Sujet d'entraînement d'algèbre

M1 MIASHS

Septembre 2025

Exercice 1 : Sous-espace de matrices symétriques (cas $n = 3$)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 3×3 et

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : A^\top = A\}$$

l'ensemble des matrices symétriques 3×3.

(a) Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Pour $1 \leq i \leq 3$, on note E_{ii} la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'unique coefficient non nul vaut 1 en position (i, i). Pour $1 \leq i < j \leq 3$, on note $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$, où E_{ij} a 1 en position (i, j) et 0 ailleurs.

Écrire explicitement les matrices $E_{11},\ E_{22},\ E_{33},\ F_{12},\ F_{13},\ F_{23}$. Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}, F_{12}, F_{13}, F_{23}\}$$

est une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ (montrer qu'elle engendre $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est libre).

(c) En déduire la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

Info bonus (cas général n). Pour $n \geq 1$, on définit E_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ et $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Alors

$$\mathcal{B}_n = \{E_{11}, \ldots, E_{nn}\} \ \cup \ \{F_{ij} \ : \ 1 \leq i < j \leq n\}$$

est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\dim\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 : Application linéaire non inversible sur $\mathbb{R}^3$

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (\ x + y - z,\ 2x + 2y + z,\ 3x + 3y\ ).$$

(a) Montrer que f est une application linéaire (*i.e.*, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$).

(b) Déterminer la matrice associée A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) La matrice A est-elle inversible ? Par conséquent, peut-on dire que f est injective, surjective, bijective ?

(d) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, et montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(e) Quelle(s) équation(s) vérifient $(x, y, z) \in \ker(f)$? Montrer qu'il s'agit d'un sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(f) Quelle(s) équation(s) vérifient $(x, y, z) \in \mathrm{Im}(f)$? Montrer qu'il s'agit d'un sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(g) Vérifier le théorème du rang dans cet exemple : $\dim \ker(f) + \mathrm{rg}(f) = 3$.

Exercice 3 : Diagonalisation et théorème spectrale.

On considère la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que S est symétrique.

(b) Vérifier que $S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Déterminer si S est injective, surjective, bijective (en dimension finie, relier à l'inversibilité de S).

(d) S est-elle nécessairement diagonalisable ? Justifier. Calculer le polynôme caractéristique de S, son spectre $\mathrm{Sp}(S)$, et des bases de chaque sous-espace propre E_λ.

(e) En déduire une matrice orthogonale Q (les colonnes étant des vecteurs propres orthonormés) et une matrice diagonale D telles que $S = QDQ^\top$.

Exercice 4 : Chaîne stochastique en dimension 3.

cf sujet anglais