Теория вероятности. Дискретные случайные величины

Содержание:

Определение вероятности

Основным понятием теории вероятностей является понятие **случайного события**.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Например, выпадение орла при подкидывании монеты.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно происходит.

Например, выпадение на игральной кости целого числа от 1 до 6.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Пример, игральный кубик выпадет на ребро.

Случайные события образуют **полную группу**, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Пример. События «на кубике выпадет число 1», «на кубике выпадет число 2» , ..., «на кубике выпедет число 6» образуют полную группу.

Рассмотрим **полную группу** равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть **исходами или элементарными событиями**.

Исход называется благоприятствующим появлению события A, если появление этого исхода влечет за собой появление события A.

Пример, событию «выпадение четного числа на игральном кубике» благоприятствуют исходы «выпадение 2». «выпадение 4», «выпадение 6».

Еще пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (1..8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, **благоприятствующее** появлению красного шара.Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие,**благоприятствующее** появлению черного шара.

Вероятностью события **A** называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n** всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности

Свойство 1: Вероятность достоверного события равна единице

Свойство 2: Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3: Вероятность случайного события есть положительное число от 0 до 1.

Дискретное вероятностное пространство

Дискретное вероятностное пространство - пара из некоторого (не более, чем счетного) множества Ω и функции $p:\Omega \to \mathbb{R}+$ (Ω называется множеством элементарных исходов), $\omega \in \Omega$

— элементарным исходом, такая, что $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

p - дискретная вероятностная мера, или дискретная плотность вероятности.

Множество $A \subset \Omega$ называется **событием**.

$p(A) = \sum_{a\in A} p(a)$ вероятность события равна сумме вероятностей входящих в него элементарных исходов.

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \equiv \mathbb{P}^X((-\infty, x])$. **- функция распределения** случайной величины.

Т.е. такая функция $F(x)$ значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leqslant x\}$ то есть события, состоящего только из тех элементарных исходов, для которых $X(\omega) \leqslant x$

Пример, для игральной кости $F_3(x)=P(X\leq 3)$ – то есть вероятность выпадения очков меньшего или равного 3.

Пример №1 (Игральная кость) Множество исходов Ω={1,2,3,4,5,6}. p(i)=1/6.

A={1,2,3} : p(A)=1/6+1/6+1/6=3/6=1/2. Вероятность выпадения одного из трех чисел из множества А равна одной второй.

B={2,4} : p(B)=1/6+1/6=2/6=1/3. Числа 2 или 4 выпадут с вероятностью одна треть.

Пример №2 (Бесконечное вероятностное пространство)

Пусть задано множество следующих элементарных исходов: выпадение орла на i-ом подбрасывании честной монеты в первый раз.

Тогда вероятность исхода с номером i равна: $p(A_i) = \frac{1}{2^i}$

Вероятности этих событий образовывают убывающую геометрическую прогрессию с знаменателем прогрессии равным ½. Тогда сумма вероятностей=сумме убывающей прогрессии вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Так как сумма всех элементарных исходов равна 1, то это множество является вероятностным
Введем понятие случайной величины.
Случайная величина — переменная, значения которой представляют собой исходы какого-нибудь случайного феномена или эксперимента.
И обозначим как

$$y = X(\omega)$$

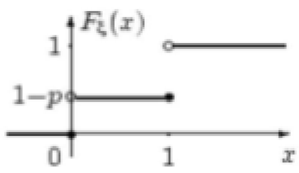
Простыми словами: это численное выражение результата случайного события.
Далее рассмотрим примеры распределений случайных величин.
1.Случайная величина **X** имеет **распределение Бернулли**, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и q=1−p соответственно. (q=1−p так как сумма всех событий равна 1

$$\mathbb{P}(X = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = q.$$

Принято говорить, что событие $\{X = 1\}$ соответствует «успеху», а $\{X = 0\}$ «неудаче». Эти названия условные, и в зависимости от конкретной задачи могут быть заменены на противоположные.

Вычислим функцию распределения такой величины.

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Случайная величина ξ имеет **биномиальное распределение** (англ. *binomial distribution*) с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$ и пишут: $\xi \in \mathrm{B}_{n,p}$ если ξ принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями $P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

2. Биноминальное распределение

Случайная величина с таким распределением имеет смысл числа к успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. То есть когда производится n однотипных независимых опытов, в каждом из которых может появиться интересующее нас событие A, причем известна вероятность этого события P(A) = p. Требуется определить вероятность того, что при проведении n испытаний событие A появится ровно k раз.

Пример. n раз подкинули монету. Какова вероятность выпадения орла ровно к раз. Важно, что вероятность появление орла в каждом испытании одинаковая.

Вероятность считаем по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где C_n^k — число сочетаний, $q = 1 - p$.
Ckn=n!/(n−k)!·k!.
Результаты можно записать в виде таблицы.

Таблица распределения ξ имеет вид

ξ	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	$(1-p)^n$	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	$\ldots$	p^n

3. Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина имеет *распределение Пуассона* с параметром λ, если:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, равную числу событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

Пример. Время прибытия автобуса, если интервал между ними равен некоторой фиксированной величине.

Параметр λ часто называется интенсивностью, а функция p(k), введённая выше, действительно является функцией вероятности ,так как сумма всех вероятностей равна 1. Это следует из разложения экспоненты в ряд Тейлора

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

И если подставить это разложение в формулу Пуассона , то сумма всех дробей станет равна . e^{λ} и умножив ее на $\cdot e^{-\lambda}$, получим 1.

Условная вероятность

Условная вероятность — вероятность одного события при условии, что другое событие уже произошло.

Например, в урне находятся 3 белых шара и 2 черных. Из урны вынимается один шар, а затем второй. Событие B – появление белого шара при первом вынимании. Событие A – появление белого шара при втором вынимании.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - фиксированное вероятностное пространство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$ суть два случайных события, причём $\mathbb{P}(B) > 0$. Тогда условной вероятностью события A при условии события B называется

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

То есть надо вероятность **совместного** появления двух зависимых событий разделить на вероятность события B.

Если A, B - несовместимые события, т.е. $A \cap B = \varnothing$ и $\mathbb{P}(A) > 0, \ \mathbb{P}(B) > 0$, то

$$\mathbb{P}(A \mid B) = 0$$

и

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 0.$$

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} &P(A) = \\ &= P(B_1) \times P(B_1 \mid A) + \\ &+ P(B_2) \times P(B_2 \mid A) + \ \ldots \ + \\ &+ P(B_n) \times P(B_n \mid A) \end{aligned}$$

которая и называется формулой полной вероятности. События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ также называются гипотезами, они являются исключающими друг друга. Поэтому в литературе можно также встретить их обозначение не буквой *B*, а буквой *H* (hypothesis).

Формула полной вероятности

Формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность интересующего события через условные вероятности этого события в предположении неких гипотез также вероятностей этих гипотез.

В общем виде:

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и полная группа событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, таких что $\mathbb{P}(B_n) > 0 \ \forall n$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ суть интересующее нас событие. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid B_n) \mathbb{P}(B_n).$$

Пример на полную группу событий.

Полной группой событий называется система случайных событий такая, что в результате произведенного случайного эксперимента непременно произойдет одно из них.

Пример: предположим, проводится подбрасывание монеты. В результате этого эксперимента обязательно произойдет одно из следующих событий:

- A: монета упадет орлом;
- B: монета упадет решкой;
- C: монета упадет на ребро;
- D: монета зависнет в воздухе.
- E: монету притырит подкидывающий
- F: монета превратится в динозавра
- G: монета станет летающей тарелкой
- H: монета так и не приземлится на землю

Таким образом, система $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ является полной группой событий.

Формула Байеса

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

Доказательство получается из формулы условной вероятности

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

Для характеристики случайных величин используют несколько понятий.

Математическое ожидание

Математическое ожидание — понятие среднего значения случайной величины в теории вероятностей.

Пусть X - дискретная случайная величина:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

Тогда её математическое ожидание:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i.$$

Пример: пусть случайная величина имеет дискретное равномерное распределение

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}\,,\ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Для независимых случайных величин справедливы формулы:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y,$$

$$0 \le \mathbb{E}X \le \mathbb{E}Y$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсия случайной величины — мера разброса данной случайной величины, т.е. её отклонения от математического ожидания.

$$\mathrm{D}\,X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$

или то же самое

$$\mathrm{D}\,X = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия любой случайной величины неотрицательна
2. Если дисперсия случайной величины конечна, то конечно и её математическое ожидание
3. Если случайная величина равна константе, то её дисперсия равна нулю

Для независимых X1, ... , Xn справедливо:

$$\mathrm{D}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathrm{D}\,X_1 + \cdots + \mathrm{D}\,X_n$$

$$\mathrm{D}[aX] = a^2\,\mathrm{D}\,X;$$
$$\mathrm{D}[-X] = \mathrm{D}\,X;$$
$$\mathrm{D}[X + b] = \mathrm{D}[X].$$

Момент случайной величины

Момент случайной величины — еще одна числовая характеристика распределения данной случайной величины.

Если дана случайная величина **X**, определённая на некотором вероятностном пространстве, то, если математическое ожидание в правой части этого равенства определено:

$$\nu_k = \mathbb{E}\left[X^k\right]$$

- k-ый начальный момент случайной величины X. Или если раскрыть формулу математического ожидания, получим

$$\nu_k = \sum_x x^k\, p(x)$$

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^k\right]$$

- k-ый центральный момент случайной величины X

Здесь, по сути, рассматривается не сами значения случайной величины, а их квадраты или кубы или к-ая степень

Независимость событий и случайных величин

Два случайных события называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Аналогично, **две случайные величины** называют **независимыми**, если значение одной из них не влияет на вероятность значений другой.

Определение 1. Два события $A, B \in \mathcal{F}$ независимы, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Попарная независимость

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j), \ \forall i \neq j.$$

Независимость в совокупности

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_N}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_N}).$$

Очевидно, что из независимости в совокупности следует независимость попарная (наоборот неверно). Проверьте это для событий из примера.

Пусть брошены три уравновешенные монеты. Определим события следующим образом:

- A_1: монеты 1 и 2 упали одной и той же стороной;
- A_2: монеты 2 и 3 упали одной и той же стороной;
- A_3: монеты 1 и 3 упали одной и той же стороной;

Две случайные величины X,Y **независимы** тогда и только тогда, когда:

- Для любых $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B);$$

Пусть случайные величины X,Y дискретны.

Тогда они **независимы** тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = j)$$

Notebook

Рассмотрим реализацию некоторых функций по данной теме в Python
Генерируем случайную величину.
Это можно сделать разными способами

```
In [3]:random_number = random.random()
print(random_number)
```

0.1500075454077694

```
In [4]:np.random.random(10)
Out[4]:array([0.09454063, 0.10906679, 0.58191014, 0.78630537, 0.96025796,
       0.27957416, 0.22162542, 0.2208783 , 0.0827468 , 0.30302523])
```

Или

```
In [9]:print(np.random.randint(low=1, high=7, size=(5, 4)))
[[5 6 6 2]
```

```
 [1 3 2 5]
 [6 6 6 3]
 [4 1 1 6]
 [3 3 5 4]]
```

Здесь задается интервал (причем ДО второй координаты не включительно) и размер.
А можно если требуется сгенерировать числа, сумма которых равна 1. Для этого считаем сумму и каждое число делим на эту сумму.

```
In [7]:list_of_random_floats = np.random.random(100)
sum_of_values = list_of_random_floats.sum()
normalized_values = list_of_random_floats / sum_of_values
print(sum_of_values)
print(normalized_values.sum())
```

```
45.19522457747308
1.0
```

Можно выбирать направление и импортировать функцию choice выбирающую одно напраление

```
In [17]:possible_destinations = ["Berlin", "Hamburg", "Munich",
                         "Amsterdam", "London", "Paris",
                         "Zurich", "Heidelberg", "Strasbourg",
                         "Augsburg", "Milan", "Rome"]

print(choice(possible_destinations))
```

```
Paris
```

Или несколько направлений

```
In [18]:x1 = choice(possible_destinations, size=3)
print(x1)
x2 = choice(possible_destinations, size=(3, 4))
print(x2)
```

```
['Paris' 'Heidelberg' 'Berlin']
[['Berlin' 'Zurich' 'Augsburg' 'Heidelberg']
 ['Rome' 'Milan' 'Milan' 'Zurich']
 ['Augsburg' 'Augsburg' 'Amsterdam' 'London']]
```

Распределения случайных величин

Импортируем из библиотеки

```
from scipy.stats import *
```

Бернулли

```
In [75]:p=0.4
rv = bernoulli(p)
```

вычисление математического ожидания и дисперсии

```
In [79]:rv.stats()
Out[79]:(array(0.4), array(0.24))
```

Начертить функцию распределения можно так

```
In [105]:x = np.linspace(-0.1, 1.1, 100)
cdf = bernoulli.cdf(x, p)
```

```
In [106]:plt.plot(x, cdf)
plt.show()
```

Начертить плотность распределения

```
In [66]:x = [0, 0.5, 1]
for xx in x:
    prb = bernoulli.pmf(xx, p)
    print(prb)
```

```
0.6
0.0
0.4
```

Биномиальное

```
In [92]:p=0.5
```

```
n=10
rv = binom(p, n)
```

```
In [95]:mean, var, _, _ = binom.stats(n, p, moments='mvsk')
print(mean, var)
```

5.0 2.5 - математическое ожидание и дисперсия

```
In [109]:data=binom.rvs(n=17,p=0.7,loc=0,size=1010)
ax=seaborn.distplot(data,
        kde=True,
        color='pink',
        hist_kws={"linewidth": 22,'alpha':0.77})
ax.set(xlabel='Binomial',ylabel='Frequency')
```

```
Out[109]:[Text(0, 0.5, 'Frequency'), Text(0.5, 0, 'Binomial')]
```

Пуассоновское

```
In [117]:mu = 0.6
mean, var, _, _ = poisson.stats(mu, moments='mvsk')
print(mean, var)
```

0.6 0.6

```
In [118]:s=np.random.poisson(5, 10000)
plt.hist(s, 16, density=True,color='Green')
plt.show()
```

Генерация с заданными вероятностями

```
In [122]:elements = [1.1, 2.2, 3.3]
probabilities = [0.2, 0.5, 0.3]  - это заданные вероятности
np.random.choice(elements, 10, p=probabilities)
```

```
Out[122]:array([2.2, 1.1, 1.1, 3.3, 2.2, 1.1, 1.1, 2.2, 2.2, 2.2])
```