Теоретическая контрольная работа по Теории вероятностей

Над файлом работали:
Баранников Андрей Б01-001
Дорин Даниил Б01-001
Киселев Никита Б01-001
Лепарский Роман Б01-003
Овсянников Михаил Б01-001
Филиппенко Павел Б01-001

Долгопрудный, 2021

Содержание

1 Билет №1. Определение сигма-алгебры подмножеств и измеримого пространства.

Определение: Пусть $\mathscr{A}$ — класс подмножеств Ω, для которого выполняются следующие условия:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. Если A $\in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$
3. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

Тогда $\mathscr{A}$ является сигма-алгеброй подмножеств Ω.

Замечание: Класс $\mathscr{A}$ замкнут относительно счетного множества операций.

Определение: Ω – некоторое непустое множество и $\mathscr{A}$ – некоторая сигма-алгебра его подмножеств, тогда пару $(\Omega, \mathscr{A})$ называют *измеримое пространство*.

2 Билет №2. Определение вероятности и вероятностного пространства.

Определение: Пусть $(\Omega, \mathscr{A})$ – измеримое пространство, тогда функция $\mathbb{P}$, определенная на сигма-алгебре $\mathscr{A}$ $\mathbb{P}$: $\mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, которая удовлетворяет условиям:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (нормированность)
2. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ и $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (аддитивность)

называется вероятностью.

Определение: тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, Ω – непустое, $\mathscr{A}$ – сигма-алгебра подмножеств Ω, $\mathbb{P}$: $\mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – вероятность, определенная на $(\Omega, \mathscr{A})$, называется вероятностное пространство.

3 Билет №3. Свойства вероятности. Теорема сложения.

Свойства вероятности:

1. Если $A, B \in \mathscr{A}$ и $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
3. $A, B \in \mathscr{A}$, то $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$

Теорема [сложения]: пусть $A_1, \dots, A_n$ – события $\in \mathscr{A}$, тогда

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(A_1 \ldots A_n)$$

Предложение [Полуаддитивность]: пусть $A_1, \dots, A_n$ – события $\in \mathscr{A}$, тогда

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

4 Билет №4. Условная вероятность и теорема умножения.

Определение: Пусть A и B два события $\in \mathscr{A}$ и $\mathbb{P}(B) > 0$. Тогда под *условной вероятностью* события A при условии B будем понимать

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

Теорема (умножения): пусть $A_1, \dots, A_n$ – события $\in \mathscr{A}, \mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) > 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$$

5 Билет №5. Формула полной вероятности.

Теорема (Формула полной вероятности): Пусть $H_1,\dots, H_n \in \mathscr{A} : H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\mathbb{P}(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$. $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) = 1$. Тогда $\forall A \in \mathscr{A}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)$$

Замечание: $H_1,\dots, H_n$–полная группа событий (гипотезы).
$\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. $\mathbb{P}(H_i)$ – *априорные вероятности*, $\mathbb{P}(A) > 0$.

6 Билет №6. Формула Байеса.

Теорема [Формула Байеса]: Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ такие что: $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $\forall i \to \mathbb{P}(H_i) > 0$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) = 1$, событие $A \in \mathscr{A}$ и $P(A) > 0$, тода для $k = 1, 2, \dots, n$ имеют место равенства:

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}$$

Комментарий: Вероятности гипотез $\mathbb{P}(H_k)$ называют обычно *априорными вероятностями*, а условные вероятности $\mathbb{P}(H_k|A)$ — *апостериорными*. Таким образом, формула Байеса позволяет «переоценить» априорную вероятность гипотезы при наличии информации, что произошло событие A.

7 Билет №7. Свойство непрерывности вероятностной меры.

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \qquad \{A_n\} \subset \mathscr{F} \quad n = 1, 2, \ldots$$

A^* – произошло бесконечно много событий A_n
A_* – произошли все события A_n, за исключением, быть может, конечного числа

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant n} A_k := \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geqslant n} A_k := \varliminf_{n\to\infty} A_n$$

Теорема [Свойство непрерывности вероятностной меры]: $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство $\Rightarrow \forall$ монотонной последовательности $\{A_n\}$ $\mathbb{P}(\lim A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

8 Билет №8. Независимость событий.

Определение: $A, B \in \mathscr{F}$ независимы, если

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Определение: Семейство событий $\{A_i\}_{i\in I}$ называется независимым (в совокупности), если $\forall$ конечного подмножества индексов $I_0 \subset I$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I_0} A_i) = \prod_{i\in I_0} \mathbb{P}(A_i)$$

Замечание: заметим, что из попарной независимости событий не следует, вообще говоря, независимость в совокупности. Кроме того, при проверке независимости в совокупности не достаточно ограничиться проверкой лишь самых длинных цепочек в равенстве.

9 Билет №9. Схема Бернулли.

Допустим, что проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $0 < p < 1$, может наступить и с вероятностью $q = 1-p$ может не наступить некоторое событие A. Пусть событие $B_n(k)$, заключается в том, что в проведенной серии испытаний событие A произошло k раз, $k = 0, 1, \ldots, n$, тогда вероятность этого события вычисляется по формуле:

$$\mathbb{P}(B_n(k)) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Замечание: События $B_n(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, образуют разбиение. Это подтверждается равенством

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_n(k)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

Формула для $\mathbb{P}(B_n(k))$ выражает распределение вероятностей числа успехов в n независимых испытаниях. Это распределение называют *биномиальным*.

10 Билет №10. Теорема Пуассона для Схемы Бернулли.

При больших значениях n реализация формулы для схемы Бернулли сопряжена с трудоемкими вычислениями. Поэтому ее пытаются заменить приближенными формулами. Следующий результат относится к случаю, когда p мало, а n велико. В связи с малостью p этот результат иногда называют *законом редких событий.*

Теорема [Пуассона для схемы Бернулли]: Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется соотношение:

$$\mathbb{P}(B_n(k)) = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Замечание: Доказанная теорема относится к так называемым предельным теоремам в схеме Бернулли. Распределение вероятностей

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

к которому стремится в условиях теоремы биномиальное распределение, называют *пуассоновским распределением.*

11 Билет №11. Полиномиальная схема.

Полиномиальная схема является обобщением схемы Бернулли. Здесь результатом каждого испытания может быть один из r взаимоисключающих исходов $A_1, \ldots, A_r$ с вероятностями появления $p_1, \ldots, p_r$, соответственно, $p_1 + \cdots + p_r = 1$.

Подобно событию $B_n(k)$, которое рассматривалось в схеме Бернулли, в полиномиальной схеме вводится событие $B_n(k_1, \ldots, k_r)$, состоящее в том, что в серии из n экспериментов произошло k_1 исходов с номером 1, … , k_r исходов с номером r, $k_1 + \cdots + k_r = n$. Вероятность такого события расчитывается по формуле:

$$\mathbb{P}(B_n(k_1, \ldots, k_r)) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$$

12 Билет №12. Лемма Бореля-Кантелли.

Лемма [Бореля-Кантелли]: Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$
2. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ и $\{A_n\}$ независимы, то $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$

13 Билет №13. Дискретные случайные величины. Представление простой случайной величины индикаторами.

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \qquad \xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

Определение: ξ называется дискретной случайной величиной, если $\xi(\Omega)$ – конечное либо счётное подмножество $\mathbb{R}$ и $\{\omega : \xi(\omega) = x\} \in \mathscr{F}\ \forall x \in \mathbb{R}$. $\xi(\Omega)$ конечно $\Rightarrow \xi$ называется простой случайной величиной.

Простейшей случайной величиной является индикатор события $A \in \mathscr{F}$, который определяется равенством

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega \in A, \\ 0, & \text{если} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

Основные свойства индикаторов:

$$\mathbb{1}_\Omega(\omega) \equiv 1, \quad \mathbb{1}_\varnothing(\omega) \equiv 0, \quad \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$
$$\mathbb{1}_{\cap A_i} = \prod \mathbb{1}_{A_i}, \quad \mathbb{1}_{\cup A_i} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{\cup A_i}} = 1 - \mathbb{1}_{\cap \overline{A_i}} = 1 - \prod (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

Пусть ξ - случайная величина, принимающая значения $x_1, ..., x_n$ соответственно на $D_1, ..., D_n$, т.е. $\mathscr{D}_\xi = \{D_1, ..., D_n\}$. Тогда

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{D_i}$$

14 Билет №14. Определения и свойства математического ожидания простых случайных величин.

Определение: Пусть ξ – простая случайная величина, $\xi(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{P}_\xi(x_i), i = 1, \ldots, n$ – распределение вероятностей. Тогда под математическим ожиданием (средним) будем понимать

$$\mathbb{E}\xi := \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(D_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$$

Замечание: Если случайная величина ξ, допускает представление

$$\xi = \sum_{j=1}^N y_i \mathbb{1}_{H_i},$$

где $\{H_1, ..., H_N\}$ - разбиение, а $y_1, ..., y_N$ не обязательно все различные то

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{j=1}^N y_j \mathbb{P}(H_j)$$

Свойства математического ожидания простых случайных величин.

1. $\mathbb{E}\mathbb{1}_A = \mathbb{P}(A)$
2. (Линейность) Если ξ, η - простые случайные величины, $c \in \mathbb{R}$, то
$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}\xi \qquad \mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$$
3. (Монотонность) Если $\xi \geqslant 0$, то $\mathbb{E}\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = 0) = 1$ ($\xi = 0$ почти наверное)
4. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$
5. (Неравенство Шварца) $(\mathbb{E}\xi\eta)^2 \leqslant (\mathbb{E}\xi^2)(\mathbb{E}\eta^2)$

15 Билет №15. Определение и свойства дисперсии простых случайных величин.

Определение Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$ называется стандартным (или среднеквадратическим) отклонением.

Свойства дисперсии.

1. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$;
2. Для любого вещественного числа с и случайной величины ξ имеют место равенства

$$\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi, \quad \mathbb{D}(\xi + c) = \mathbb{D}\xi;$$

3. Равенство $\mathbb{D}\xi = 0$ возможно лишь в случае $\mathbb{P}(\xi = \mathbb{E}\xi) = 1$, т.е. случайная величина ξ почти наверное равна постоянной.

16 Билет № 16. Теорема о независимости алгебр, порождённых разбиениями.

Определение: $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ – алгебра событий, т.е. $\mathscr{A}_k \subset \mathscr{F}, k = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ независимы, если $\forall A_1 \in \mathscr{A}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}_n : \mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n)$.

Теорема: Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство и $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, которые порождены разбиениями $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$, т.е. $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}(\mathscr{D}_1), \ldots, \mathscr{A}_n = \mathscr{A}(\mathscr{D}_n)$. Тогда $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ независимы $\Leftrightarrow \forall D_1 \in \mathscr{D}_1, \ldots, D_n \in \mathscr{D}_n : \mathbb{P}(D_1 \ldots D_n) = \mathbb{P}(D_1) \cdot \ldots \mathbb{P}(D_n)$

17 Билет № 17. Независимость случайных величин и свойства математического ожидания и дисперсии, связанных с независимостью.

Определение: $\xi_1, \ldots, \xi_n$, определённые на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, называются независимыми, если независимы алгебры $\mathscr{A}_{\xi_1}, \ldots, \mathscr{A}_{\xi_n}$.

Замечание: $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – простые независимые величины. $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ldots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1), \ldots, \eta_n = \varphi_n(\xi_n) \Rightarrow \eta_1, \ldots, \eta_n$ независимы.

Теорема: *Пусть* $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{D_i}, \eta = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \mathbb{1}_{H_j}$ *- независимые случайные величины. Тогда*

$$\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta, \quad \mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

Замечание: $\xi_1, ..., \xi_n$ - простые независимые случайные величины $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(\xi_1 \ldots \xi_n) = (\mathbb{E}\xi_1) \ldots (\mathbb{E}_n\xi_n)$$
$$\mathbb{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \ldots + \mathbb{D}_n\xi_n$$

18 Билет № 18. Целочисленные случайные величины и свойства производящих функций.

Определение Пусть случайная величина ξ принимает счётное число значений: $\mathbb{P}(\xi = x_k) = p_k, k = 1, 2, ...$ Будем говорить, что для ξ определено математическое ожидание, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$. В этом случае определяется

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Дискретную случайную величину ξ, принимающую только целые неотрицательные значения, называют *целочисленной* случайной величиной. Её распределение вероятностей $\mathbb{P}(\xi = k) = p_k, k = 0, 1, 2, ...$, удобно представлять *производящей функцией*

$$g_\xi(x) := \mathbb{E}x^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

Свойства производящих функций:

1. $g_\xi(x)$ непрерывна на $[-1; 1]$ и $g_\xi(1) = 1$
2. $g_\xi(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-1; 1)$ и
$$\frac{1}{k!} g_\xi^{(k)}(0) = p_k$$
3. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые целочисленные случайные величины и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, тогда производящая функция
$$g_{S_n} = \prod_{k=1}^{n} g_{\xi_k}(x)$$

19 Билет № 19. Теорема о случайной сумме независимых целочисленных случайных величин.

Теорема: Пусть $\nu, \xi_1, \xi_2 \ldots$ - независимые целочисленные случайные величины, при этом $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены и $g_\xi(x)$ - их производящая функция. Тогда $S_\nu = \xi_1 + ... + \xi_\nu$ имеет производную функцию:

$$g_{S_\nu}(x) = g_\nu(g_\xi(x))$$

20 Билет №20. Совместные распределения простых случайных величин и условие независимости.

Определение: Случайная величина ξ называется простой, если она принимает лишь конечное число значений.

Пусть случайные величины ξ и η разбивают пространство событий Ω на атомы D_i и H_j, $i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$ соответственно. Разбиения $\mathscr{D}_\xi = \{\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n\}$, $\mathscr{D}_\eta = \{\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_m\}$. Совместное распределение $\mathbb{P}_{\xi,\eta}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathbb{P}(\mathrm{D}_i \mathrm{H}_j) = p_{ij}$.

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

В этом случае мы можем составить таблицу совместного распределения:
Совместное разбиение $\mathscr{D}_{\xi,\eta} = \{\mathrm{D}_i\mathrm{H}_j\}$, $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$.
Очевидно, что по построению данной таблицы $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$.

Также из этой таблицы в каждой строке и каждом столбце соответственно можно видеть:

$$\mathbb{P}_\xi(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad \mathbb{P}_\eta(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Предположим, что у нас есть некая функция $\varphi(\xi, \eta)$, φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i, y_j)\mathbb{1}_{\mathrm{D}_i\mathrm{H}_j}.$$

Определение: Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство, а $\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n$ - алгебры событий. Будем говорить, что эти алгебры независимы, если $\forall A_1 \in \mathscr{A}_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}_n \longmapsto \mathbb{P}(A_1 ... A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n)$.

Определение: Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, называются независимыми, если независимы алгебры $\mathscr{A}_{\xi_1}, \dots, \mathscr{A}_{\xi_n}$.

Теорема: (Условие независимости)
Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство и $\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n$ порождены разбиениями $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_n$ соответственно. Тогда:

$[\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n$ – независимы$] \Longleftrightarrow [\forall \mathrm{D}_1 \in \mathscr{D}_1, \dots, \mathrm{D}_n \in \mathscr{D}_n \longmapsto$
$\longmapsto \mathbb{P}(\mathrm{D}_1 \dots \mathrm{D}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{D}_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\mathrm{D}_n)]$.

21 Билет №21. Ковариация и коэффициент корреляции, их свойства.

Определение: Пусть ξ и η — две случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Под ковариацией этих случайных величин понимается число:

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta).$$

Определение: Под коэффициентом корреляции понимается число:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi} \cdot \sqrt{\mathbb{D}\eta}}.$$

Свойства ковариации и коэффициента корреляции:

1. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$;

2. Если ξ и η независимы, то $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$;

3. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$ и $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ в том и только том случае, если $\mathbb{P}(\eta = a\xi + b) = 1$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$.

Определение: Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$.

22 Билет №22. Ковариационная матрица и её свойства.

Определение: Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Ковариационной матрицей называют $\mathbb{V} = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$. При $i = j$ получаем $b_{ii} = \mathbb{D}\xi_i$. То есть сама матрица выглядит вот так:

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \dots & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_2) & \dots & \mathbb{D}\xi_n \end{pmatrix}.$$

Свойства:

1. $\mathbb{V}$ - симметрическая матрица (т.к. $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathrm{cov}(\xi_j, \xi_i)$);

2. $\mathbb{V}$ положительно определена, т.е. $\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \longmapsto \mathbf{x}^T \mathbb{V} \mathbf{x} \geqslant 0.$

Замечание: Симметричность и неотрицательная определенность являются характеристическими свойствами ковариационной матрицы.

23 Билет №23. Задача линейного оценивания. Уравнение регрессии.

Пусть ξ и η — две случайные величины, из которых лишь ξ является наблюдаемой. Если ξ и η коррелированы, то естественно предположить, что знание значения ξ позволит получить некоторые выводы о значениях ненаблюдаемой случайной величины η.

Определение: Всякую функцию $\varphi(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в контексте этой задачи называют оценкой для η.

Определение: Оценка φ^* называется оптимальной в смысле среднеквадратического отклонения в классе оценок Φ, если:

$$\mathbb{E}(\eta - \varphi^*(\xi))^2 = \inf_{\varphi \in \Phi} \mathbb{E}(\eta - \varphi(\xi))^2.$$

Оказывается, что для отыскания оптимальной оценки в классе линейных функций $\varphi(x) = ax + b$ достаточно знания ковариации $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

Оптимальной оценкой в классе линейных функций является:

$$\eta^* = \varphi^*(\xi) = \mathbb{E}\eta + \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}(\xi - \mathbb{E}\xi).$$

Это равенство называют также **уравнением регрессии** η на ξ.

Замечание: Среднеквадратическая ошибка линейного оценивания вычисляется по формуле:
$\mathbb{E}(\eta-\eta^*)^2 = \mathbb{E}\left((\eta - \mathbb{E}\eta) - \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)^2 = \mathbb{D}\eta - 2\frac{(\mathrm{cov}(\xi,\eta))^2}{\mathbb{D}\xi} + \frac{(\mathrm{cov}(\xi,\eta))^2}{\mathbb{D}\xi} = \mathbb{D}\eta(1-(\rho(\xi,\eta))^2).$

Отсюда видно, что оценка тем точнее, чем ближе коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$ по модулю к единице.

24 Билет №24. Борелевская сигма-алгебра и общее определение случайной величины.

Определение: Класс $\mathscr{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй подмножеств Ω, если он замкнут относительно конечного числа теоретико-множественных операций.

Определение: Класс $\mathscr{A}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй, если он является алгеброй и замкнут относительно счетных объединений.

Замечание: Класс $\mathscr{A}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй в том и только том случае, если выполнены следующие условия:
1) $\Omega \in \mathscr{A}$;
2) Если $A \in \mathscr{A}$, то $\bar{A} \in \mathscr{A}$;
3) Если $A_n \subset \mathscr{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Определение: Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс подмножеств Ω. Тогда под $\sigma(\mathscr{K})$ будем понимать σ-алгебру подмножеств Ω, которая удовлетворяет следующим условиям:
1) $\mathscr{K} \subset \sigma(\mathscr{K})$;
2) Если $\mathscr{F}$ - σ-алгебра подмножеств Ω и $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}$, то $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}$.

Определение: В силу условия 2) σ-алгебру $\sigma(\mathscr{K})$ называют минимальной σ-алгеброй, порожденной $\mathscr{K}$.

Замечание: $\sigma(\mathscr{K})$ существует и единственна.

Определение: Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}^n$), а $\mathscr{K}$ - класс всех открытых множеств. Тогда $\sigma(\mathscr{K}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ (или $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$) называется борелевской σ-алгеброй подмножеств $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}^n$).

Определение: Множества $B \in \mathscr{B}$ называются борелевскими множествами.

$\mathscr{B}$ содержит все открытые множества, все замкнутые множества и все их счетные пересечения и объединения.

Замечание: Если $\mathscr{T}$ - класс полуинтервалов вида $(-\infty; x]$ (или $(-\infty; x)$, $[x; +\infty)$, $(x; +\infty)$), где $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma(\mathscr{T}) = \mathscr{B}$.

Определение: Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство. Отображение $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если:

$$\forall B \in \mathscr{B} \longmapsto \xi^{-1}(B) = \{w : \xi(w) \in B\} \in \mathscr{F}.$$

Предложение: Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство и $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$[\xi - \text{независимая случайная величина}] \Longleftrightarrow [\forall x \in \mathbb{R} \longmapsto \{w : \xi(w) \leqslant x\} \in \mathscr{F}]\,.$$

Определение: Пусть ξ - случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Тогда $\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$ называется под-σ-алгеброй $\mathscr{F}$ (или же σ-алгебра, порожденная ξ).

Определение: Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, определенные на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ называются независимыми, если порожденные ими алгебры $\sigma(\xi_1), \dots, \sigma(\xi_n)$ независимы.

25 Билет №25. Борелевские функции.

Определение: Функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется борелевской, если:

$$\forall B \in \mathscr{B} \longmapsto \varphi^{-1}(B) \in \mathscr{B}.$$

Другими словами, для любого борелевского множества B прообраз $\varphi^{-1}(B)$ также является борелевским множеством.

Предложение: Пусть ξ - случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, а $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская функция. Тогда $\eta = \varphi(\xi) = \varphi \circ \xi$ - случайная величина.

26 Билет №26. Аппроксимационная теорема и определение математического ожидания как интеграла Лебега.

Теорема: (Аппроксимационная)

Пусть $\xi \geqslant 0$ - случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Тогда существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых неотрицательных случайных величин такая, что $\xi_n \nearrow \xi$ (монотонно возрастая, стремится к ξ) и $\sigma(\xi_n) \subset \sigma(\xi)$.

Определение: Пусть ξ - неотрицательная случайная величина и $\xi_n \nearrow \xi$, где $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин. Тогда математическое ожидание ξ определяется как:

$$\mathbb{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n,$$

если этот предел конечен.

Замечание: Для произвольной случайной величины ξ рассматриваются две неотрицательные случайные величины:

$$\xi^+ = \max\{\xi, 0\}, \qquad \xi^- = \max\{-\xi, 0\}.$$

В случае, когда $\mathbb{E}\xi^+$ и $\mathbb{E}\xi^-$ конечны, будем говорить, что ξ имеет конечное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-.$$

Введенное таким образом математическое ожидание сохраняет основные свойства, которые были установлены для простых случайных величин.

В действительности, определение математического ожидания является интегралом Лебега от функции $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ по мере $\mathbb{P}$, то есть:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(w)\mathbb{P}(dw) = \int\limits_{\Omega} \xi(w)d\mathbb{P}(w),$$

то есть интегрирование идет по всем событиям $w \in \Omega$.

С каждой случайной величиной ξ ассоциируется новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P}_\xi)$, и мы можем перенести все вычисления на него. То есть мы совершаем переход: $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P}_\xi)$.

Тогда математическое ожидание можно считать как:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_\xi(x).$$

Кроме того, если $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская функция, то:

$$\mathbb{E}\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mathbb{P}_\xi(x).$$

27 Билет 27. Неравенства Маркова и Чебышева.

Теорема: Пусть случайная величина ξ имеет конечную дисперсию. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняются следующие неравенства:

Неравенство Маркова

$$\mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}$$

Неравенство Чебышева

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

28 Билет 28. Характеристические функции и их свойства.

Определение: Характеристической функцией случайной величины ξ называется:

$$h_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$$

Свойства характеристических функций:

1. $|h_\xi(t)| \leqslant 1$ и $h_\xi(0) = 1$

2. $h_\xi(-t) = \overline{h_\xi(t)}$

3. $h_{a\xi+b}(t) = e^{itb} h_\xi(at)$

4. $h_\xi(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ (равномерно непрерывна)

5. Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, то $h_{S_n}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} h_{\xi_k}(t)$

6. Если $\mathbb{E}|\xi|^n < \infty$, то $h_\xi(t)$ имеет производные до n-го порядка включительно и

$$\mathbb{E}\xi^n = \frac{1}{i^n} h_\xi^{(n)}(0)$$

7. Если $\exists h_\xi^{(2k)}(0)$, тогда $\exists \mathbb{E}\xi^{2k} < \infty$

29 Билет 29. Характеристические функции показательного и нормального распределения.

Характеристические функции для часто встречающихся распределений:

- Вырожденное распределение $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$.
  $h_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = e^{iat}$

- Равномерное на отрезке распределение с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

  В случае $t \neq 0$ имеем

$$h_\xi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

  При $t = 0$ имеем $h_\xi(0) = 1$.

- Экспоненциальное распределение зависит от параметра $\lambda > 0$ и определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty)}(x)$$

$$h_\xi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

- Нормальное распределение, определяемое плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

$$h_\xi(t) = e^{iat} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

- Целочисленная случайная величина с производящей функцией $g_\xi(x)$ имеет характеристическую функцию $h_\xi(t) = g_\xi(e^{it})$

30 Билет 30. Определение и критерий сходимости почти наверное для последовательности случайных величин.

Определение: Пусть $\xi, \xi_1, \ldots$ – случайные величины, определённые на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Будем говорить, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, если

$$\mathbb{P}(\{\lim_{n\to\infty} \xi_n(\Omega) = \xi(\Omega)\}) = 1$$

Критерий: Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ и для $\varepsilon > 0$ $A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$, тогда

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n^\varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$$

31 Билет 31. Законы больших чисел Чебышева и Бернулли.

Теорема [Закон больших чисел Чебышева]: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, для которых $\mathbb{D}\xi_n \leqslant C, n = 1, 2, ...$, при некотором $C > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется следующее предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

где $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

Теорема: [Закон больших чисел Бернулли] Пусть S_n – число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью $p, 0 < p < 1$, в отдельном испытании. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

32 Билет 32. Усиленный закон больших чисел.

Теорема: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathbb{E}\xi_k = a$, $\mathbb{D}\xi_k = \sigma^2$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \text{ при } n \to \infty$$

где $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

33 Билет 33. Сходимость по распределению, центральная предельная теорема.

Определение: Пусть $F, F_1, F_2, \ldots$ – функции распределения. Будем говорить, что $F_n \Rightarrow F$ (слабо сходится), если

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

в каждой точке непрерывности функции F.

Определение: Будем говорить, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ (сходится по распределению), если $F_{\xi_n} \Rightarrow F_\xi$.

Теорема [Центральная предельная теорема]: Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathbb{E}\xi_k = a$, $\mathbb{D}\xi_k = \sigma^2$. $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \Phi(x)$$

34 Билет №34. Закон больших чисел Хинчина.

Теорема [Закон больших чисел Хинчина]: Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным $\mathbb{E}\xi_k = a$. Тогда для $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ имеет место предельное соотношение

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a$$

35 Билет №35. Теорема Бернштейна о приближении непрерывной функции полиномами.

Теорема [Бернштейна]: Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[0;1]$. Тогда

$$\max_{x\in[0;1]} |B_n(x;f) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где

$$B_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\tfrac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

36 Билет №36. Условие марковости и однородности цепи в терминах переходных вероятностей.

$$t = 1, 2, \dots, T$$
$$E = e_1, \dots, e_r$$

Цепи Маркова – системы, у которых вероятности перехода из одного состояния в другое в данный момент времени не зависят от того, как вела себя система в предыдущие моменты времени.

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_T),$$

где $\omega_t = i$, если система в момент времени t находилась в состоянии e_i.

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega_0 = i_0, \omega_1 = i_1, \dots, \omega_T = i_T) =$$
$$= \mathbb{P}(\omega_0 = i_0)\mathbb{P}(\omega_1 = i_1 | \omega_0 = i_0) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\omega_T = i_T | \omega_0 = i_0, \dots, \omega_{T-1} = i_{T-1})$$

Условие марковости (независимость от прошлого): для любых двух моментов времени $s < t$

$$\mathbb{P}(\omega_t = j | \omega_0 = i_0, \dots, \omega_{s-1} = i_{s-1}, \omega_s = i) = \mathbb{P}(\omega_t = j | \omega_s = i)$$

Однородность:

$$\mathbb{P}(\omega_{s+t} = j|\omega_s = i) = \mathbb{P}(\omega_t = j|\omega_0 = i) = p_{ij}(t)$$

Свойства вероятностей $\mathbf{p_{ij}(t)}$:

1. $p_{ij}(t) \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{j=1}^{r} p_{ij}(t) = 1$;
3. $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

$$\Pi(t) = (p_{ij}(t))$$

$p_{ij}(1) = p_{ij}$ – переходные вероятности. $\Pi(1) = \Pi$ – матрица переходных вероятностей.

37 Билет №37. Уравнение Колмогорова-Чепмена.

$$\forall s, t \geqslant 0 \qquad p_{ij}(s+t) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}(s) \cdot p_{kj}(t)$$

Это также можно записать в матричном виде

$$\Pi(s+t) = \Pi(s)\Pi(t)$$

Поскольку $\Pi(1) = \Pi$, то $\Pi(t) = \Pi^t$.

Удобно записать вектор-строку $\vec{p}(0) = (p_1(0), \ldots, p_r(0))$, где $p_i(0)$ – вероятность того, что в начальный момент времени система находилась в состоянии i; и вектор-строку $\vec{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_r(t))$, где $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент времени t система находилась в состоянии i. Тогда

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(0) \cdot p_{ij}(t)$$

Или, в матричном виде:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0)\Pi(t) = \vec{p}(0)\Pi^t$$

38 Билет №38. Теорема о предельных вероятностях марковской цепи.

Теорема [О предельных вероятностях]: Пусть при некотором $t_0 > 0$ все элементы матрицы $\Pi^{t_0} = (p_{ij}(t_0))$ являются строго положительными. Тогда $\forall j = 1, \ldots, r$ существует предел

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = p_j,$$

который не зависит от i и $p_1, \ldots, p_r$ – единственные решения СЛУ

$$p_j = \sum_{k=1}^{r} p_k \cdot p_{kj}, \qquad \sum_{j=1}^{r} p_j = 1$$

39 Билет №39. Вероятность вырождения процесса Гальтона-Ватсона и ее выражение через производящую функцию.

$$A \text{ – процесс выродился}$$

$$A_n = \{\xi_n = 0\} \qquad A_n \nearrow A$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) = q \text{ – вероятность вырождения процесса}$$

Теорема: Пусть $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – процесс Гальтона-Ватсона с производящей функцией $f(x)$, Тогда вероятность q вырождения процесса

$$q = \lim_{n\to\infty} f^n(0)$$

и является наименьшим неотрицательным корнем уравнения $f(x) = x$.

$$(f^n(x) = f \circ \ldots \circ f(x) = g_{\xi_n}(x) \text{ – } n\text{-ая итерация функции } f)$$

40 Билет №40. Классификация процессов Гальтона-Ватсона и вероятность вырождения.

$\mathbb{E}(\xi_1) = m$ – среднее число потомков от одной частицы в следующем поколении

Процесс называется:

- докритическим, если $m < 1$;
- критическим, если $m = 1$;
- надкритическим, если $m > 1 (m = +\infty)$.

Теорема: Пусть $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – процесс Гальтона-Ватсона. Тогда, если процесс докритический или критический, то вероятность вырождения $q = 1$. Если процесс надкритический, то $0 \leqslant q < 1$.