

Лабораторная работа №3.7.1

Скин-эффект в полом цилиндре

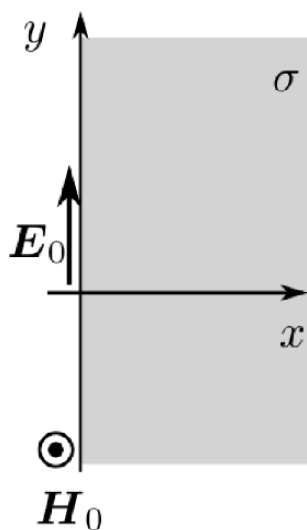
Комкин Михаил, Б01-303

18 декабря 2024 г.

Цель работы: Исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

Теоретическая часть

Скин-эффект для полупространства



Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор \mathbf{E} направлен всюду вдоль оси y и зависит только от координаты x , т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x, t)$. В квазистационарном приближении

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

Преобразуя это уравнение, можно получить уравнение, схожее с уравнением диффузии:

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

Точно такое же уравнение имеет место и для вектора \mathbf{E} :

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Подставляем в (2) наше электрическое поле $E_y = E_y(x, t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3)$$

Если $E_y(0, t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (3) будет функция вида

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad (4)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu \mu_0}} \quad (5)$$

Скин-эффект в тонком полем цилиндре

Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображении симметрии и непрерывности соответствующих компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \text{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1 \quad (6)$$

В прближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (1) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_0 , которое колебается с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\text{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \text{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4} \quad (7)$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0 . При $\delta \ll h$ (высокачастотная область)

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (8)$$

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

$$\text{tg } \psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi a h \sigma \mu_0 \nu \quad (9)$$

Рис. 1: Эл-магнитные поля в цилиндре

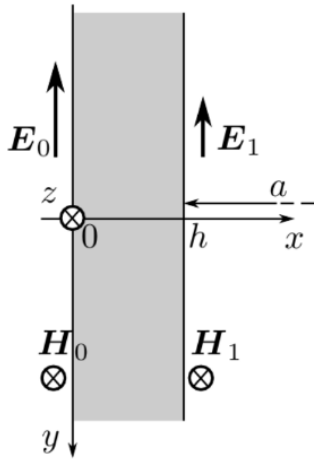


Рис. 2: Стенка цилиндра

Установка и процесс измерения

Переменное магнитное поле создается соленоидом 1, на который подается переменный ток со звукового генератора ЗГ. Внутри соленоида расположен медный экран 2. Магнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорциональна производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорциональна току через соленоид

$$H_0(t) \propto I(t)$$

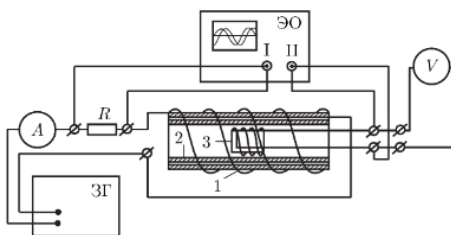


Рис. 3: Установка

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = c \cdot \frac{U}{\nu I} = \xi_0 \xi \quad (10)$$

где константу ξ_0 можно определить из условия $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow 0$.

При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени, поэтому измеренная на осциллографе разность фаз φ будет на $\frac{\pi}{2}$ больше реальной ψ :

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

1 Ход работы

Параметры нашей установки $2a = 45$ мм, $h = 1.5$ мм. Проводимость порядка $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$ См/м. Получаем оценку для частоты, при которой глубина проникновения равна толщине стенок цилиндра $\nu_h = 2300$ Гц.

2 Измерения амплитуд в области низких частот

В области низких частот толщина скин-слоя превосходит толщину образца $\delta \gg h$ и из (7) получаем

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|}\right)^2 = (\xi_0 \xi)^2 \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2} = \frac{1}{1 + (\pi ah \nu \mu_0 \sigma)^2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{\xi^2} = \xi_0^2 B^2 \nu^2 + \xi_0^2, \text{ где } B = \pi ah \sigma \mu_0$$

f , Гц	U , В	I , мА	ξ	$\frac{1}{\xi^2}$	f^2 , Гц ²
30	0.2116	459.02	0.01536607	4235.204642	900
35	0.2441	456.7	0.015271044	4288.076781	1225
40	0.2755	454.05	0.015169034	4345.944104	1600
50	0.3349	448.12	0.014946889	4476.085444	2500
60	0.3891	441.47	0.01468956	4634.281731	3600
70	0.4381	434.43	0.014406398	4818.248448	4900
75	0.466	430.8	0.014422779	4807.309492	5625
80	0.4819	427.19	0.014100868	5029.308509	6400
85	0.502	423.61	0.013941792	5144.732809	7225
90	0.5208	420.05	0.013776138	5269.204401	8100
100	0.5553	413.19	0.013439338	5536.614139	10000
115	0.5996	403.5	0.012921718	5989.071673	13225

Получаем следующие значения: $\xi_0^2 B^2 = 0.138$, $\xi_0^2 = 4212.65$, тогда:

$$\xi_0 = 64.11 \pm 4 \frac{\text{Гц}}{\text{Ом}}, \quad \sigma = (4.38 \pm 0.17) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

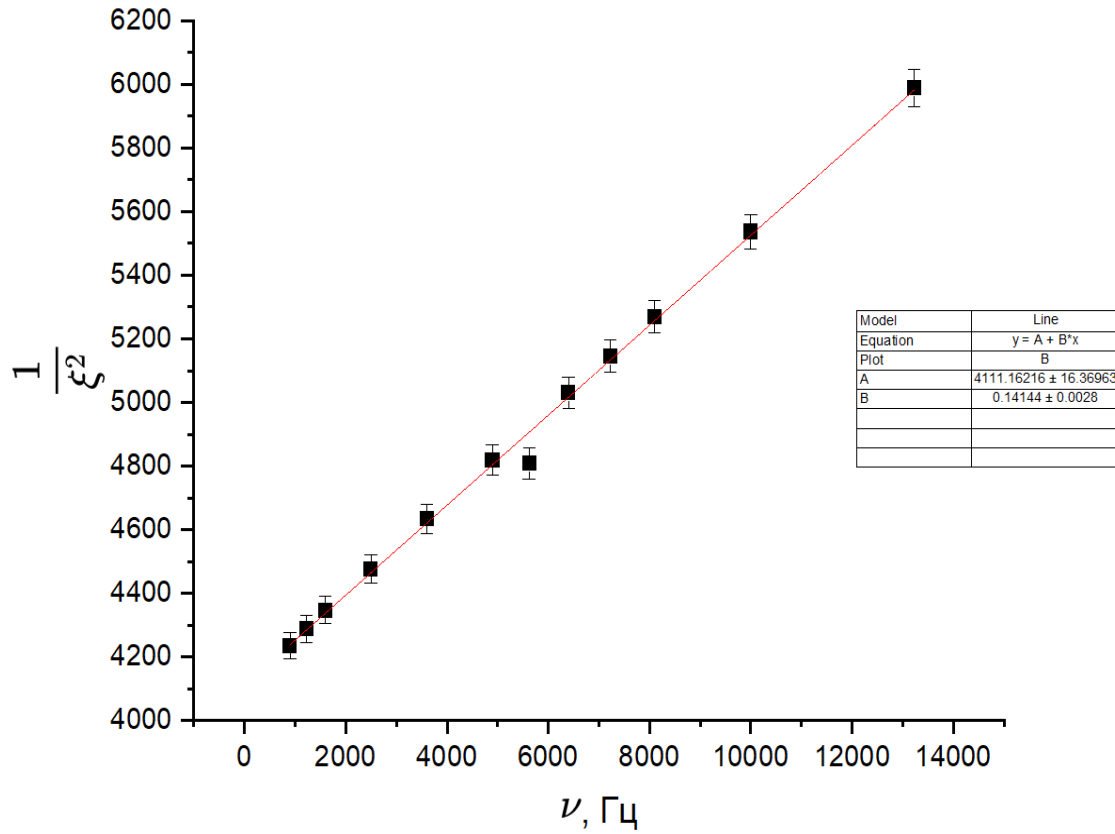


Рис. 4: График зависимости $1/\xi^2(\nu^2)$

3 Измерение проводимости через разность фаз в низкочастотном диапазоне

Согласно формуле (9), при $\delta \gg h$

$$\tan \psi = k \cdot \nu ; k = \pi a h \sigma \mu_0 \quad (\mu = 1)$$

Из коэффициента наклона прямой находим проводимость

$$\sigma = (4.74 \pm 0.23) \cdot 10^7 \text{ СМ/М} \quad (11)$$

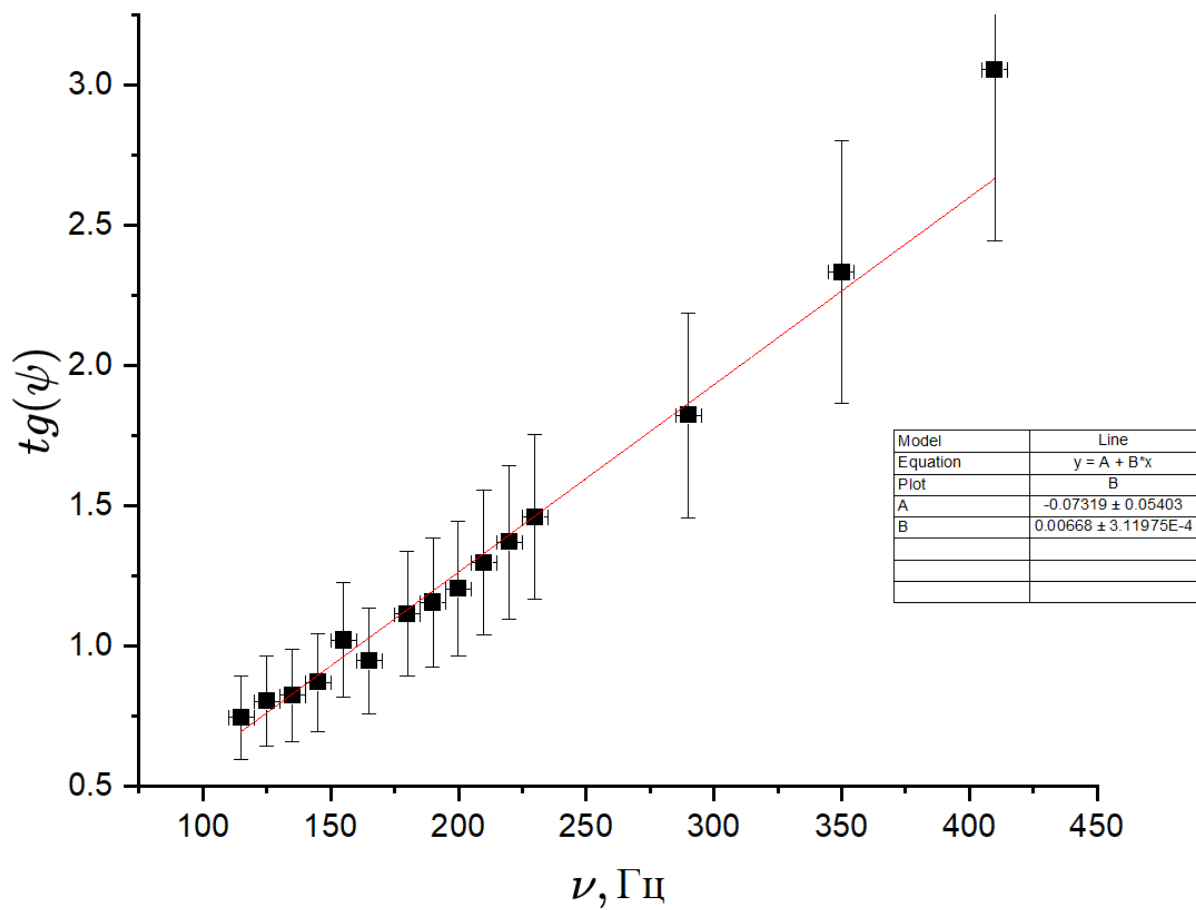


Рис. 5: График зависимости $\tan \psi(\nu)$ (линейная часть)

3.1 Измерение проводимости через разность фаз в высокочастотном диапазоне

Согласно формуле (8), при $\delta \ll h$

$$\psi - \pi/4 = k \cdot \sqrt{\nu}; \quad k = h\sqrt{\pi\mu_0\sigma}$$

f	I , мА	U , В	x_0 , см	Δx , см	ψ , °	$tg(\psi)$	$\varepsilon_{tg(\psi)}$
115	416.63	549.9	3.1	4.4	2.21	0.74	0.14
125	409.57	572.4	5.8	8.1	2.24	0.80	0.16
135	404	593.1	5.4	7.5	2.26	0.82	0.16
145	398.87	611.2	5.1	7	2.28	0.87	0.17
155	394.08	627.2	4.9	6.5	2.36	1.02	0.20
165	389.63	641.2	4.6	6.2	2.32	0.94	0.18
180	383.57	659.2	4.3	5.6	2.41	1.11	0.22
190	379.9	669.5	4.1	5.3	2.42	1.15	0.23
200	376.5	678.5	3.9	5	2.44	1.20	0.24
210	373.36	686.4	3.8	4.8	2.48	1.29	0.25
220	370.44	693.6	3.6	4.5	2.51	1.37	0.27
230	367.76	699.9	3.4	4.2	2.54	1.46	0.29
290	354.98	725.1	7.4	8.8	2.64	1.82	0.36
350	345.97	736.9	6.8	7.8	2.73	2.33	0.46
410	339.06	741.5	5.4	6	2.82	3.05	0.61
470	333.24	741.9	4.9	5.1	3.01	7.92	1.58
530	328.06	739.5	8.8	9.5	2.90	4.19	0.83
590	323.21	735.2	8	8.5	2.95	5.28	1.05
650	318.56	729.3	7.3	7.7	2.97	5.98	1.19
710	313.95	722.3	6.9	7.1	3.05	10.97	2.19
770	309.35	714.5	6.3	6.6	2.99	6.84	1.36
830	304.77	706	5.9	6.1	3.03	9.45	1.89
890	300.21	696.9	5.55	5.7	3.05	11.73	2.34
950	295.6	687.4	5.2	5.3	3.08	16.20	3.24
1010	290.99	677.6	5.9	6	3.08	18.25	3.65

Из графика получаем следующее значение проводимости

$$\sigma = (4.28 \pm 0.33) \cdot 10^7 \text{ См/м} \quad (12)$$

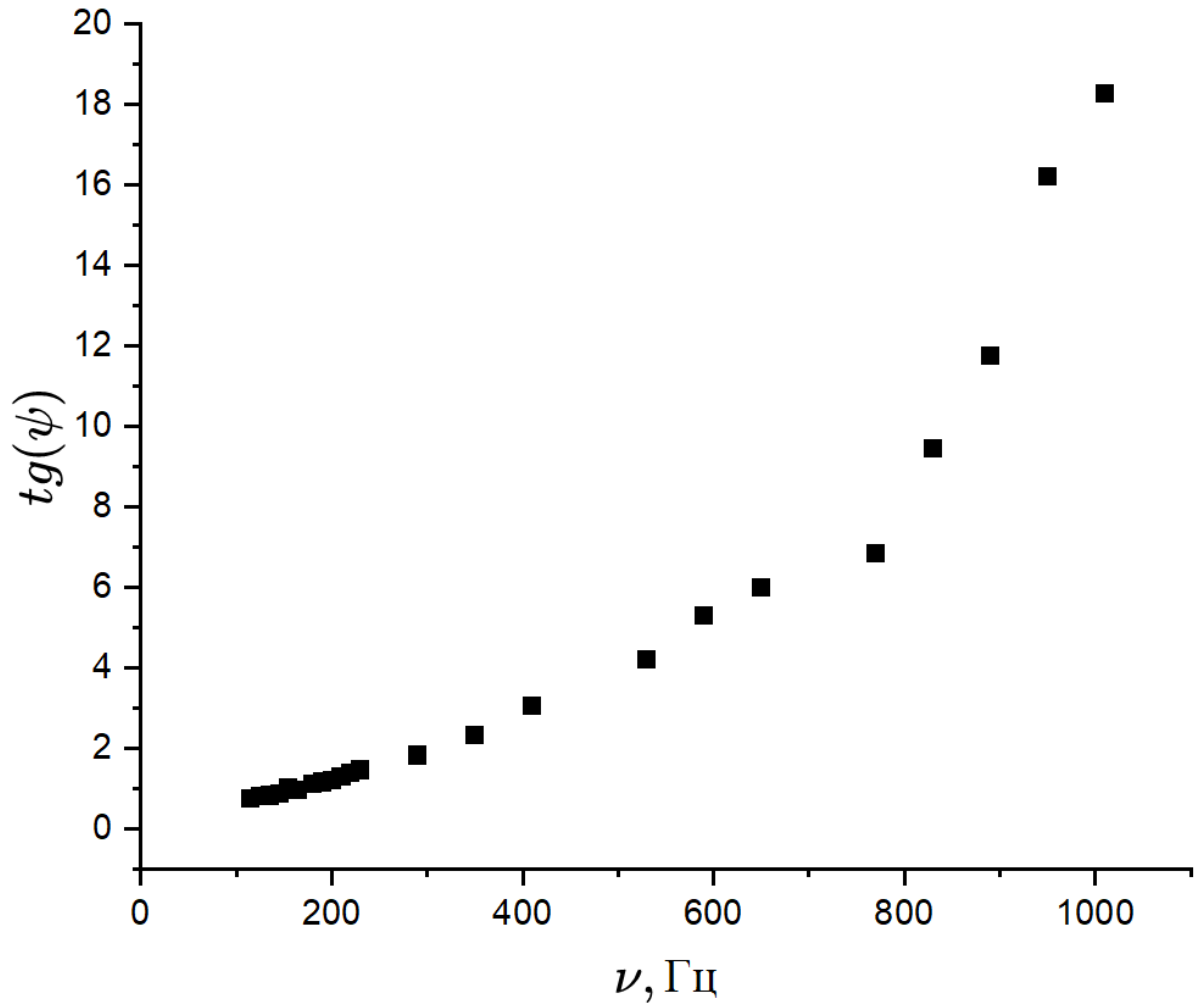


Рис. 6: График зависимости $\tan \psi(\nu)$ (нелинейная часть)

3.2 Измерение проводимости через изменение индуктивности

Из за наличия цилиндра внутри, индуктивность внешней катушки зависит от катушки следующим образом

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = \pi^2 a^2 h^2 \mu_0^2 \sigma^2 \nu^2$$

f, Γ_{Π}	I, mA	U, B	x_0, cm	$\Delta x, \text{cm}$	$\psi, ^\circ$	$\psi - \pi/4, ^\circ$	$\sqrt{\nu}, \sqrt{\Gamma_{\Pi}}$	$\varepsilon\psi - \pi/4$
1070	286.37	667.6	4.6	4.6	3.14	0.785	32.71085447	0.0785
1130	281.71	657.3	4.2	4.2	3.14	0.785	33.61547263	0.0785
1337	265.94	621.1	7.7	7.6	3.181315789	0.826315789	36.5650106	0.082631579
1588	247.27	577.5	6.6	6.4	3.238125	0.883125	39.84971769	0.0883125
1882	226.93	529.2	5.6	5.4	3.256296296	0.901296296	43.38202393	0.09012963
2231	205.33	477.4	4.9	4.6	3.344782609	0.989782609	47.23346271	0.098978261
2645	183.3	424	4.2	3.8	3.470526316	1.115526316	51.42956348	0.111552632
3135	161.67	371.1	8.8	8	3.454	1.099	55.99107072	0.1099
3716	141.08	320.5	7.6	6.7	3.561791045	1.206791045	60.95900262	0.120679104
4405	122.01	273.2	6.6	5.7	3.635789474	1.280789474	66.37017402	0.128078947
5521	99.47	216.9	5.5	4.5	3.837777778	1.482777778	74.30343195	0.148277778
6189	89.31	191.3	10.2	8.2	3.905853659	1.550853659	78.67019766	0.155085366
7337	75.67	157	7.8	5.9	4.151186441	1.796186441	85.6562899	0.179618644
8697	63.8	127.1	7.7	5.9	4.097966102	1.742966102	93.25770746	0.17429661
10309	53.3	101.4	6.8	4.9	4.35755102	2.00255102	101.5332458	0.200255102
12220	43.643	79	7	5.1	4.309803922	1.954803922	110.5441088	0.195480392
14485	35.57	61.7	5.3	3.5	4.754857143	2.399857143	120.3536456	0.239985714
17170	28.237	47.8	9.4	6	4.919333333	2.564333333	131.0343466	0.256433333
20353	21.464	37.1	8.4	5.1	5.171764706	2.816764706	142.6639408	0.281676471
24126	15.043	29.3	7.4	4.4	5.280909091	2.925909091	155.3254648	0.292590909
28599	8.764	22.7	6.5	3.6	5.669444444	3.314444444	169.1123887	0.331444444
33900	2.8591	13.9	6.4	3.1	6.482580645	4.127580645	184.1195264	0.412758065

ν, Γ_{Π}	$L, \text{m}\Gamma$	ν^2, Γ_{Π}^2	$\frac{L_{max}-L_{min}}{L-L_{min}}$
40	12.3	0.0016	1
100	8.6868	0.01	1.622128861
200	6.2125	0.04	2.826158692
300	4.823	0.09	4.846193416
400	4.1035	0.16	7.693752552
500	3.7053	0.25	11.40142805
600	3.60369	0.36	13.0000414
750	3.2618	0.5625	24.6107628
800	3.2125	0.64	28.24887556
1000	3.09	1	44.6492891
1500	2.9612	2.25	114.6107056
10000	2.9515	100	129.9448276
15000	3.165	225000	32.94055944
20000	3.595	400000	13.15782123
25000	3.473	625000	15.86026936

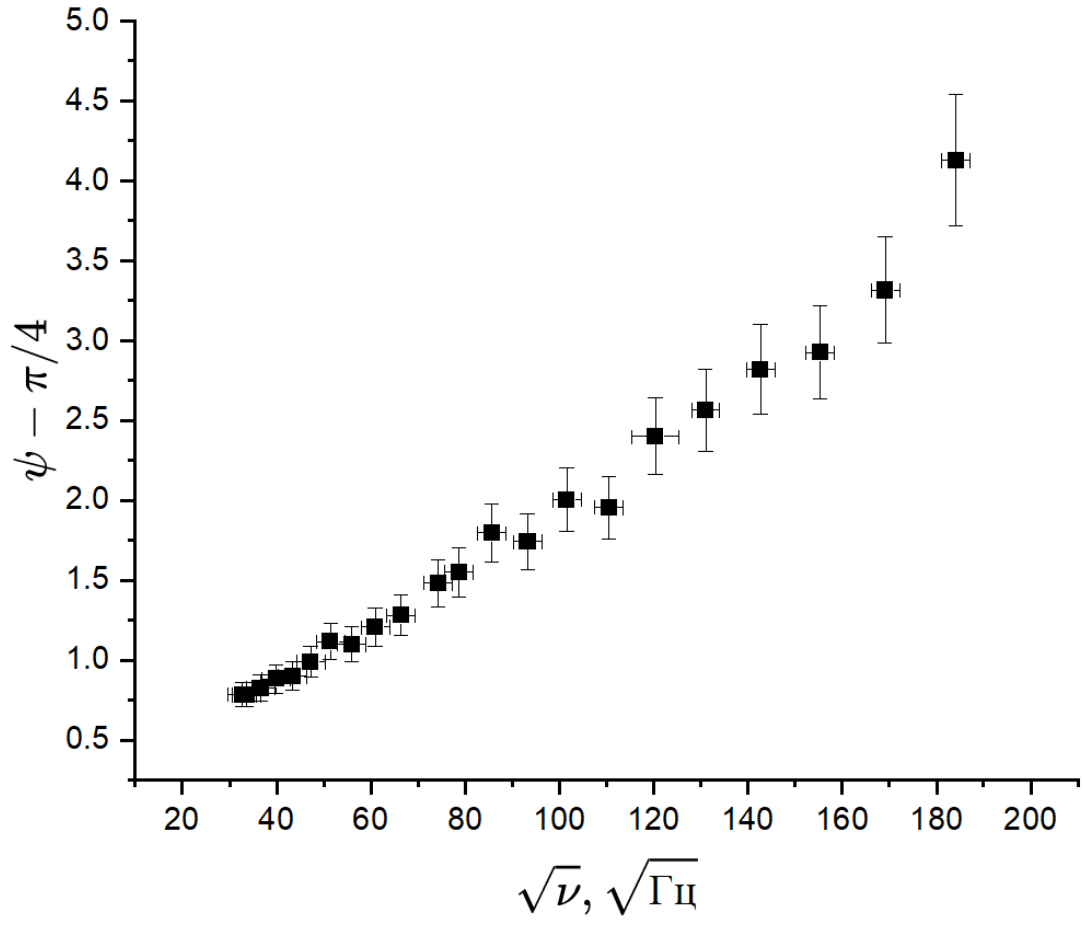


Рис. 7: График зависимости $(\psi - \pi/4)(\sqrt{\nu})$ (без аппроксимации)

$$\sigma = (4.54 \pm 0.27) \cdot 10^7 \text{СМ/М} \quad (13)$$

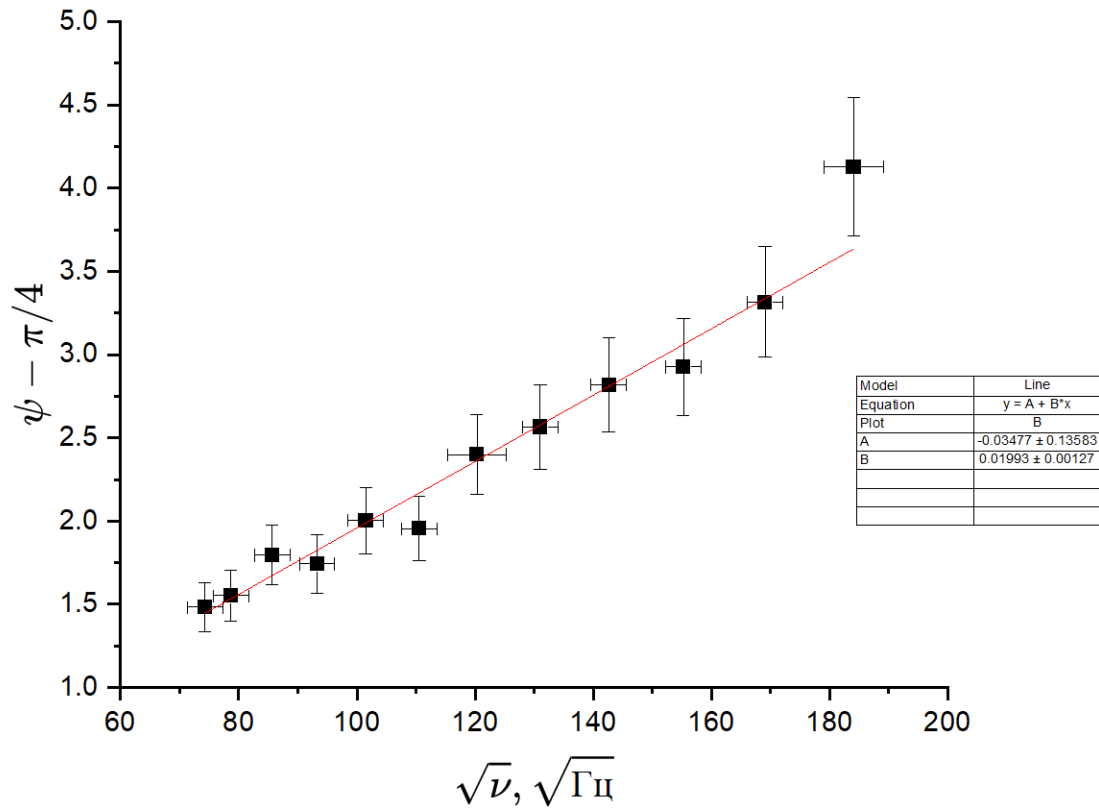


Рис. 8: График зависимости $(\psi - \pi/4)(\sqrt{\nu})$ (с аппроксимацией)

3.3 Отношение магнитных полей

Отношение $|H_1|/|H_0|$ можем посчитать двумя способами. Первый способ - через формулу (10), используя значение s из пункта (2.1). Второй способ - через теоретическую формулу (7), используя значение σ из пункта (2.1). Посмотрим на их различие с помощью графиков зависимости $|H_1|/|H_0|(\nu)$

Выводы

В данной лабораторной работе мы измеряли удельную проводимость меди 4-мя различными способами с помощью явления скин-эффекта. Запишем результаты в общую таблицу:

Метод измерения	$\sigma, 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$	$\Delta\sigma, 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$	ε_σ
Отношение амплитуд	4.38	0.17	3.9%
Разности фаз (низкие частоты)	4.74	0.23	4.85%
Разности фаз (высокие частоты)	4.28	0.33	7.71%
Индуктивность	4.54	0.27	5.94%

Таблица 1: Сравнение результатов различных методов

В работе использовалась медь марки МЗ, для которой $\sigma_{\text{табл}} = 5.62 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$. Полученные нами значения совпадают по порядку, но, все же, немного ниже табличного значения. Несовпадение может быть вызвано многими факторами, например наводкой поля в соединительных проводах и пренебрежением размерами медного цилиндра и соленоида.

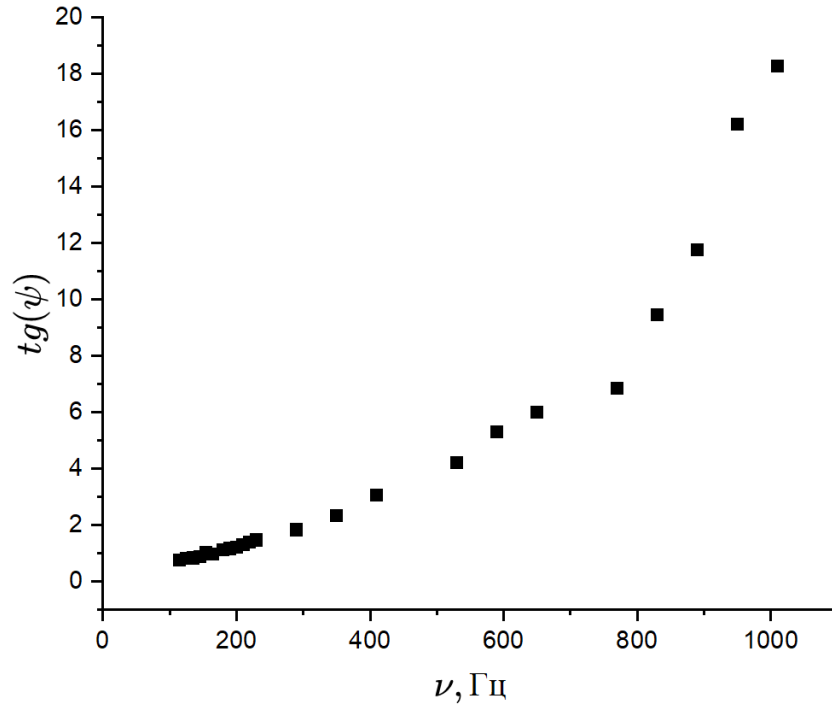


Рис. 9: График зависимости $L(\nu)$

Методы измерения через разность фаз дали высокие погрешности, потому что измерения делались на глаз на осциллографе, и гарантировать их точность можно только с введенной погрешностью. Кроме того, при измерении на высоких частотах зависимость не является везде линейной, это тоже приносит свою неточность.

Что касается зависимости $\frac{|H_1|}{|H_0|}(\nu)$, то экспериментальные данные очень хорошо согласуются с теоретической зависимостью.

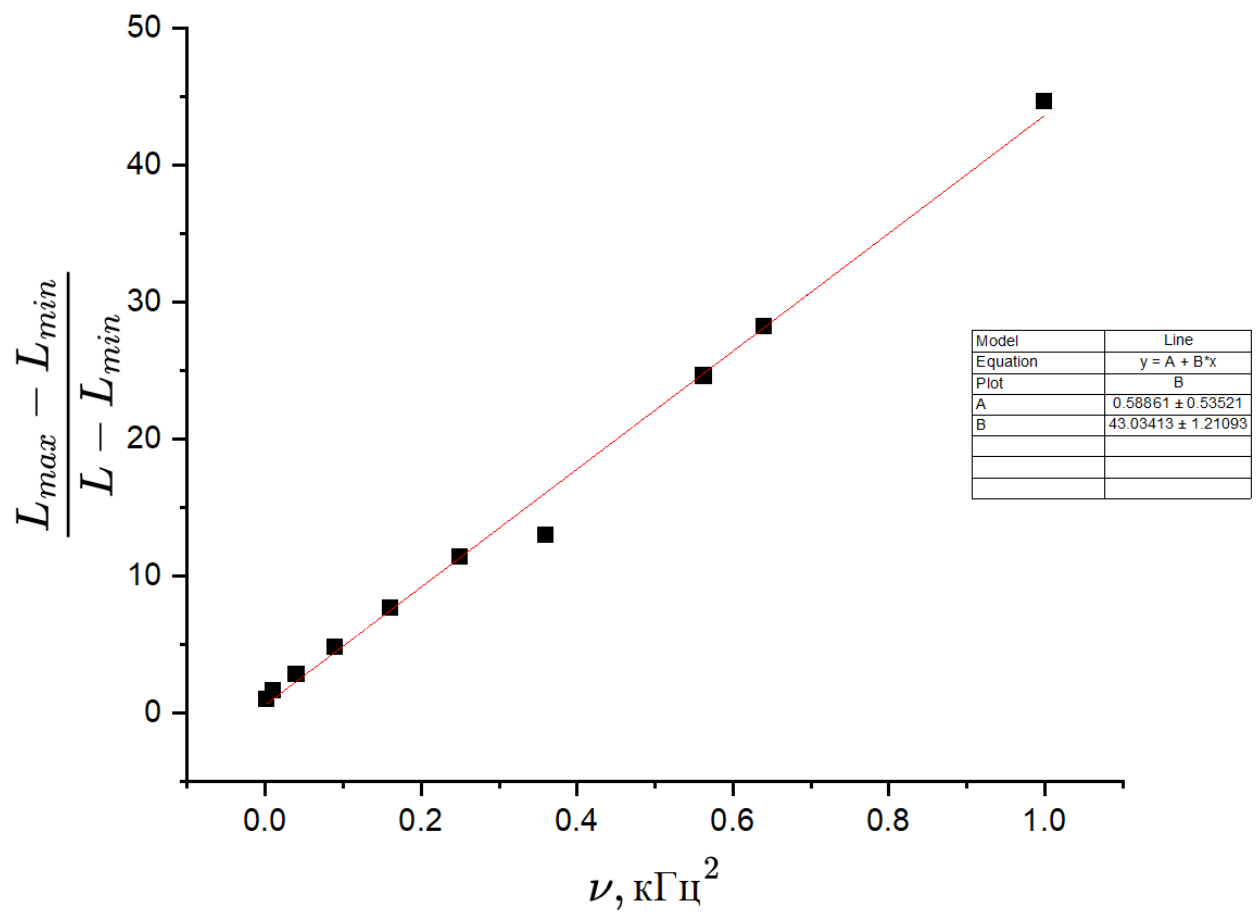


Рис. 10: График зависимости $\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}}(\nu^2)$

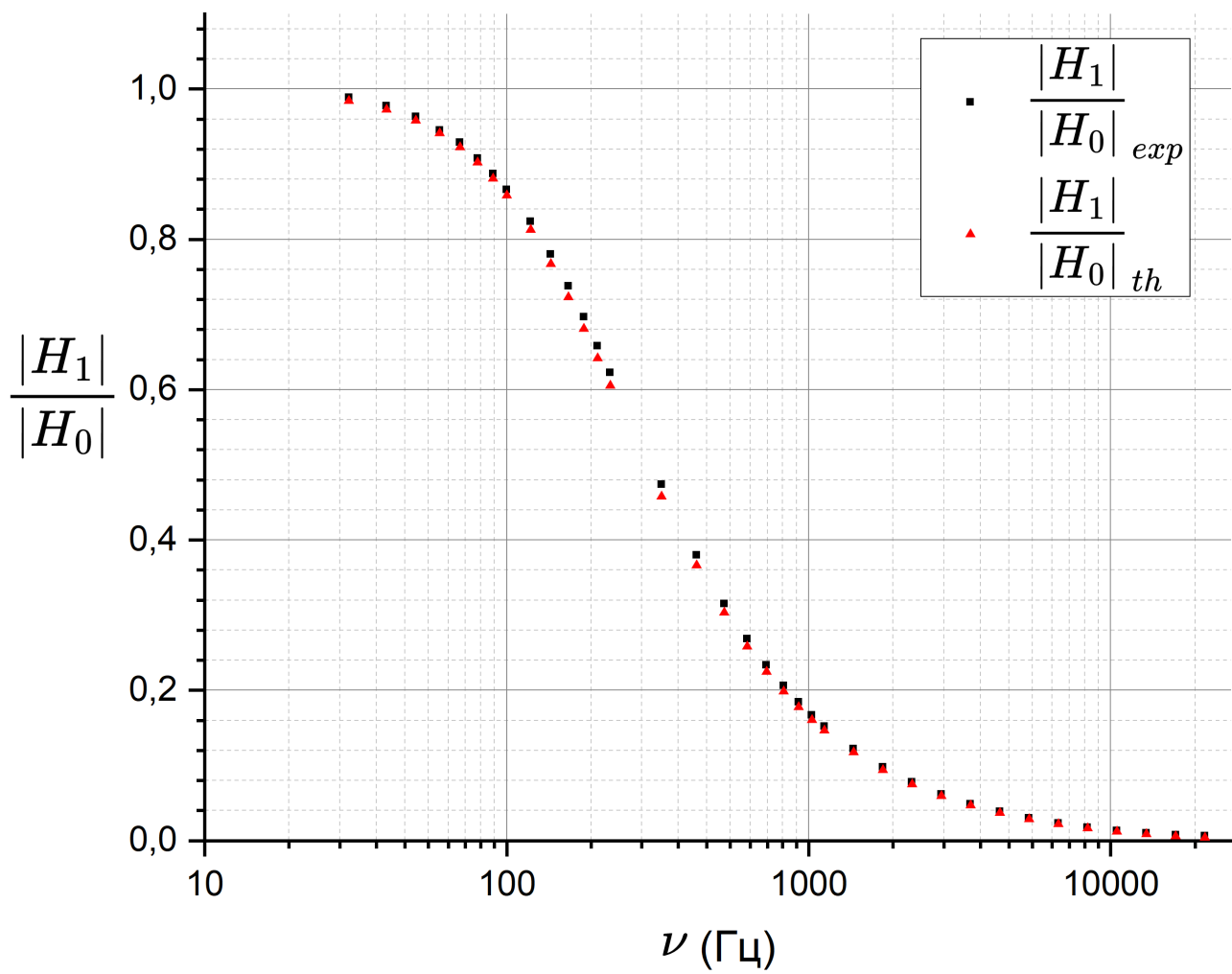


Рис. 11: График зависимости $\frac{H_1}{H_0}(\nu)$