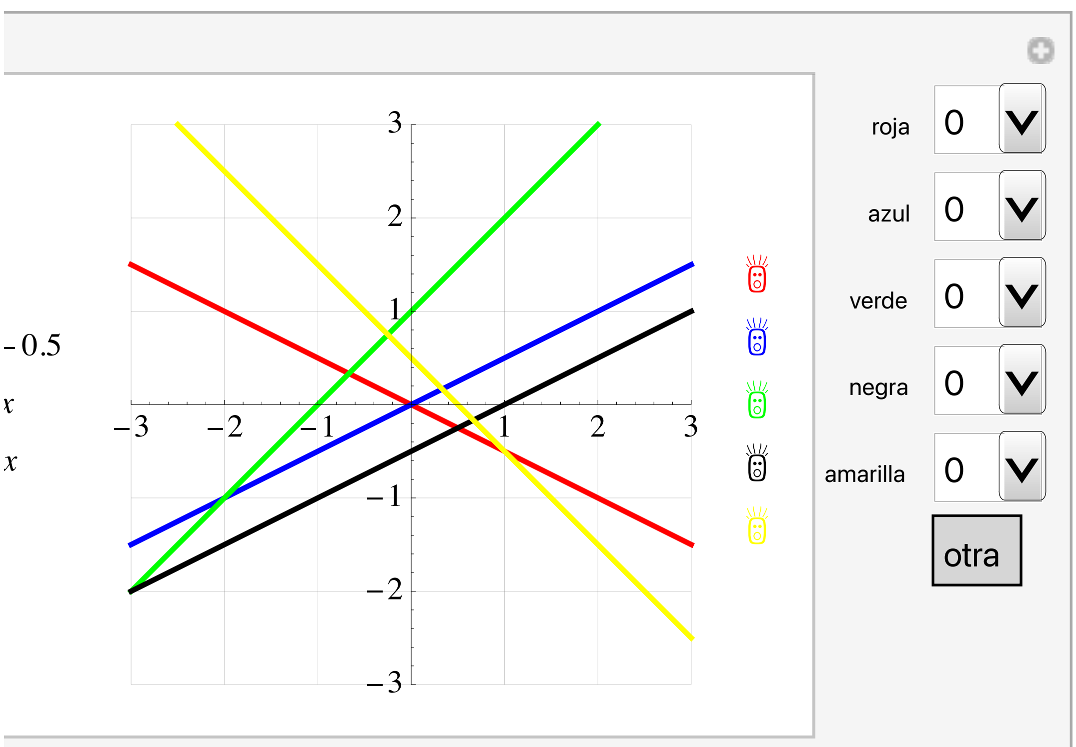
d. Una función lineal $f(x) = m\,x + b$ es impar si y sólo si $b = 0$. V

e. Una función lineal puede ser periódica F

Una de las habilidades más importantes respecto a las funciones lineales es poder hallar la ecuación de una función lineal que cumpla ciertas condiciones. El siguiente anexo ilustra algunas técnicas al respecto.

Video: Hallar ecuaciones de rectas (YouTube, Archivos)

Con el siguiente objeto interactivo pueden practicar. Seleccionen la ecuación correcta de cada recta



Ejercicios.

2.12. Para cada una de las condiciones siguientes, halle m y b en la ecuación $y = m\,x + b$ de la recta correspondiente:

a. La recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(4, -19)$.

b. La recta que corta al eje horizontal en $x = -4$ y el eje vertical en $y = 5$.

c. La recta con pendiente positiva que corta al eje vertical en $y = -2$ y forma un ángulo de $\pi / 6$ con ese eje.

Ejercicio.

2.13. Suponga que f es una función lineal. La siguiente tabla muestra algunos valores de x y $f(x)$. Complete la tabla:

x	-4	-2		2	3	
$f(x)$	24		-4	-18		-32

2.2. Modelos y crecimiento lineal

Las funciones lineales son muy usadas en ciencia, tecnología, ingeniería y la vida diaria. Las encontramos cada vez que vamos a una tienda, por ejemplo. Son tan importantes que muchos de ustedes tienen en su plan de estudios una materia que se llama álgebra lineal dedicada exclusivamente a estas funciones.

Para motivar la definición, primero veamos el siguiente importante ejemplo:

Ejemplo 2.3. Proporcionalidad. Considere el siguiente enunciado: “En los mamíferos terrestres, el volumen pulmonar es **proporcional** al peso corporal”. Nos están describiendo la función $V = f(w)$ entre los valores típicos o promedio de dos variables: el volumen pulmonar V y el peso w. La palabra proporcional significa algo muy preciso: que existe una constante $k > 0$ tal que $V = k\,w$. A k se le llama la **constante de proporcionalidad** y es igual a la tasa de cambio de V entre cualquier par de pesos $w_1 < w_2$:

$$\frac{\Delta V(w_1, w_2)}{\Delta w} = \frac{k\,w_1 - k\,w_2}{w_1 - w_2} = k$$

Para estimar k sólo necesitamos un dato. Por ejemplo, para los humanos $w \approx 70$ kg y $V \approx 6$ L, por tanto $6 = k \times 70$ y $k = 0.085$ L / kg. Es decir, para los mamíferos, la capacidad pulmonar aumenta en 85 mL por cada kg de peso corporal.

Ejercicio.

2.14. La ley de Hooke relaciona la fuerza F que opone un resorte a ser deformado una longitud x a partir de su posición de equilibrio. La fuerza y la deformación se toman positivas si el resorte se estira, y negativas si el resorte se comprime. Si debo hacer una fuerza de -700 N para comprimir un resorte 2 cm, ¿cuánta fuerza debo hacer para estirar el mismo resorte 3 cm?.

Desde un punto de vista geométrico, la palabra "**pendiente**" también se usa mucho en la vida diaria como un porcentaje. De hecho es una variable muy importante en el diseño de carretera y caminos. Por ejemplo, la siguiente señal en una carretera

significa que por cada 100 metros planos que se avancen, la carretera subirá 20 metros. Si asignamos variables x y y al desplazamiento horizontal y vertical respectivamente, entonces la tasa de cambio es $\Delta y / \Delta x = 20/100 = 0.2$.

Ejercicios.

2.15. Responda verdadero o falso: una superficie que tiene una pendiente del 100% es una pared vertical.

2.16. La pendiente máxima para una autopista 5G es del 4%. Si se quiere conectar al Hatillo de Barbosa (1400 msnm) con el Alto de Matasano en Don Matías (2272 msnm) con una autopista de especificaciones 5G, ¿cuál es la longitud mínima (en km) de la autopista?

Ejemplo 2.4. Movimiento unidimensional a velocidad constante. Cuando un objeto se mueve, su posición x (medida en la recta real relativa al punto de origen) cambia con el tiempo t, y tenemos $x = f(t)$. La tasa de cambio de f entre dos instantes t_1 y t_2 es igual a la distancia recorrida entre esos instantes, dividida por el tiempo trasncurrido:

$$\frac{\Delta x(t_1, t_2)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

es decir, es la velocidad promedio del objeto entre t_1 y t_2. Si el movimiento ocurre a velocidad constante v, entonces la función f será lineal con pendiente v, y podemos escribir

$$x = f(t) = x_0 + v\,t$$

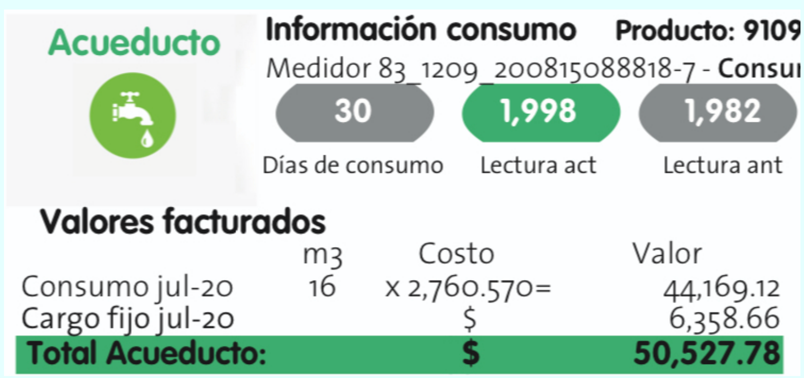
Ejercicios.

2.17. Suponga que un auto sale de Medellín a las 8 AM y viaja a una velocidad constante de 50 km/h sobre la autopista Medellín-Bogotá.

a. Bogotá queda a 400 km de Medellín. ¿A qué horas llega el auto a Bogotá?.

b. A las 2 p.m. el auto alcanza un bus proveniente de El Santuario (que queda a 60 km de Medellín) y que viene viajando a velocidad constante de 30 km/h. ¿A qué horas salió el bus del El Santuario?

Ejemplo 2.5. Cargos fijos y cargos unitarios. En la factura de consumo de Acueducto de las Empresas Públicas de Medellín aparecen dos “Valores facturados”: el cargo por consumo mensual, y el cargo fijo mensual.



El total a pagar T es una función lineal del consumo mensual x en m^3. El “Costo” de cada m^3, o “costo unitario” del agua, es la pendiente de la función, mientras que el “Cargo fijo” es el valor de $T(0)$. Así, la función es

$$T(x) = \text{cargo fijo} + \text{costo unitario} \times x = 6358.66 + 2760.57\,x$$

Ejercicios.

2.18. Responda verdadero o falso: si en su casa se duplica el consumo de agua, la cuenta del acueducto también se duplica.

2.19. El servicio de gas domiciliario también se cobra de manera similar al acueducto. En mi casa, los valores de uso de gas para los meses de Enero y Febrero fueron

10.1 y 5.9 m^3 respectivamente. Los totales a pagar fueron \$22852 y \$14099. ¿Cuáles son los valores del costo fijo y del costo unitario por m^3 en el servicio de gas?

Ejemplo 2.6. En **antropología forense**, es posible usar las longitudes de ciertos huesos para realizar estimaciones de otras características del cuerpo. Un buen ejemplo es la longitud del húmero. Sea x la longitud en cm del húmero de un humano adulto.

Entonces la estatura de la persona en cm se puede estimar mediante los siguientes modelos lineales:

$$A_H(x) = 2.89\,x + 70.64, \quad A_M(x) = 2.75\,x + 71.48$$

donde A_H y A_M corresponden a las funciones estimadas para hombres y mujeres respectivamente. Las unidades de las pendientes en A_H y A_M son (cm de altura)/(cm de húmero). Una forma de expresar su signifcado es que cada cm de crecimiento del húmero en los hombres, corresponde a 2.89cm de crecimiento total.

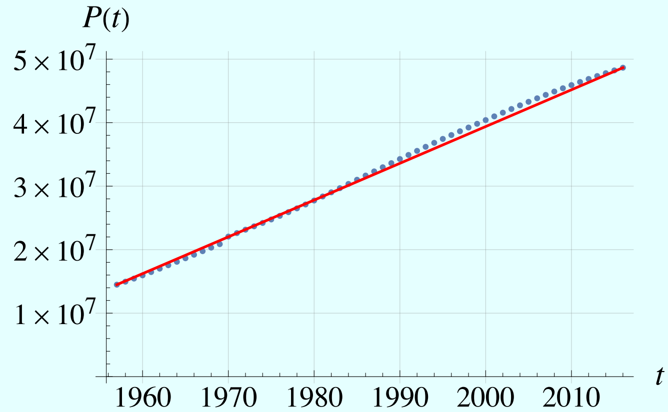
Ejercicios.

2.20. Responda cada pregunta:

a. Si la estatura de un adolescente aumenta 4 cm en un año, ¿cuántos cm creció su húmero durante ese año?

b. Se encontró un esqueleto de 1.43m de altura con húmeros que median 25.2cm. ¿El esqueleto pertenece a un hombre o una mujer?.

Ejemplo 2.7. La población colombiana. La gráfica muestra los datos de población colombiana P como función del tiempo t en años entre 1957 y 2016 [4]. Algo particular durante este periodo es que la población creció de manera aproximadamente lineal como lo muestra la función lineal f en rojo, es decir $P \approx f(t)$.



para hallar una ecuación para f debemos hallar la pendiente entre cualquier par de puntos. Los valores de P para 1957 y 2016 son 14 485 993 y 48 653 419 habitantes respectivamente. Entonces la tasa de cambio promedio durante el periodo de medición fue

$$\frac{\Delta P(1957,2016)}{\Delta t} = \frac{48\,653\,419 - 14\,485\,993}{2016 - 1957} = 579\,109 \ \frac{\text{habitantes}}{\text{año}}$$

Ese número se llama la **tasa de crecimiento poblacional** y dice que cada año la población incrementa en 579109 habitantes. Para terminar la ecuación de $f(t)$ no tiene mucho sentido tratar de hallar el valor de $b = f(0)$ porque no nos interesa el comportamiento de P en el "año cero". Pero lo podemos hacer razonando así: "P aumenta a partir del valor 14485993 a una tasa de 579109 habitantes por cada año que ha pasado desde el 1957", que en ecuación se escribe:

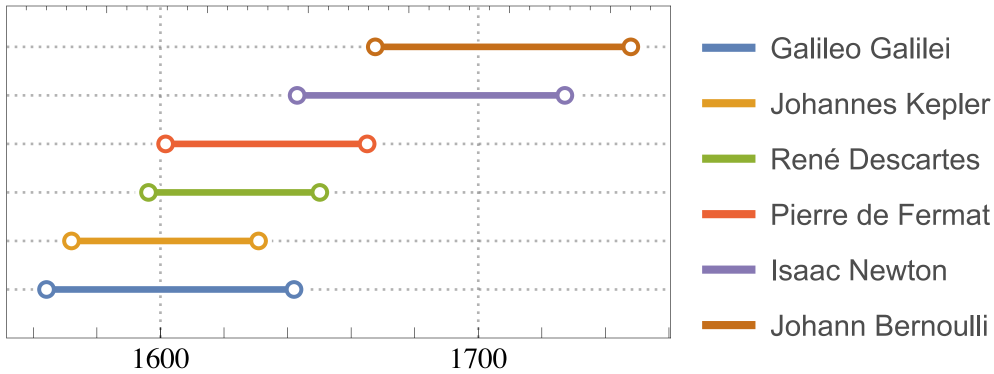
$$P = f(t) \approx 14\,485\,993 + 579\,109\,(t - 1957)\,.$$

Ejercicio.

2.21. Según el modelo del Ejemplo 2.7, ¿en qué año se espera que la población Colombiana alcance los 60 millones de habitantes?

2.3. Un poco de historia: Galileo y la caída libre

Antes de Galileo y Kepler, raramente se intentaban explicar los fenómenos naturales usando las matemáticas [2]. Galileo, con sus trabajos en hidrostática y el movimiento de los objetos en caída, inició esta singular tradición que hoy define gran parte de lo que llamamos ciencia [6]. Por esta y otras razones, a Galileo se le considera el padre de la ciencia moderna.



Kepler, Galileo, Newton, Leibniz, Descartes y Fermat se consideran las mentes matemáticas más importantes del siglo XVII.

La idea de usar la matemática, y en particular la geometría, para entender las formas y fenómenos naturales fue revolucionaria, no solamente desde el punto de vista técnico, sino filosófico y moral. Ambos, Galileo y Kepler, reconocieron la magnitud de su nueva idea. Galileo dijo algo que resuena mucho con la visión positivista actual del mundo: que el universo “es como un gran libro ... escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas”. Kepler era más místico aún y dijo que la geometría es “co-eterna con la mente divina” brindando “a Dios los patrones para la creación del universo” [2]. Galileo, en particular, sufriría mucho por sostener ideas tan revolucionarias.

Acá nos centraremos en el estudio del fenómeno de la caída libre por parte de Galileo, su aplicación del principio del infinito y la relación con la parábola. Este trabajo aparece en “Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo”, publicado en 1635 cuando Galileo estaba ya bajo el arresto domiciliario perpetuo al que lo condenó la Inquisición. El “Diálogos”, como es conocido actualmente, representa la síntesis de toda una vida de trabajo científico, y se considera la primera obra maestra del estudio en física.

Antes de Galileo, la caída de los objetos era entendida en el típico estilo teleológico Aristotélico: los objetos caen buscando su lugar natural en el centro del universo. A este argumento se le dice teleológico porque no intenta explicar el *cómo*, ni el *por qué*, sino el *para qué*. Galileo quería entender *cómo*; aún hoy seguimos investigando el *por qué* de la gravedad.

La hipótesis que Galileo quería probar era la siguiente: **la velocidad de un objeto en caída libre es proporcional al tiempo que lleva cayendo**. Como los objetos caen muy rápido al suelo, es difícil realizar mediciones precisas de tiempo y distancia, en especial con los "cronómetros" de agua que usaba Galileo. En un destello de creatividad e intuición, Galileo resolvió este problema dejando rodar una bola de bronce por un plano inclinado y se dio cuenta que la velocidad que alcanza la bola al deslizarse sobre el plano hasta una altura es proporcional a la velocidad de caída libre hasta esa altura. Así, dejando que la pendiente del plano inclinado **tienda a infinito**, la caída libre vertical puede pensarse como movimiento en un plano vertical y su hipótesis debe ser cierta en ambos casos, caída libre y caída por un plano, o en ninguno.

En el siguiente video detallamos el planteamiento y los resultados de Galileo.

Video: Galileo y el movimiento (YouTube, Archivos)

Ejercicios.

2.22. Responda verdadero o falso en cada caso.

a. Si se duplica el tiempo por el cual se deja caer un objeto, entonces la distancia recorrida también se duplica.

b. Si se duplica el tiempo por el cual se deja caer un objeto, entonces la velocidad que alcanza el objeto también se duplica.

Actividades

Actividad 1. El Alto de Letras en bicicleta. La subida al Alto de Letras desde Mariquita se considera el puerto de ascenso en ciclismo más largo del mundo. Acá, la popular aplicación Strava reporta los resultados de varios ciclistas élite subiendo Letras.

- (15%) Observe que el perfil del recorrido (altura vs distancia) tiene pendiente aproximadamente constante. Halle la ecuación de una función lineal $y(x)$ que permita calcular aproximadamente la altura y sobre el nivel del mar a x km de Mariquita.

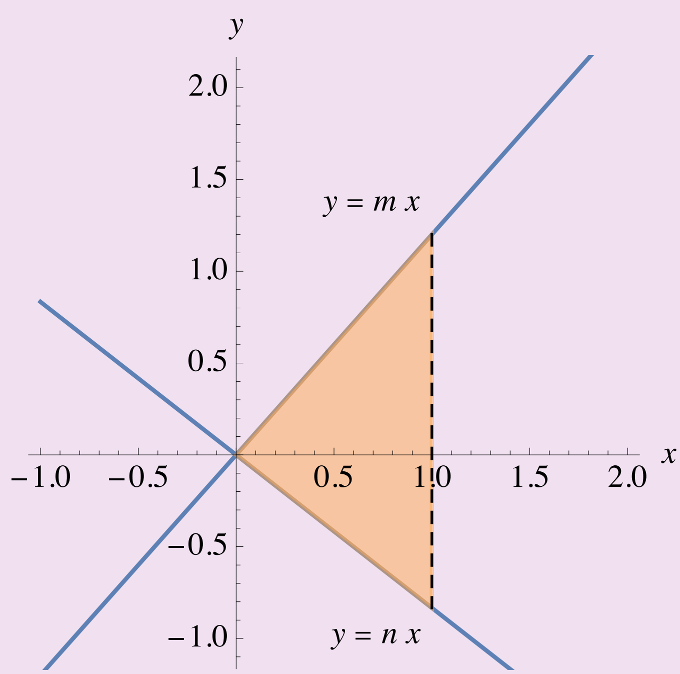
- (20%) Sea t el tiempo en horas para recorrido del ciclista que tiene el récord en el ascenso. Use la información suministrada y proponga modelos lineales para $x(t)$ y para $y(t)$. Interprete la pendiente en cada caso.

- (20%) La potencia al pedalear es la medida más importante de los ciclistas modernos. Suponga que el ciclista que tiene el récord subió a Letras con una potencia promedio de 310 W (la unidad W significa Watts). Sea $E(t)$ la energía total en Joules, que ese ciclista trasmitió a las bielas en las primeras t horas de su recorrido. Consulte la relación entre energía y potencia, y halle una función lineal para $E(t)$.

- (10%) La eficiencia energética de un ciclista es aproximadamente del 25%. Es decir, que de toda la energía que se gasta un ciclista, únicamente el 25% se transmite a las bielas (el resto se gasta en respirar, disipar calor, etc.). Halle una función lineal para la energía real $E_r(t)$ que se gastó el ciclista en función del tiempo, y para $E_r(x)$, la energía real que ha gastado el ciclista como función de la distancia recorrida.

- (35%) Suponga que usted tiene que alimentar el ciclista. Convierta $E_r(x)$ a Calorías y escoja el producto con el que va a alimentar al ciclista (puede ser banano, bocadillo, barra, gel, etcétera). Usando la información nutricional del producto, identifique cada cuántos kilómetros aproximadamente debe alimentar al ciclista para cumplir con su gasto de energía.

Actividad 2. Rectas normales. Sean $m, n \neq 0$ y considere las funciones $y = m\,x$ y $y = n\,x$ que se muestran en la figura. Use el teorema de Pitágoras sobre el triángulo sombreado para demostrar que si $m\,n = -1$, entonces las rectas son perpendiculares. Argumente por qué el resultado sigue siendo cierto si las rectas tienen la forma general $y = m\,x + b$ y $y = n\,x + c$.



Halle las coordenadas del punto donde la recta que pasa por el punto (2, 5), se corta perpendicularmente a la recta con ecuación $y = \frac{-1}{3}x + 2$. Haga la gráfica de las dos rectas en un mismo plano cartesiano mostrando su punto de intersección.

Rúbrica. Escribe la demostración de manera clara y coherente, y para valores generales de m, n (40%) Argumenta de manera convincente porqué se pueden ignorar los interceptos (15%) Soluciona el ejemplo particular de manera correcta y explicando detalladamente el procedimiento (40%). Hace la gráfica pedida (15%)

Actividad 3. En [esta tabla] pueden encontrar el número total de **casos del Covid19** reportados en Colombia hasta cada día, desde Mayo 1, 2020 hasta el 8 de Marzo 2021. Observe que en los siguientes intervalos de tiempo, el comportamiento del número de casos es aproximadamente lineal: Septiembre 10 a Diciembre 30, Enero 5 a Enero 25, y recientemente de Febrero 20 a Marzo 8.

- (40%) Halle funciones lineales que aproximan los datos en cada una de las ventanas. Interprete los valores obtenidos de la pendiente y discuta cuándo fue peor la tasa de infección y las posibles razones.

- (20%) Para cada uno de los tres intervalos, grafique en el mismo plano cartesiano los modelos lineales encontrados y los datos para verificar que la aproximación si es buena.

- (40%) Si la tendencia que se observó entre Septiembre 10 y Diciembre 30 se hubiera mantenido para siempre, ¿en qué momento se alcanzarían los mismos infectados que se proyectan con la tendencia actual? Ilustre gráficamente su resultado.

Actividad 4. Calcular π en la casa. Consigan al menos 8 objetos circulares en su entorno de diferentes tamaños. Ideen una forma de medir de manera precisa el diámetro y el perímetro de cada uno y haga una gráfica de diámetro d vs perímetro p con los datos obtenidos. Vamos a usar varias formas de hallar una función lineal de la forma $p(d) = c\,d$ que represente los datos.

- Primero hágalo a ojo, ubicando la línea recta que usted cree mejor representa la tendencia lineal de los datos, y hallando su ecuación.

- Segundo, escoja dos puntos que cree que representan mejor los datos, y calcule la tasa de cambio promedio entre los puntos.

- Tercero, haga una regresión lineal simple con los datos en algún software (en Mathematica puede usar `LinearModelFit`).

Haga una gráfica de las funciones encontradas, comparando sus pendientes con valor teórico. Discuta sus resultados.

Rúbrica. Documenta con fotos los objetos escogidos y las mediciones (30%) Explica de manera detallada el método para medir el perímetro e ilustra con fotos (20%). Calcula la pendiente de la relación entre p y d explicando cómo lo hace en cada método (30%) A partir de la gráfica y de los datos, discute la diferencia entre la pendiente calculada y el valor teórico, explicando posibles causas de error (20%).

Actividad 5. Redondear notas. El SIA redondea las calificaciones de los estudiantes a una cifra decimal, dependiendo si la segunda cifra decimal es mayor o menor a 5. Queremos una hallar la fórmula que usa el SIA. Sea x la calificación y $\mathrm{SIA}(x)$ la nota que se entra al sistema. Entonces, por ejemplo, $\mathrm{SIA}(x) = 2.9$ para $x \in [2.85, 2.95)$, y $\mathrm{SIA}(x) = 3.0$ para $x \in [2.95, 3.05)$. Haga suficientes ejemplos hasta que identifique un patrón y pueda hallar una fórmula para la función SIA usando las función techo o la función piso. Verifique que la fórmula hallada si funciona con varios ejemplos.

Rúbrica. A partir de los ejemplos, explica la deducción de la fórmula para SIA (30%) Obtiene una fórmula correcta usando la función piso, o la función techo (50%) Verifica que su función si coincide con la forma de redondear del SIA (20%).

Actividad 6. Análisis de la cuenta de servicios. Para esta actividad necesitan una cuenta de servicios de EPM donde se reporten los consumos y cobros por los siguientes servicios: acueducto, alcantarillado, energía y gas.

- (40%) Defina las variables apropiadas y escriba las funciones lineales que EPM usa para calcular el cobro de cada uno de los servicios. No tenga en cuenta los intereses por mora. Identifique las unidades y significado de la pendiente e intercepto de cada una de las funciones lineales.

- Note que la variable independiente para el cobro del acueducto y del alcantarillado es la misma, pero los cobros diferentes. Halle una fórmula lineal que permita calcular el cobro de alcantarillado como función del cobro de acueducto. ¿Cuál es el dominio de esta función? Interprete la pendiente y el intercepto de esa función.

- El consumo de gas se reporta en m^3, Pero note además que en el cobro de gas aparece un número “Poder calorífico” en kJ/m^3 y una “Equivalencia” en unidades de kWh, es decir unidades de energía. Halle la relación matemática entre esas cantidades y explique su significado físico.

- Utilice el resultado anterior para hallar la función lineal del costo del gas como función de la energía en kWh. Compare esta función con la que se usa para la energía eléctrica. ¿Cual servicio cobra más caro cada kWh?

Actividad 7. Instale un **plano inclinado** y deje rodar un objeto por él (puede ser una bola o un cubo de hielo). Utilice el análisis descrito en la Sección 2.3 y haga las mediciones necesarias para estimar el valor de la constante gravitacional g en su casa. Describa su razonamiento, proceso de recolección de datos y presente evidencias de todas las mediciones requeridas. Recuerde usar promedios para disminuir la incertidumbre de las mediciones.

Compare el valor obtenido de g con $9.8\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$. ¿Sobre-estima o sub-estima? ¿Cuál cree que son las fuentes más importantes del error?

Rúbrica. Construye y mide apropiadamente las variables importante en el plano inclinado (30%). Documenta cómo toma las mediciones del tiempo y usa promedios (30%). Realiza apropiadamente el cálculo de g según el trabajo de Galileo (25%). Analiza el error (15%).

Actividad 8. Asíntotas oblicuas. Haga la gráfica de la función $f(x) = \left(2\,x^2 + 3\right)/(x+1)$

para valores de x positivos grandes. ¿Qué observa? Cuando una función f se aproxima a una función lineal $l(x) = m\,x + b$ a medida que $x \to \infty$, decimos f tiene una asíntota oblicua con ecuación $l(x)$. Vamos a hallar la ecuación de la asíntota oblicua de f.

- Estime a ojo la pendiente de la asíntota oblicua a partir de la gráfica de $f(x)$ para x grandes.

- Calcule la tasa de cambio promedio de f, $\Delta f(x_1, x_2)/(x_2 - x_1)$, para al menos 5 parejas de valores grandes $x_1 < x_2$.

- Haga una tabla de valores de la función $f(x)/x$ a medida que $x \to \infty$

Cada método le debió haber arrojado aproximadamente el mismo número. Argumente por qué ese número debe ser la pendiente m de la asíntota oblicua. Para hallar el intercepto b, haga una tabla de valores de $f(x) - m\,x$ para $x \to \infty$ y observe a qué valor se aproxima el resultado. Para verificar que en efecto la ecuación encontrada es la asíntota oblicua de f:

- Haga las gráfica de $f(x)$ y $l(x)$ en el mismo plano para confirmar que $f(x) \approx l(x)$ a medida que $x \to \infty$.

- Calcule y simplifique la función $f(x) - l(x)$ y muestre gráficamente (o argumente a partir de la ecuación) que $f(x) - l(x)$ tiende a cero a medida que $x \to \infty$.

Rúbrica. Hace la gráfica de $f(x)$ y reporta los cálculos y observaciones para estimar la pendiente de la asíntota oblicua (30%) Explica por qué los métodos propuestos permiten calcular m (25%) Estima correctamente el intercepto b mediante una tabla de valores (20%) Verifica que la función obtenida es en efecto la asíntota oblicua (25%)

Actividad 9. El reloj molecular. Las mutaciones sobre el genoma son eventos raros y aleatorios, pero que ocurren con una frecuencia fija en la naturaleza. De hecho, las mutaciones sobre genes comunes a muchas especies ayudan a conocer la historia evolutiva. Uno de esos genes es el que codifica el Citocromo C. En este archivo pueden encontrar una tabla con las diferencias entre los genes responsables de codificar el Citocromo C en el Caballo y otras especies de plantas, animales e incluso hongos. En la segunda columna se reportan datos estimados a partir del récord fósil, del tiempo en el que vivió el ancestro común entre el caballo y cada especie. Por ejemplo, hay 18 nucleótidos diferentes entre los genes del atún y el caballo, y el ancestro común a todos los mamíferos y los peces vivió aproximadamente hace 461 millones de años.

- (15%) Use las especies para los cuales se tienen ambos datos para graficar las mutaciones M versus el tiempo t desde el último ancestro.

- (25%) Halle una ecuación lineal de la forma $M = r\,t$ que se ajuste a los datos. ¿Por qué el intercepto es igual a cero?

- (30%) Interprete el valor de la pendiente *r* y explique su relación con el concepto de Reloj Molecular.

- (30%) Use su modelo para completar los valores de *t* en la tabla. Según el modelo ¿hace cuánto vivió el ancestro común a todos los mamíferos?, ¿y el de todos lo vertebrados?