Notions abordées pour l'examen d'algèbre

Septembre 2025

Version française

Les notions suivantes sont à connaître et à maîtriser pour l'examen théorique mais aussi pour avoir une base solide pour aborder la modélisation statistique et machine learning :

1. **Applications linéaires** : Définition. Savoir montrer que $f : E \to F$ est linéaire, *i.e.*, savoir montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. **Lien** entre une matrice et une application linéaire.
3. **Lien** entre un système linéaire et une matrice.
4. **Pivot de Gauss** : $(A \mid I_d) \sim (I_d \mid A^{-1})$. Conditions pour qu'une matrice soit inversible ($\det(A) \neq 0$ ou bien tout pivot non nul).
5. **Trace et déterminant** : Définitions et propriétés. Savoir développer un déterminant 3×3 ou 4×4.
6. **Transposée d'une matrice** : Notée $A^\top$. Définition et propriété (application linéaire).
7. **Noyau et Image** : Définitions.
8. Montrer qu'un **sous-ensemble** de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel (contient le $0_{\mathbb{R}^n}$, et stable par combinaison linéaire).
9. **Théorème du rang**. Définition du rang d'une application linéaire (*i.e.*, d'une matrice) et égalité vérifiée par le théorème du rang.
10. En dimension finie : conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ **soit injective ; surjective ; bijective**.
11. **Valeurs propres et vecteurs propres** : Définitions. Intérêt de la diagonalisation. Spectre d'une matrice $\mathrm{Sp}(A)$ et sous-espaces propres E_{λ_i}.
12. **Polynôme caractéristique** : Définition. Lien avec les valeurs propres.
13. **Justifier que λ est valeur propre de A.** Possible sans calcul. Si on trouve $v \in \mathbb{R}^n$ **non nul** tel que $Av = \lambda v$ alors v est vecteur propre associé à la valeur propre λ.
    - $\to$ ***Remarque :*** Si on trouve un certain v non nul tel que $A^\top v = \lambda v$, alors λ est bien valeur propre de A (car $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$) mais attention, v est vecteur propre de $A^\top$ mais pas (forcément) vecteur propre de A.
14. **Diagonalisation** : Conditions pour que A soit diagonalisable. Formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$. Propriétés :
$$D = \mathrm{diag}((\lambda_i)_i), \quad \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(D), \quad A^t = PD^tP^{-1},$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \sum_i \lambda_i, \quad \det(A) = \det(D) = \prod_i \lambda_i.$$
15. **Matrices orthogonales** : Définition.
16. **Matrices symétriques** : Théorème spectral et propriétés spectrales.
17. **Systèmes stochastiques** : Définition. Matrice stochastique (tous les éléments la constituant sont ≥ 0 et les sommes des éléments des colonnes (ou des lignes) donnent 1. Un système stochastique est donc gouverné par $v_{t+1} = Av_t$. Système stochastique à l'équilibre, partant d'un initial v_0. Puisque $A^t = PD^tP^{-1}$, déterminer
$$v_\infty = \left(\lim_{t\to\infty} A^t\right) \cdot v_0.$$

English version

The following notions must be known and mastered for the theoretical exam, but also to build a solid foundation for statistical modeling and machine learning :

1. **Linear maps** : Definition. Be able to show that $f : E \to F$ is linear, *i.e.*, show that $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. **Link** between a **matrix** and a **linear map**.
3. **Link** between a **linear system** and a **matrix**.
4. **Gaussian pivot method** : $(A \mid I_d) \sim (I_d \mid A^{-1})$. Conditions for a matrix to be invertible ($\det(A) \neq 0$ or equivalently all pivots are nonzero).
5. **Trace and determinant** : Definitions and properties. Be able to expand a 3×3 or 4×4 determinant.
6. **Transpose of a matrix** : Denoted $A^\top$. Definition and property (linear map).
7. **Kernel and Image** : Definitions.
8. Show that a **subset** of $\mathbb{R}^n$ is a **subspace** (it must contain $0_{\mathbb{R}^n}$ and be closed under linear combinations).
9. **Rank theorem** : Definition of the rank of a linear map (*i.e.*, of a matrix) and the equality stated by the rank theorem.
10. In finite dimension : necessary and sufficient conditions **for a linear map** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ **to be injective ; surjective ; bijective**.
11. **Eigenvalues and eigenvectors** : Definitions. Motivation : diagonalization. Spectrum of a matrix $\mathrm{Sp}(A)$ and eigenspaces E_{λ_i}.
12. **Characteristic polynomial** : Definition. Relation with eigenvalues.
13. **Justify that λ is an eigenvalue of A.** This can sometimes be done without solving the full characteristic polynomial. If one finds $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, such that $Av = \lambda v$, then v is an eigenvector associated with λ.
    - → ***Remark :*** If one finds $v \neq 0$ such that $A^\top v = \lambda v$, then λ is indeed an eigenvalue of A (since $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$). However, v is an eigenvector of $A^\top$, not necessarily of A.
14. **Diagonalization** : Conditions for A to be diagonalizable. Change-of-basis formula : $A = PDP^{-1}$. Properties :
$$D = \mathrm{diag}((\lambda_i)_i), \quad \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(D), \quad A^t = PD^tP^{-1},$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \sum_i \lambda_i, \quad \det(A) = \det(D) = \prod_i \lambda_i.$$
15. **Orthogonal matrices** : Definition.
16. **Symmetric matrices** : Spectral theorem and spectral properties.
17. **Stochastic systems** : Definition. A stochastic matrix has all entries ≥ 0 and each column sum (or row sum) equals 1. A stochastic system is thus given by $v_{t+1} = Av_t$. Equilibrium stochastic system, starting from an initial v_0. Since $A^t = PD^tP^{-1}$, compute
$$v_\infty = \left(\lim_{t\to\infty} A^t\right) \cdot v_0.$$