**Метод простых итераций (МПИ)**

Теперь рассмотрим более общий итерационный метод уточ- нения корней. Для этого представим исходное уравнение в равносильном виде

**

Пусть нам известно начальное приближение к корню *x*0 (*x*0 ϵ

[*a*, *b*]). Подставив его в правую часть, получим новое приближе-

ние *x*1 = f( *x*0 ) , затем аналогичным образом получим *x*2 = f( *x*1 ) .

Продолжая данный процесс, получаем последовательность чисел

*xk* +1 = f( *xk* ) .

При определенных свойствах функции f( *x*) последователь-

ность {*x*1, *x*2, …, *xk*, …} сходится к корню уравнения *f* ( *x*) = 0 .

Необходимо установить при каких условиях итерационный про- цесс будет сходящимся.

Рассмотрим графически процесс получения приближенного решения в методе простых итераций. При решении необходимо

отыскать точку пересечения кривой *y* = f( *x*) и прямой *y* = *x* яв-

ляющейся биссектрисой координатного угла..



Пусть *x* = *x*\* – корень уравнения. Выберем начальное прибли- жение в точке *x*0 . Следующее приближении *x*1 , в соответствии с уравнением, будет равно f( *x*0 ) . Для того, чтобы отобразить *x*1 на графике можно провести через точку ( *x*0 , f( *x*0 ) ) прямую, па- раллельную оси абсцисс, до пересечения с прямой *y* = *x* , а затем в точке пересечения этих прямых опустить перпендикуляр на ось абсцисс, который и отметит положение точки *x*1 . Аналогично по-

лучаются все последующие приближения. Из рис. 33, 34, 38, 39 видно, что итерационный процесс сходятся к искомому корню *x*\*, а на рис. 35–37 с каждой новой итерацией получаемое решение удаляется от искомого решения, т.е. итерационный процесс явля- ется расходящимся.

Математически условие сходимости можно установить сле- дующим образом. Представим *k* и *k* + 1 приближения в форме

*xk* = *x* \* +e*k* ,

*xk* +1 = *x* \* +e*k* +1 .

где e*k* и e*k* +1 – отклонения приближений от корня.

Функцию *φ* (*x*) вблизи точки *x*\* приближенно заменим пер- выми двумя членами ряда Тейлора. Тогда итерационная формула примет вид

*x* \* +e*k* +1 » f( *x* \*) + e*k* f¢( *x* \*) .

Но поскольку *x*\* является корнем уравнения, то первые сла- гаемые в правой и левой части этого выражения тождественно равны и, следовательно

e*k* +1 » e*k* f¢( *x* \*) .

Для сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы погрешность на каждом шаге убывала, т.е.

e*k* +1 < e*k* ,

откуда следует, что в окрестности корня должно выполняться условие

f¢( *x*) < 1 .

Таким образом, для того чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо, чтобы абсолютная величина производ-

ной f¢( *x*) в окрестности корня была меньше единицы. Если это

условие выполняется на отрезке [*a*, *b*] на котором локализован корень, то в качестве начального приближения можно взять лю- бую точку из этого отрезка *x*0 ϵ [*a*, *b*]. Скорость сходимости зави-

сит от абсолютной величины производной f¢( *x*) : чем меньше

f¢( *x*) вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.