Contrôle — Calcul différentiel et Algèbre linéaire

Durée : 55 minutes

Consignes. Justifiez clairement vos réponses.

Exercice 1 — Dérivée d'une composition [10 pts]

On considère les applications

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) = \big(e^{2t},\, t^2 - 1\big), \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) = x^2 y + \sin y.$$

On note $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Rappeler la règle de la chaîne pour la dérivée d'une composition. [3 pts]
2) Calculer $f'(t)$ (la dérivée de f) et le gradient $\nabla g(x, y)$. [3 pts]
3) En déduire l'expression générale de $h'(t)$. [3 pts]
4) Calculer la valeur numérique $h'(0)$. [1 pts]

Exercice 2 — Diagonalisation d'une matrice 2×2 [10 pts]

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de A et, pour chacune, donner une base d'*un sous*-espace propre (donner une base). [4 pts]
2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier soigneusement. [3 pts]
3) Si oui, construire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. [2 pts]
4) *Question ouverte (réflexion).* En apprentissage automatique, en quoi la diagonalisation (ou la réduction en base propre) peut-elle être utile ? Donner un ou deux arguments concrets en quelques lignes. [1 pt]

Correction

Exercice 1

Rappel — Règle de la chaîne. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, alors, pour $h = g \circ f$,

$$\boxed{h'(t) = f'(t) \cdot \nabla g\big(f(t)\big)}.$$

En écriture composante : si $f(t) = (u(t), v(t))$, alors

$$h'(t) = g_x\big(u(t), v(t)\big)\, u'(t) + g_y\big(u(t), v(t)\big)\, v'(t).$$

2) Dérivées.

$$f'(t) = \big(2e^{2t},\ 2t\big), \qquad \nabla g(x,y) = \big(2xy,\ x^2 + \cos y\big).$$

3) Expression de $h'(t)$. Posons $x = e^{2t}$ et $y = t^2 - 1$. Alors

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla g(x,y) \cdot f'(t) = \big(2xy,\ x^2 + \cos y\big) \cdot \big(2e^{2t},\ 2t\big) \\ &= (2xy)(2e^{2t}) + (x^2 + \cos y)(2t) = 4(t^2-1)e^{4t} + 2t\big(e^{4t} + \cos(t^2-1)\big). \end{aligned}$$

Éventuellement, on peut factoriser

$$\boxed{h'(t) = 2e^{4t}\,(2t^2 - 2 + t)\ +\ 2t\cos(t^2 - 1)}.$$

4) Valeur numérique. En $t = 0$, $f(0) = (1, -1)$, $f'(0) = (2, 0)$ et $\nabla g(1,-1) = \big(-2,\ 1 + \cos 1\big)$. Donc

$$h'(0) = \nabla g(1,-1) \cdot f'(0) = (-2) \cdot 2 + (1 + \cos 1) \cdot 0 = \boxed{-4}.$$

Exercice 2

1) Valeurs propres et sous-espaces propres. A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont les éléments diagonaux :

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Pour $\lambda = 4$: $A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$, x libre. Un vecteur propre est $v_1 = (1,0)^\top$; $E_{\lambda=4} = \mathrm{Span}\{(1,0)\}$. *Ce résultat **se lisait** directement sur la matrice car l'image du vecteur canonique e_1 renvoyait $4e_1$…*

Pour $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$. Un vecteur propre est $v_2 = (1,-2)^\top$; $E_{\lambda=2} = \mathrm{Span}\{(1,-2)\}$.

2) Diagonalisabilité. On a deux valeurs propres distinctes et deux vecteurs propres linéairement indépendants $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

3) Construction de P et D. Prenons P dont les colonnes sont v_1, v_2 et $D = \operatorname{diag}(4, 2)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que P est inversible ($\det P = -2 \neq 0$) et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

4) Réflexion (ML / data).

— **PCA et covariance.** La diagonalisation (ou SVD) de la matrice de covariance aligne les données sur les directions de variance maximale (composantes principales) $\Rightarrow$ réduction de dimension, débruitage, visualisation.

— **Dynamique linéaire.** Dans les itérations linéaires $x_{k+1} = Ax_k$, la diagonalisation décompose le système selon les valeurs propres $\Rightarrow$ compréhension de la stabilité (modes qui croissent/décroissent) et calcul efficace de A^k, $\exp(A)$, etc.