Notions fondamentales en Analyse

Paul MINCHELLA, Stéphane CHRÉTIEN
paul.minchella@lyon.unicancer.fr

Ensembles de nombres

- **Nombres naturels :** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, entiers positifs ou nuls.
- **Nombres entiers relatifs :** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, tous les entiers positifs, négatifs, et 0.
- **Nombres rationnels :** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; : \; p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{Z}^*, \; q \neq 0 \right\}$, quotients d'entiers.
- **Nombres réels :** $\mathbb{R}$ est la *complétion* de $\mathbb{Q}$, corps totalement ordonné et complet.
- **Nombres complexes :** $\mathbb{C} = \{x + iy : \; x, y \in \mathbb{R}, \; i^2 = -1\}$, extension algébrique de $\mathbb{R}$.

Hiérarchie

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Ensembles de nombres

- **Nombres naturels :** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, entiers positifs ou nuls.
- **Nombres entiers relatifs :** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, tous les entiers positifs, négatifs, et 0.
- **Nombres rationnels :** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*,\ q \neq 0\right\}$, quotients d'entiers.
- **Nombres réels :** $\mathbb{R}$ est la *complétion* de $\mathbb{Q}$, corps totalement ordonné et complet.
- **Nombres complexes :** $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$, extension algébrique de $\mathbb{R}$.

Hiérarchie

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition importante

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, les intervalles de $\mathbb{R}$ ayant a et b comme extrémités sont notés :

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b].$$

Loi de composition interne

Soit E un ensemble. Une *loi de composition interne* sur E est une application

$$\star : E \times E \to E, \qquad (x, y) \mapsto x \star y.$$

Exemples : $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}$.

Groupe

Un *groupe* est un couple $(G, \star)$ où $\star$ est une loi de composition interne vérifiant :

- **Associativité :** $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
- **Élément neutre :** il existe $e \in G$ tel que $x \star e = e \star x = x$.
- **Inverse :** tout $x \in G$ admet x^{-1} avec $x \star x^{-1} = e$.

Si $x \star y = y \star x$ pour tous x, y, le groupe est *abélien*.

Citez des exemples connus !

Exemple

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe : tout entier n'a pas d'inverse multiplicatif dans $\mathbb{Z}$.

Anneau

Un *anneau* $(A, +, \times)$ est un ensemble muni de deux lois :

- $(A, +)$ est un groupe abélien.
- $\times$ est associative avec un élément neutre 1.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Corps

Un *corps* est un anneau $(K, +, \times)$ où tout élément non nul est inversible pour $\times$.

Exemples

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps. $\mathbb{Z}$ est un anneau mais pas un corps.

Énoncé

On définit, pour $a, b \in \mathbb{Z}$, la loi

$$a \star b \;=\; a + b + 1.$$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition *interne* sur $\mathbb{Z}$.
2. Vérifier l'associativité et la commutativité de $\star$.
3. Déterminer l'élément neutre e pour $\star$.
4. Pour $a \in \mathbb{Z}$, déterminer l'inverse de a pour $\star$.
5. Conclure : $(\mathbb{Z}, \star)$ est-il un groupe ? Abélien ?

Solution ?

Fonction

Soient deux ensembles X et Y. Une *fonction* f de X vers Y associe à tout élément $x \in X$ un unique élément $y \in Y$, noté $f(x)$.

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Domaine et image

- **Domaine** : $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in X : f(x) \text{ est définie}\}$.
- **Image** : $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

Fonction

Soient deux ensembles X et Y. Une *fonction* f de X vers Y associe à tout élément $x \in X$ un unique élément $y \in Y$, noté $f(x)$.

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Domaine et image

- **Domaine** : $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in X : f(x) \text{ est définie}\}$.
- **Image** : $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

Exercice 1

Soit $f(x) = 3x + 7$.

1. Déterminer $\mathrm{Dom}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

1. Déterminer $\mathrm{Dom}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Solutions ?

Majorant et minorant

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

- M est un **majorant** de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.
- m est un **minorant** de A si $\forall x \in A,\ x \geq m$.

Majorant et minorant

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

- M est un **majorant** de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.
- m est un **minorant** de A si $\forall x \in A,\ x \geq m$.

Borne supérieure et inférieure

- La **borne supérieure** (ou **supremum**) de A, notée $\sup A$, est le plus petit des majorants. Formellement :

$$\sup A = M \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } x > M - \varepsilon. \end{cases}$$

- La **borne inférieure** (ou **infimum**) de A, notée $\inf A$, est le plus grand des minorants.

Majorant et minorant

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

- M est un **majorant** de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.
- m est un **minorant** de A si $\forall x \in A,\ x \geq m$.

Borne supérieure et inférieure

- La **borne supérieure** (ou **supremum**) de A, notée $\sup A$, est le plus petit des majorants. Formellement :

$$\sup A = M \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } x > M - \varepsilon. \end{cases}$$

- La **borne inférieure** (ou **infimum**) de A, notée $\inf A$, est le plus grand des minorants.

Extension aux fonctions

Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

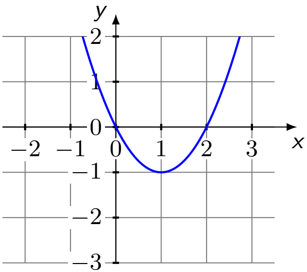
$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D\}, \quad \inf_{x \in D} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D\}.$$

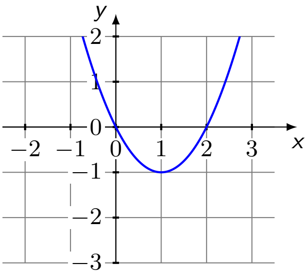
Graphe d'une fonction

Le *graphe* de f est l'ensemble

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Géométriquement, c'est la courbe représentative de f dans le plan cartésien.





Graphe d'une fonction

Le *graphe* de f est l'ensemble

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Géométriquement, c'est la courbe représentative de f dans le plan cartésien.

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ sur un intervalle I.

- f **croissante** (*resp.* strictement croissante) : $x < y \implies f(x) \leq f(y)$ (*resp.*) $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f **décroissante** (*resp.* strictement décroissante) : $x < y \implies f(x) \geq f(y)$ (*resp.*) $x < y \implies f(x) > f(y)$.
- Une fonction qui est uniquement croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Combinaison linéaire, produit, quotient

Étant donné deux fonctions f, g définies sur un même domaine et deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$, on définit :

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x), \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (si } g(x) \neq 0).$$

Combinaison linéaire, produit, quotient

Étant donné deux fonctions f, g définies sur un même domaine et deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$, on définit :

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x), \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (si } g(x) \neq 0).$$

Composition

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. La fonction composée $f \circ g : X \to Z$ est définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in X.$$

De même, $g \circ f$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ lorsque cela a un sens.

Remarque

Attention : la composition de fonctions n'est en général **pas commutative**.

Application concrète

Soit t le temps écoulé après l'an 2000.

- La population (en millions) est donnée par

$$p(t) = 50 + e^{0.01t}.$$

- Le revenu en fonction de la population se modélise via

$$R(p) = 2.1 + \ln(1 + 3p).$$

Quelle application fournit le revenu en fonction du temps t (en années) ? Comment varie-t-elle ?

Solution ?

Ensemble réciproque

Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. L'ensemble réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

En particulier, pour $y \in F$:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) = y\}.$$

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soient $f : E \to F$.

- **Injective** : $f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$. (Deux éléments distincts de E ont des images distinctes.)
- **Surjective** : $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$. (L'image est exactement F.)
- **Bijective** : f est injective et surjective. Dans ce cas, f admet une unique fonction réciproque $f^{-1} : F \to E$ telle que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

Fonction et sa réciproque

Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

- Quel est le domaine de définition de f ? Que vaut son image ?
- La fonction est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- Déterminer f^{-1}. Pour ce faire, résoudre $f(y) = x$ en cherchant à exprimer y en fonction de x.

Solution ?

Fonction de Lambert W sur $[0, +\infty)$

On appelle *fonction de Lambert* toute application (possiblement multivaluée) W vérifiant

$$W(y)\, \mathrm{e}^{W(y)} = y.$$

Sur la droite réelle, on sait qu'il existe des **branches** de W définies sur certains intervalles (par exemple W_0 et W_{-1} sur $[-\mathrm{e}^{-1}, 0)$). Dans cet exercice, on se limite à l'intervalle $[0, +\infty)$ et l'on étudie l'équation $w\,\mathrm{e}^{w} = y$ à l'aide de la fonction suivante. On considère $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ définie par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}.$$

1. Montrer que f est continue, strictement croissante et qu'elle réalise une bijection de $[0, +\infty)$ sur $[0, +\infty)$.
2. En déduire que, pour tout $y \in [0, +\infty)$, l'équation $w\,\mathrm{e}^{w} = y$ admet une **unique** solution réelle $w \in [0, +\infty)$. On note alors $W_0(y)$ cette solution, et on vérifie que $W_0 = f^{-1}$.

Solution ?

Suite numérique

Une **suite numérique** est une suite de réels $u_0, u_1, u_2, \ldots,$ notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Formellement, c'est une fonction

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$n \longmapsto u_n.$$

Suites croissantes, décroissantes, bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Croissante** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
- **Décroissante** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
- **Constante** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.
- **Monotone** : croissante ou décroissante.
- **Majorée** : $\exists\, M,\ u_n \leq M$ pour tout n.
- **Minorée** : $\exists\, m,\ u_n \geq m$ pour tout n.
- **Bornée** : à la fois majorée et minorée (i.e. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée).

Limite finie

Soit (u_n) une suite et $u^* \in \mathbb{R}$. On dit que $u_n \to u^*$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k, \quad |u_n - u^*| \leq \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u^*$.

Limite infinie

- $u_n \to +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists k,\ \forall n \geq k,\ u_n \geq M.$
- $u_n \to -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists k,\ \forall n \geq k,\ u_n \leq M.$

Règles de calcul sur les limites

Si (u_n) et (v_n) admettent des limites (réelles ou infinies), alors :

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n, \qquad \lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n,$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}, \quad \text{si } \lim v_n \neq 0.$$

Suite récurrente

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} x_0 \text{ fixé}, \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$
Autrement dit, chaque terme est défini à partir du précédent par une relation de récurrence.

Principe de récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de vérifier :

- **Initialisation** : $P(0)$ (ou $P(1)$) est vraie.
- **Hérédité** : $\forall n \geq 0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suite récurrente

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente** s'il existe une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} x_0 \text{ fixé}, \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$
Autrement dit, chaque terme est défini à partir du précédent par une relation de récurrence.

Principe de récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de vérifier :

- **Initialisation** : $P(0)$ (ou $P(1)$) est vraie.
- **Hérédité** : $\forall n \geq 0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Démontrer par récurrence que

$$P(n) : \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle **croissante** (*resp.* **décroissante**).

- Si (u_n) est **bornée supérieurement** (*resp.* inférieurement), alors (u_n) **converge** et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \Big(\textit{resp.} \ \lim_{n\to\infty} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}\Big).$$

- Si (u_n) n'est pas bornée, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad \Big(\textit{resp.} \ \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty\Big).$$

Preuve ?

Exercice 1 : Suites géométriques et somme partielle

Soit la suite géométrique $x_n = c\,q^n$ avec $c \neq 0$ et $q \neq 0, 1$.

1. Étudier la limite de (x_n) selon les valeurs de q et le signe de c.
2. Montrer que la somme des $n+1$ premiers termes est

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} c\,q^k = c\,\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Exercice 1 : Suites géométriques et somme partielle

Soit la suite géométrique $x_n = c\,q^n$ avec $c \neq 0$ et $q \neq 0, 1$.

1. Étudier la limite de (x_n) selon les valeurs de q et le signe de c.
2. Montrer que la somme des $n+1$ premiers termes est

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} c\,q^k = c\,\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que la suite est bien définie pour tout n.
2. Montrer que (u_n) est majorée.
3. Conclure que (u_n) admet une limite,notée ℓ, et montrer que $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Intuition géométrique : On considère un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ (dans la droite, le plan, ou l'espace).

- Un **point intérieur** de A est un point qui possède un petit voisinage *entièrement contenu* dans A.
- Un **point adhérent** est un point autour duquel tout voisinage contient *au moins un point* de A (donc A "touche" le point).
- Un **point de frontière** est un point dont tout voisinage rencontre à la fois A et le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Intuition géométrique : On considère un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ (dans la droite, le plan, ou l'espace).

- Un **point intérieur** de A est un point qui possède un petit voisinage *entièrement contenu* dans A.
- Un **point adhérent** est un point autour duquel tout voisinage contient *au moins un point* de A (donc A "touche" le point).
- Un **point de frontière** est un point dont tout voisinage rencontre à la fois A et le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Définitions formelles

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

- x est **intérieur** à A si $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- x est **adhérent** à A si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
- x est **de frontière** de A si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ *et* $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

Intuition géométrique : On considère un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ (dans la droite, le plan, ou l'espace).

- Un **point intérieur** de A est un point qui possède un petit voisinage *entièrement contenu* dans A.
- Un **point adhérent** est un point autour duquel tout voisinage contient *au moins un point* de A (donc A "touche" le point).
- Un **point de frontière** est un point dont tout voisinage rencontre à la fois A et le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus A$.

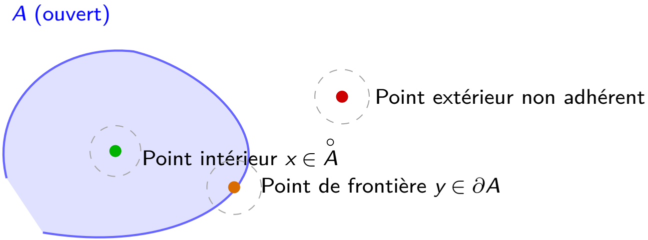
Définitions formelles

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

- x est **intérieur** à A si $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- x est **adhérent** à A si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
- x est **de frontière** de A si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ *et* $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

Remarques :

- L'ensemble des points intérieurs de A est noté $\overset{\circ}{A}$.
- L'ensemble des points adhérents est la **fermeture** $\overline{A}$.
- La frontière est $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.



Tout point de $\overline{A}$ (intérieur *ou* frontière) est *adhérent*. Ici, $y \in \partial A$ est adhérent, x aussi.

Idée générale: La notion de limite, qui mène à la continuité et à la dérivée, est fondamentale en analyse. Intuitivement, une limite décrit la valeur à laquelle $f(x)$ s'approche lorsque x tend vers un point donné.

Limite en un point

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point d'adhérence de A. On dit que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Idée générale: La notion de limite, qui mène à la continuité et à la dérivée, est fondamentale en analyse. Intuitivement, une limite décrit la valeur à laquelle $f(x)$ s'approche lorsque x tend vers un point donné.

Limite en un point

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point d'adhérence de A. On dit que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition séquentielle équivalente

$f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x^*$ si, pour toute suite (x_n) de A telle que $x_n \to x^*$, on a

$$f(x_n) \to \ell.$$

Idée générale: La notion de limite, qui mène à la continuité et à la dérivée, est fondamentale en analyse. Intuitivement, une limite décrit la valeur à laquelle $f(x)$ s'approche lorsque x tend vers un point donné.

Limite en un point

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point d'adhérence de A. On dit que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition séquentielle équivalente

$f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x^*$ si, pour toute suite (x_n) de A telle que $x_n \to x^*$, on a

$$f(x_n) \to \ell.$$

Unicité de la limite

La limite, lorsqu'elle existe, est **unique**.

Compatibilité des limites avec les opérations

Soient f, g définies au voisinage de x^*. Si $\lim_{x \to x^*} f(x) = \kappa$ et $\lim_{x \to x^*} g(x) = \ell$, alors :

- $\lim(af(x) + bg(x)) = a\kappa + b\ell$, pour $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\lim(f(x))^\alpha = \kappa^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (sous réserve de cohérence).
- $\lim(f(x)g(x)) = \kappa\ell$.
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\kappa}{\ell}$, si $\ell \neq 0$.
- $\lim(f \circ g)(x) = \lim_{y \to \ell} f(y)$.

Exemple

Supposons

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 6, \quad \lim_{x \to 2} g(x) = -2.$$

Alors :

- $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{-2} = -2.$
- $\lim_{x \to 2}(f(x))^3 = 4^3 = 64.$
- $\lim_{x \to 2}(f \circ g)(x) = \lim_{z \to -2} f(z) = 6.$

Idée

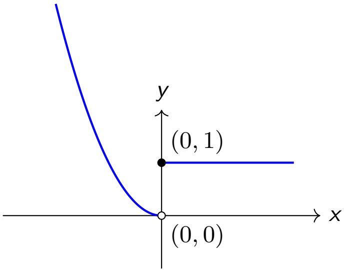
La valeur d'une limite peut dépendre de la direction par laquelle on approche un point : à gauche ($x \to a^-$) ou à droite ($x \to a^+$).

Idée

La valeur d'une limite peut dépendre de la direction par laquelle on approche un point : à gauche ($x \to a^-$) ou à droite ($x \to a^+$).

Considérons la fonction f représentée ci-dessous :

Exemple



- $\ell^- := \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ (par la gauche).
- $\ell^+ := \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ (par la droite).

Continuité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, et $x^* \in I$. f est continue en x^* si :

1. $f(x^*)$ existe,
2. $\lim_{x \to x^*} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$.

Sinon, f est **discontinue** en x^*.

Stabilité de la continuité

- Les polynômes sont continus partout.
- Les combinaisons de fonctions continues par $+, \times, \div, \sqrt{\,}$, puissances, etc. restent continues (sur le domaine défini).

Continuité sur un intervalle

f est continue sur I si elle est continue en tout $x^* \in I$. On note alors $f \in C^0(I)$, l'ensemble des fonctions continues sur I.

Exercice 1

Vérifier si la fonction suivante est continue (et préciser l'intervalle) :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x}, & x > 1, \\ x^2 + 1, & x \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 1

Vérifier si la fonction suivante est continue (et préciser l'intervalle) :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x}, & x > 1, \\ x^2 + 1, & x \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 2

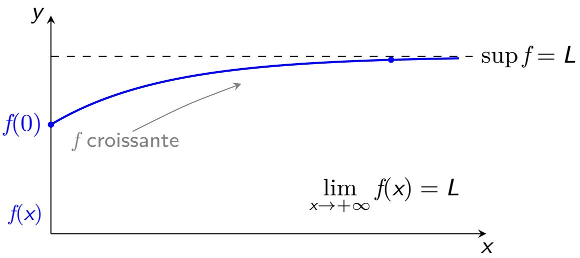
Pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction suivante est-elle continue ?

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2bx^2 - x, & x > 1, \\ ax - bx^2, & x \leq 1. \end{cases}$$

Théorème de la limite monotone (fonctions)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ croissante (resp. décroissante).

- Si f est bornée sup. (resp. inf.), alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $\sup f$ (resp. $\inf f$).
- Sinon, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).



Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes :
$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b],\ f(x_{\min}) = \min f,\ f(x_{\max}) = \max f.$

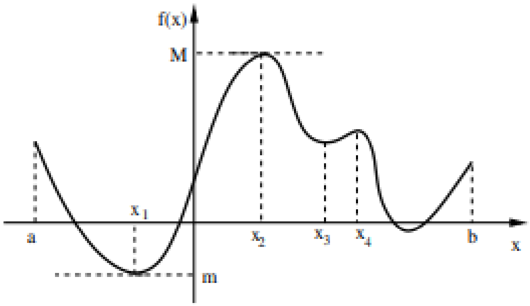
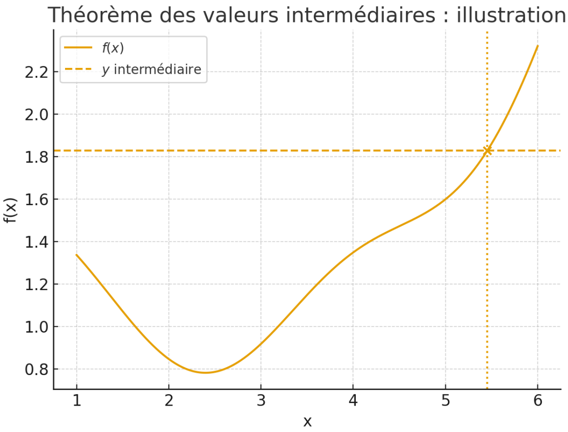


Figure: Illustration du théorème de Weierstrass. Ici, $M = \max f$ et $m = \min f$

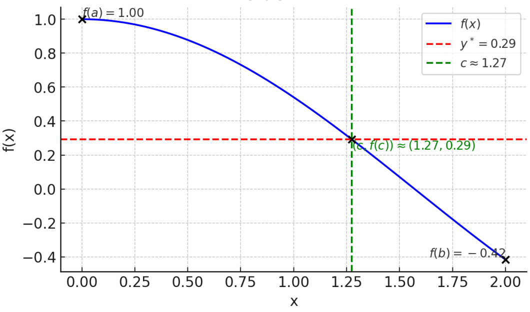
Valeurs intermédiaires (TVI)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b])$ est un intervalle. En particulier, pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Théorème de la bijection

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors $f : I \to J := f(I)$ est une bijection, et $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone.



Application des théorèmes fondamentaux

On considère la fonction

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - 3x - 1.$$

1. **(Weierstrass)** f admet-elle des valeurs extrêmes ? Pourquoi ?
2. **(TVI)** Montrer qu'il existe un $c \in (0,2)$ tel que $f(c) = 0$.

Application des théorèmes fondamentaux

On considère la fonction

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - 3x - 1.$$

1. **(Weierstrass)** f admet-elle des valeurs extrêmes ? Pourquoi ?
2. **(TVI)** Montrer qu'il existe un $c \in (0,2)$ tel que $f(c) = 0$.

Existence et unicité d'une solution via TVI et bijection

Montrer que l'équation

$$e^x = 3x$$

admet une solution unique dans l'intervalle $(0,1)$.

Motivation

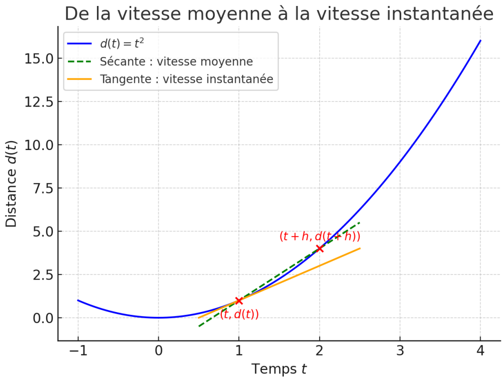
La vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants t et $t+h$ est

$$\tilde{v}(t) = \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, ce quotient tend vers la **vitesse instantanée** :

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

De façon générale, ce passage de la vitesse moyenne au taux de variation instantané motive la notion de dérivée.



Définition : dérivée en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x^* \in I$. On dit que f est **dérivable en** x^* si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}$$

existe et est finie.

- Cette limite est notée $f'(x^*)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^*)$.

Définition : dérivée en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x^* \in I$. On dit que f est **dérivable en** x^* si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}$$

existe et est finie.

- Cette limite est notée $f'(x^*)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^*)$.
- Si f est dérivable en tout point de I, on définit la **fonction dérivée** $f' : I \to \mathbb{R}$.

Définition : dérivée en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x^* \in I$. On dit que f est **dérivable en x^*** si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}$$

existe et est finie.

- Cette limite est notée $f'(x^*)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^*)$.
- Si f est dérivable en tout point de I, on définit la **fonction dérivée** $f' : I \to \mathbb{R}$.

Définition : dérivées d'ordre supérieur

Si f' est dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** et on définit

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f'(x)\big).$$

De manière analogue, on définit la n-ième dérivée $f^{(n)}$, obtenue par dérivations successives.

Exercices d'application

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer $f'(x)$ en utilisant **la limite du taux d'accroissement** :

1. Fonction affine : $f(x) = kx + b$.
2. Fonction quadratique : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Fonction rationnelle simple : $f(x) = \dfrac{1}{11 - x}$, $x \neq 11$.

Exercices d'application

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer $f'(x)$ en utilisant **la limite du taux d'accroissement** :

1. Fonction affine : $f(x) = kx + b$.
2. Fonction quadratique : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Fonction rationnelle simple : $f(x) = \dfrac{1}{11 - x}$, $x \neq 11$.

La valeur absolue

Soit $f(x) = |x|$.
On calcule les limites latérales en 0 :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Les deux limites diffèrent, donc $f'(0)$ n'existe pas.
Ainsi, une fonction peut être **continue** en un point sans y être dérivable.

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x, alors elle est continue en x. En effet :

$$\lim_{h \to 0} \left(f(x+h) - f(x) \right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = f'(x) \cdot 0 = 0,$$

donc $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

Remarque

La réciproque est fausse : par exemple $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais non dérivable en 0.

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x, alors elle est continue en x. En effet :

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x+h)-f(x)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h=f'(x)\cdot 0=0,$$

donc $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

Remarque

La réciproque est fausse : par exemple $f(x)=|x|$ est continue en 0, mais non dérivable en 0.

Exercice

Considérons

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1,\\ x^2+2, & x\geq 1.\end{cases}$$

1. Vérifier que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$, en particulier en $x=1$.
2. Étudier la dérivabilité en $x=1$ en calculant la limite du taux d'accroissement à gauche et à droite.

Intuition

La tangente en un point $(x_0, f(x_0))$ est la droite qui

- passe par le point $(x_0, f(x_0))$,
- a pour pente le taux de variation instantané, c'est-à-dire $f'(x_0)$.

Formule

L'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

soit encore

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{k}\, x + \underbrace{\left(f(x_0) - x_0 f'(x_0)\right)}_{b}.$$

Propriétés fondamentales

- **Linéarité** : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- **Puissance** : $(x^n)' = n x^{n-1}$, $\quad (f(x)^n)' = n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$.
- **Produit** : $(fg)' = f' g + f g'$.
- **Quotient** : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$.
- **Chaîne** : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Propriétés fondamentales

- **Linéarité** : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- **Puissance** : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\quad (f(x)^n)' = n\,f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$.
- **Produit** : $(fg)' = f'g + fg'$.
- **Quotient** : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- **Chaîne** : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

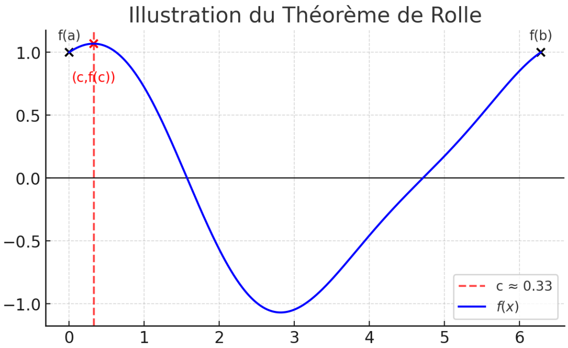
Exercices d'application [Préciser les domaines de dérivabilité]

1. Soit $f(x) = e^{-x} + x^4$. Déterminer f'.
2. Soit $f(x) = e^{2-x+x^2}$. Déterminer $f'(x)$.
3. Soit $f(x) = \big(\ln(x^2 - 1)\big)^5$. Déterminer $f'(x)$.
4. Soit $f(x) = \frac{2x^3}{3\ln|x|}$. Déterminer $f'(x)$.
5. Soient $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ et $g(x) = \ln|x|$. Calculer $(fg)'$.

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b), et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

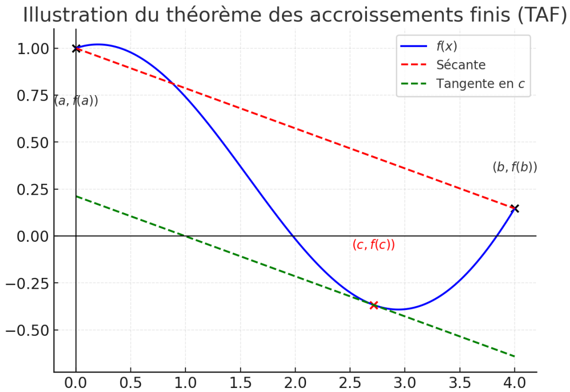


Intuition : si une courbe démarre et termine au même niveau sans faire de saut brusque, il existe au moins un point intérieur où la tangente est horizontale.

Théorème des accroissements finis (TAF / MVT)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors il existe au moins un $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Autrement dit : la pente d'une tangente à la courbe en un point c est égale à la pente de la sécante reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Sans calculatrice

1) (Rolle). Soit $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + \frac{1}{3}\cos(3x) + 0.2\,\sin(2x)$.

1. Vérifier les hypothèses de Rolle sur $[0,2\pi]$.
2. En déduire qu'il existe $c \in (0,2\pi)$ tel que $f'(c) = 0$.
3. *Bonus* : proposer une méthode pour approcher numériquement un tel c.

2) (TAF / MVT). Soit $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(1+x^2)$.

1. Vérifier les hypothèses du TAF sur $[0,2]$.
2. Trouver $c \in (0,2)$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(2)-g(0)}{2-0}.$$

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

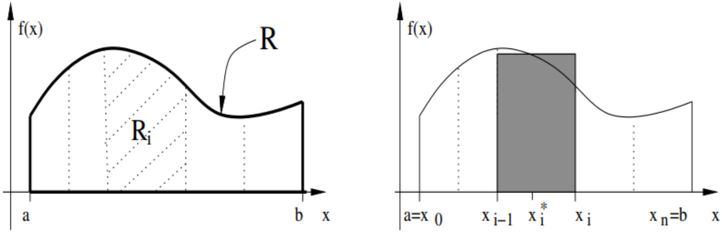
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **strictement croissante** sur *I* (on écrit $f \nearrow$).
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **strictement décroissante** sur *I* (on écrit $f \searrow$).
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **constante** sur *I*.

Cette propriété fournit un premier critère de classification des ***points critiques*** *(définis plus tard).*

Idée clé

L'intégrale d'une fonction f sur $[a, b]$ mesure l'aire sous son graphe. On approxime cette aire en découpant $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, puis en sommant les aires de rectangles :

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$



$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Pourquoi chercher une primitive ?

L'aire sous la courbe de f entre a et b peut être approchée par des sommes de rectangles

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient une limite qui définit l'intégrale. Or, il existe une relation profonde : cette aire peut être exprimée à l'aide d'une fonction F dont la dérivée est précisément f.

Autrement dit : **calculer une aire revient à retrouver une fonction dont la pente en chaque point est donnée par** f. C'est pourquoi l'intégrale est intimement liée aux primitives.

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Propriétés fondamentales

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Si F est une primitive de f sur I, alors **toutes** les primitives de f sur I sont de la forme
$$F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
2. Formules usuelles de primitives :
$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1),$$
$$\int e^{kx} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{k} e^{kx} + C \quad (k \neq 0),$$
$$\int \tfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$$
$$\int \big(af(x) + bg(x)\big) \,\mathrm{d}x = a \int f(x) \,\mathrm{d}x + b \int g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Intégration par parties

Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

où

$$\left[f(x)g(x)\right]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Exemple

Calculer $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $f'(x) = f(x)$, alors pour $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$

Propriétés de base

Pour toute fonction continue f et $a, b, c \in I$:

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ [Linéarité].

Théorème de l'aire

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $f \geq 0$, alors l'aire A de la région comprise entre la courbe représentative de $y = f(x)$ et l'axe des abscisses sur $[a,b]$ est donnée par :

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in [a,b]$, posons

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors F est continue sur $[a,b]$, dérivable sur (a,b), et l'on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in (a,b).$$

Primitives

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes (sur un intervalle adapté) :

$$f_1(x) = 5x^3 - 3x + 7 \qquad f_2(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x) \qquad f_3(x) = 10 - 3e^x + x$$
$$f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad f_5(x) = \frac{x+5}{x^2} \qquad f_6(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$$

Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$

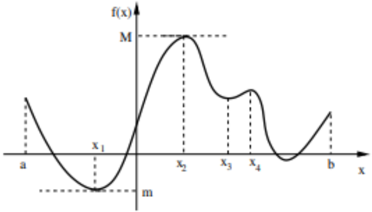
Problème d'optimisation

Un des problèmes centraux du calcul différentiel est de déterminer la **valeur maximale** et la **valeur minimale** d'une fonction continue sur un intervalle.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I. On appelle :

$$M = \max\{f(x) : x \in I\}, \qquad m = \min\{f(x) : x \in I\}.$$

- $M = f(x_M)$ est une **valeur maximale**, atteinte en $x_M \in I$.
- $m = f(x_m)$ est une **valeur minimale**, atteinte en $x_m \in I$.

Ces valeurs sont appelées **extrema**, et les points x_M, x_m sont les **points d'extremum**.



Problème : Les extrema de f existent-ils ? Comment les déterminer ?

Définition : Point critique

Un $c \in I$ est un **point critique (PC)** de f si :

- $f'(c)$ existe et $f'(c) = 0$, ou
- $f'(c)$ n'existe pas mais $f(c)$ existe.

Propriété

Si $f(c)$ est un extremum, alors c est un point critique.

Remarques

- Si c est un **bord** de l'intervalle, il faut considérer les dérivées unilatérales (ex. $f(x) = x$ sur $[0, 1]$ a un minimum en 0 mais $f'(0) = 1$).
- Tout point critique n'est pas un extremum : ex. $f(x) = x^3$ sur $[-1, 1]$ a un point critique en 0 qui n'est ni max ni min.

Conséquence du théorème de Weierstrass

Soit $I = [a, b]$ et $f \in C^0(I)$. Alors les extrema de f sur I existent. On les détermine ainsi :

1. Calculer les **points critiques** de f dans I.
2. Évaluer f aux points critiques et aux bornes a, b.
3. La plus petite valeur trouvée est le **minimum** m, la plus grande est le **maximum** M.

Conséquence du théorème de Weierstrass

Soit $I = [a, b]$ et $f \in C^0(I)$. Alors les extrema de f sur I existent. On les détermine ainsi :

1. Calculer les **points critiques** de f dans I.
2. Évaluer f aux points critiques et aux bornes a, b.
3. La plus petite valeur trouvée est le **minimum** m, la plus grande est le **maximum** M.

Exercice

Déterminer les extrema de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $I = [0, 4]$.

Définition

Soit $c \in I$. On dit que c est un **minimum local** (resp. C un **maximum local**) si

$$f(c) \leq f(x) \quad (\text{resp. } f(C) \geq f(x)),$$

pour tout x dans un *petit voisinage* de c (resp. C).

Première classification des points critiques

Soit $c \in (a, b)$ un point critique de f. Alors :

- si $f'(x) < 0$ pour $x < a < c$ et $f'(x) > 0$ pour $c < x < b$, alors c est un **minimum local**;
- si $f'(x) > 0$ pour $x < a < c$ et $f'(x) < 0$ pour $c < x < b$, alors c est un **maximum local**.

Définition

Soit $c \in I$. On dit que c est un **minimum local** (resp. C un **maximum local**) si

$$f(c) \leq f(x) \quad (\text{resp. } f(C) \geq f(x)),$$

pour tout x dans un *petit voisinage* de c (resp. C).

Première classification des points critiques

Soit $c \in (a, b)$ un point critique de f. Alors :

- si $f'(x) < 0$ pour $x < a < c$ et $f'(x) > 0$ pour $c < x < b$, alors c est un **minimum local**;
- si $f'(x) > 0$ pour $x < a < c$ et $f'(x) < 0$ pour $c < x < b$, alors c est un **maximum local**.

Exercice

Déterminer le domaine et les points critiques de $f(x) = x \ln(x)$. Les classer.

Convexité et concavité

La convexité est centrale en analyse et optimisation (statistique, Machine Learning).

- Toute fonction convexe n'a pas de minimum local "piégé" : tout minimum local est global : Cela rend l'optimisation convexe plus simple et robuste (ex. régression linéaire, descente de gradient).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable : f convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ sur I; f concave sur I ssi $f''(x) \leq 0$ sur I.

Convexité et concavité

La convexité est centrale en analyse et optimisation (statistique, Machine Learning).

- Toute fonction convexe n'a pas de minimum local "piégé" : tout minimum local est global : Cela rend l'optimisation convexe plus simple et robuste (ex. régression linéaire, descente de gradient).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable : f convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ sur I; f concave sur I ssi $f''(x) \leq 0$ sur I.

Exercice 1

Trouvez et classifiez les points critiques (*minimum, maximum, point d'inflexion, non dérivable*) :

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+4}, \quad f_2(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f_3(x) = |x-7|, \quad f_4(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad f_5(x) = x^2 - |x-2|, \quad f_6(x) = x^3 - 9x^2 + 8x - 7.$$

Convexité et concavité

La convexité est centrale en analyse et optimisation (statistique, Machine Learning).

- Toute fonction convexe n'a pas de minimum local "piégé" : tout minimum local est global : Cela rend l'optimisation convexe plus simple et robuste (ex. régression linéaire, descente de gradient).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable : f convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ sur I; f concave sur I ssi $f''(x) \leq 0$ sur I.

Exercice 1

Trouvez et classifiez les points critiques (*minimum, maximum, point d'inflexion, non dérivable*) :

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+4}, \quad f_2(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f_3(x) = |x-7|, \quad f_4(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad f_5(x) = x^2 - |x-2|, \quad f_6(x) = x^3 - 9x^2 + 8x - 7.$$

Exercice 2 - Application économique

La demande d'un produit est $p(x) = e^{-2x}$ (x : quantité, $p(x)$: prix unitaire). Définir le revenu total R. Quel prix unitaire maximise le revenu total ?

Critère de la dérivée seconde pour un extremum local

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et soit $x^\star \in I$ tel que

$$f'(x^\star) = 0.$$

On cherche à déterminer la nature du point critique $x^\star$ (minimum, maximum ou point d'inflexion).

Puisque f est deux fois dérivable, son développement de Taylor d'ordre 2 au voisinage de $x^\star$ s'écrit :

$$f(x) = f(x^\star) + \frac{1}{2} f''(x^\star)(x - x^\star)^2 + o\big((x - x^\star)^2\big) \quad \text{quand } x \to x^\star.$$

Le terme linéaire $f'(x^\star)(x - x^\star)$ disparaît car $f'(x^\star) = 0$.

Ainsi, pour x proche de $x^\star$:

$$f(x) - f(x^\star) \approx \frac{1}{2} f''(x^\star)(x - x^\star)^2.$$

Utilisation du signe

Le signe de $f''(x^\star)$ détermine alors la concavité locale de f :

- Si $f''(x^\star) > 0$, la fonction est **localement convexe** et $x^\star$ est un **minimum local**.
- Si $f''(x^\star) < 0$, la fonction est **localement concave** et $x^\star$ est un **maximum local**.
- Si $f''(x^\star) = 0$, il faut étudier les dérivées d'ordre supérieur (cas d'un **point d'inflexion** possible).

Intuition

Le signe de $f''(x^\star)$ indique la **courbure** de la fonction au voisinage du point critique. Une courbure positive ($f'' > 0$) correspond à une *cuvette* (minimum), tandis qu'une courbure négative ($f'' < 0$) correspond à une *bosse* (maximum). Cette interprétation géométrique généralise, en dimension 1, la notion de **convexité** utilisée en dimension supérieure.

Espaces $\mathbb{R}^n$

On considère d'abord $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble des couples de réels :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

On note alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De façon analogue :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

De manière générale, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n-uplets de réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Soient $p = (x_1, \ldots, x_n)$ et $q = (y_1, \ldots, y_n)$ deux points de $\mathbb{R}^n$. La distance euclidienne entre p et q est

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Définition

Une fonction de deux variables est une application

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

On définit :

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \text{ est défini}\}, \quad \mathrm{Im}(f) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Graphe

Le graphe de f est l'ensemble

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathrm{Dom}(f)\},$$

c'est-à-dire une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Définition

Une fonction de deux variables est une application

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

On définit :

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \text{ est défini}\}, \quad \mathrm{Im}(f) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Graphe

Le graphe de f est l'ensemble

$$G(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathrm{Dom}(f)\big\},$$

c'est-à-dire une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soit $f(x, y) = x - y$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \sqrt{y - x}$. Déterminer leur domaine et image.

Suites de points et convergence

Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^d$ s'écrit

$$p_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n}).$$

On dit que $p_n \to p^*$ si

$$d(p_n, p^*) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Continuité

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en $(x_0, y_0) \in D$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Si f est continue en tout point de D, on note $f \in C^0(D)$.

Propriété

Toute fonction de deux variables obtenue par des opérations usuelles (somme, produit, composition avec polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmes) est continue sur son domaine.

Définition

Soit $f \in C^0(D)$ et $(x, y) \in D$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Ces limites définissent respectivement la **dérivée partielle en** x et la **dérivée partielle en** y.

Exercice

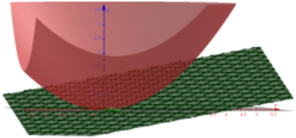
Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour :

1. $f(x, y) = ax + by + c$.
2. $f(x, y) = ax^2 + bxy + d\frac{x+y}{x-y}$.

Gradient

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en $p = (x, y)$.
Le **gradient** de f en p est

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$



Plan tangent

Pour $z = f(x, y)$ et $p_0 = (x_0, y_0)$, si f admet des dérivées partielles en p_0, alors le **plan tangent** au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + f(x_0, y_0).$$

Principe

Soit $z = f(x, y)$ une fonction continue sur un domaine D borné et fermé. On cherche les **extrema globaux** :

$$m = \min\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}, \qquad M = \max\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}.$$

- *m = minimum global de f dans D.*
- *M = maximum global de f dans D.*

Théorème de Weierstrass

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est **borné et fermé**, et $f \in C^0(D)$, alors f admet un minimum global m et un maximum global M atteints dans D.

Points critiques

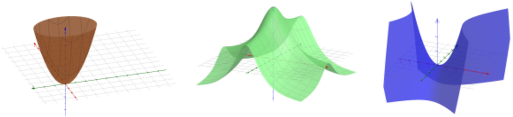
Un point $(x_0, y_0) \in D$ est **critique** pour f si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0) = 0$$

Extrema locaux et point selle

Soit $(x_0, y_0) \in D$:

- $f(x_0, y_0)$ est un **maximum local** si, dans un voisinage V, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.
- $f(x_0, y_0)$ est un **minimum local** si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ dans V.
- Tout maximum ou minimum local est un **extremum local**.
- (x_0, y_0) est un **point selle** si ce n'est ni un max local, ni un min local.



Matrice hessienne

La *Hessienne* de f en $p = (x, y)$ est

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Elle est :

- **définie positive** si toutes ses valeurs propres sont > 0;
- **définie négative** si toutes ses valeurs propres sont < 0.

Propriété de classification

Soit $p^* = (x^*, y^*)$ un point critique de f :

- Hessienne définie positive $\Rightarrow$ p^* est un **minimum local**.
- Hessienne définie négative $\Rightarrow$ p^* est un **maximum local**.

Valeurs propres de la Hessienne

Soit $\nabla^2 f(p^*)$ la matrice hessienne en un point critique $p^* = (x^*, y^*)$. Ses valeurs propres réelles sont notées λ_1, λ_2.

Classification via les signes de λ_1, λ_2

- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors p^* est un **minimum local**.
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors p^* est un **maximum local**.
- Si λ_1 et λ_2 ont des signes opposés, alors p^* est un **point selle**.
- Si l'une des deux valeurs propres est nulle, le test est **inconcluant**.

Remarque pratique

En pratique, on n'a pas besoin de calculer explicitement λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(\nabla^2 f(p^*)), \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\nabla^2 f(p^*)).$$

Ainsi, le signe du déterminant et de $\partial^2_{xx} f(p^*)$ suffisent à conclure.

Exercice d'application

Soient x et y les demandes des produits P et Q, avec prix unitaires

$$p(x, y) = 100 - 3x - y, \qquad q(x, y) = 180 - x - 4y.$$

Le revenu total est

$$R(x, y) = x\,p(x, y) + y\,q(x, y) = 100x + 180y - 3x^2 - 2xy - 4y^2.$$

Déterminer les valeurs de x, y qui maximisent $R(x, y)$.