Рівневий набір гармонійних функцій

А. В. Тор

Для $\theta \in [0, \pi/2[$, розглянемо множини

$$\Sigma_{1,\theta} = \left\{ a \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, -1] : \Re \left(\int_{[1,a]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)} dz \right) = 0 \right\};$$

$$\Sigma_{-1,\theta} = \left\{ a \in \mathbb{C} \backslash [1, +\infty[: \Re \left(\int_{[-1,a]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)} dz \right) = 0 \right\};$$

$$\Sigma_{\theta} = \left\{ a \in \mathbb{C} \backslash [-1, 1] : \Re \left(\int_{[-1,1]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)} dz \right) = 0 \right\};$$

де $p_a(z)$ — комплексний многочлен, визначений формулою

$$p_a(z) = (z - a)(z^2 - 1).$$

Лемма 1. Нехай $\theta \in [0, \pi/2[$. Тоді кожна з множин $\Sigma_{1,\theta}$ та $\Sigma_{-1.\theta}$ утворюється двома гладкими кривими, які локально ортогональні відповідно при $z = 1$ та $z = -1$ точніше:

$$\lim_{\substack{|a| \longrightarrow -1 \\ a \in \Sigma_{-1,\theta}}} \arg(a + 1) = \frac{-2\theta + (2k + 1)\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3;$$

$$\lim_{\substack{|a| \longrightarrow +1 \\ a \in \Sigma_{1,\theta}}} \arg(a - 1) = \frac{-\theta + k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Дві криві що визначають $\Sigma_{1,\theta}$ (відповідно $\Sigma_{-1,\theta}$), перетинаються лише при $z = 1$ (відповідно $z = -1$). Більше того, для $\theta \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$, вони розходяться по-різному для ∞ в одному з напрямків

$$\lim_{\substack{|a| \longrightarrow +\infty \\ a \in \Sigma_{\pm 1,\theta}}} \arg a = \frac{-2\theta + 2k\pi}{5}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Для $\theta = 0$, (відповідно $\theta = \frac{\pi}{2}$), один промінь $\Sigma_{1,\theta}$ (відповідно $\Sigma_{-1,\theta}$) розходиться до $z = -1$ (відповідно $z = 1$).

Доведення. Нехай задано непостійну гармонічну функцію u, визначену в деякі області $\mathcal{D}$ of $\mathbb{C}$. Критичними точками u є саме ті, де

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Вони ізольовані. Якщо v є гармонічним спряженням u у $\mathcal{D}$, скажімо, $f(z) = u(z) + iv(z)$ аналітична у $\mathcal{D}$, тоді за Коші-Ріманом,

$$f'(z) = 0 \Longleftrightarrow u'(z) = 0$$

Встановлений рівень

$$\Sigma_{z0} = z \in \mathcal{D} : u(z) = u(z_0)$$

u через точку $z_0 \in \mathcal{D}$ залежить від поведінки f поблизу z_0. Точніше, якщо z_0 є критичною точкою u, ($u'(z_0) = 0$), то існує околиця $\mathcal{U}$ околу z_0, голоморфної функції $g(z)$ визначена на $\mathcal{U}$, така, що

$$\forall z \in \mathcal{U}, f(z) = (z - z_0)^m g(z); g(z) \neq 0.$$

Взявши гілку m-го кореня з $g(z)$, f має локальну структуру

$$f(z) = (h(z))^m, \forall z \in \mathcal{U}.$$

Звідси випливає, що Σ_{z0} локально утворена m аналітичними дугами які проходять через z_0 і перетинаються там під рівними кутами π/m. Через регулярну точку $z_0 \in \mathcal{D}$, ($u'(z_0) \neq 0$), теорема про неявну функцію стверджує, що Σ_{z0} є локально єдиною аналітичною дугою. Зауважте, що множина рівнів гармонічної функції не може закінчуватися у звичайній точці.

Розглянемо багатозначну функцію

$$f_{1,\theta}(a) = \int_1^a e^{i\theta}\sqrt{p_a(t)}dt, a \in \mathbb{C}$$

Інтегруючи вздовж відрізка $[1,a]$, можна припустити, що без втрати загальності, що

$$f_{1,\theta}(a) = ie^{i\theta}(a-1)^2\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\sqrt{t(a-1)+2}dt = (a-1)^2 g(a);$$

$$g(1)\neq 0. \quad (1)$$

Очевидно, що:

$$\forall a\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1],\{t(a-1)+2; t\in[0,1]\} = [2,a+1]\subset\mathbb{C}\backslash]-\infty,0].$$

Отже, при фіксованому виборі аргументу та квадратного кореня всередині інтеграла, $f_{1,\theta}$ та g є однозначними аналітичними функціями в $\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1]$.

Припустимо, що для деяких $a\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1], a\neq 1$,

$$u(a) = \Re f_{1,\theta}(a) = 0; f'_{1,\theta}(a) = 0.$$

Тоді,

$$(a-1)^3 g'(a) + 2f_{1,\theta}(a) = 0.$$

Беручи справжні деталі, ми отримуємо

$$0 = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\Im\left(e^{i\theta}(a-1)^2\sqrt{t(a-1)+2}\right)dt;$$

$$0 = \Re\left((a-1)^3 g'(a)\right) = \int_0^1 t\sqrt{t(1-t)}\Im\left(\frac{e^{i\theta}(a-1)^3}{2\sqrt{t(a-1)+2}}\right)dt.$$

За неперервністю функцій всередині цих інтегралів на відрізку $[0,1]$, існують $t_1,t_2\in[0,1]$ такі що

$$\Im\left(e^{i\theta}(a-1)^2\sqrt{t_1(a-1)+2}\right) = \Im\left(\frac{e^{i\theta}(a-1)^3}{2\sqrt{t_2(a-1)+2}}\right) = 0;$$

а потім

$$e^{2i\theta}(a-1)^4(t_1(a-1)+2) > 0, \left(\frac{e^{2i\theta}(a-1)}{t_2(a-1)+2}\right) > 0.$$

яка не може виконуватись, оскільки, якщо $\Im a > 0$, то

$$0 < \arg(t_1(a-1)+2) + \arg((t_2(a-1)+2)) \\ < 2\arg(a+1) < arg\left((a-1)^2\right) < 2\pi.$$