

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Отчет по лабораторной работе №3.2.5
**Свободные и вынужденные
колебания в электрическом контуре**

Работу выполнил:

Комкин Михаил

Валерьевич

Группа: Б01-303

Цель работы: Исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

1. Теоретические сведения:

1) Введение

Рассмотрим RLC -контур. Запишем II правило Киргхофа:

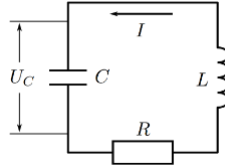


Рис. 1: LCR-контур

$$IR + U_C + L\dot{I} = 0 \quad (1)$$

Так как $U_C = \frac{q}{C}$ и $I = \dot{q}$, то

$$CL\frac{d^2U_C}{dt^2} + CR\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$\gamma = \frac{R}{2L} - \text{коэффициент затухания}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \text{собственная круговая частота}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} - \text{период собственных колебаний}$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0 \quad (3)$$

2) Затухающие колебания ($0 < \gamma < \omega_0$)

Отметим, что условие возникновения этого режима можем переписать в виде:

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{кр}} \quad (4)$$

При таком соотношении параметров решение будет иметь вид:

$$U_C(t) = U_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \quad (5)$$

где U_0 и φ_0 – константы, определяемые из начальных условий, а

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (6)$$

называется круговой частотой свободных затухающих колебаний.

Представим решение в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t}(a \cos(\omega_1 t) + b \sin(\omega_1 t)) \quad (7)$$

Так как $I = \dot{q} = C\dot{U}_C$, то

$$I(t) = e^{-\gamma t}((b\omega_1 - a\gamma) \cos(\omega_1 t) - (b\gamma + a\omega_1) \sin(\omega_1 t)) \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) следует параметрическое представление траектории системы на фазовой плоскости переменных (U_C, I) .

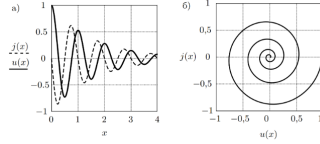


Рис. 2: а) ток в контуре $j(x)$ и напряжение на конденсаторе $u(x)$
б) траектория системы на фазовой плоскости $j(u)$

На рис. 2 представлены в безразмерных переменных зависимости напряжения и тока в контуре от времени в режиме свободных затухающих колебаний.

3) Характеристики затухающих колебаний

Из формулы (5) видно, что затухающие колебания напряжения не являются, периодическими функциями времени. Однако эти величины дважды за время

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} \quad (9)$$

проходят через 0. Также это период между двумя последовательными максимумами/минимумами $U_C(t)$ и $I(t)$. T_1 называется периодом затухающих колебаний.

В качестве характеристик процесса затухания колебаний помимо коэффициента затухания γ используют характерное время затухания:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R} \quad (10)$$

и логарифмический декремент:

$$\Theta = \ln\left(\frac{U_k}{U_{k+1}}\right) = \gamma T_1 \quad (11)$$

где U_k и U_{k+1} – два последовательных максимальных отклонения рассматриваемой величины.

Обозначим N_τ – число полных колебаний за время затухания τ . Тогда можем выразить Θ ещё одним способом:

$$\Theta = \frac{1}{N_\tau} \quad (12)$$

На практике удобнее использовать отношение максимальных отклонений, разделённых целым числом n периодов T_1 :

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{U_k}{U_{k+n}}\right) \quad (13)$$

С логарифмическим декрементом связана ещё одна важнейшая характеристика колебательного контура – добротность Q . По определению:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\gamma T_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{кр}}{R^2} - 1} \quad (14)$$

Добротность обладает энергетическим смыслом. Пусть $Q \gg 1$. Обозначим W – запасенная в системе энергия, ΔW – её потери за период. В моменты когда U_C – максимально, вся энергия сосредоточена в конденсаторе. Отсюда:

$$W = \frac{1}{2} C U_C^2(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-2\gamma t} \quad (15)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-2\gamma t} - \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-2\gamma(t+T)} \approx 2\gamma T_1 W \quad (16)$$

Из формул (14) - (16) получаем:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} \approx \frac{\omega_0^2}{2\gamma}$$

4) Критический режим ($\gamma = \omega_0$)

В этом случае $R = R_{кр}$, а решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(t) = (a_1 + b_1 t) e^{-\gamma t}$$

где a_1 и b_1 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

5) Аперидический режим ($\gamma > \omega_0$)

В этом режиме $R > R_{кр}$ и решение (3) имеет вид:

$$U_C = e^{-\gamma t} (b_1 e^{\alpha t} + b_2 e^{-\alpha t})$$

Графики, а также фазовая траектория системы в аперидическом режиме показаны в безразмерных переменных на рис.3

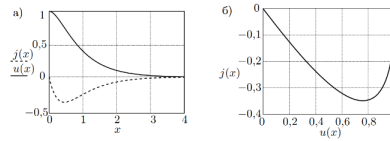


Рис. 3: а) ток в контуре $j(x)$ и напряжение на конденсаторе $u(x)$
б) траектория системы на фазовой плоскости $j(u)$

Нетрудно показать, что в этом режиме при любых начальных условиях система стремится к равновесному состоянию $U_C = 0$, $I = 0$. При этом возможно не более одного прохождения через экстремальное состояние, и не более одного — через равновесное.

2. Экспериментальная установка:

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением R_L , переменной емкости C и сопротивления R . Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для

возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

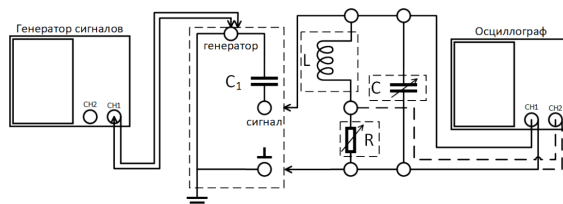


Рис. 4: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C . За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Напряжение на конденсаторе U_C поступает на вход канала 1(X) электронного осциллографа. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току $I (I \propto dU_C/dt)$.

При изучении возбужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды возбужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно определить добротность колебательного контура. Альтернативным способом расчета добротности контура является определение декремента затухания по картине установления возбужденных колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи цугов синусоидальной формы.

3. Результаты измерений и обработка данных:

3.1. Подготовка приборов к работе:

1. Подключим генератор специальных сигналов к входу 1(X) осциллографа. Установим на генераторе последовательность импульсов длительностью (PullWidth) 10 мкс, с частотой повторения импульсов $\nu = 100$ Гц, а амплитуду сигнала 20 В.

2. Убедимся, что на экране осциллографа отображаются периодические импульсы, и приступим к сборке схемы.

3.2. Измерение периодов свободных колебаний:

1. Установим на магазине сопротивлений величину $R = 0$ Ом, на магазине индуктивностей $L = 100$ мГн, на магазине емкостей величину $C = 0$ мкФ. Из-за наличия минимального значения ёмкости C_0 в контуре реализуются свободные колебания. Получим изображение этих затухающих свободных колебаний на экране осциллографа.

2. С помощью кнопки "Cursor" на осциллографе измерим период свободных колебаний и по нему определим нулевую ёмкость C_0 по формуле:

$$C_0 = \frac{\frac{T_0}{2\pi}}{L}$$

Полученный период $T_0 = (68,4 \pm 0,3)$ мкс, следовательно, $C_0 = (1,19 \pm 0,01)$ нФ

3. Изменяя ёмкость от 0 мкФ до 0.009 мкФ проведём измерения периодов и занесём результаты в таблицу 1: Построим график зависимости $T_{\text{эксп}}(T_{\text{теор}})$

Таблица 1: Зависимость периода свободных колебаний от ёмкости конденсатора

C, нФ	$T_{\text{эксп}}$, мкс	$T_{\text{теор}}$, мкс
2,2	92	93
3,2	112	112
4,2	130	129
5,2	143	143
6,2	157	156
7,2	170	169
8,2	180	180
9,2	190	191
10,2	201	201

$$k = (1,00 \pm 0.01)$$

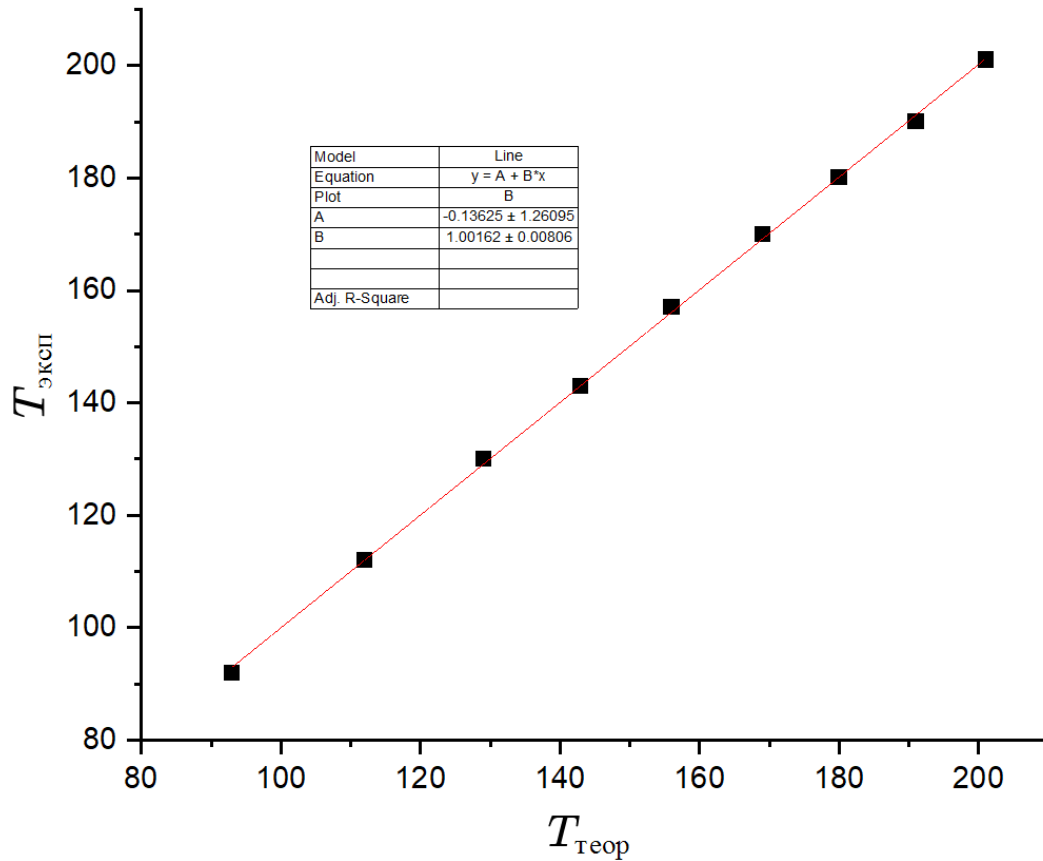


Рис. 5: Зависимость $T_{\text{эксп}}(T_{\text{теор}})$

3.3. Критическое сопротивление и декремент затухания:

1. Приняв $L = 100$ мГн, рассчитаем ёмкость C^* , при которой собственная частота колебаний ν_0 составляет 6,5 кГц.

$$C^* = \frac{1}{L(2\pi\nu_0)^2}$$

Для выбранных L и C^* рассчитаем критическое сопротивление контура R_{cr} по формуле

$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C^*}}$$

Полученные значения:

$$C^* = 6 \text{ нФ} \quad R_{cr} = 8168 \text{ Ом}$$

2. Установим на магазине емкость, близкую к рассчитанной критической ($R_{cr} = 8168$ Ом). Увеличивая сопротивление R от нуля до R_{cr} , определим сопротивление магазина, при котором колебательный режим переходит в аperiодический. Это происходит при значении $R \approx 5100$ Ом.

3. Будем устанавливать значения R в контуре в интервале $(0,05 - 0,25)R_{cr}$. После, по полученной на осциллографе картине затухающих колебаний, измерим амплитуды, разделенные целым числом периодов n , и рассчитаем логарифмический декремент затухания по формуле:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_m}{U_{m+n}}$$

$$\sigma_{\Theta} = \frac{\sigma_U}{U_m} + \frac{\sigma_U}{U_{m+n}}; \quad \sigma_U = 1 \text{ мВ}$$

Результаты измерений заносим в таблицу:

Таблица 2: Зависимость декремента затухания Θ от сопротивления

R , Ом	U_1 , мВ	U_2 , мВ	n	Θ
60,7	872	216	14	0,100
90,7	860	140	15	0,121
120,7	840	104	15	0,139
150,7	828	76	15	0,159
180,7	812	56	15	0,178
210,7	800	40	15	0,200

Построим график, откладывая по оси абсцисс величину R , а по оси ординат величину Θ

4. Построим график в координатах, откладывая по оси абсцисс величину $1/R^2$, а по оси ординат величину $1/\Theta^2$ (Рис. 6).

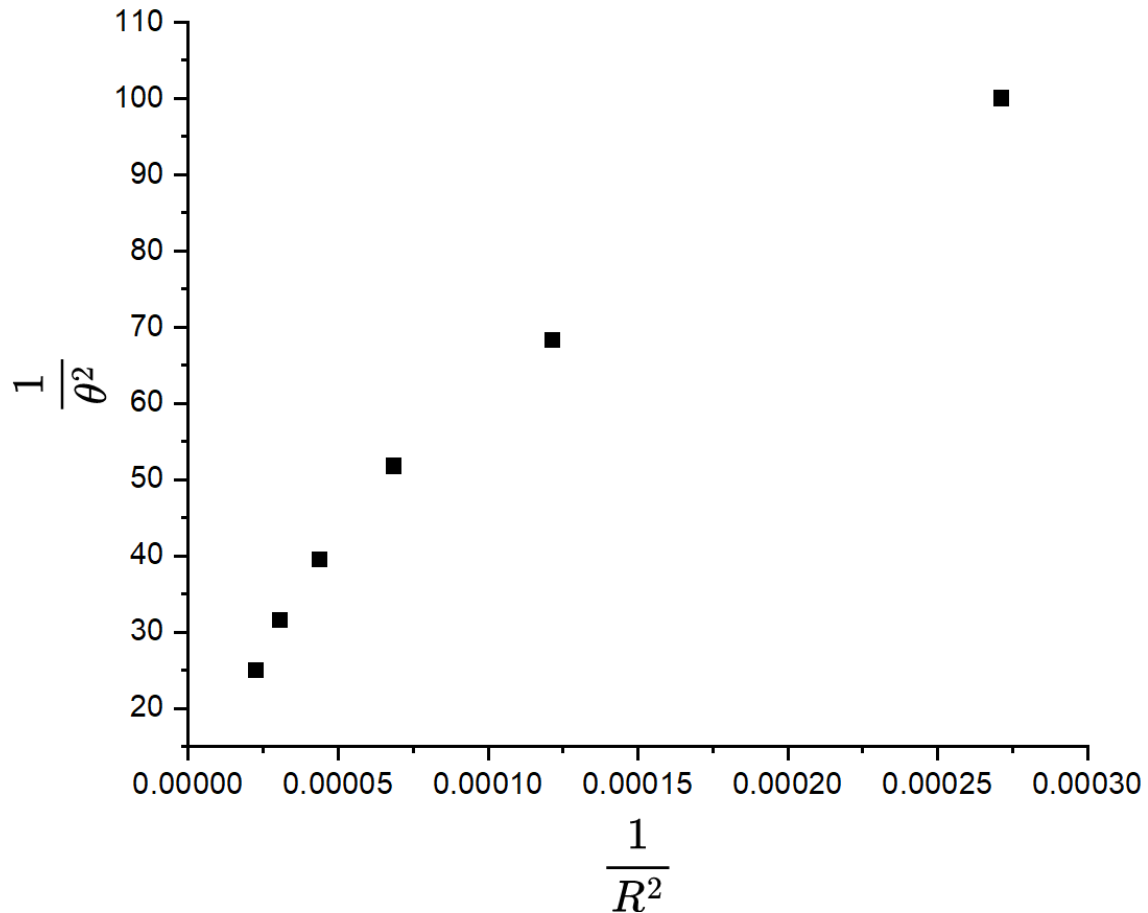


Рис. 6: Зависимость $1/\Theta^2(1/R^2)$

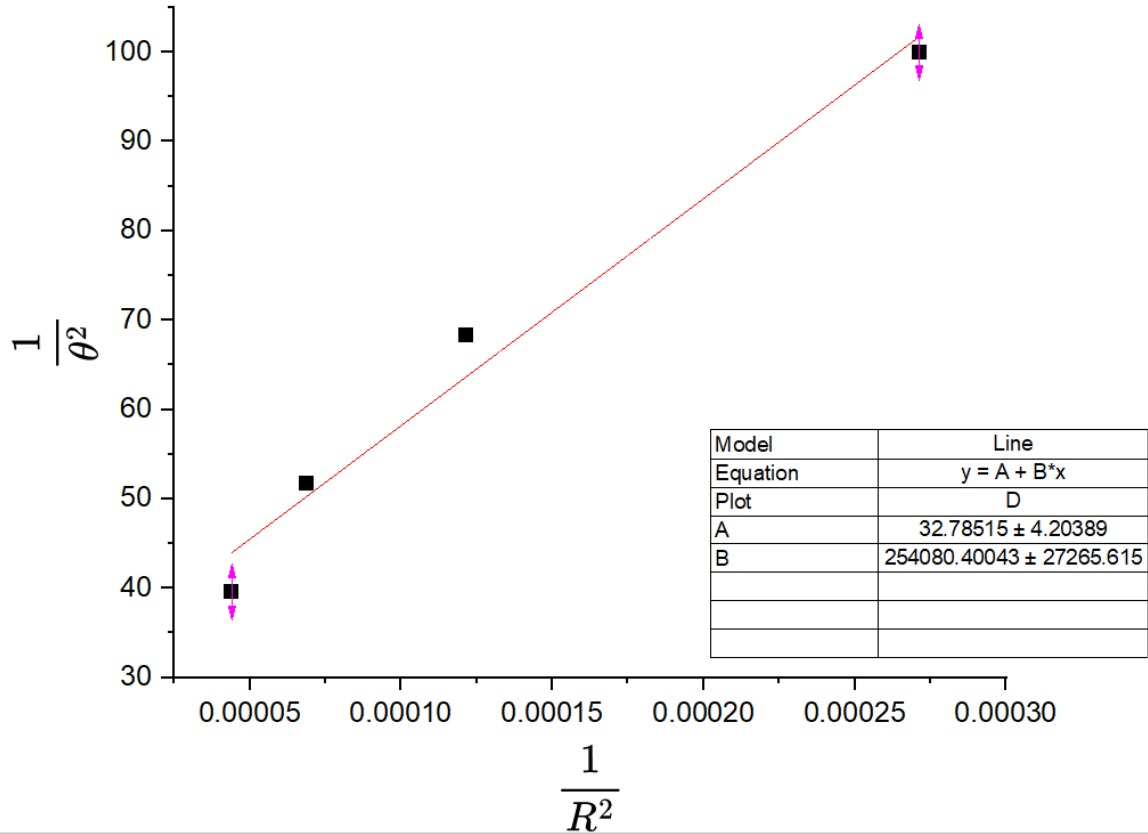


Рис. 7: Зависимость $1/\Theta^2(1/R^2)$

Найдем k по первым трем точкам, так как дальше линейность не сохраняется.

$$k = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Ом}^2 \quad b = 32.8$$

Таким, образом, по формуле:

$$R_{cr} = 2\pi\sqrt{k}$$

$$\sigma_R = R_{cr} \frac{\sigma_k}{2k}$$

находим R_{cr} :

$$R_{cr} = (5100 \pm 300) \text{ Ом}$$

5. R_{cr} , полученное экспериментально, отличается от $R_{cr}^{\text{теор}} = 8168 \text{ Ом}$. Это может быть связано с неучтённым сопротивлением или наличием ёмкости в контуре.

3.4. Свободные колебания на фазовой плоскости:

1. Введём сопротивление в контуре $R = 400$. Подадим на второй канал осциллографа падение напряжения с резистора. На XY-развёртке будем наблюдать изображение спирали.

Для определения декремента затухания Θ измерим координаты пересечения витков спирали с одной из осью координат, разделенные целым числом периодов n , результаты для разных значений сопротивлений занесём в таблицу:

Таблица 3: Зависимость декремента затухания θ от сопротивления на ХУ-развёртке

R , Ом	U_0 , дел	U_n , дел	n	Θ
400	4,4	1,4	3	0,382
600	4,2	1	3	0,478
800	4	2	2	0,347
1000	4	0,8	2	0,805
1200	3,8	0,6	2	0,923
1400	3,6	1,2	1	1,099
1600	3,6	1	1	1,281
1800	3,4	0,8	1	1,447

3.5. Исследование резонансных кривых:

1. На генераторе сигналов включим синусоидальный режим. С помощью переходника и коаксиальных кабелей подадим сигнал с генератора одновременно на колебательный контур и на канал 2 осциллографа.

2. Изменяя частоту синусоидального сигнала, найдем резонансную частоту, при которой амплитуда колебаний контура максимальна. Это значение достигается при $\nu = (6,53 \pm 0,01)$ кГц, амплитуда колебаний при этом $U = (7,36 \pm 0,03)$ В. **3.** Снимем АЧХ и ФЧХ колебательного контура при двух разных сопротивлениях. Результаты занесём в таблицы:

Таблица 4: АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний контура при $R_1 = 600$ Ом и $R_2 = 1600$ Ом

$R = 600$ Ом			$R = 1600$ Ом		
ν , кГц	Δx , мкс	U , В	ν , кГц	Δx , мкс	U , В
8,2	4,0	2,92	8,2	8,0	2,48
8,1	4,2	3,08	8,0	8,8	2,62
7,9	5,4	3,28	7,8	10,4	2,70
7,8	5,8	3,48	7,6	12,0	2,80
7,6	7,2	3,76	7,4	13,6	2,92
7,5	8,0	4,12	7,2	16,8	3,00
7,3	10,2	4,52	7,0	19,6	3,08
7,2	12,0	5,16	6,8	23,2	3,12
7,0	15,2	5,72	6,6	27,2	3,12
6,9	19,2	6,32	6,4	31,6	3,04
6,7	24,4	6,92	6,2	36,0	2,90
6,5	34,4	7,32	6,0	40,8	2,68
6,4	39,2	7,12	5,8	45,6	2,46
6,3	44,4	6,68	5,6	50,8	2,18
6,2	49,6	6,12			
6,1	54,0	5,52			
6,0	57,2	4,92			
5,9	60,8	4,24			
5,8	64,4	3,82			
5,7	67,2	3,36			
5,6	70,0	3,02			

4. Изобразим АЧХ и ФЧХ колебаний на графиках (Рис. 8 и Рис. 6):

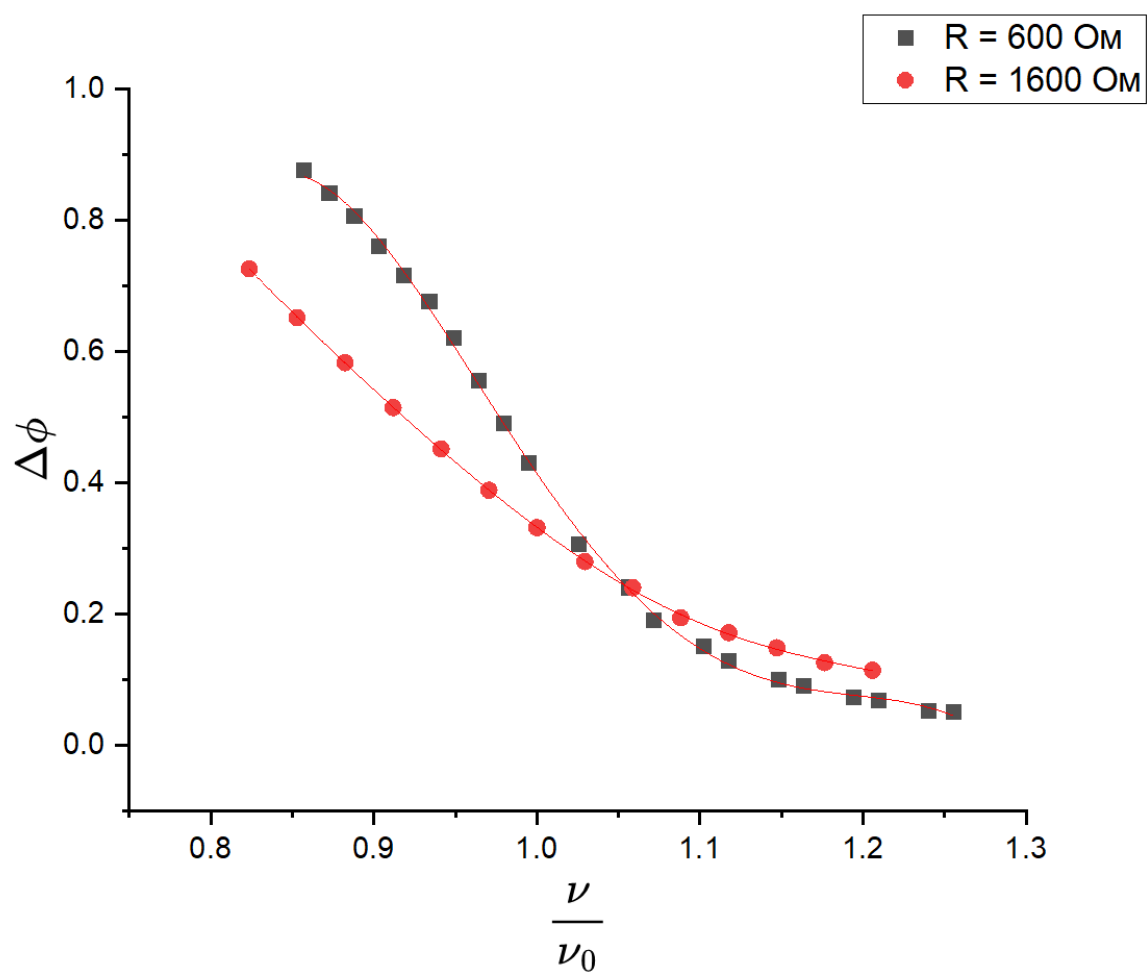


Рис. 8: Фазово-частотная характеристика

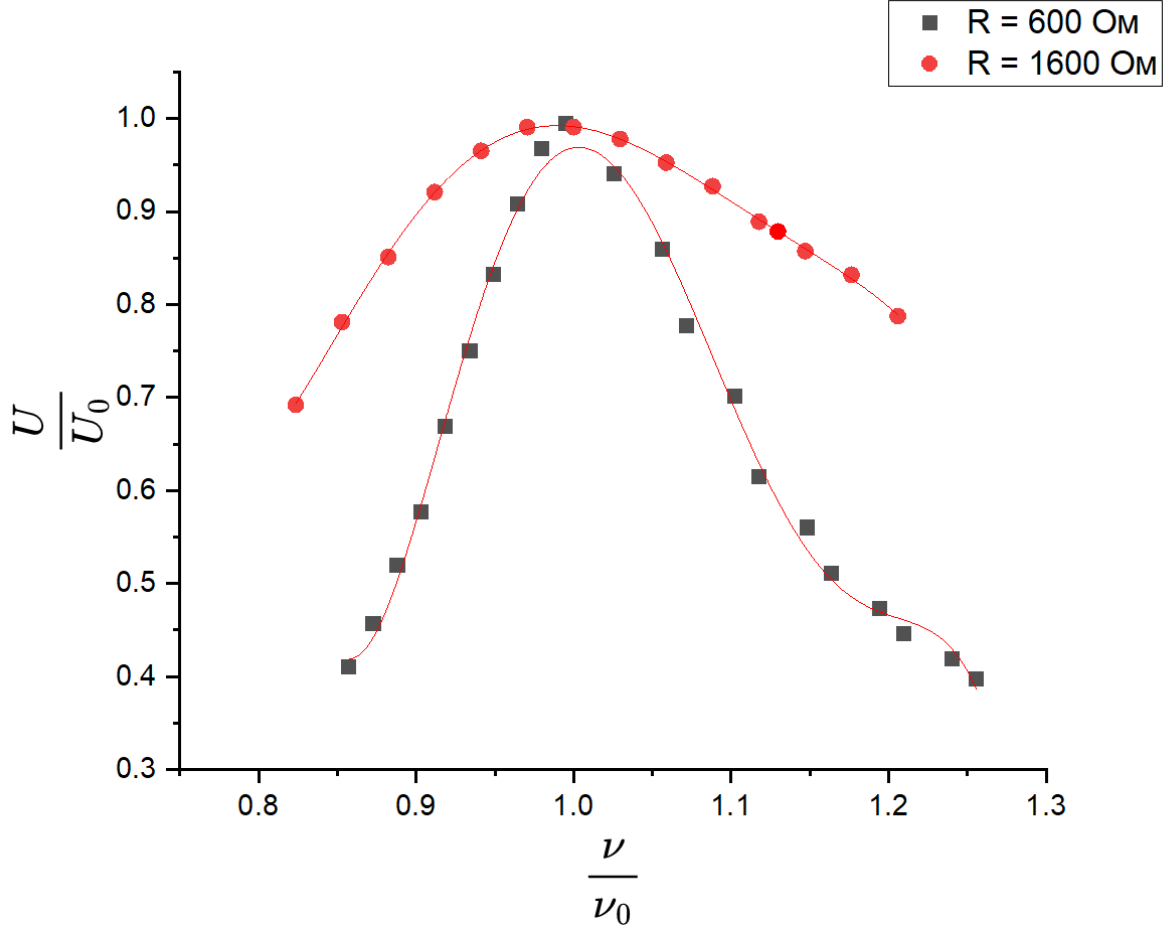


Рис. 9: Амплитудно-частотная характеристика

3.6. Нахождение добротности контура

1. Рассчитаем добротность контура $Q = \pi/\Theta$ для максимального и минимального значения Θ по спирали на фазовой кривой:

$$Q = \pi/\Theta$$

$$\sigma_Q = Q \cdot \frac{\sigma_\Theta}{\Theta}$$

При $R = 600 \text{ Ом}$: $Q = (6,6 \pm 0,4)$ При $R = 1600 \text{ Ом}$: $Q = (2,5 \pm 0,3)$

2. Теоретическое значение добротности через параметры L , C , R :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

При $R = 600 \text{ Ом}$: $Q = 6,8$ При $R = 1600 \text{ Ом}$: $Q = 2,6$

3. Рассчитаем добротность контура по АЧХ по формуле:

$$Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$$

$$\sigma_Q = Q \frac{\sigma_{\Delta}}{\Delta\Omega}, \quad \sigma_{\Delta} = 0,1 \text{ Гц}$$

где Ω — ширина резонансной кривой, измеренная на уровне $\nu_0/\sqrt{2}$

При $R = 600 \text{ Ом}$: $Q = (6,6 \pm 0,1)$ При $R = 1600 \text{ Ом}$: $Q = (2,5 \pm 0,1)$

4. Рассчитаем добротность по ФЧХ. Отметим горизонтальной линией уровень, соответствующий разности фаз $-\pi/2$. Зеркально отразим нижнюю часть зависимости относительно проведенной горизонтальной линии. Измерим $\Delta\Omega$ на уровне $-\pi/4$. Добротность контура вычисляется по формуле:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}$$

$$\sigma_Q = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Delta}{\Delta\Omega}\right)^2}, \quad \sigma_\omega = 0,3 \text{ Гц}, \sigma_\Delta = 0,3 \text{ Гц}$$

При $R = 600 \text{ Ом}$: $Q = (6,0 \pm 0,4)$ При $R = 1600 \text{ Ом}$: $Q = (2,0 \pm 0,4)$

Занесём в таблицу полученные данные добротности для $R = 600 \text{ Ом}$ и $R = 1600 \text{ Ом}$:

Таблица 5: Измерение добротности колебаний в контуре

	$f(L, C, R)$	Спираль	АЧХ	ФЧХ
$R = 600 \text{ Ом}$	6,8	$(6,6 \pm 0,4)$	$(6,6 \pm 0,1)$	$(6,0 \pm 0,4)$
$R = 1600 \text{ Ом}$	2,6	$(2,5 \pm 0,3)$	$(2,5 \pm 0,1)$	$(2,0 \pm 0,4)$

6. Измерим активное сопротивление R_L и индуктивность L магазина индуктивностей с помощью измерителя LCR на частотах 50 Гц, 500 Гц и 1500 Гц. Результаты занесём в таблицу

Таблица 6: Измерение активного сопротивления и индуктивности магазина.

ν , Гц	L, мкГн	R, Ом
50	1	0,72
500	0,8	0,718
1500	0,77	0,716

4. Вывод

1. Были исследованы свободные и вынужденные колебания в контуре.
2. Наблюдали характерные зависимости этих колебаний от времени на экране осциллографа.
3. Сняты АЧХ и ФЧХ контура для двух значений сопротивления.
4. Получены параметры схемы, такие как R_{cr} и Θ .

Model	Poly5
Equation	$y = A0 + A1*x + A2*x^2 + A3*x^3 + A4*x^4 + A5*x^5$
Plot	D
A0	438.13329 ± 81.02872
A1	-2212.63182 ± 405.83025
A2	4420.48238 ± 809.64943
A3	-4365.64684 ± 804.3029
A4	2134.86881 ± 397.85996
A5	-414.21464 ± 78.40457
Reduced Chi-Sqr	1.28674E-5
R-Square (COD)	0.99904
Adj. R-Square	0.99844

Model	Poly5
Equation	$y = A0 + A1*x + A2*x^2 + A3*x^3 + A4*x^4 + A5*x^5$
Plot	B
A0	3598.98795 ± 357.04564
A1	-17293.84429 ± 1717.69647
A2	32998.7193 ± 3292.07432
A3	-31257.61627 ± 3142.04068
A4	14704.08199 ± 1493.43695
A5	-2749.36023 ± 282.81582
Reduced Chi-Sqr	3.33571E-4
R-Square (COD)	0.99384
Adj. R-Square	0.99178

Model	Poly5
Equation	$y = A0 + A1*x + A2*x^2 + A3*x^3 + A4*x^4 + A5*x^5$
Plot	B
A0	-232.12847 ± 184.27068
A1	950.65895 ± 886.50035
A2	-1480.7417 ± 1699.0342
A3	$1084.72344 \pm 1621.60208$
A4	-363.52694 ± 770.76038
A5	41.42865 ± 145.96078
Reduced Chi-Sqr	8.8849E-5
R-Square (COD)	0.99927
Adj. R-Square	0.99903

Model	Poly5
Equation	$y = A0 + A1*x + A2*x^2 + A3*x^3 + A4*x^4 + A5*x^5$
Plot	D
A0	71.73695 ± 61.7434
A1	-360.79004 ± 309.24023
A2	742.57014 ± 616.94805
A3	-766.41414 ± 612.87402
A4	393.09508 ± 303.16692
A5	-79.86584 ± 59.74382
Reduced Chi-Sqr	7.47125E-6
R-Square (COD)	0.99989
Adj. R-Square	0.99982