Problema de inventarios con demanda aleatoria y aprovisionamiento periódico

Antonia Inda, Matías López, Rolf Traeger
Jordi Pereira

Universidad Adolfo Ibañez

14 de diciembre de 2020

Problema de inventarios

Demanda aleatoria

Problema estocástico.

Aprovisionamiento periódico

Se debe solicitar productos cada una cierta cantidad de tiempo y por tanto se debe almacenar los productos.

Gestión de Inventarios

Costos asociados.

- Costo de producto
- Costo de hacer un pedido.
- Costo de almacenamiento
- Costo de oportunidad

Enunciado

Juan vende cervezas de Lunes a Viernes.

- v : Precio de venta de \$1.500 cada una.
- c : Costo de compra por \$300 cada una.
- k : Costo de hacer un pedido = \$1.000.
- h : Costo de almacenamiento= \$200.
- $v - c$: Costo de oportunidad por venta perdida = \$1.200.
- La demanda es uniforme de 0 a 3 para toda la semana.
- S : La capacidad máxima de inventario = 4

Diferencias entre las Herramientas de Cálculo

Iteración en Estados

Es utilizado para determinar decisiones óptimas tanto para el largo plazo como para el corto plazo.

Iteración en Políticas

Solo es aplicable para tomar decisiones a largo plazo. En donde se busca de forma iterativa la mejor decisión para cada estado, tomando en cuenta todos los estados posibles.

Definición Política

Política

Una **política** es una regla que especifica que hacer en cada periodo.

Política Estacionaria ($\delta(i)$)?

Una política es una política estacionaria si siempre que el estado sea i se toma la misma decisión sin importar el periodo en el que se encuentra.

Política estacionaria óptima

$V_\delta(i)$:

Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos. Dado que en el primer período el estado era i y la política estacionaria era δ.

Definición

La Política estacionaria óptima es la política que maximiza $V_\delta(i)$.

Método de Solución:

Tenemos:

- Tomar Decisiones para largo plazo.
- Estas Decisiones afectan el nivel de inventario futuro.

Howard's Policy Iteration Method
Método de iteración en las políticas de Howard

Necesitamos:

Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos para cada nivel de inventario dada una política estacionaria δ:

Necesitamos:

Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos para cada nivel de inventario dada una política estacionaria δ:

$$V_\delta(i) = r_{i,\delta(i)} + \sum_{j=0}^{S} p(j|i,\delta(i))V_\delta(j) - g \qquad \forall i = 0,\ldots,S$$

Necesitamos:

Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos para cada nivel de inventario dada una política estacionaria δ:

$$V_\delta(i) = r_{i,\delta(i)} + \sum_{j=0}^{S} p(j|i,\delta(i))V_\delta(j) - g \qquad \forall i = 0,\ldots,S$$

¿Pero esto qué nos dice?

Necesitamos:

Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos para cada nivel de inventario dada una política estacionaria δ:

$$V_\delta(i) = r_{i,\delta(i)} + \sum_{j=0}^{S} p(j|i,\delta(i))V_\delta(j) - g \qquad \forall i = 0,\ldots,S$$

¿Pero esto qué nos dice?

Política estacionaria (δ) Iteración 1

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2) :=$ Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- 1425 :=Beneficio esperado por tener nivel de inventario dos.

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- 1425 :=Beneficio esperado por tener nivel de inventario dos.
- $0{,}5 * V_0(0)$:=

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- 1425 :=Beneficio esperado por tener nivel de inventario dos.
- $0{,}5 * V_0(0)$:=
  - 0,5 := Probabilidad de estar en nivel de inventario cero el siguiente periodo.

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2) :=$ Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- $1425 :=$Beneficio esperado por tener nivel de inventario dos.
- $0{,}5 * V_0(0) :=$
  - $0{,}5 :=$ Probabilidad de estar en nivel de inventario cero el siguiente periodo.
  - $V_0(0) :=$ Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos cero cervezas decidimos comprar cero cervezas.

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- 1425 :=Beneficio esperado por tener nivel de inventario dos.
- $0{,}5 * V_0(0)$:=
  - 0,5 := Probabilidad de estar en nivel de inventario cero el siguiente periodo.
  - $V_0(0)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos cero cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- $0{,}25 * V_0(1)$ y $0{,}25 * V_0(2)$:= Lo mismo que el caso anterior.

Necesitamos:

$$V_0(2) = 1425 + 0{,}5 * V_0(0) + 0{,}25 * V_0(1) + 0{,}25 * V_0(2) - g$$

Tenemos:

- $V_0(2)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos dos cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- 1425 :=Beneficio esperado por tener nivel de inventario dos.
- $0{,}5 * V_0(0)$:=
  - 0,5 := Probabilidad de estar en nivel de inventario cero el siguiente periodo.
  - $V_0(0)$:= Beneficio esperado obtenido en un número infinito de períodos si cada vez que tenemos cero cervezas decidimos comprar cero cervezas.
- $0{,}25 * V_0(1)$ y $0{,}25 * V_0(2)$:= Lo mismo que el caso anterior.
- g := Constante para que el sistema de ecuaciones no se indetermine.

Sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones a resolver:

$$V_{\delta=0}(i=0) = r_{0,0} + \sum_{j=0}^{S} p(j|0,0)V_\delta(j) - g$$

$$V_{\delta=0}(i=1) = r_{1,0} + \sum_{j=0}^{S} p(j|1,0)V_\delta(j) - g$$

$$\vdots$$

$$V_{\delta=0}(i=S) = r_{S,0} + \sum_{j=0}^{S} p(j|S,0)V_\delta(j) - g$$

$$V_{\delta=0}(i=S) = 0$$

Sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones se vería algo así:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}75 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_0(0) \\ V_0(1) \\ V_0(2) \\ V_0(3) \\ V_0(4) \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1800 \\ 175 \\ 1425 \\ 1950 \\ 1750 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} V_0(0) \\ V_0(1) \\ V_0(2) \\ V_0(3) \\ V_0(4) \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9871,\ldots \\ -7238,\ldots \\ -4693,\ldots \\ -2267,\ldots \\ 0 \\ -1800 \end{bmatrix}$$

Howard's Policy Iteration Method

Ahora con los V_δ calculados, resolvemos la siguiente ecuación:

$$T_\delta(i) = \max_{d \in D(i)} \left(r_{i,d} - g + \sum_{j=0}^{N} p(j|i,d) V_\delta(j) \right)$$

Ahora con los V_δ calculados, resolvemos la siguiente ecuación:

$$T_\delta(i) = \max_{d \in D(i)} \left(r_{i,d} - g + \sum_{j=0}^{N} p(j|i,d) V_\delta(j) \right)$$

¿Cómo calculamos estos valores?

Howard's Policy Iteration Method

Ocupemos el mismo escenario anterior, nivel de inventario dos:
Tengo tres decisiones.

$$T_\delta(2) = \max_{d \in D(2)} \left\{ \begin{array}{ll} r_{2,d} - g + \sum_{j=0}^{2} p(j|2,d) V_\delta(j) & ,d = 0 \\ \\ r_{2,d} - g + \sum_{j=0}^{3} p(j|2,d) V_\delta(j) & ,d = 1 \\ \\ r_{2,d} - g + \sum_{j=0}^{4} p(j|2,d) V_\delta(j) & ,d = 2 \end{array} \right\}$$

Howard's Policy Iteration Method

Ocupemos el mismo escenario anterior, nivel de inventario dos:
Tengo tres decisiones.

$$T_\delta(2) = \max_{d \in D(2)} \left\{ \begin{array}{cc} -4693{,}82 & , d = 0 \\ \\ -3567{,}90 & , d = 1 \\ \\ -1600 & , d = 2 \end{array} \right\}$$

Howard's Policy Iteration Method

Ocupemos el mismo escenario anterior, nivel de inventario dos:
Tengo tres decisiones.

$$T_\delta(2) = \max_{d \in D(2)} \left\{ \begin{array}{cc} -4693,82 & , d = 0 \\ \\ -3567,90 & , d = 1 \\ \\ -1600 & , d = 2 \end{array} \right\}$$

$$T_\delta(2) = -1600$$

Howard's Policy Iteration Method

Realizamos el calculo de todos los $T_\delta(i)$

$$\begin{aligned}
T_\delta(0) &= -2200 \quad &, d = 4\\
T_\delta(1) &= -1900 \quad &, d = 3\\
T_\delta(2) &= -1600 \quad &, d = 2\\
T_\delta(3) &= -1300 \quad &, d = 1\\
T_\delta(4) &= 0 \quad &, d = 0
\end{aligned}$$

Realizamos el calculo de todos los $T_\delta(i)$

$$\begin{aligned}
T_\delta(0) &= -2200 &&, d = 4 \\
T_\delta(1) &= -1900 &&, d = 3 \\
T_\delta(2) &= -1600 &&, d = 2 \\
T_\delta(3) &= -1300 &&, d = 1 \\
T_\delta(4) &= 0 &&, d = 0
\end{aligned}$$

¿Ahora cómo usamos estos valores?

Verificación de las políticas

Se debe realizar siguiente la comparación:

$$T_\delta(i) = V_\delta(i) \qquad\qquad \forall i$$

Verificación de las políticas

Se debe realizar siguiente la comparación:

$$T_\delta(i) = V_\delta(i) \qquad\qquad \forall i$$

Nivel de Inventario	**Decisión**	$T_\delta(i)$	**Relación**	$V_\delta(i)$	**Decisión**
0	4	-2200	$\neq$ ✗	-9871	0
1	3	-1900	$\neq$ ✗	-7238	0
2	2	-1600	$\neq$ ✗	-4693	0
3	1	-1300	$\neq$ ✗	-2267	0
4	0	0	$=$ ✓	0	0

Cuadro 1: Tabla comparativa $T_\delta(i)$ con $V_\delta(i)$

Verificación de las políticas

$$T_\delta(i) = V_\delta(i) \qquad \forall i$$

Nivel de Inventario	Decisión	$T_\delta(i)$	Relación	$V_\delta(i)$	Decisión
0	4	-2200	$\neq$ ✗	-9871	0
1	3	-1900	$\neq$ ✗	-7238	0
2	2	-1600	$\neq$ ✗	-4693	0
3	1	-1300	$\neq$ ✗	-2267	0
4	0	0	$=$ ✓	0	0

Cuadro 1: Tabla comparativa $T_\delta(i)$ con $V_\delta(i)$

Política estacionaria (δ) Iteración 2

$$\delta = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

Política estacionaria (δ) Iteración 1

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

1. Con las políticas definidas se calculan los $V_\delta(i)$ por medio del sistema de ecuaciones.

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

1. Con las políticas definidas se calculan los $V_\delta(i)$ por medio del sistema de ecuaciones.
2. Con los $V_\delta(i)$ se calculan los $T_\delta(i)$.

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

1. Con las políticas definidas se calculan los $V_\delta(i)$ por medio del sistema de ecuaciones.
2. Con los $V_\delta(i)$ se calculan los $T_\delta(i)$.
3. Realizamos la comparación de los $V_\delta(i)$ con los $T_\delta(i)$.

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

1. Con las políticas definidas se calculan los $V_\delta(i)$ por medio del sistema de ecuaciones.
2. Con los $V_\delta(i)$ se calculan los $T_\delta(i)$.
3. Realizamos la comparación de los $V_\delta(i)$ con los $T_\delta(i)$.
    - **If** $(V_\delta(i) = T_\delta(i), \forall i\ )$:
      Los $\delta(i)$ utilizados en $V_\delta(i)$ son la política estacionaria óptima.

Partes de la iteración

Se parte con una política inicial arbitraria.

1. Con las políticas definidas se calculan los $V_\delta(i)$ por medio del sistema de ecuaciones.
2. Con los $V_\delta(i)$ se calculan los $T_\delta(i)$.
3. Realizamos la comparación de los $V_\delta(i)$ con los $T_\delta(i)$.
   - **If** $(V_\delta(i) = T_\delta(i), \forall i\ )$:
     Los $\delta(i)$ utilizados en $V_\delta(i)$ son la política estacionaria óptima.
   - **Else:**
     Se toman las decisiones elegidas en las ecuaciones de $T_\delta(i)$ y son utilizados como la política estacionaria (δ) para comenzar la nueva iteración el punto (1).

Problema para analizar

Problema Inicial

Juan vende cervezas de Lunes a Viernes.

- v : Precio de venta de \$1.500 cada una.
- c : Costo de compra por \$300 cada una.
- k : Costo de hacer un pedido = **\$1.000**
- h : Costo de almacenamiento= \$200
- $v - c$: Costo de oportunidad por venta perdida = \$1.200
- La demanda es uniforme de **0 a 3** para toda la semana.
- S : La capacidad máxima de inventario = **4**

Problema para analizar

Actualización

Juan vende cervezas de Lunes a Viernes.

- v : Precio de venta de \$1.500 cada una.
- c : Costo de compra por \$300 cada una.
- k : Costo de hacer un pedido = **\$20.000**
- h : Costo de almacenamiento= \$200
- $v - c$: Costo de oportunidad por venta perdida = \$1.200
- La demanda es uniforme de **0** a **30** para toda la semana.
- S : La capacidad máxima de inventario = **100**

Análisis de Resultados

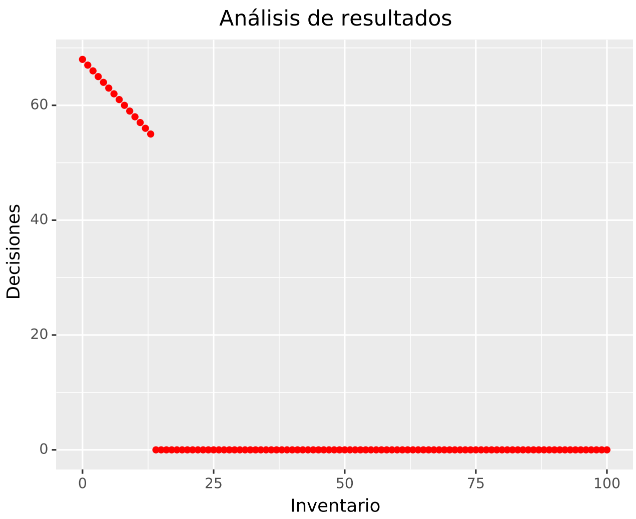

Figura 1: Política Óptima de Juan

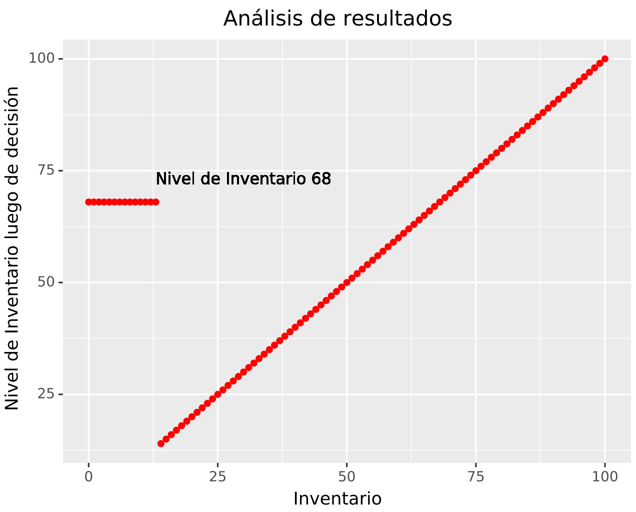

Figura 2: Política Óptima de Juan

Datos importantes:

- Demanda de 0 a 30.
- Inventario Máximo 100.

Análisis de Sensibilidad

Para el análisis de sensibilidad haremos 3 tipos de modificaciones diferentes:

- **Caso 1:** Elevar el costo de hacer el pedido (k) de las cervezas desde 1 hasta 70.000.
- **Caso 2:** Elevar el precio de venta (v) de las cervezas desde precio de compra hasta hasta 20500.
- **Caso 3:** Elevar el tamaño del frigobar (S).

Análisis de Sensibilidad

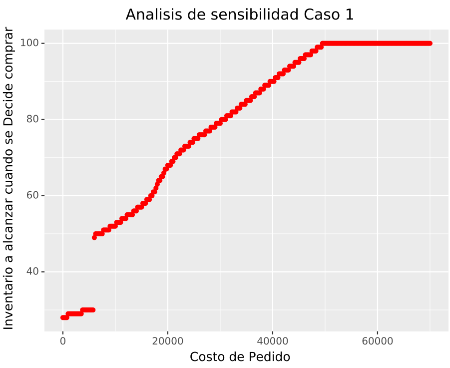

Figura 3: Variación Costo pedido

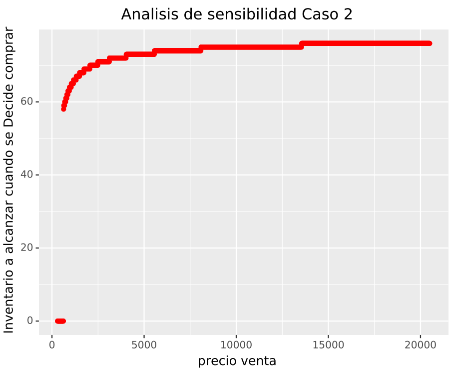

Figura 4: Variación Precio de Venta

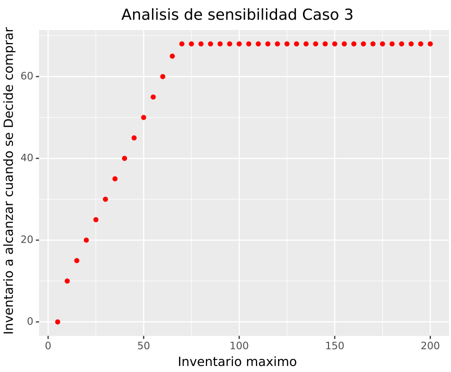

Figura 5: Tamaño del Frigobar