

# Отчет о выполнении лабораторной работы 3.4.1

## Спектральный анализ электрических сигналов

Комкин Михаил, группа Б01-303

14 декабря 2024 г.

**Цель работы:** Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.  
**В работе используются:** анализатор спектра (аналоговый или цифровой), генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

### 1 Теоретическое введение

#### Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

Здесь  $\frac{a_0}{2}$  - среднее значение функции  $f(t)$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (3)$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (4)$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $a_n$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда  $T$  кратно  $\tau$ ).

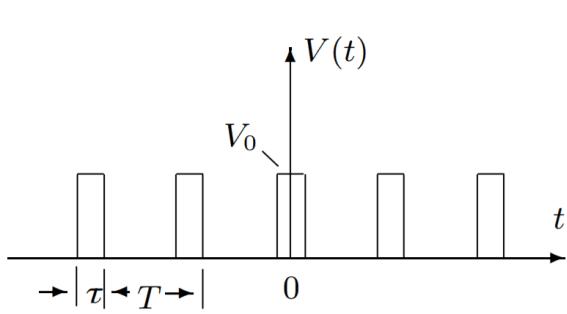


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

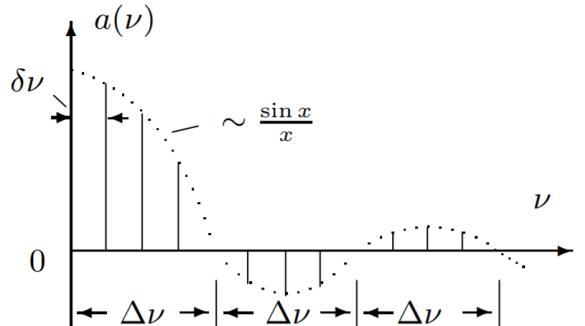


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Назовем *шириной спектра*  $\Delta\omega$  расстояние от главного максимума ( $\omega = 0$ ) до первого нуля огибающей, возникающего при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (5)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. 3).

Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (6)$$

Зависимость для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы с, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

3. **Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (7)$$

Коэффициент  $m$  называют **глубиной модуляции**. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

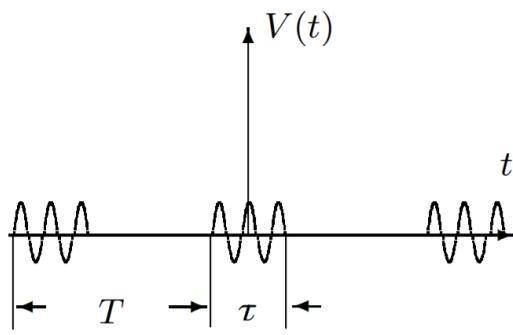


Рис. 3: Последовательность цугов

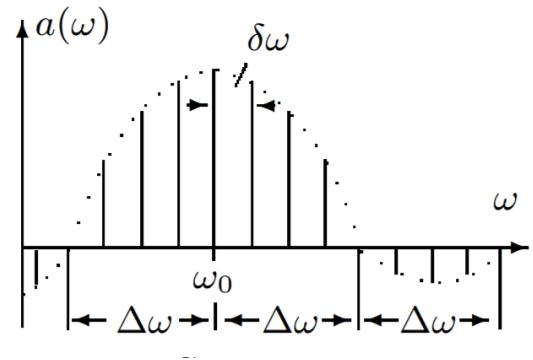


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \quad (8)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (9)$$

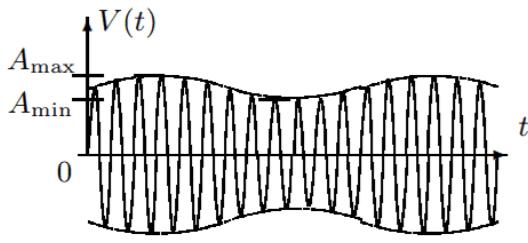


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

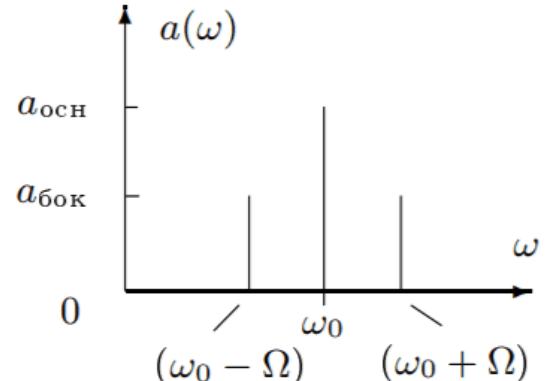


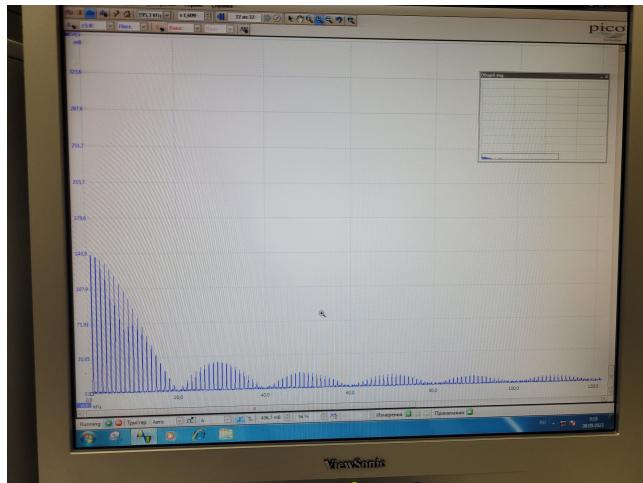
Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a = A_0$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ . Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $\frac{m}{2}$  от амплитуды немодулированного колебания:  $a = \frac{A_0 m}{2}$ . Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

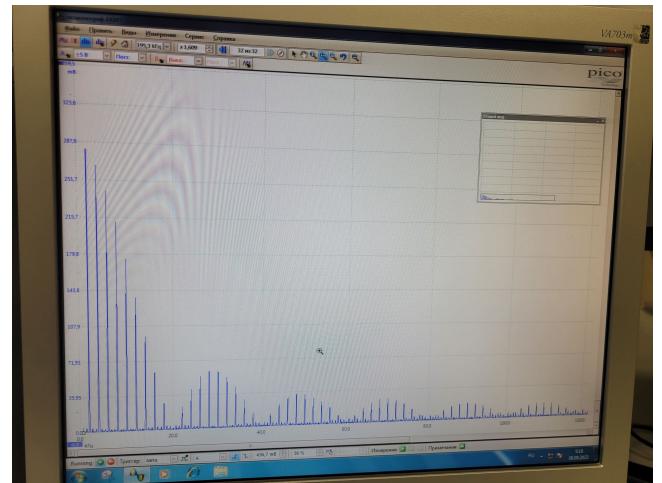
## 2 Ход работы

### A. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

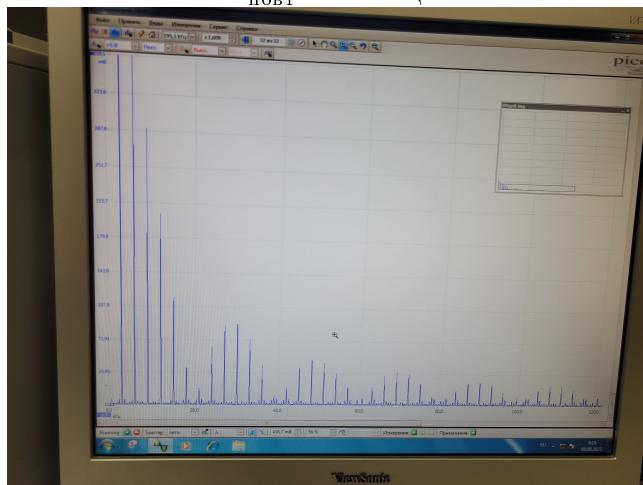
1. Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$  (период  $T = 1 \text{ мс}$ ) и длительностью импульса  $\tau = T/20 = 50 \text{ мкс}$ .
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.
  - а. Изменяя  $\nu_{\text{повт}}$  при фиксированном  $\tau = 50 \text{ мкс}$  и получаем:



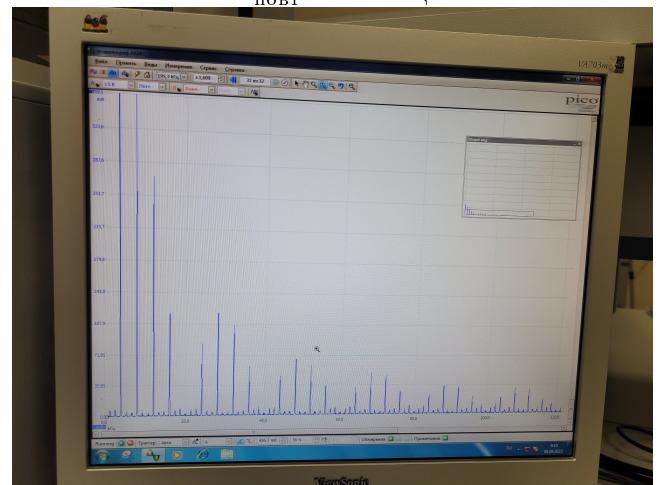
$$\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 3 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 4 \text{ кГц}$$

Рис. 7:

Как видно из графиков, при увеличении частоты повторения сигнала увеличивается расстояние между компонентами спектра.

6. Изменяем  $\tau$  при фиксированном  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$  и получаем:

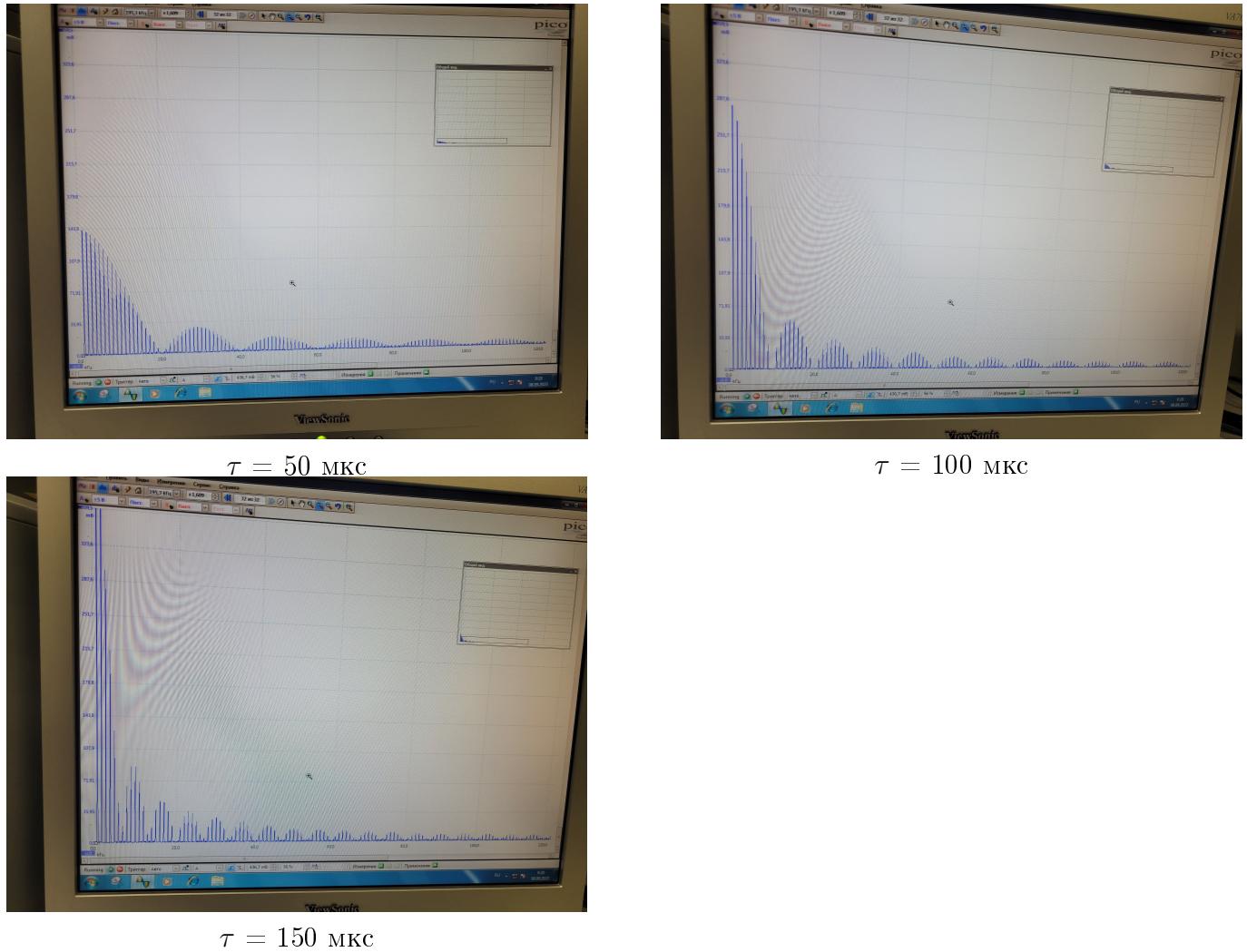


Рис. 8:

Как видно из графиков, при увеличении длительности сигнала уменьшается ширина спектра.

3. Измерим амплитуды  $a_n$  и частоты  $\nu_n$  спектральных гармоник при фиксированных  $\nu_{\text{повт}}$  и  $\tau$ .

$n$ гармоники	5	7	9	11	13	15	17	19
$\nu_n^{\text{эксп}}, \text{ кГц}$	5.078	7.092	8.904	11.12	13.03	15.15	16.76	19.17
$\nu_n^{\text{теор}}, \text{ кГц}$	5	7	9	11	13	15	17	19
$ a_n ^{\text{эксп}}, \text{ мВ}$	125.9	112.3	94.73	73.98	54.58	37.44	20.75	4.962
$ a_n/a_1 _{\text{эксп}}$	0.876	0.781	0.659	0.515	0.380	0.261	0.144	0.034
$ a_n/a_1 _{\text{теор}}$	0.904	0.814	0.702	0.574	0.438	0.301	0.171	0.052

Здесь  $a_1 = 143.8 \text{ мВ}$ .

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}$$

$$|a_n|_{\text{теор}} = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n}$$

4. Зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала  $T = 1 \text{ мс}$ ,  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ . Изменяя длительность импульса  $\tau$  в диапазоне от  $\tau = T/50$  до  $\tau = T/5$ , измерим полную ширину

спектра сигнала  $\Delta\nu$  — от центра спектра ( $\nu = 0$ ) до гармоники с нулевой амплитудой  $a_n \approx 0$  и установим зависимость между  $\Delta\nu$  и  $\tau$ .

$\tau, \text{ мкс}$	20	25	40	50	100	150	200
$\Delta\nu, \text{ кГц}$	49.68	39.71	24.61	19.98	9.91	6.84	4.93
$1/\tau \cdot 10^3, \text{ с}^{-1}$	50	40	25	20	10	7	5

Таблица 1: Исследование зависимости  $\Delta\nu$  и  $\tau$

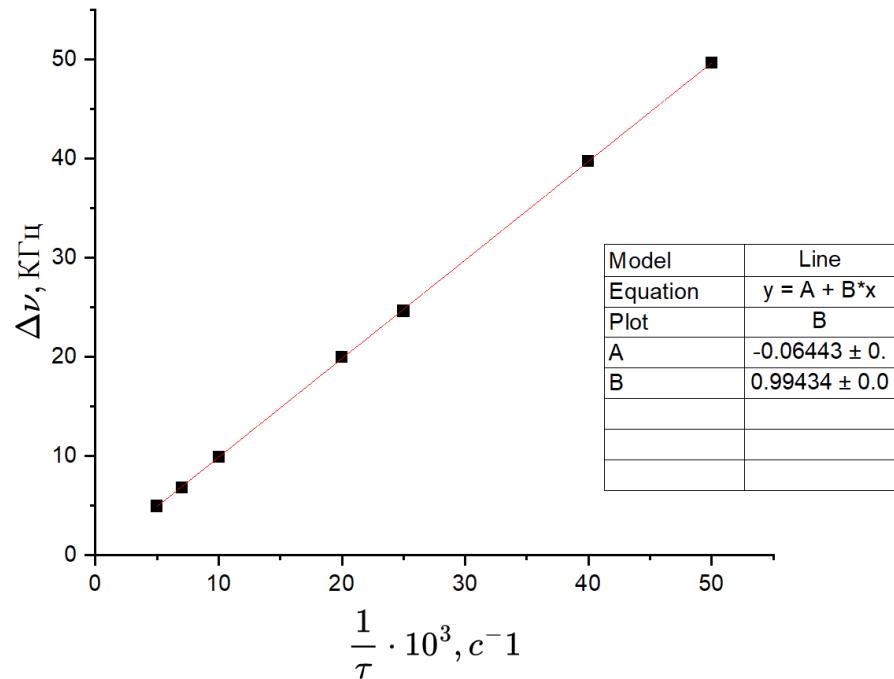


Рис. 9: Зависимость  $\Delta\nu$  от  $1/\tau$

По графику видно, что действительно  $\Delta\nu \frac{1}{\tau} = (0.99 \pm 0.02)$

5. Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала  $\tau = 100\text{мкс}$ . Изменяя период повторения  $T$  в диапазоне от  $2\tau$  до  $50\tau$  измерим расстояния  $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$  между соседними гармониками спектра.

$\nu, \text{ кГц}$	5	2	1	0.5	0.25	0.1
$\delta\nu, \text{ кГц}$	5.036	1.927	1.008	0.510	0.253	0.206

Таблица 2: Зависимость  $\delta\nu$  от  $1/T$

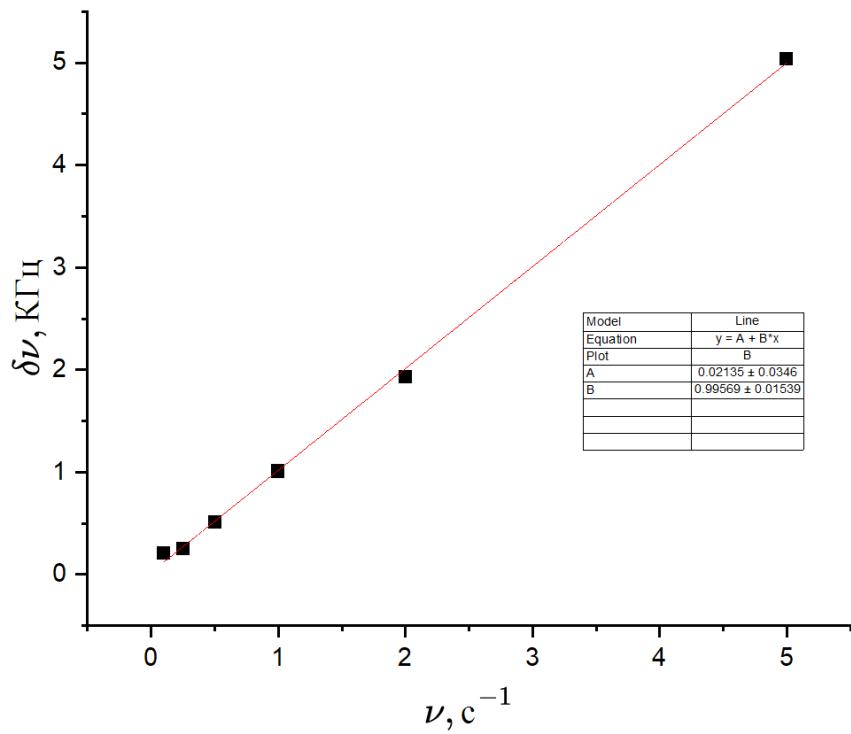


Рис. 10: Зависимость  $\delta\nu$  от  $1/T$

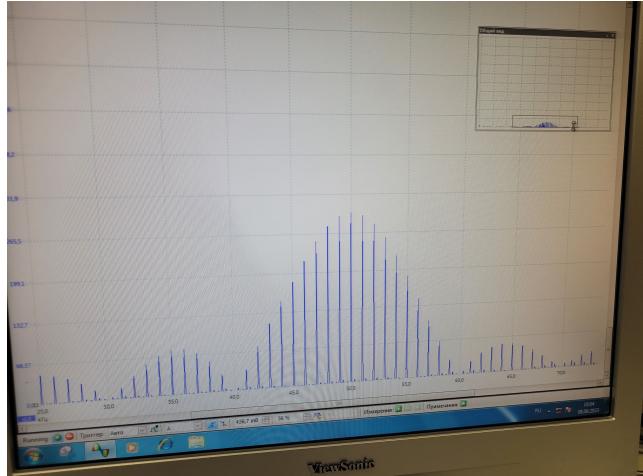
По графику видно, что соотношение неопределенностей выполняется ( $k = (0.99 \pm 0.03)$ ).

## Б. Наблюдение спектра периодической последовательности щугов

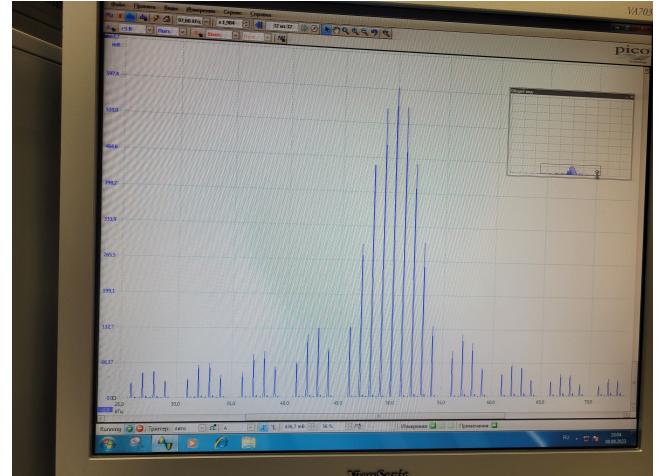
1. Настраиваем генератор на периодичные импульсы синусоидальной формы (щугов) с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц, число периодов синусоиды в одном импульсе  $N = 5$  (что соответствует длительности импульса  $\tau = N/\nu_0 = 100$  мкс).

2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.

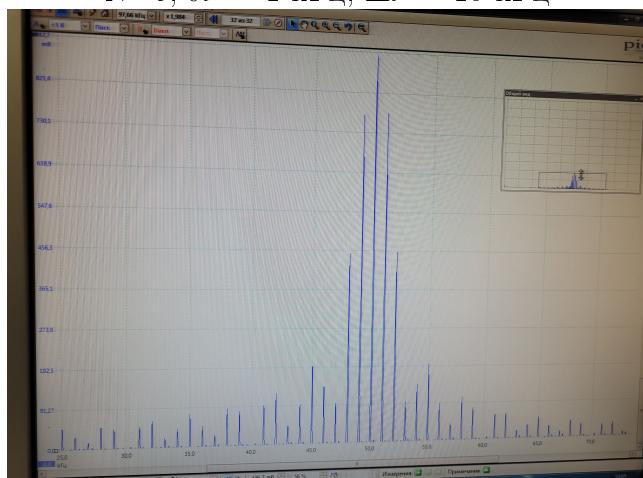
a. Изменяем  $N$  при фиксированных  $\nu_0 = 50$  кГц и  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц:



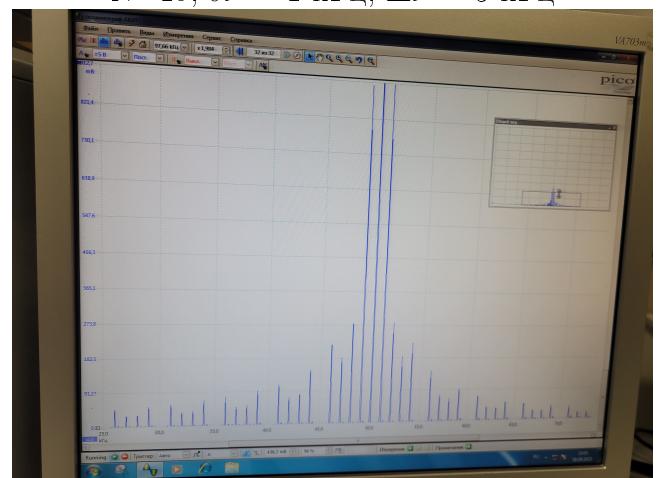
$N=5, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu = 10$  кГц



$N=10, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu = 5$  кГц



$N=15, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu = 3$  кГц



$N=20, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu = 2.5$  кГц

Рис. 11:

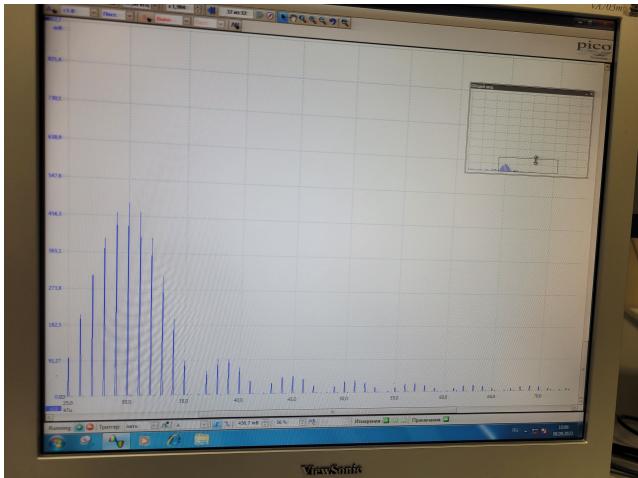
Погрешность измерения  $\Delta\nu = 10$  Гц

Соотношение неопределённостей:

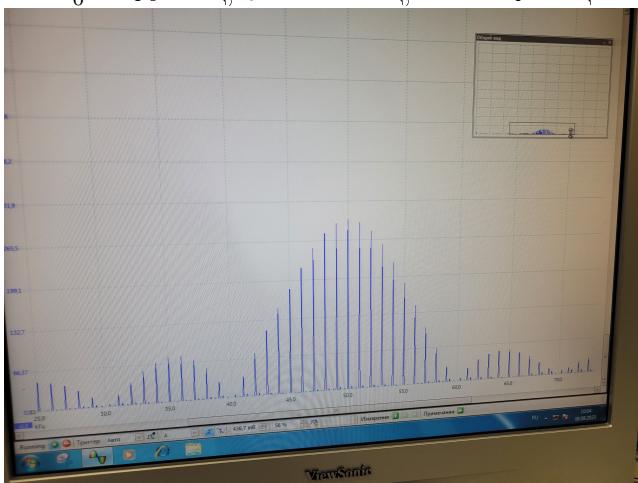
$$\Delta\nu \cdot \tau = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^3 \frac{10}{50 \cdot 10^3} = 2.5 \cdot 10^3 \frac{20}{50 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^3 \frac{15}{50 \cdot 10^3} = (0.99 \pm 0.03)$$

Видим, что спектр остаётся симметричным относительно одной и той же точки, но сжимается к ней при увеличении  $N$ .

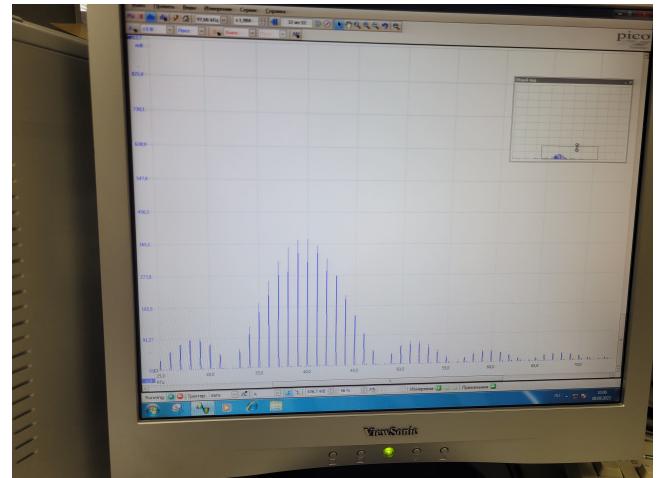
б. Изменяем  $\nu_0$  при фиксированных  $N = 5$  и  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ :



$$\nu_0 = 30 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 6 \text{ кГц}$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$



$$\nu_0 = 40 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 8 \text{ кГц}$$

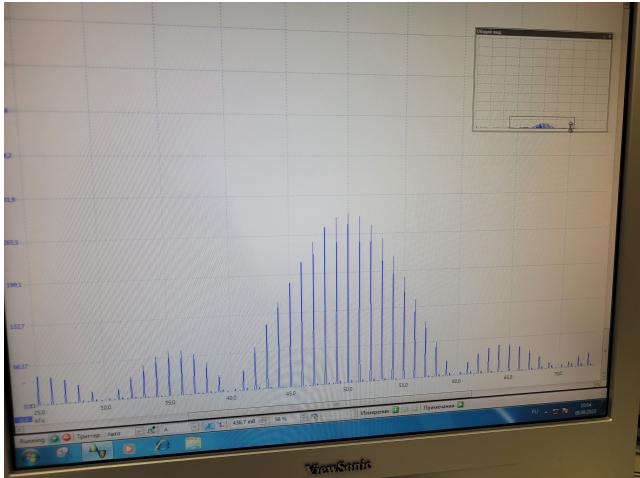
Рис. 12:

Соотношение неопределённостей:

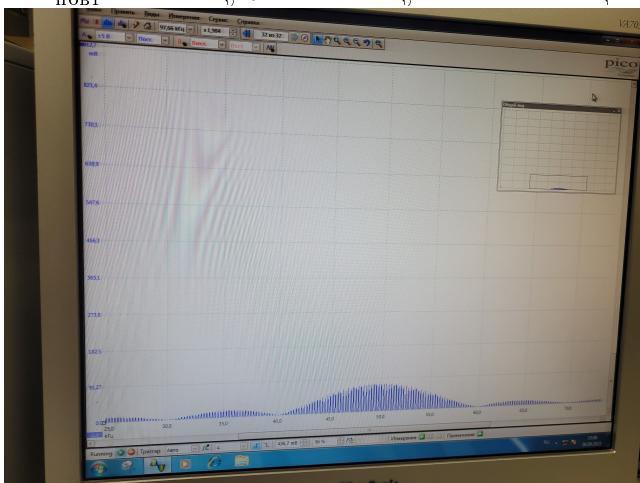
$$\Delta\nu \cdot \tau = 6 \cdot 10^3 \frac{5}{30 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^3 \frac{5}{40 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = (1.01 \pm 0.03)$$

Видим, что в этом случае спектр не меняет свою форму, однако его центр смещается в соответствии с изменением частоты несущей.

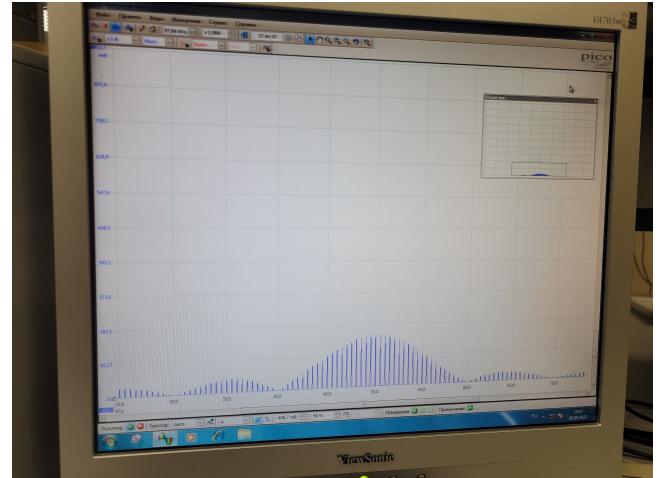
в. Изменяем  $\nu_{\text{повт}}$  при фиксированных  $N = 5$  и  $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$ :



$$\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 0.5 \text{ кГц}, \delta\nu = 0.5 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 0.25 \text{ кГц}, \delta\nu = 0.25 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$

Рис. 13:

Видно, что соотношение неопределённости выполняется:

$$\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = \frac{1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = \frac{0.5 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 10^3} = \frac{0.25 \cdot 10^3}{0.25 \cdot 10^3} = (0.97 \pm 0.03)$$

Также видно, что при стремлении частоты повторения к нулю, стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

## Г. Наблюдение спектра амплитудно-модулированного сигнала

- Настраиваем генератор в режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и глубиной модуляции  $m = 0.5$ .
- Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала. Из графика получим  $A_{\max} = 3.057$  мВ и  $A_{\min} = 1.027$  мВ и убедимся в справедливости соотношения

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{2.03}{4.084} = (0.51 \pm 0.05)$$

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0,5, а из теории у нас получилась 0,497, то мы видим, что формула верна.

- Изменяя на генераторе глубину модуляции  $m$  в диапазоне от 10 % до 100 % (всего 6-8 точек), измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ . Построим график зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$  и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

$m, \%$	10	20	30	40	50	80	100
$a_{\text{бок}}, \text{мВ}$	69.02	136.3	207.1	283.2	352.2	559.2	669.0
$a_{\text{осн}} = 1318$ мВ							
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.05	0.10	0.16	0.21	0.27	0.42	0.51

Таблица 3. Исследование зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$ .

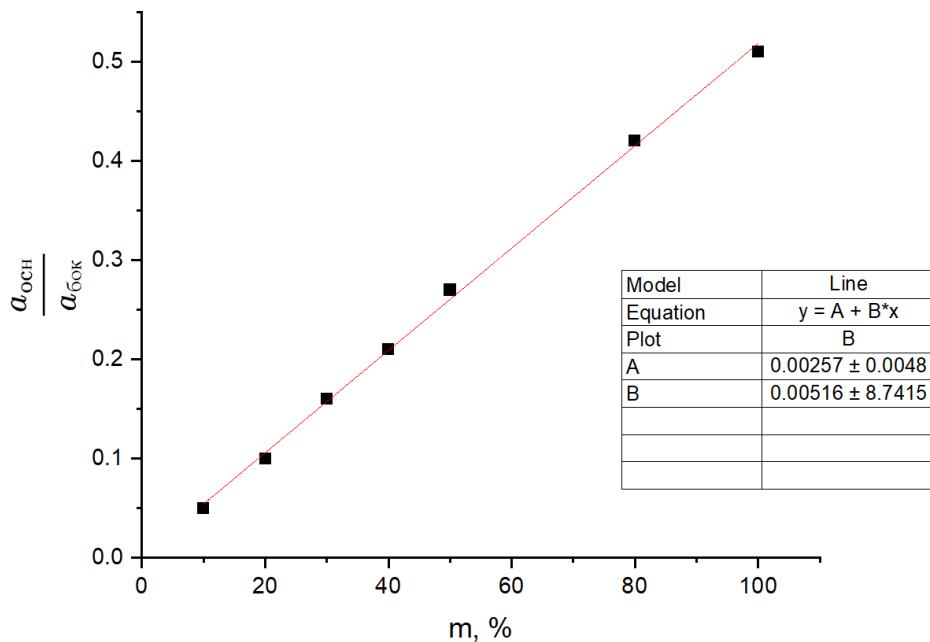
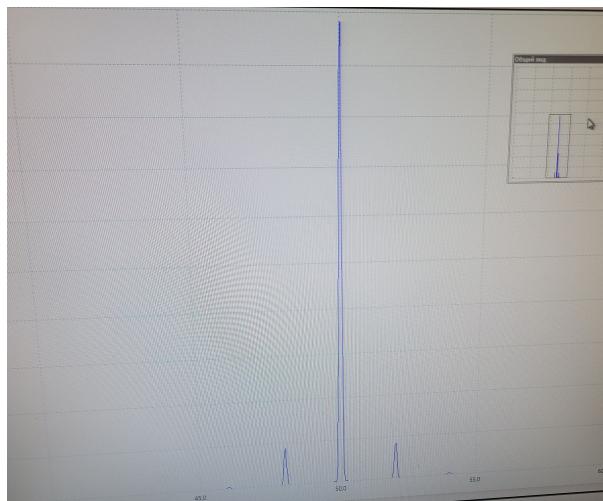


Рис. 14: Зависимость  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$

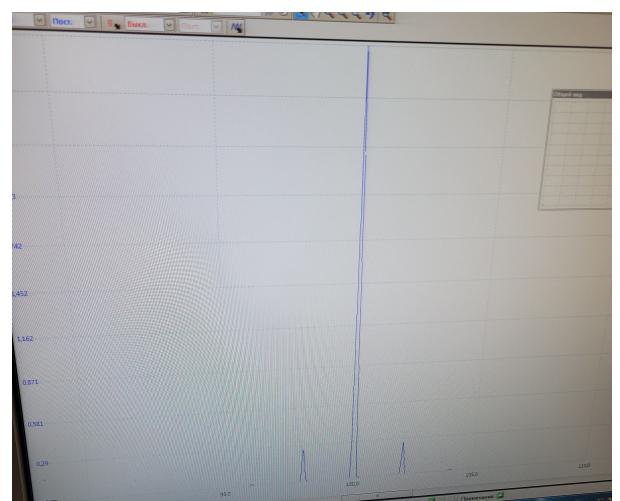
Построим график  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$ . Действительно,  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = (0.256 \pm 0.003)$ .

## Д. Наблюдение спектра сигнала, модулированного по фазе

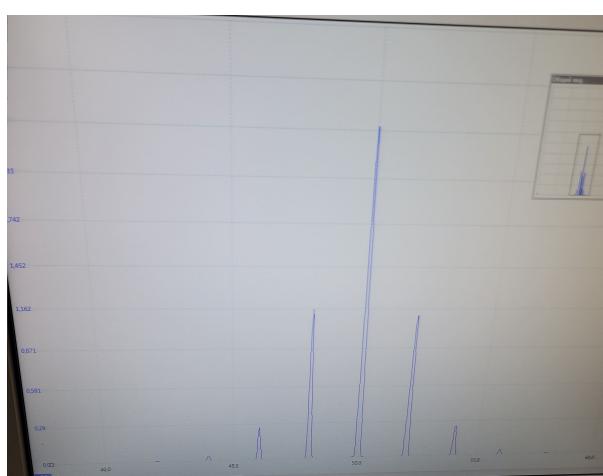
1. Настраиваем генератор в режим модулированного по фазе синусоидального сигнала с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и максимальным отклонением (глубиной модуляции)  $\varphi = 10^\circ$ .
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



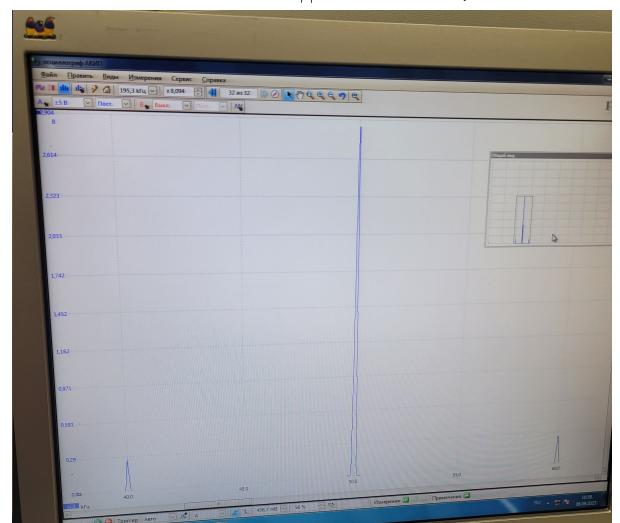
$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$



$$\nu_0 = 100 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$

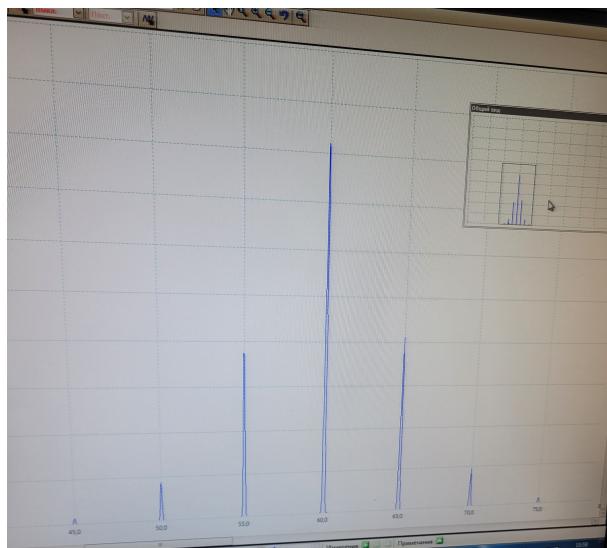


$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 50^\circ$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 10 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$

Рис. 15:



$$\nu_0 = 60 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 5 \text{ кГц}, \varphi = 50^\circ$$

### **3 Обсуждение результатов и выводы**

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов, а точнее прямоугольных импульсов, пугов гармонических колебаний, гауссиан, гармонических сигналов, модулированных по амплитуде и частоте, а также проанализировали фильтрацию сигналов при прохождении их через  $RC$  контур. Проверили частный случай выполнения соотношения неопределённости.