Proposition de correction

Projet d'Algèbre Linéaire - Examen Théorique

16 octobre 2025

Rappels utiles.

— Pour un endomorphisme $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

— $\operatorname{tr}(A) = \sum_i \lambda_i$ et $\det(A) = \prod_i \lambda_i$ (valeurs propres comptées avec multiplicités algébriques).

— $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(A^\top)$ (même polynôme caractéristique).

— Une matrice stochastique (par lignes ou colonnes) admet un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ (théorème du point fixe de Markov).

— Si x_1 et x_2 sont solution du système $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \end{cases}$, alors ils sont en particulier les racines du polynôme $X^2 - SX + P$.

Injectivité, noyau et déterminant

Définition 0.1 (Application linéaire et noyau)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire, représentée dans la base canonique par une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Le **noyau** de f (ou de M) est défini par*

$$\operatorname{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid M\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Proposition 0.1 (Caractérisation de l'injectivité)**.** *Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est **injective** si et seulement si*

$$\operatorname{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}.$$

Idée de preuve. C'est une équivalence. On démontre un côté puis l'autre de la proposition.

($\Rightarrow$) Si f est injective, alors deux vecteurs distincts ne peuvent avoir la même image. En particulier, si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, on a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ainsi, le noyau ne contient que le vecteur nul.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. Si $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, alors $f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}(f)$, et par hypothèse $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Ainsi, f est injective. $\square$

Interprétation géométrique. Dire que $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ signifie que l'application ne **réduit pas une dimension entière à zéro**. Aucune direction de l'espace n'est "écrasée" par f. Autrement dit, le vecteur nul est la seule image de $\mathbf{0}$: chaque direction de l'espace reste "visible" après transformation.

Lien avec le théorème du rang. Pour une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on a le **théorème du rang** :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = n.$$

Ainsi, si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$, c'est-à-dire que f est **surjective**. Dans $\mathbb{R}^n$, cela implique automatiquement la bijectivité :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Proposition 0.2 (Déterminant et bijectivité)**.** *Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ représentée par une matrice M est* ***bijective*** *si et seulement si*

$$\det(M) \neq 0.$$

[Interprétation] Le déterminant mesure le **facteur d'échelle du volume** induit par la transformation f.

- Si $\det(M) \neq 0$, la transformation conserve un volume non nul : aucun axe de l'espace n'a été écrasé $\to f$ est inversible.
- Si $\det(M) = 0$, le volume est réduit à zéro : une ou plusieurs dimensions sont "aplaties" $\to f$ n'est pas injective.

Ainsi, $\det(M) \neq 0$ est exactement la condition d'inversibilité.

Confusion à éviter La **diagonalisabilité** d'une matrice n'a rien à voir avec son **inversibilité**. Considérons par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable, car elle admet deux valeurs propres réelles 0 et 2 avec deux vecteurs propres indépendants. Mais elle n'est **pas inversible**, puisque $\det(M) = 0$. Autrement dit, elle "écrase" une direction (celle associée à la valeur propre 0), même si elle reste diagonalisable. Vous pouvez d'ailleurs vous exercer à montrer que M est diagonalisable avec comme valeurs propres 0 (nécessairement !) et 2 (conservation de la trace).

$$\boxed{\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\}, \\ f \text{ bijective} &\iff \det(f) \neq 0, \\ f \text{ diagonalisable} &\not\Rightarrow f \text{ inversible.} \end{aligned}}$$

Exercice 1 - Solution

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [C_1\ C_2\ C_3], \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) On montre que l'application T est un endomorphisme

L'application T est définie comme suit :

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z,\ y + z,\ x + z). \end{cases}$$

Par définition, une application T est linéaire si, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + \lambda T(\mathbf{v}).$$

Or T est donnée par des combinaisons linéaires à coefficients constants, donc ces deux propriétés sont automatiquement vérifiées :

$$T(x + \lambda x',\ y + \lambda y',\ z + \lambda z') = T(x, y, z) + \lambda T(x', y', z').$$

Ainsi T est linéaire. Comme T agit de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est un **endomorphisme** de $\mathbb{R}^3$. Dans la base canonique, sa matrice représentative est précisément A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Étude du noyau de A

Le noyau de A est défini par

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Si $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$, alors $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ donne le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ y + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

On remarque immédiatement que $\mathrm{Ker}(A)$ est un **sous-espace vectoriel** :
- $0 \in \mathrm{Ker}(A)$ car $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
- $\mathrm{Ker}(A)$ est stable par addition et par homothétie (ce qui découle de la linéarité de A).

c) Calcul de $\det(A)$, noyau et image

Déterminant. Par développement (ou règle de Sarrus) :

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 2(-1) + 3(-1) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Donc A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A (puisque $\det A = \prod \lambda_i = 0$).

Noyau. Résoudre $A(x,y,z)^\top = 0$ donne le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ y + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = -z,\ x = -z.$$

Ainsi $(x,y,z) = z(-1,-1,1)$ et

$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Span}\{(-1,-1,1)^\top\} = \operatorname{Span}\{(1,1,-1)^\top\}.$$

Image. On observe $C_3 = C_1 + C_2$; comme C_1 et C_2 sont linéairement indépendants,

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Span}\{C_1, C_2\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Justification alternative : pour tout (x,y,z),

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3 = (x+z)C_1 + (y+z)C_2 \in \operatorname{Span}\{C_1, C_2\}.$$

d) Rang et théorème du rang

Comme $\operatorname{Ker}(A)$ est de dimension 1 et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Span}\{C_1, C_2\}$ est de dimension 2, on a

$$\operatorname{rg}(A) = 2, \qquad \dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \operatorname{Im}(A) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

ce qui vérifie le théorème du rang.

e) Injectivité, surjectivité, isomorphisme

A n'est pas injective (noyau non trivial), ni surjective (rang strictement inférieur à 3). En particulier, A n'est pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

f) Comparaison $\operatorname{Im}(A^2)$ et $\operatorname{Im}(A)$

Calculons

$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} := [C_1^{(2)}\ C_2^{(2)}\ C_3^{(2)}].$$

Les colonnes vérifient $C_1^{(2)} = C_2^{(2)}$ et $C_3^{(2)} = 2\,C_2^{(2)}$, donc toutes sont colinéaires. Ainsi

$$\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \operatorname{rg}(A^2) = 1 < \operatorname{rg}(A) = 2.$$

En particulier, $\operatorname{Im}(A^2) \subsetneq \operatorname{Im}(A)$: l'application A *rétrécit* encore l'espace des directions atteignables.

Exercice 2 - Solution

On considère
$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Symétrie et théorème spectral

On vérifie immédiatement que $S^\top = S$ et que les coefficients sont réels. Par le *théorème spectral*, il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (i.e. $QQ^\top = Q^\top Q = I_3$) et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telles que
$$S \;=\; Q\,D\,Q^\top.$$

b) Valeurs propres, sous-espaces propres, construction de Q et D

Repérage d'une valeur propre. On observe
$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+0 \\ 1+2+0 \\ 0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $\lambda = 3$ est valeur propre de S.
On observe de plus que
$$S\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la valeur propre 3 est associée à deux vecteurs propres distinctes donc elle est au moins de multiplicité algébrique 2 (et pas plus, car sinon la matrice S ne serait pas diagonalisable.)

Contraintes trace. La trace se conserve par changement de base. On notant λ la valeur propre manquante, on a d'une part en calculant explicitement :
$$\operatorname{tr}(S) = 2 + 2 + 3 = 7,$$

et d'autres part que
$$\operatorname{tr}(S) = 3 + 3 + \lambda = 7,$$

d'où $\lambda = 1$ et donc
$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{3, 3, 1\}.$$

L'ensemble spectral est donc $\operatorname{Sp}(S) = \{1, 3\}$ avec $\lambda = 3$ de multiplicité algébrique 2 et $\lambda = 1$ de multiplicité algébrique 1.

Sous-espaces propres. On explicite les espaces propres $E_\lambda = \operatorname{Ker}(S - \lambda I_3)$.

— Pour $\lambda = 1$:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)^\top \in E_1 &\iff (S - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 0, \\ 2z = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x, \\ z = 0, \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad E_1 = \mathrm{Span}\{(1,-1,0)^\top\}.
\end{aligned}
$$

— Pour $\lambda = 3$:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)^\top \in E_3 &\iff (S - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0, \\ x - y = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \iff y = x \text{ (avec } z \text{ libre)} \\
&\Rightarrow \quad E_3 = \mathrm{Span}\{(1,1,0)^\top,\ (0,0,1)^\top\}.
\end{aligned}
$$

Base orthonormée de vecteurs propres et matrices Q, D. On choisit une base *orthonormée* adaptée :

$$
q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

où $q_1, q_2 \in E_3$ et $q_3 \in E_1$. On pose

$$
Q = [q_1\ q_2\ q_3], \qquad D = \mathrm{diag}(3, 3, 1).
$$

Par construction, Q est orthogonale ($Q^\top Q = I_3$) et l'on a

$$
S = Q\,D\,Q^\top \quad (\text{équivalemment } Q^\top S Q = D).
$$

Il faut absolument respecter le même ordre pour les valeurs propres que pour les vecteurs propres constituant Q.

c) Interprétation géométrique (capteurs / covariance)

Les colonnes de Q forment une *base orthonormée de directions principales*Dans la nouvelle base, les mesures des capteurs sont *décorrélées* et chaque valeur propre de S traduit une **variance principale** de la mesure. Autrement dit, le théorème spectral permet de passer d'un système de mesures interdépendantes à des directions "indépendantes" d'analyse, qui contiennent une certain quantité importance d'information du système, principe fondamental de l'Analyse en Composantes Principales (ACP).

Exercice 3 - Solution

On reprend le contexte de mobilité (urbain u_t, périurbain p_t, rural r_t) avec les pourcentages de transition donnés.

a) Système linéaire $(u_{t+1}, p_{t+1}, r_{t+1})$ en fonction de (u_t, p_t, r_t)

En notant que les colonnes représentent les flux *depuis* chaque zone (convention "colonnes stochastiques"), on obtient

$$\begin{cases} u_{t+1} = 0.8\, u_t + 0.1\, p_t + 0\, r_t \\ p_{t+1} = 0.2\, u_t + 0.7\, p_t + 0.2\, r_t \\ r_{t+1} = 0\, u_t + 0.2\, p_t + 0.8\, r_t \end{cases}$$

b) Écriture matricielle $x_{t+1} = A\, x_t$

Avec $x_t = (u_t, p_t, r_t)^\top$, la matrice de transition (stochastique par colonnes) est

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad x_{t+1} = A\, x_t.$$

c) Valeur propre $\lambda = 1$ et vecteurs propres associés

On vérifie d'abord que $(1, 1, 1)^\top$ est vecteur propre de $A^\top$ pour $\lambda = 1$:

$$A^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $(1, 1, 1)^\top$ est *vecteur propre à gauche* de A pour $\lambda = 1$ (i.e. $\mathbf{1}^\top A = \mathbf{1}^\top$), ce qui exprime la conservation de la masse. **Attention :** $(1, 1, 1)^\top$ n'est pas nécessairement vecteur propre (à droite) de A.

Pour trouver un *vecteur propre de A* associé à $\lambda = 1$, on résout

$$(A - I_3)v = 0.$$

Écrivons cela sous forme de système (on détaille le chaînage des équivalences) :

$$\begin{aligned} v = (x, y, z)^\top \in \mathrm{Ker}(A - I_3) &\iff \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -0.2\, x + 0.1\, y = 0, \\ 0.2\, x - 0.3\, y + 0.2\, z = 0, \\ 0.2\, y - 0.2\, z = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x, \\ z = y = 2x, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad v = x\, (1, 2, 2)^\top. \end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$v_1 = (1, 2, 2)^\top \quad \text{pour } \lambda_1 = 1.$$

(La version normalisée $\frac{1}{5}(1, 2, 2)^\top$ est par ailleurs la distribution stationnaire, d'après le théorème de point appliqué à une matrice stochastique.)

d) Autres valeurs propres et diagonalisation

On utilise $\mathrm{tr}(A) = 0.8 + 0.7 + 0.8 = \frac{23}{10}$ et $\det(A) = 0.4 = \frac{2}{5}$. Sachant qu'une valeur propre vaut déjà 1, les deux autres, notées λ_2, λ_3, vérifient

$$\lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(A) - 1 = \tfrac{13}{10}, \qquad \lambda_2\lambda_3 = \frac{\det(A)}{1} = \tfrac{2}{5}.$$

Elles sont donc racines de

$$X^2 - \tfrac{13}{10}X + \tfrac{2}{5} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10X^2 - 13X + 4 = 0,$$

d'où

$$\{\lambda_2, \lambda_3\} = \left\{\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Les trois valeurs propres $\{1, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}\}$ sont *réelles, distinctes*, ce qui implique que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

e) Matrices P et D

On peut choisir des vecteurs propres (par résolution de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$) :

$$v_1 = (1, 2, 2)^\top \;\; (\lambda_1 = 1), \qquad v_2 = (-1, 0, 1)^\top \;\; (\lambda_2 = \tfrac{4}{5}), \qquad v_3 = (1, -3, 2)^\top \;\; (\lambda_3 = \tfrac{1}{2}).$$

On pose

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}\left(1, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{2}\right),$$

et l'on a $A = PDP^{-1}$.

f) Inversion de P par pivot de Gauss (notation alignée)

On effectue une élimination de Gauss–Jordan sur la matrice augmentée $(P \mid I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 15/2 & 1 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & -1/5 & 2/15 \end{array}\right) \qquad (L_3 \leftarrow \tfrac{2}{15}L_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 13/15 & 1/5 & -2/15 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & -1/5 & 2/15 \end{array}\right) \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 + \tfrac{5}{2}L_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{array}\right) \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2).$$

On lit donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

g) Puissances A^n et limite x_∞

Par diagonalisation,

$$A^n = P \ \mathrm{diag}\Big(1, \left(\tfrac{4}{5}\right)^n, \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\Big) P^{-1}.$$

Comme $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, on a

$$A^n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \ \mathrm{diag}(1,0,0)\, P^{-1}.$$

Notons $D^\infty = \mathrm{diag}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Étape 1 : PD^∞. La multiplication à droite par D^∞ annule les colonnes 2 et 3 de P et conserve la première :

$$PD^\infty = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Étape 2 : $PD^\infty P^{-1}$. On a alors

$$PD^\infty P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = v_1\, u^\top, \quad \text{avec } u^\top = (\text{première ligne de } P^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

C'est donc un produit extérieur (rang 1), que l'on peut écrire explicitement :

$$PD^\infty P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour résumer :

$$A^n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \ \mathrm{diag}(1,0,0)\, P^{-1} = v_1\, u^\top,$$

où $v_1 = (1,2,2)^\top$ est le vecteur propre droit pour $\lambda = 1$ et $u^\top$ est la première ligne de P^{-1}, ici $u^\top = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. On vérifie $u^\top v_1 = 1$.

Ainsi, pour tout x_0,

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = (u^\top x_0)\, v_1.$$

En particulier, si $x_0 = (u_0, p_0, r_0)$ est un vecteur de proportions (somme $u_0 + p_0 + r_0 = 1$), alors $u^\top x_0 = \frac{1}{5}(1 \times u_0 + 1 \times p_0 + 1 \times r_0) = \frac{1}{5}$ et

$$x_\infty = \tfrac{1}{5}\,(1,2,2)^\top = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}\right)^\top,$$

qui est la distribution stationnaire. La convergence provient de la diagonalisation (valeur propre simple 1 et reste du spectre strictement à l'intérieur du disque unité). On s'attend donc à long terme à environ 20% urbain, 40% périurbain, 40% rural, indépendamment de la répartition initiale (pour tout x_0 de somme 1). La convergence est géométrique au rythme de $(4/5)^t$ (valeur propre suivante en module).
