Projet d'Analyse

Suite et dérivée

M1 MIASHS

Octobre 2025

Solo ou binôme
La *qualité de rédaction* sera grandement prise en compte !

Consignes générales

— **Livrables attendus** :
   1. **Rapport PDF** rédigé en LaTeX (Overleaf ou équivalent). Réponses **théoriques** rédigées avec formalisme rigoureux ; les résultats numériques (tableaux/figures) sont intégrés et commentés.
   2. **Notebook Python** (`.ipynb`) contenant les calculs/plots. Le code reste dans le notebook et **ne doit pas** être expliqué ligne par ligne dans le rapport.

→ **Éviter de "parler code" dans le rapport** : décrivez la *méthodologie*, les *résultats*, les *tests* et leur *interprétation* (pas les boucles, import, etc.).

— **Figures et tableaux** : légendes informatives, axes/units clairement indiqués, références dans le texte (ex. "voir Fig. 1"). Les figures doivent être suffisamment lisibles (taille, police).

— **Reproductibilité** : le notebook doit permettre de reproduire les chiffres et courbes du rapport (fixer une graine si pertinent).

Exercice 1 : Suites numériques et convergence

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Partie A — Théorie (rédaction formelle)

1. (*Existence*) Montrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (*Monotonie et borne supérieure*) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par 2.
3. (*Convergence*) Conclure à la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$ en citant le théorème adéquat.
4. (*Caractérisation de la limite*) Notant $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$, montrer que

$$\ell = \sqrt{\ell + 2}.$$

   Conclure sur la (les) valeur(s) possible(s) de ℓ et préciser celle réalisée par la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

5. (*Vitesse de convergence – contraction locale*) Posons $f(x) = \sqrt{x+2}$. Sur $[0, 2]$, vérifier que f est C^1 et calculer $f'(x)$. En déduire :
   (a) un **majorant global** du taux de contraction $q = \sup_{x \in [0,2]} |f'(x)|$;
   (b) le **taux asymptotique** $|f'(\ell)|$. Cela permet d'établir la relation d'*écart à la limite* linéarisée $e_{n+1} \approx f'(\ell)\, e_n$ avec $e_n = u_n - \ell$.

Pourquoi s'intéresse-t-on à $f'(\ell)$? Lorsque n est grand, les termes u_n sont très proches de la limite ℓ, et il est naturel d'étudier le comportement de la suite dans un voisinage de ce point. En développant f en série de Taylor d'ordre 1 autour de ℓ, on écrit :

$$f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} f(\ell) + f'(\ell)\,(u_n - \ell) + o(u_n - \ell),$$

avec $f(\ell) = \ell$ puisque ℓ est un point fixe. On en déduit :

$$u_{n+1} - \ell \underset{n\to\infty}{=} f'(\ell)\,(u_n - \ell) + o(u_n - \ell),$$

soit encore, en posant $e_n = u_n - \ell$,

$$e_{n+1} \underset{n\to\infty}{=} f'(\ell)\, e_n + o(e_n).$$

Ainsi, dans un voisinage de ℓ, le terme de reste $o(e_n)$ devient négligeable devant e_n, et on obtient l'approximation linéarisée :

$$e_{n+1} \approx f'(\ell)\, e_n.$$

Ainsi, l'étude du taux asymptotique $|f'(\ell)|$ et de la relation d'erreur $e_{n+1} \approx f'(\ell)e_n$ permet de **quantifier la vitesse de convergence** de la suite vers sa limite. Cette relation linéarisée montre que $f'(\ell)$ contrôle la vitesse locale de convergence : si $|f'(\ell)| < 1$, la suite est contractante et converge vers ℓ.

Partie B — Exploration numérique (Notebook Python, résultats intégrés dans le rapport)

Objectif : Illustrer et quantifier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$; confronter théorie et numérique. L'explication théorique, **sauf mention contraire**, n'est **pas nécessairement attendue** dans cette partie B.

1. **Génération et tableau de valeurs.** Calculer $(u_n)_{n\geq 0}$ pour $n = 0, \ldots, N$ avec N raisonnable (par ex. $N = 20$) pour les conditions initiales

$$u_0 \in \{\, 0,\ 1.5,\ 2.5,\ -1 \,\}.$$

   (i) Signaler pour quelles valeurs la définition est valide ;
   (ii) présenter un tableau synthétique (quelques itérations) dans le rapport
   (iii) tracer $n \mapsto u_n$.
2. **Borne de contraction globale.** Sur $[0, 2]$, vérifier numériquement que

$$|u_{n+1} - \ell| \leq q\,|u_n - \ell| \quad \text{avec } q \text{ issu de la Partie A},$$

au moins à partir d'un certain rang. Illustrer par une figure (par ex. tracer $|u_{n+1} - \ell|$ vs $|u_n - \ell|$ et sur ce même graphe, la droite d'équation $y = q\,x$).

3. **Analyse graphique de la fonction associée.** On admet que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une expression explicite sous la forme

$$u_n = g(n), \qquad g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{x+1}}\right).$$

Cette fonction continue prolonge la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à tout réel $x \geq 0$.

(i) Tracer sur l'intervalle $[0, 10]$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé. Commenter le comportement global de g (croissance, limite, allure générale).

(ii) Pour $x \geq 0$, exprimer la dérivée $g'(x)$ (calcul formel théorique attendu). Choisir un point $a \in [0, 10]$ et calculer l'équation de la tangente à la courbe de g en ce point.

(iii) Écrire l'équation explicite de la tangente T_a, et tracer cette tangente sur le même graphique que la courbe de g.

(iv) Interpréter géométriquement la pente $g'(a)$: comment évolue-t-elle lorsque a augmente ? Que traduit cette évolution sur la rapidité de convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vers sa limite ?

Exercice 2 : Optimisation et convexité — Volet théorique et interprétatif

On modélise l'énergie potentielle d'une particule dans un plan par la fonction quadratique :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 6x^2 + 3xy + 5y^2 - 8x + 4y + 9.$$

Cette fonction combine :

- un terme quadratique ($6x^2 + 3xy + 5y^2$) représentant l'énergie stockée dans le système ;
- un couplage xy correspondant à une interaction entre les deux directions de déplacement ;
- des termes linéaires ($-8x + 4y$) représentant des forçages externes (sources ou forces appliquées).

Partie A — Analyse théorique

1. (*Continuité*) Justifier que f est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. (*Extremum*) Sur le fermé borné $D = [-1,1]^2$, f admet-elle un minimum ? Pourquoi ?
3. (*Gradient et points critiques*) Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ le gradient $\nabla f(x,y)$ et résoudre explicitement le système $\nabla f(x^\star, y^\star) = \mathbf{0}$.
4. (*Matrice Hessienne*) Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice Hessienne $H_f(x,y)$.
5. (*Valeurs propres et classification*) Calculer les valeurs propres de $H_f(x^\star, y^\star)$ et déterminer si cette matrice est définie positive. En déduire la convexité de f et conclure sur la nature et l'unicité du point critique.
6. (*Forme canonique*) Montrer que f peut se réécrire sous la forme

$$f(x,y) = f(x^\star, y^\star) + Q(x - x^\star, y - y^\star),$$

   où Q est une forme quadratique positive définie. Donner l'expression explicite de Q.

   Motivation. Cette réécriture permet d'isoler la contribution purement quadratique autour du minimum : le terme $Q(x-x^\star, y-y^\star)$ mesure la **stabilité locale** de l'équilibre et $f(x^\star, y^\star)$ s'interprète comme l'énergie minimale atteinte à l'équilibre. Plus les valeurs propres de H_f sont grandes, plus la "vallée" du minimum est raide, et plus le retour vers l'équilibre est rapide lorsqu'on s'en écarte.

7. (*Énergie le long d'une trajectoire*) On suppose maintenant que la particule suit une trajectoire circulaire dans le plan :

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

   On définit alors l'énergie potentielle le long de la trajectoire :

$$E(t) = f(\gamma(t)).$$

   (i) Exprimer $E(t)$ explicitement en fonction de t.
   (ii) Calculer la dérivée $E'(t)$ à l'aide de la **règle de la chaîne** $E'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

   Intuition. La dérivée $E'(t)$ correspond au **taux de variation instantané de l'énergie** le long du mouvement circulaire. Elle mesure le travail élémentaire de la force associée au champ de gradient de f sur la trajectoire γ. Si $E'(t) = 0$, la particule se trouve à une position d'équilibre sur le cercle.

Partie B — Implémentation numérique et visualisation

Objectif. Approfondir la compréhension du comportement de f et de la trajectoire γ à l'aide de représentations graphiques et calculs numériques. Toutes les figures seront insérées dans le rapport, accompagnées d'interprétations qualitatives.

1. **Représentation de γ.** Représenter graphiquement, pour $t \in [0, 2\pi]$, la courbe représentative de γ.
2. **Visualisation de la surface d'énergie.** Représenter $f(x, y)$ sous forme de surface 3D sur le domaine $D = [-1, 1]^2$. Identifier visuellement la position du minimum global $(x^\star, y^\star)$ et vérifier la symétrie du paysage d'énergie. Ajouter en surimpression les courbes de niveau (contours) sur la projection au sol.
3. **Simulation de la trajectoire circulaire.** Implémenter la trajectoire $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Tracer sur le plan (x, y) :
   - le contour des niveaux de f,
   - le cercle unité parcouru par la particule,
   - et le point courant $\gamma(t)$ évoluant le long du cercle.

   Ce tracé doit être clair, coloré et annoté (axes, légende, titres).
4. **Énergie le long du mouvement.** Calculer et tracer la courbe représentative de l'énergie $t \mapsto E(t) = f(\gamma(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Identifier graphiquement les points où $E'(t) = 0$ et discuter leur signification physique : s'agit-il de points d'énergie minimale ou maximale sur le cercle ?
5. **Étude de stabilité énergétique.** Discuter le comportement de $E(t)$: amplitude, variations et positions des extrema. Comment ces observations se relient-elles à la convexité globale de f ?

Attendus de présentation. Les figures doivent comporter des axes clairement nommés, des unités cohérentes, des titres précis et des légendes explicites. Les commentaires dans le rapport doivent relier les résultats numériques à l'analyse théorique : convexité, gradient, points d'équilibre et variations d'énergie le long de la trajectoire. Aucun bloc de code n'est à inclure dans le rapport ; seules les démarches et interprétations sont attendues.