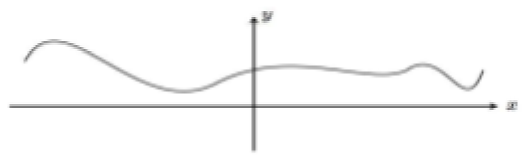
Математический анализ. Производная

Содержание:

Функции и их свойства

Функция - это некоторое соответствие x -> f(x), причём для каждого x определено единственное значение f(x).

Например, $f(x)=x^2$ или f(x)=sinx или как на графике.



где на оси X откладываются значения x, а на оси У - соответствующие значения функции f(x).

Введем понятия области определения и области значений функции.

D(f) - область определения функции – это множество, на котором задается функция, то есть такие x, которые можно применить к функции.

Например, к функции $f(x)=x^2$ можно применить любые значения x, а к функции $f(x)=\sqrt{x}$ – только неотрицательные числа.

E(f) - область значений функции – множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция.

Например, $f(x)=x^2$ принимает значения от 0 до плюс бесконечности.

Будем работать только с функциями, у которых D(f) и E(f) - подмножество R.

Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив ее график. Функции бывают непрерывными и разрывными.

Рисунок 1. График, на котором при приближении к некоторой точке x_0 и слева и справа график сходится в определенную точку.

Но не ту, которая соответствует значению функции в точке x_0. Такой разрыв называется устранимым. Устраняется он переопределением значения функции в точке x_0 таким образом, чтобы оно было равно тому же значению, в котором «встречаются» ветки слева и справа.

Рисунок 3. Другой тип разрыва, его уже не устранить, так как при приближении к точке a (и аналогично к b) слева и справа , значения функции сильно отличаются. «Кусочки» графика не встречаются как в предыдущем примере.

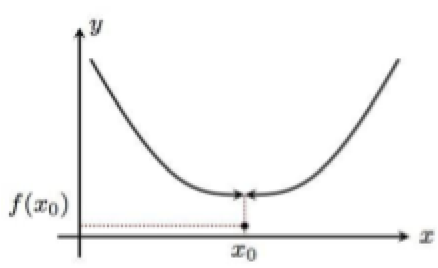


Рис. 2: Функция с устранимым разрывом

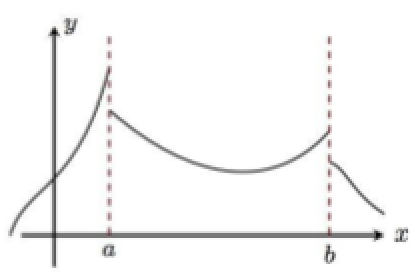


Рис. 3: Функция с разрывами в точках a и b.

Рисунок 4. Значение в точке а определено. Но при приближении к точке а справа, значение функции отлично от значения в самой точке а.

Рисунок 5. Пример функции с бесконечным разрывом. Это когда при приближении к некоторой точке, значение функции стремиться к минус или плюс бесконечности.

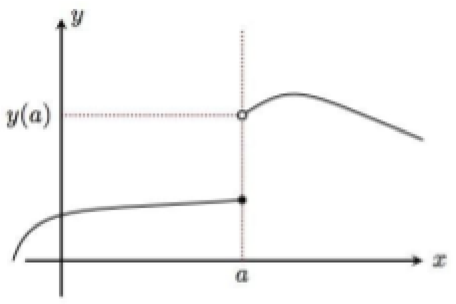


Рис. 4: Функция с разрывом типа «скачок».

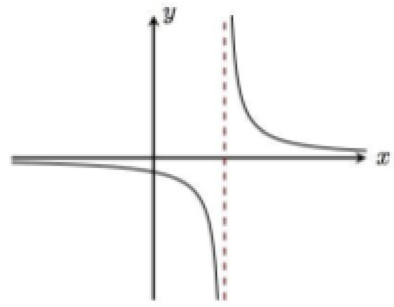


Рис. 5: Функция с бесконечным разрывом.

Предел функции

В предыдущих примерах, мы рассматривали значение, к которому стремится функция при приближении к определенной точке. Такое значение называется пределом.

Например, функция $f(x)=(1+x)^{1/x}$ не определена в x=0, но её значение может быть вычислено в точках сколь угодно близких к ней. Пошагово подставляем 0,1 ; 0,01; 0,001 и т.д и вычисляем соответствующие значения.

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$f(x)$	2.593..	2.704..	2.716..	2.718..	...

Видим в таблице, что если в первой строке x приближается к нулю, то значение $f(x)=(1+x)^{1/x}$ во второй строке приближается к некоторому числу. Это и есть предел функции $f(x)=(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Не у всех функций есть конечный предел. Как мы видели на рисунке 5 при приближении к пунктирной линии значение функции и справа «взлетает» в плюс бесконечность и уходит в минус бесконечность при приближении слева.

Также функция g(x)=1/x неограниченно растёт при приближении к x = 0, что тоже можно увидеть из таблицы.

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$1/x$	10	100	1000	10000	...

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

Непрерывность функции

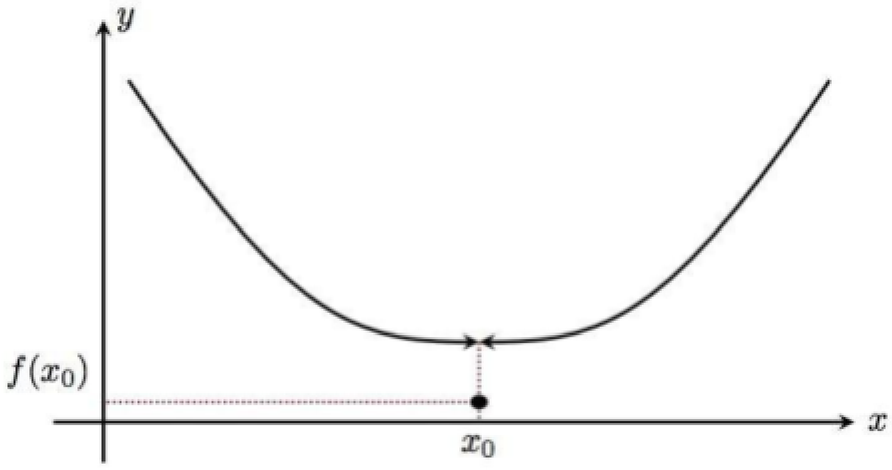
Понятие предела тесно связано с понятием непрерывности функции в точке.

Функция непрерывна в точке а, если:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a).$$

То есть предел значений в этой точке должен быть равен самому значению в этой точке.

Пример, когда это условие в точке x_0 не выполняется и получается разрыв.



Если взять любую другую точку на этом графике (кроме x_0) и посчитать предел в ней, то он будет равен значению функции в этой точке. То есть во всех других точках данная функция непрерывна.

С помощью понятия предела определяется другое полезное понятие— понятие производной.

Производная функции

Производная - мгновенная скорость роста функции в заданной точке.

По сути, мы хотим узнать, насколько быстро меняется значение функции при изменении аргумента. Для этого мы делим разницу значений функции на разницу значений аргумента.

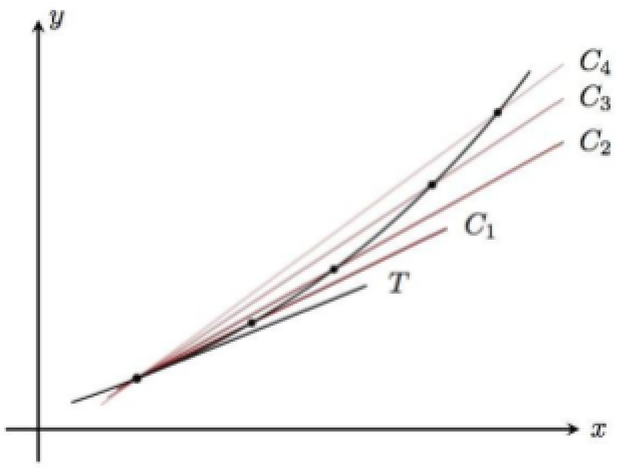
Давайте посмотрим на линейную функцию y=kx+b .

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=k.$$

То есть, по коэффициенту k мы можем понять, как быстро прямая растет (или падает).

Как понять скорость роста для произвольной функции?

Рисунок. Определение скорости в крайней левой точке.



Если мы возьмем точку С4 и соединим с нужной точкой прямой линией, то разница между скоростью изменения этой прямой и нашим графиком окажется большой (на рисунке прямая «взлетает вверх» быстрее графика), так как большая разница между выбранной точкой и С4. Возьмем точку С3 поближе. Тогда прямая будет «взлетать» чуть более похоже на график. С точкой С2 поведение прямой еще больше приближается к графику и т.д. Чем ближе точки, тем точнее. То есть надо стремить разницу между иксами к нулю и смотреть к чему будет стремиться разница значений функции. То есть необходимо искать предельное положение секущей, то есть предел.
Таким образом, **производная** – это предел отношения разницы значений функции к разнице аргумента при стремлении разницы аргумента к нулю.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Еще одна интерпретация понятия производная – тангенс угла наклона касательной.

Это видно из рисунка. При приближении точек C4, C3, C2 к выбранной точке, прямые , являющиеся секущими графика, будут все теснее прижиматься к графику в заданной точке. И в пределе эти точки как бы сольются в одну, а секущая станет касательной.

Гладкие функции - функции, производная которых непрерывна. На рисунке изображена как раз гладкая функция.

Производная сложной функции

Пусть имеются 2 функции f(x) и h(x), и область значений f(x) принадлежит области определения h(x). Тогда, h(f(x)) - применение одной функции к результату другой, называется сложной функцией.

Пример: f(x) = x+1, h(x) = ln(x), g(x) = h(f(x)) = ln(x+1)

То есть, одна функция как бы завернута в другую функцию, и значение одной является аргументом другой.

Дифференциал

Дифференциал - линейная часть приращения функции.

$$df = f'(x_0)dx, \qquad dx = \Delta x.$$

(умножаем производную на разницу аргумента, которую теперь будем обозначать не треугольником, а буквой d

Отсюда можно записать производную функцию через дифференциал

Это просто другая запись производной (для удобства).

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Тогда производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$\frac{dg(h(x))}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(x)}{dx}$$

Правила вычисления производной частного, произведения, суммы функций и функции, умноженной на число

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$$

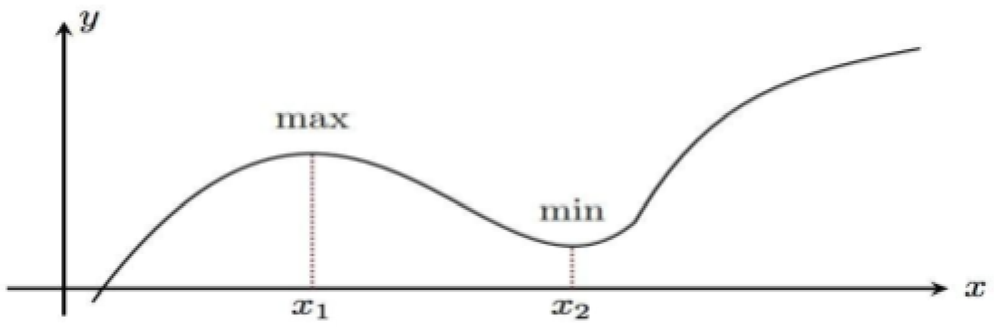
$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

Вычислим производную сложной функции
f(x) = sin(ln(x)+5x).
Используя формулу производной сложной функции получим
f'(x) = cos(ln(x)+5x) * (ln(x)+5x)' .
Далее по формуле производной суммы имеем
f'(x) = cos(ln(x)+5x) * (1/x + 5).

Экстремум функции

Точка x0 - называется локальным минимумом функции f(x), если существует такая окрестность U(x0), для которой f(x) > f(x0), x из U(x0). Аналогично для максимума. В случае глобального минимума U(x0) = D(f).

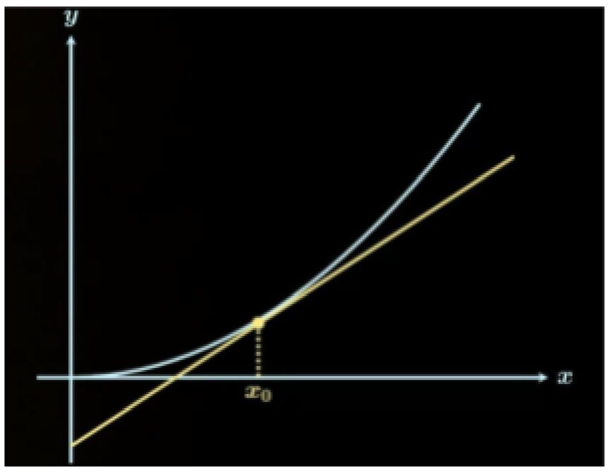


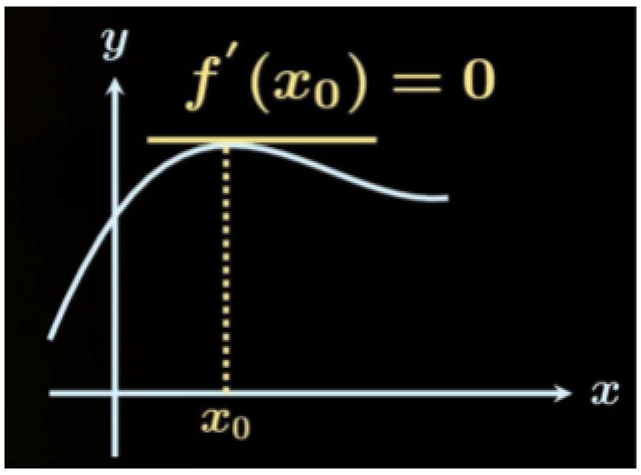
Рассмотрим точку x1 на графике. Если мы возьмем небольшую окрестность рядом с ней, то есть значения икс рядом с x1, то увидим, что значения функции в этих точках, меньше значения в самой точке x1. То есть x1 – это как «вершина горы». Значит выполняется условие f(x) ‹ f(x1), для x из U(x1), то есть x1 – локальный максимум.

Аналогично, x2 – локальный минимум. Однако x2 не будет глобальным минимумом, так как условие f(x) > f(x2) будет выполняться лишь для тех точек, которые располагаются близко к x2, но не для всех x из области определения. И как видно по графику есть точки, которые еще ниже, чем x2.

Точки локальных максимумов и минимумов называются **экстремумами функции.**

Экстремум функции и производная





Вспомним, что производная - это тангенс угла наклона касательной. Тогда, как видно из рисунков, в точках локальных экстремумов производная (если она определена (!), пример дальше) обязана равняться нулю. Это необходимое условие.

Однако равенство нулю производной не является достаточным условием локального экстремума.

Рисунок. В точке x=0 производная равна нулю, но точка не является экстремумом.

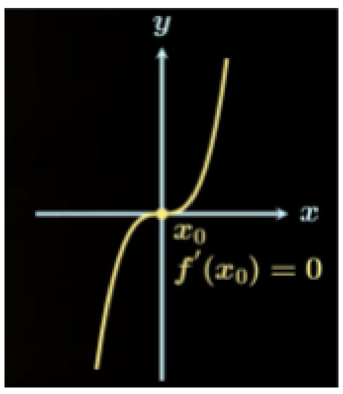
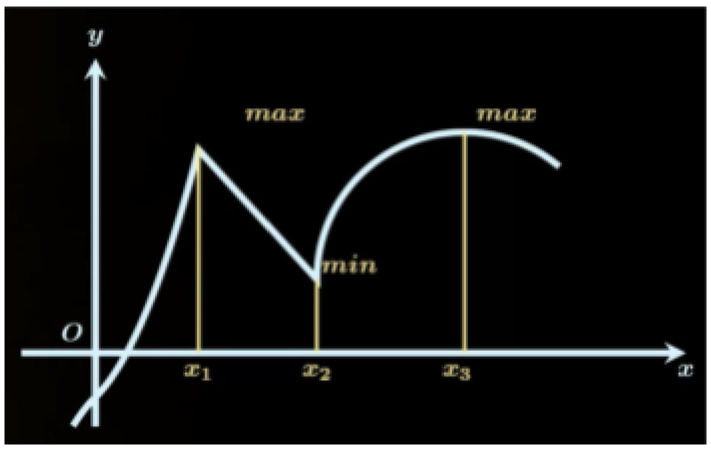
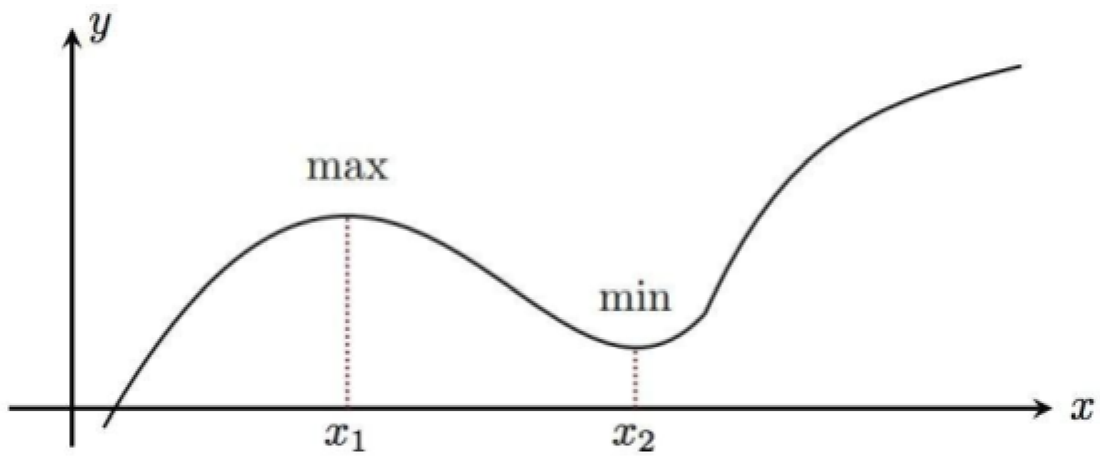


Рисунок. Производная может быть вовсе не определена в точках локальных экстремумов. Это точки x1 и x2



Выпуклость функции и вторая производная

Выясним, как влияет знак производной на характер поведения функции?



Если мы будем строить касательные ко всем точкам слева от x1, то все эти прямые будут направлены вверх, то есть коэффициент к у этих прямых положительный. А слева от x1 касательные направлены вниз, то есть коэффициент к (а значит и производная) отрицательные. В самой точке x1, мы помним, что производная равна 0.

Таким образом, получим

1. $f'(x) \geq 0$ – функция возрастает;
2. $f'(x) > 0$ – функция строго возрастает;
3. $f'(x) \leq 0$ - функция убывает;
4. $f'(x) < 0$ – функция строго убывает.

Рисунок. Выпуклая функция

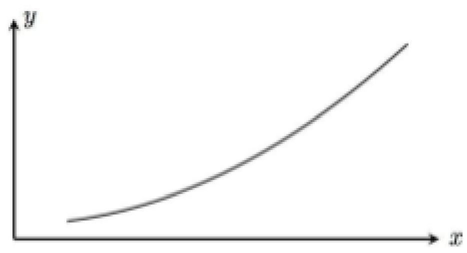


Рис. 11: Выпуклая функция

Если мы соединим любую точку нижней ветви графика и x0, то окажется, что «отрезанная» часть графика окажется ниже этой прямой. Такую функцию называют выпуклой.

Рисунок. Вогнутая функция

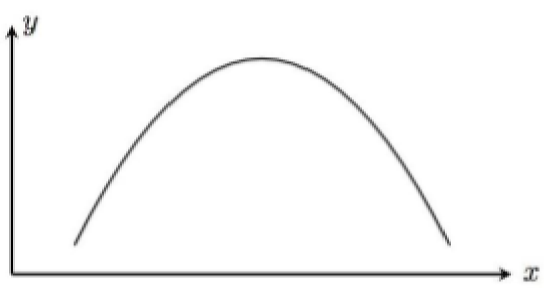


Рис. 12: Вогнутая функция

Если график окажется выше прямой, как будет на этом графике. То функцию называют вогнутой.

Понятия выпуклости и вогнутости функции связаны со второй производной.

А именно,

1. $f''(x) \geq 0$ — функция $f(x)$ выпукла,
2. $f''(x) > 0$ — функция $f(x)$ строго выпукла,
3. $f''(x) \leq 0$ — функция $f(x)$ вогнута,
4. $f''(x) < 0$ — функция $f(x)$ строго вогнута.

Наложив некоторые условия на вторую производную, можно сделать их достаточными!

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

И действительно. Если в точке x0 производная равна нулю, то касательная в этой точке параллельна OX. А раз вторая производная положительная, то это означает, что функция выпукла, что означает то. Что в точке x0 – минимум.

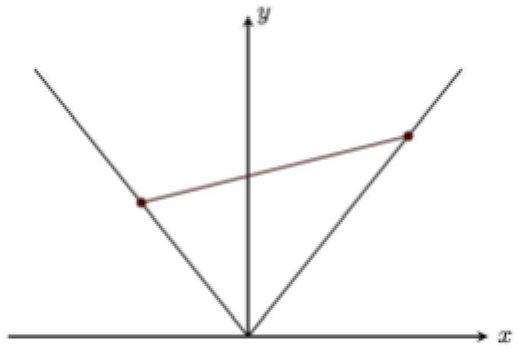
Более общее определение выпуклости/вогнутости функции. Вещественнозначная функция, определённая на некотором интервале, выпукла, если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа t ∈ [0, 1] выполняется:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

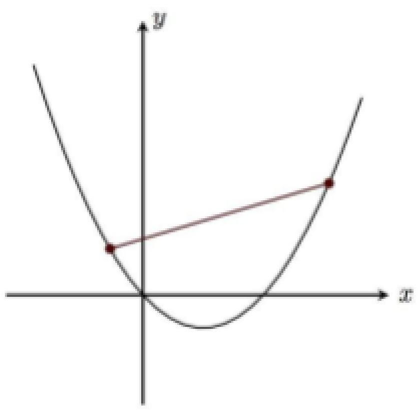
То есть, если соединить две точки на графике отрезком, он окажется выше графика функции f(x).

Почему это определение более общее? Оно подходит и для функций, производная которых не определена в некоторых точках.

Пример 1.



Пример 2



Автоматическое вычисление производных с помощью python

{Совет: если вы создаете массив из библиотеки numpy

```
arr = np.random.rand(1000000)
```

вы можете просто посчитать сумму с помощью функции sum

```
In [3]:%timeit sum(arr)
```

Или с помощью np.sum из numpy -библиотеки

```
%timeit np.sum(arr)
```

И это будет в разы быстрее. И другиефункции np работают быстрее обычных}

Поиск экстремумов.

Пусть дана некоторая функция

```
In [4]:def f(x):
    return -1 * np.sin(x)/x
```

мы находимся в точке x0 и хотим найти ближайший локальный минимум этой функции. Есть встроенная функция fmin (она импортируется из библиотеки scipy), которая это реализует.

```
In [6]:# objective function

x0 = -5 # start from x = -5
xmin0 = fmin(f,x0)
```

Если же вам нужно найти максимум, то необходимо ввести функцию f_(x) = -f(x)

```
In [5]:def f_(x):
    return -f(x)
```

и найти ее минимум.

Например,

```
In [4]:def f(x):
    return -1 * np.sin(x)/x
```

```
In [5]:def f_(x):
    return -f(x)
```

```
In [6]:# objective function

x0 = -5 # start from x = -5
xmin0 = fmin(f,x0)

x1 = -4 # start from x = -4
xmin1 = fmin(f,x1)
```

```
In [7]:
# objective function

x0 = -5 # start from x = -5
xmin0 = fmin(f_,x0)

x1 = -4 # start from x = -4
xmin1 = fmin(f_, x1)
```

Еще один способ поиска

В библиотеке scipy есть встроенная функция electrocardiogram. Она создает массив на заданном интервале. Найти локальные максимумы, больше какого-либо заданного числа, можно с помощью функции find_peaks, которая ищет пики на графиках выше определенной высоты. То есть все точки максимума, а не ближайшие как функция min.

Например,

```
In [8]:x = electrocardiogram()[3000:3500]
peaks, _ = find_peaks(x, height=0)
plt.plot(x)
plt.plot(peaks, x[peaks], "x")
plt.plot(np.zeros_like(x), "--", color="gray")
plt.show()
```

Функцию find_peaks можно применять и не только к электрокардиограмме,. Но и к любой функции. Например, здесь синус

```
In [10]:x = np.array([np.sin(xx) for xx in np.linspace(0, 10, 100)])
peaks, _ = find_peaks(x, height=0)
plt.plot(x)
plt.plot(peaks, x[peaks], "x")
plt.plot(np.zeros_like(x), "--", color="gray")
plt.show()
```

Если нужен минимум, то вводим функцию равную –f(x) и ищем ее максимумы.

Нахождение производной.

Из библиотеки scipy импортируем функцию derivative. Она считает производную в заданной точке с указанием приращения. То есть дает небольшую погрешность.

Пример.

```
In [12]:from scipy.misc import derivative
def f(x):
    return x**3 + x**2
derivative(f, 1.0, dx=1e-6)
```

```
Out[12]: 4.999999999921734
```

Здесь производная от f в точке x=1 с приращением dx=1e-6

А можно и нарисовать и саму функцию и производную (касательную). Для примера возьмем функцию $f(x)=x^2+1$ на интервале от -10 до 10. n=1 означает порядок производной

```
In [13]:def f(x):
    return x ** 2 + 1
```

```
In [14]:x = np.linspace(-10, 10)
fx = f(x)
f1x = [derivative(f, xx, dx=1e-6, n=1) for xx in x]
```

```
In [15]:plt.plot(x, fx, label='function')
plt.plot(x, f1x, label='derivative')
plt.legend()
plt.show()
```