

Министерство Образования и Науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Московский Физико-Технический Институт
(Государственный Университет)

Кафедра вычислительной математики

Применение высокопроизводительных
вычислительных технологий для моделирования
задач сейсморазведки

Лобанов А.И., Холодов Я.А., Хохлов Н.И.
Шевченко А.В., Цыбулин И.В.

Учебное пособие

Москва - 2012

1 Модельные уравнения и постановка задачи

1.1 Модельные уравнения

Простейшее линейное уравнение переноса и система гиперболического типа

Рассмотрим простейший пример уравнений в частных производных. Пусть в некотором объеме движущейся жидкости находится пассивная примесь, т. е. такая, наличие которой не меняет принципиально характер движения. Например, это может быть маркер — краска, чернила или мелкие частицы, которые специально добавлены в жидкость для визуализации течений. Тогда изменение концентрации примеси в любом сколь угодно малом объеме равно потоку примеси через границы объема в единицу времени (закон сохранения массы), и можно записать, устремляя рассматриваемый объем к нулю

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(u\mathbf{v}),$$

где u — концентрация пассивной примеси, \mathbf{v} — скорость течения жидкости. Пусть жидкость несжимаема и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Тогда из двух предыдущих соотношений сразу следует уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u = 0$$

Его обычно называют уравнением переноса пассивной примеси или линейным уравнением переноса. Кроме многомерного случая будем рассматривать и одномерное уравнение переноса, описывающее перенос с постоянной скоростью

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

а также неоднородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

где f — заданная функция, играющая роль источника (стока).

Неоднородным уравнением переноса описываются системы, в которых пассивная примесь может вступать, например, в химические реакции. Все эти уравнения традиционно рассматриваются в курсах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Причина этого кроется в следующем. Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v},$$

соответствующую уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u = 0$. Это — *уравнение характеристик* для

линейного уравнения переноса. Если функция $u(t, \mathbf{x})$ является *интегралом* системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то она является и решением исходного уравнения в частных производных. Иными словами, вдоль характеристики решение однородного уравнения переноса сохраняет постоянное значение. Этот факт просто

проверяется. Действительно, $0 = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u$.

Упражнение. Найти в явном виде уравнение характеристики для $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. В какое уравнение перейдет неоднородное уравнение переноса вдоль характеристики?

Для корректной постановки задач для линейного уравнения переноса начальные и граничные условия необходимо ставить на некоторой гиперповерхности. Так как решение уравнений переноса распространяется вдоль характеристик, то начальная

гиперповерхность должна быть трансверсальной ко всем характеристикам (не иметь точек касания с характеристиками). Если ставить задачу Коши с начальными данными на характеристике, то такая задача становится неопределенной. Часто именно это свойство и кладут в основу определения характеристики. Если для однородного уравнения переноса какая-либо характеристика имеет с начальной гиперповерхностью более одной общей точки, то значения начальной функции во всех этих точках должны быть равны между собой. Все эти условия достаточно очевидны, если вспомнить физический смысл уравнения переноса.

Отметим, что наличие характеристик можно считать условием того, что система имеет гиперболический тип. Так, если система уравнений произвольного порядка n имеет n действительных собственных значений (см. далее) и, соответственно, столько же характеристик, будем называть ее гиперболической. Таким образом, *линейное уравнение переноса имеет гиперболический тип*.

Система уравнений акустики

В качестве тестовой задачи для слушателей школы рассматривается двумерная задача распространения акустических волн в твёрдом теле. Система уравнений, описывающая такие волны, приведена во многих монографиях, например в [1]. Неизвестными в этом уравнении являются скорость движения среды $\mathbf{w}=(u,v)$ и возмущение давления p :

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x + \mathbf{B}\mathbf{q}_y = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{где } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho - \text{плотность среды, } K - \text{модуль}$$

упругости.

Уравнения (1.1) описывают малые возмущения, распространяющиеся в твёрдом теле по неподвижной среде с заданным начальным (фоновым) давлением. Хотя для описания распространения возмущений при сейсморазведке применяется немного другая математическая модель (уравнения Ламе [1]), рассматриваемая система обладает теми же характерными свойствами.

Система (1.1) является линеаризацией двух уравнений: уравнения неразрывности и закона сохранения импульса, записанных для баротропной среды (среды, в которой давление зависит только от плотности) [1]. При линеаризации также получают выражение для модуля упругости

$$K = \rho_0 P'(\rho_0), \quad (1.2)$$

где $P = P(\rho)$ – зависимость давления в среде от плотности (уравнение состояния среды), ρ_0 – значение плотности, относительно которого происходит линеаризация уравнений (обычно – плотность ненагруженной среды). Часто в литературе можно встретить обозначение $K = \rho_0 c^2$, здесь c – местная скорость звука.

Система (1.1) является гиперболической. В одномерном варианте условием гиперболичности системы уравнений первого порядка является наличие полной системы собственных векторов матрицы системы, которым соответствуют вещественные собственные числа. Эти числа задают скорости распространения малых возмущений, а собственные векторы являются линейно независимыми. Поясним сказанное на примере, а затем рассмотрим общий случай.

Упражнение. Акустическая система описывает распространение плоских звуковых волн. Поставим для нее задачу Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho &= \text{const}, \quad c = \text{const}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \\ t > 0, \quad -\infty < x < \infty,\end{aligned}$$

где u — скорость движения среды, p — давление, ρ — плотность среды, c — скорость звука в среде.

- Представить акустическую систему в интегральной форме.
- Преобразовать акустическую систему к виду системы с разделенными переменными.
- Предложить разностную схему первого порядка точности для ее решения.

Решение.

a). Проинтегрировав акустическую систему по произвольной области с границей G , получим:

$$\oint_G \rho u dx - p dt = 0,$$

$$\oint_G \frac{p}{c^2} dx - \rho u dt = 0.$$

b). Умножим второе уравнение на $(\rho c)^{-1}$, затем сначала сложим с первым уравнением, оставим полученное уравнение для рассмотрения, и затем вычтем из первого, получив второе уравнение для рассмотрения. Получим систему двух уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) = 0,$$

или, после введения новых обозначений (для *инвариантов Римана*) $R = u + \frac{p}{\rho c}$, $S = u - \frac{p}{\rho c}$

система акустики запишется в виде двух уравнений переноса:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + c \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} - c \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Эта система позволяет выписать общее решение: $R = f(x - ct)$, $S = g(x + ct)$. Здесь f, g — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, определяемые из начальных условий. В терминах инвариантов Римана можно определить и значения *естественных переменных* (в которых была первоначально поставлена задача) u, p :

$$u = \frac{1}{2} (f(x - ct) + g(x + ct)), \quad p = \frac{\rho c}{2} (f(x - ct) - g(x + ct)).$$

Замечательное свойство инвариантов Римана R, S заключается в их постоянстве вдоль прямых $x - ct = \text{const}$, и $x + ct = \text{const}$ или $\frac{dx}{dt} = \pm c$ — характеристик акустической системы.

Если задавать начальные данные $u(x, 0) = \varphi(x)$, $p(x, 0) = \psi(x)$, $-\infty < x < \infty$, то связь начальных данных и инвариантов Римана будет

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + g(x)), \quad \psi(x) = \frac{\rho c}{2} [f(x) - g(x)],$$

откуда получим $f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{\rho c}$, $g(x) = \varphi(x) - \frac{\psi(x)}{\rho c}$.

Следовательно, решение системы в этом случае

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2\rho c}(\psi(x - ct) + \psi(x + ct)),$$

$$p(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) - \frac{\rho c}{2}(\psi(x - ct) + \psi(x + ct)).$$

■

Рассмотрим теперь линейную систему уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Пусть она разрешена относительно производных по времени и имеет вид $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$. Найдем собственные числа матрицы системы, для этого решим алгебраическое уравнение $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$. Если все собственные числа этой матрицы действительны, и если для любого собственного числа матрицы, кратность которого равна a , ранг матрицы $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ будет равен $n - a$, то каждому собственному числу матрицы будет соответствовать собственный вектор. Так как в общем случае матрица системы несамосопряженная, то левые и правые собственные векторы не будут совпадать. Предположим, мы нашли все левые собственные векторы и составили матрицу $\mathbf{\Omega}_l$, строки которой суть левые собственные векторы. Тогда $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}_l^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_l$ — в базисе из собственных векторов матрицу можно привести к диагональному виду. Матрица $\mathbf{\Lambda}$ суть диагональная матрица, на ее главной диагонали стоят собственные числа матрицы \mathbf{A} . Рассмотрим исходное уравнение $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_l^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$. Умножим правую и левую его части на постоянную матрицу $\mathbf{\Omega}_l$. Мы получим $\mathbf{\Omega}_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$. Если теперь ввести новые переменные по формуле $\mathbf{z} = \mathbf{\Omega}_l \mathbf{u}$, то в новых переменных система уравнений примет вид $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} = 0$. В этих переменных уравнения разделились на независимые уравнения переноса. Такие переменные называются инвариантами Римана. Для однородной системы значения инвариантов Римана вдоль каждой характеристики сохраняется.

Область влияния. Наличие характеристик у гиперболической системы — фундаментальное свойство. Оно является следствием того, что все возмущения распространяются только с конечной скоростью, для преодоления некоторого расстояния возмущению требуется конечное время. Если мы выберем некую точку в области, где решается гиперболическая система, то значение функции в данной точке будут влиять только значения в точках пересечения проходящих через рассматриваемую точку характеристик с областью начальных данных. Это множество точек и образует область влияния дифференциальной задачи для фиксированной точки.

В двумерном варианте ситуация немного сложнее. Попытаемся найти решения нашей системы в виде простой волны, которая распространяется вдоль одного направления $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$:

$$\mathbf{q}(t, x, y) = \mathbf{q}((n_x x + n_y y) - s \cdot t) \quad (1.3)$$

Для этого необходимо исследовать на собственные числа матрицу системы в направлении $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$: $\mathbf{A}_n = n_x \mathbf{A} + n_y \mathbf{B}$. Двумерная система называется гиперболической в случае, если вдоль любого направления $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$: у матрицы \mathbf{A}_n существует полная система собственных векторов, которые соответствуют вещественным собственным числам (среди собственных чисел могут встречаться ноли, значения собственных чисел могут быть совпадающими)

$$\mathbf{A}_n = n_x \mathbf{A} + n_y \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & n_x K & n_y K \\ n_x / \rho & 0 & 0 \\ n_y / \rho & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Вычислим собственные числа матрицы

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{A}_n - \lambda \mathbf{E}] &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & n_x K & n_y K \\ n_x / \rho & -\lambda & 0 \\ n_y / \rho & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2) - \frac{n_x}{\rho}(-\lambda n_x K) + \frac{n_y}{\rho}(\lambda n_y K) = \\ &= -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{K}{\rho} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

с учётом условия нормировки $n_x^2 + n_y^2 = 1$.

Таким образом, из (1.5) видно, что при распространении возмущения вдоль любого направления имеются три вещественных собственных числа

$$\lambda_1 = -c, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = c, \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (1.6)$$

им соответствуют правые собственные векторы

$$\mathbf{r}_{1,n} = \begin{bmatrix} -Z \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2,n} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{3,n} = \begin{bmatrix} Z \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

Можно выписать матрицу, составленную из правых собственных векторов

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} -Z & 0 & Z \\ n_x & n_y & n_x \\ n_y & n_x & n_y \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

где $Z = \sqrt{K\rho}$. При этом мы всегда можем диагонализировать матрицу $\mathbf{A}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}_n (\mathbf{R}_n)^{-1}$, здесь $\mathbf{\Lambda}_n = \text{diag}\{\lambda_i\}$, — матрица, на диагонали которой находятся собственные значения матрицы \mathbf{A}_n :

$$\mathbf{\Lambda}_n = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Естественно, при выборе базиса из правых собственных векторов мы можем получить и выражения для инвариантов Римана.

1.2 Постановка задачи

Перейдём к постановке краевой задачи, которая будет решаться в рамках школы. Рассмотрим прямоугольную область размера $L \times H$ (характерная величина $L \sim H \sim 1 \text{ км}$) (Рис. 0.1). Параметры среды (ρ, K) считаются постоянными во всей области, кроме полости. Пусть в рассматриваемой прямоугольной области содержится прямоугольная полость размера $l \times h$ (характерная величина $l \sim h \sim 10 \text{ м}$), расположенная на расстоянии a от верхней и b от левой границы расчётной области. Такая расчетная область представляет собой некоторую модельную многосвязную область интегрирования.

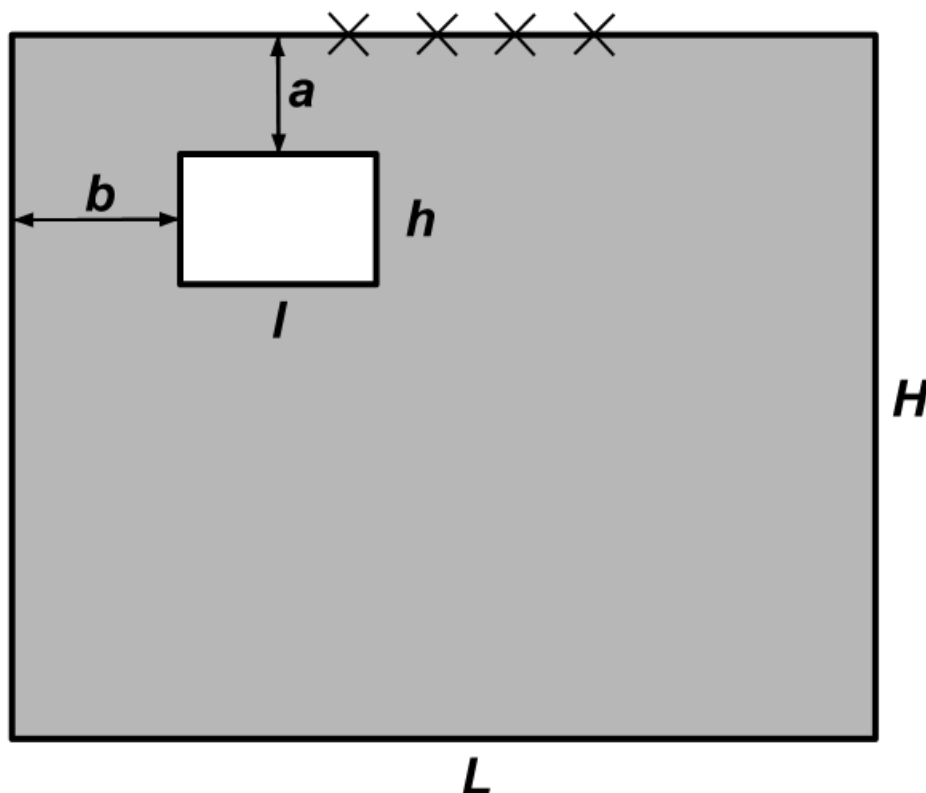


Рис. 0.1. Расчётная область

В данной задаче рассмотрим два типа граничных условий: условие на свободной границе и условие на открытой границе. Эти условия имеют следующий физический смысл. Компоненты силы в направлении нормали к свободной границы равны нулю. Условие свободной границы для рассматриваемой задачи означают равенство нулю возмущения давления на границе. В свою очередь, возмущения извне области не приходят через открытую границу. Этот тип условий иногда называют неотражающим или поглощающим условием. Неотражающие условия нельзя задать абсолютно точно, и для каждого численного метода они задаются некоторым удобным образом.

На верхней границе (дневной поверхности) расчётной области и на границе полости задаются условия свободной границы, все остальные границы считаем открытыми.

Начальные условия. Численный алгоритм решения задачи должен допускать задание начальных условий двух типов: «плоская волна» и «радиальный взрыв». «Плоская волна» — это распространяющаяся в заданном направлении \mathbf{k} волна. Начальное условие для возмущения, которое приводит к распространению плоской волны, не может быть произвольным. Вектор начальных условий в области возмущения должен быть пропорциональным собственному вектору матрицы \mathbf{A}_k . В качестве коэффициента пропорциональности может быть использована ограниченная функция одной переменной (координата считается в направлении распространения волны), например, функция Гаусса.

Начальное условие для «радиального взрыва» (Рис. 0.2) более сложное. Задаётся кольцо с центром в точке \mathbf{x}_0 с внутренним радиусом r и внешним R . В каждой точке кольца трехкомпонентный вектор начального возмущения пропорционален собственному вектору матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}$, соответствующему волне, распространяющейся от центра кольца. Амплитуда возмущения также задается некоторой функцией радиуса, например, функцией Гаусса.

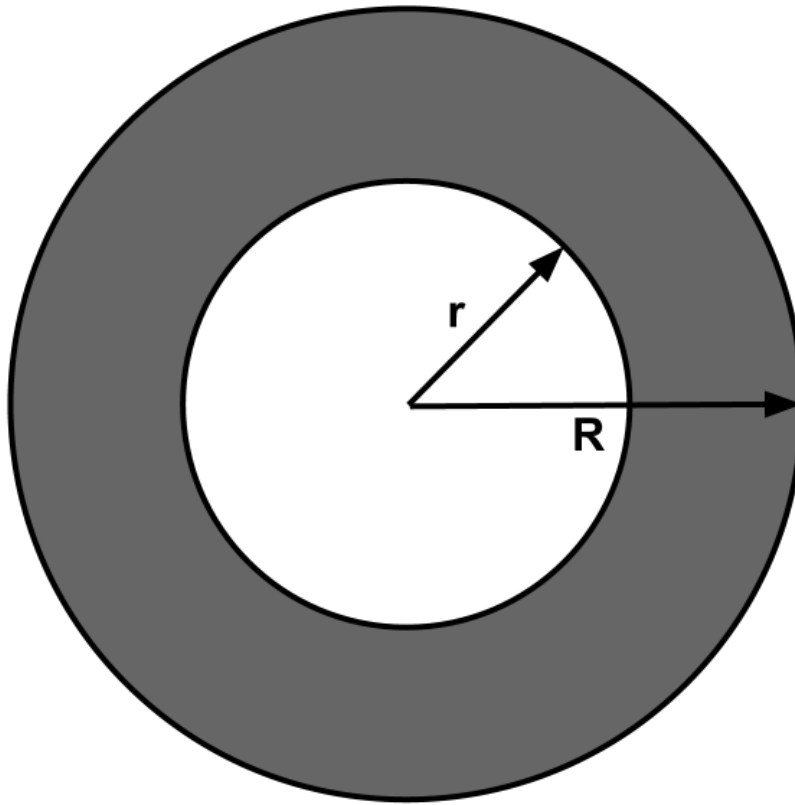


Рис. 0.2. Начальное условие типа “радиальный взрыв”

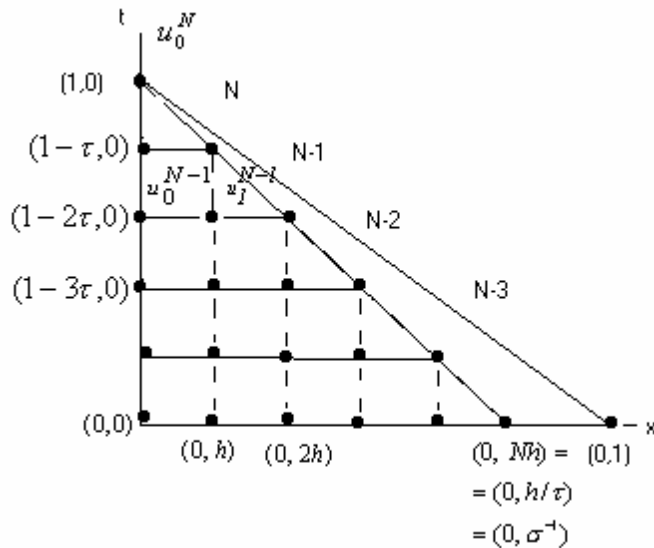
Предполагается, что в расчётной области вводится прямоугольная сетка с постоянными шагами по каждой оси. Шаг интегрирования по времени также постоянен и для явных методов должен удовлетворять условию Куранта. Напомним, что *явными* схемами называются такие разностные схемы для эволюционных уравнений, когда данные на следующем слое по времени находятся непосредственно из данных на предыдущем слое без решения алгебраических систем уравнений. Если же на верхнем временном слое для определения значений сеточной функции необходимо решать систему алгебраических уравнений, то схема называется *неявной*. Напомним, что такое условие Куранта устойчивости разностной схемы для решения уравнения переноса. Начнем с **необходимого условия Куранта, Фридрихса и Леви (условие КФЛ).**

Рассмотрим разностное уравнение

$$u_m^{n+1} = (1 - \sigma)u_m^n + \sigma u_{m+1}^n, \quad u_m^0 = \phi_m^0, \quad \sigma = c\tau/h,$$

аппроксимирующее задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, 1], \quad u(0, x) = \phi(x).$$



Очевидно, что значение u_0^N сеточной функции в точке $(1,0)$ выражается через значения u_0^{N-1} и u_1^{N-1} в точках $(1-\sigma\tau, 0)$, $(1-\sigma\tau, h)$. В свою очередь, значения u_0^{N-1} и u_1^{N-1} находятся по значениям сеточной функции $u_0^{N-2}, u_1^{N-2}, u_2^{N-2}$ в точках $(1-2\sigma\tau, 0)$, $(1-2\sigma\tau, h)$, $(1-2\sigma\tau, 2h)$, значения сеточной функции $u_0^{N-2}, u_1^{N-2}, u_2^{N-2}$ находятся по значениям $u_0^{N-3}, u_1^{N-3}, u_2^{N-3}, u_3^{N-3}$ в точках $(1-3\sigma\tau, ih)$, $i=0, \dots, 3$, и т.д. Значение сеточной функции u_0^N выражается через значение u_m^0 решения в точках расчетной сетки $(0, mh)$, $m=0, \dots, N$, $N = \tau^{-1}$. Все эти точки лежат на отрезке $[0, h/\sigma\tau]$ или $[0, \sigma^{-1}]$ оси $t=0$, на которой задано начальное условие $u(0, x) = \varphi(x)$ исходной дифференциальной задачи. Значение u_0^N не зависит от значения функции в любых точках x , лежащих вне отрезка $[0, \sigma^{-1}]$.

Известно, что решением однородного уравнения переноса является функция $u(t, x) = \varphi(x + ct)$, сохраняющая свое значение вдоль характеристики $x + ct = \text{const}$, в частности, на прямой $x + ct = 1$.

Таким образом, при $\sigma > 1$ область зависимости решения дифференциальной задачи для u_0^N , являющаяся точкой пересечения характеристики с прямой, на которой заданы данные Коши, не входит в отрезок $0 \leq x \leq \sigma^{-1}$. В случае $\sigma^{-1} < 1$ и $0 \leq x < 1$ устойчивость и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной отсутствует. Разумеется, приведенные рассуждения не носят характера доказательства, а лишь косвенно объясняют, почему не следует ожидать сходимости при $\sigma = \tau/h > 1$.

Сформулируем теперь условие Куранта–Фридрихса–Леви (условие КФЛ), необходимое для сходимости разностной задачи. Пусть некая точка A принадлежит области определения решения $u(t, x)$ и значение функции $u(A)$ зависит от значения некоторой функции $\varphi(x)$ в точках x , принадлежащих множеству $\Omega(A)$. Это множество есть область влияния дифференциальной задачи, оно, в свою очередь, принадлежит области определения функции $\varphi(x)$.

Положим, что для приближенного вычисления решения уравнения $\mathbf{L}u = F$ используется разностная схема $\mathbf{L}_\tau u_\tau = F_\tau$. Значение решения в точке A_x расчетной сетки, ближайшей к A , полностью определяются значениями функции φ на множестве $\Omega_x(A_x)$. Для того чтобы имела место сходимость $u_\tau \rightarrow u$ при $h \rightarrow 0$, разностная схема должна быть

устроена так, чтобы при сколь угодно малых значениях пространственного шага h в произвольной окрестности любой точки области $\Omega(A)$ имелась точка множества $\Omega_x(A_x)$.

Другими словами, разностная схема должна быть устроена так, чтобы область зависимости разностного уравнения учитывала область зависимости решения исходного дифференциального уравнения. В противном случае сходимости ожидать, вообще говоря, нельзя.

Возвращаясь к предложенной слушателям задаче, отметим, что результатом расчёта будет полная картина возмущений в области, а также графики сейсмограмм (графики зависимости смещений от времени) в точках на верхней границе, в которых расположены сейсμοприёмники (на Рис. 0.1 они обозначены крестиками).

2 Разрывный метод Галеркина

2.1 Введение

Для приближенного решения уравнений в частных производных применяются различные численные методы. В следующем разделе будут описаны некоторые конечно-разностные методы для решения системы уравнений акустики. Помимо конечно-разностного подхода для построения численных схем для гиперболических систем, существует большое количество других методов. Среди них методы конечных элементов, конечных объемов и другие.

Основу методов конечных элементов (МКЭ) составляет представление решения в виде конечной линейной комбинации ограниченных базисных функций, коэффициенты которой зависят от времени. При этом функции обычно берутся непрерывными и отличными от тождественного нуля на некоторых носителях, которые иногда называются конечными элементами. Коэффициенты разложения по базисным функциям зависят от времени и называются *степенями свободы*

$$U_h(t, x) = \sum_i H_i(x) u_i(t),$$

здесь $H_i(x)$ – ограниченные функции, а $u_i(t)$ — степени свободы.

При таком разложении по конечному набору базисных функций говорят, что решение ищется в базисном пространстве $\{H_i\}$. Например, если рассматривается одномерная задача на отрезке $[0, 1]$ и решение раскладывается по функциям

$$H_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right], \quad i = \overline{1, N-1}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

то говорят, что решение ищется в пространстве кусочно-постоянных функций.

Так как базисные функции заранее фиксированы, то неизвестными остаются только степени свободы. Для получения соотношений, описывающих их эволюцию, используют следствия исходного уравнения. В классическом методе Галеркина условие минимума невязки, возникающей при подстановке приближенного решения в дифференциальное уравнение, есть условие ортогональности невязки всем базисным функциям из выбранного подпространства базисных функций. В проекционных методах также часто рассматривается проекция невязки на некоторое пространство пробных функций. Пробные функции образуют свое, в общем случае не совпадающее с $\{H_i\}$, пространство. В зависимости от того, какие это пространства, различают отдельные методы: классический метод Галеркина, метод коллокаций, метод подобластей и другие. Более подробно о семействах МКЭ можно узнать из [2].

Другим классом методов являются методы конечных объемов. В их лежит использование интегральной формы уравнений в частных производных. При введении разбиения расчетной области на ячейки строится система дискретных уравнений, описывающих эволюцию некоторых "средних" величин по ячейке. На данный момент разработаны методы высоких порядков, которые адекватно решают сложные нелинейные задачи.

Разрывный метод Галеркина для решения уравнения транспорта нейтронов впервые опубликован в [3]. Он представляет собой метод конечных элементов с разрывными базисными функциями, для работы с которыми используются идеи методов конечных объемов.

Разрывный метод Галеркина приобрел популярность в последние двадцать лет. Были получены оценки погрешности метода, теоретически и практически исследована сходимость. Метод применялся для решения многомерных нелинейных задач. Разрывный метод Галеркина допускает расширение для решения задач параболического и эллиптического типа. Подробно метод описан в [4].

В данной главе описан RKDG-метод (Runge-Kutta Discontinuous Galerkin), в котором для решения получаемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для эволюции степеней свободы используется метод Рунге-Кутты.

2.2 Уравнение переноса

Продemonстрируем основные идеи построения разрывного метода Галеркина на примере решения линейного уравнения переноса. Рассмотрим уравнение переноса с постоянной скоростью $c > 0$

$$u_t + cu_x = 0. \quad (2.1)$$

Для этого уравнения рассматривается задача Коши, на всей действительной прямой задано начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2.2)$$

где $u_0(x)$ — известная функция.

Для упрощения выкладок сначала будем рассматривать задачу Коши (2.1)-(2.2), позднее добавим граничное условие. Точное решение задачи Коши есть

$$u(t, x) = u_0(x - ct). \quad (2.3)$$

Построим приближенное решение. Зафиксируем некоторый шаг h и введем равномерную сетку по пространству $x_n = nh$, $n \in \mathbb{Z}$, а также вспомогательные узлы $x_{n+1/2} = (n + 1/2)h$, $n \in \mathbb{Z}$. Численное решение будем искать в пространстве кусочно-постоянных на каждом интервале между вспомогательными узлами функций

$$u^h \in V^h = \{f(x) : f(x) \equiv C, x \in I_n = (x_{n-1/2}, x_{n+1/2})\}. \quad (2.4)$$

Отметим, что в данном случае численное решение задачи представляет собой уже не сеточную функцию, а функцию, принадлежащую некоторому конечномерному пространству. Эта функция определена на всей числовой оси (за исключением множества меры нуль — множества точек с полуцелыми индексами). Существует взаимнооднозначное соответствие между функциями пространства V^h и сеточными функциями u_n , $n \in \mathbb{Z}$:

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \leftrightarrow f(x) \in V^h : f(x)|_{x \in I_n} = u_n \quad (2.5)$$

В нашем случае численное решение полностью определяется значениями функции в некоторых точках (например, в серединах введенных интервалов — точках x_n). Параметры, которыми однозначно определяется численное решение, называются *степенями свободы*. Нашей целью является получение уравнений, описывающих эволюцию степеней свободы. После решения этих уравнений будет известен вид приближенного решения.

Функции, принадлежащие пространству V^h , допускают разрывы первого рода во вспомогательных узлах сетки. Учет начального условия в численном решении осуществляется по одной из следующих формул:

$$u_n^0 = \frac{1}{h} \int_{I_n} u_0(x) dx, \quad (2.6)$$

$$u_n^0 = u_0(x_n). \quad (2.7)$$

Выбор подходящей формулы (2.6) или (2.7) осуществляется в каждом случае индивидуально. Этот выбор зависит от того, чем по смыслу являются степени свободы. Если мы трактуем u_n как среднее значение на интервале I_n , то предпочтителен первый вариант. Если u_n рассматривается как значение в точке x_n , то предпочтительнее второй. С этим выбором тесно связан выбор нормы, в которой будут вычисляться невязки, и получаться условия устойчивости и сходимости. В первом случае выбирается норма L_1 , во втором — равномерная норма. Для определенности остановимся на первом варианте (читатель легко сможет построить аналогичный метод для второго случая).

Для этого проинтегрируем уравнение на каждом интервале I_n

$$\int_{I_n} u_t dx + \int_{I_n} (cu_x) dx = 0 \quad (2.8)$$

Во втором интеграле в (2.8) воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница, в первом — поменяем порядок интегрирования и дифференцирования. После этого обе части уравнения разделим на h . Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{h} \int_{I_n} u dx + \frac{1}{h} (cu) \Big|_{n-1/2}^{n+1/2} = 0 \quad (2.9)$$

Так как степени свободы при построении метода определены как $u_n = \frac{1}{h} \int_{I_n} u_0(x) dx$, то

(2.9) примет вид

$$\frac{du_n}{dt} + \frac{(cu^h)_{n+1/2} - (cu^h)_{n-1/2}}{h} = 0. \quad (2.10)$$

В выражения для степеней свободы (2.10) входит ровно столько неизвестных, сколько всего степеней свободы. Это следствие того, что интегрирование велось по каждому интервалу I_n . Выражения для потоков $(cu^h)_{n+1/2}$ и $(cu^h)_{n-1/2}$ не определены, поскольку решение в полужелтых точках терпит разрыв. Для аппроксимации воспользуемся функцией численного потока.

Функция численного потока была введена при построении методов конечных объемов [1]. В них она означает среднее значение функции потока через данную границу (в нашем случае через точку $x_{n+1/2}$) за некоторый промежуток времени $(t_k, t_k + \tau)$ (здесь t_k — слой по времени). В разрывном методе Галеркина функция потока определяется как

$$F_{n+1/2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} f(u(t, x_{n+1/2})) dt \right], \quad (2.11)$$

где $f(u)$ — функция потока (в нашем случае $f(u) = cu$). Определение (2.11) не противоречит (2.10) в силу предельного перехода

$$\frac{du_n}{dt} \overset{\Delta}{=} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u_n(t_k + \tau) - u_n(t_k)}{\tau}$$

В гиперболических задачах возмущения распространяются с конечными скоростями (для уравнения переноса скорость единственна и равна c), решение $u^h(t, x_{n+1/2})$ при $t \in (t_k, t_k + \tau)$ зависит только от $u^h(t_k, x)$, где $x \in [x_{n+1/2} - v\tau, x_{n+1/2} + v\tau]$, а v — максимальная по абсолютной величине скорость распространения возмущений в задаче. Так как в (2.11) шаг по времени может быть выбран сколь угодно малым, то

область зависимости степени свободы u^h , а следовательно и функции потока F должна быть сколь угодно мала. Она является малой окрестностью точки $x_{n+1/2}$. Из этого важного свойства вытекает условие на функцию численного потока:

$$F_{n+1/2} = F(u_{n+1/2}^-, u_{n+1/2}^+), \quad (2.12)$$

где $u_{n+1/2}^-$ и $u_{n+1/2}^+$ – пределы решения слева и справа в точке $x_{n+1/2}$.

В нашем случае на каждом интервале решение постоянно, $u_{n+1/2}^- = u_n$, $u_{n+1/2}^+ = u_{n+1}$. Следовательно функция потока есть функция от двух степеней свободы $F_{n+1/2} = F(u_n, u_{n+1})$. Поскольку скорость $c > 0$, то очевидно, что левое предельное значение будет переноситься вправо. Тогда по (2.11), функция потока будет вычислена как

$$F_{n+1/2} = cu_n \quad (2.13)$$

Более подробно о способах расчета функции численного потока (для более сложных случаев) можно прочитать в соответствующем пункте данной главы. Окончательно формула разрывного метода Галеркина для линейного уравнения переноса в дифференциально-разностном представлении примет вид

$$\frac{du_n}{dt} + \frac{cu_n - cu_{n-1}}{h} = 0. \quad (2.14)$$

Если в (2.14) заменить производную по времени на конечную разность и представить второе слагаемое на нижнем слое по времени, то (2.14) полностью совпадет со схемой «явный левый уголок» (схема против потока) и со схемой метода конечных объемов первого порядка, примененных к уравнению переноса. Этот результат верен только в простейшем случае, для более сложных уравнений и других пространств функции численного решения будут отличаться.

На Рис. 2.1 изображено численное решение уравнения переноса. Скорость переноса в данном случае $c = 1$. Выбран момент времени $T = 0.3$. Начальное условие задавалось функцией

Для корректной постановки задачи требуется задать граничное условие на левом конце отрезка интегрирования. Оно было задано в виде $u(0, t) = 2$. Система ОДУ для степеней свободы решалась методом Дормана–Принса 5(4) порядка с автоматическим выбором шага интегрирования.

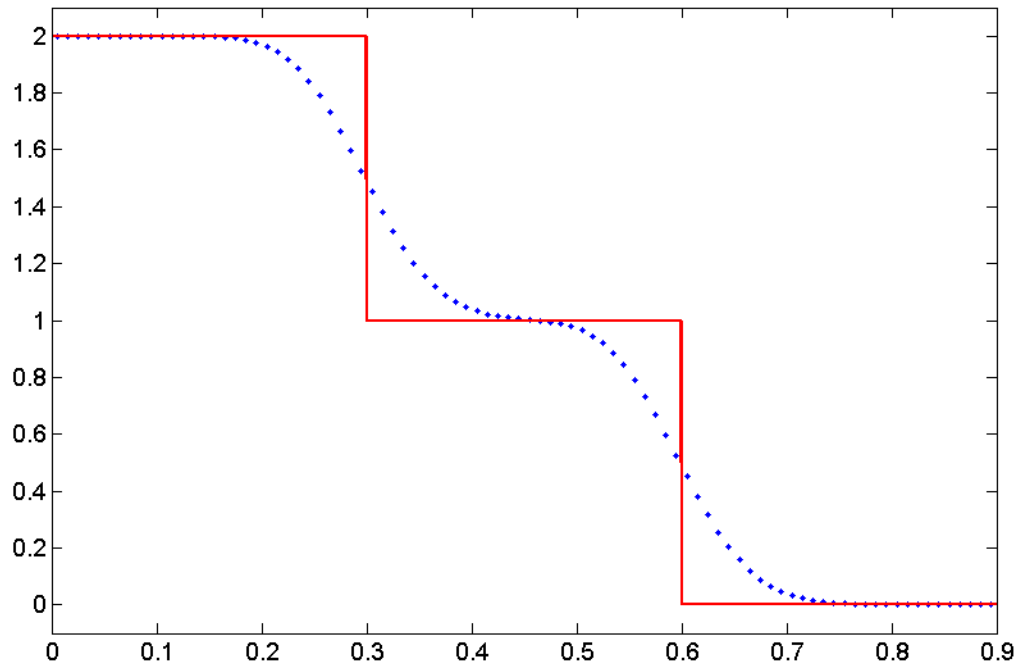


Рис. 2.1. Решение уравнения переноса в момент времени $T = 0.3$

На рисунке точное решение показано сплошной красной линией, а численное – синими точками. Как видно, схема демонстрирует сильное сглаживание разрывов, которое свойственно монотонным схемам первого порядка аппроксимации.

2.3 Задача Римана и метод волн Римана

При построении простейшего DGRK-алгоритма в пункте 2.2 возникла необходимость построения функции численного потока. Задача эффективного построения этой функции тесно связана с решением задачи Римана о распаде произвольного разрыва для уравнений газовой динамики. О задаче Римана более подробно [6].

Задачей Римана о распаде произвольного разрыва (ЗР) для гиперболического уравнения (системы) $\mathbf{L}u = f$ называют задачу Коши с разрывными начальными данными

$$u(0, x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Значение решения на начальном слое в точке 0 можно доопределить по непрерывности слева или справа.

Обычно под задачей Римана понимается задача об эволюции произвольного разрыва в газовой динамике. В этом случае решается система уравнений Эйлера. В линейном случае для решения задачи об эволюции произвольного разрыва лучше говорить о применении метода волн Римана для решения задачи. Нам будет интересно решение ЗР в точке $x = 0$, для которого введем обозначение

$$u^\downarrow(t) \triangleq u(t, 0). \quad (2.16)$$

Рассмотрим примеры использования решений ЗР в некоторых случаях.

2.3.1 Линейные системы уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеется ЗР для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, разрешенной относительно производных по времени

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0,$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Поскольку система гиперболическая, у матрицы \mathbf{A} имеется полная система из собственных векторов. Это значит, что можно составить матрицу \mathbf{L} из левых и матрицу \mathbf{R} из правых собственных векторов (при этом собственные вектора – строки \mathbf{L} и столбцы \mathbf{R} соответственно). По определению собственных векторов выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}, \quad \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}, \quad (2.18)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ — диагональная матрица из собственных чисел, причем будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Далее везде будем полагать, что все собственные векторы нормированы и имеют единичную длину.

Приведем систему (2.17) к инвариантам Римана [6], умножив ее слева на матрицу \mathbf{L}

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}\mathbf{u}_x = 0 \quad (2.19)$$

Так как матрица $\mathbf{\Lambda}$ диагональная, то переменные в системе (2.19) разделились, каждое уравнение можно решать отдельно. Такое уравнение представляет собой уравнение переноса $(w_i)_t + \lambda_i (w_i)_x = 0$ с начальными условиями

$$w_i(0, x) = \begin{cases} \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases}, \quad (2.20)$$

где $w_i \triangleq \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{u}$; \mathbf{l}_i — строка матрицы \mathbf{L} (левый собственный вектор).

Решением уравнений (2.20) является функция $w_i(t, x) = w_i(0, x - \lambda_i t)$. Решение представляет собой движущийся со скоростью λ_i разрыв, который первоначально находился в точке $x = 0$. Для того, чтобы найти решение в естественных переменных, необходимо решить систему линейных уравнений в каждой точке расчетной области

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ — вектор инвариантов Римана.

При нормировке собственных векторов для задачи акустики можно показать, что $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}$. Тогда из (2.21) следует

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{w} \quad (2.22)$$

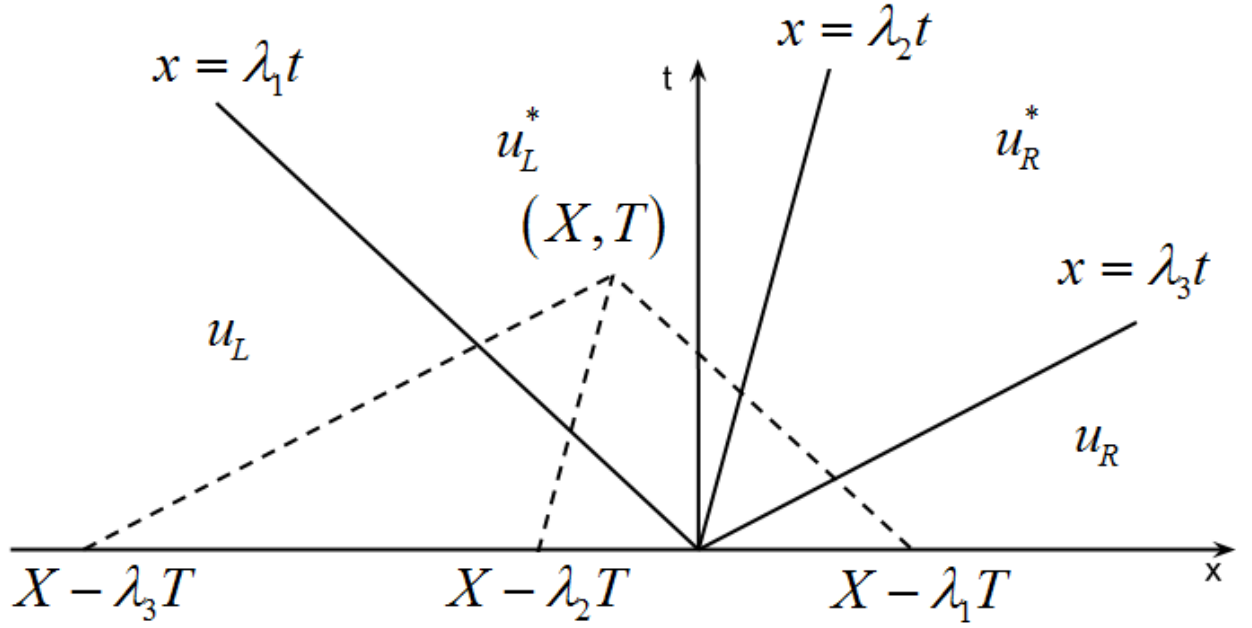


Рис. 2.2. Решение задачи Римана

Схема решения ЗР для случая системы из трех уравнений представлена на Рис. 2.2. Область, в которой решается задача, делится на подобласти. В них решение постоянно. Границы этих подобластей – характеристики $x = \lambda_i t$, выходящие из начала координат. При переходе через характеристику соответствующий инвариант Римана терпит разрыв. Следовательно, решение в естественных переменных также терпит разрыв на правый собственный вектор.

Начальный разрыв $\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L$ раскладывается по правым собственным векторам

$$\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = \sum_i \alpha_i \mathbf{r}_i = \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.23)$$

причем возмущения $\alpha_i \mathbf{r}_i$ распространяются от начала координат со скоростями λ_i .

Коэффициенты α_i можно найти из (2.23). Таким образом, можно восстановить $\mathbf{u}^\downarrow(t)$

$$\mathbf{u}^\downarrow(t) = \mathbf{u}_L + \sum_{i: \lambda_i < 0} \alpha_i \mathbf{r}_i = \mathbf{u}_R - \sum_{i: \lambda_i > 0} \alpha_i \mathbf{r}_i. \quad (2.24)$$

Среднее значение численного потока в точке $x=0$ будет

$$\mathbf{F}^\downarrow = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{A} \mathbf{u}(t, 0) dx = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{A} \mathbf{u}^\downarrow(t) dx = \mathbf{A} \left(\mathbf{u}_L + \sum_{i: \lambda_i < 0} \alpha_i \mathbf{r}_i \right) \quad (2.25)$$

Несложными преобразованиями (2.25) с учетом (2.23) и (2.18) можно привести к виду

$$\mathbf{F}^\downarrow = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + |\mathbf{A}|) \mathbf{u}_L + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - |\mathbf{A}|) \mathbf{u}_R, \quad (2.26)$$

где $|\mathbf{A}| = \mathbf{R} |\boldsymbol{\Lambda}| \mathbf{R}^{-1}$, $|\boldsymbol{\Lambda}| = \text{diag} \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n| \}$.

2.3.2 Линейные системы уравнений с переменными коэффициентами

Рассмотрим теперь применение метода Римана для системы уравнений $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x) \mathbf{u}_x = 0$ с условиями

$$\mathbf{u}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{cases} \mathbf{A}_L, & x < 0 \\ \mathbf{A}_R, & x > 0 \end{cases}, \quad (2.27)$$

Отличие этой системы от (2.17) заключается в том, что матрица $\mathbf{A}(x)$ является матричной функцией независимых переменных. Без ограничения общности рассмотрим лишь случай, когда явная зависимость матричного коэффициента отсутствует.

У матрицы \mathbf{A} имеется полная система собственных векторов. Эти собственные векторы и соответствующие им собственные числа различны для левой и правой полуплоскостей. Можно построить пары матриц правых собственных векторов $\mathbf{R}_L, \mathbf{R}_R$ и соответствующие диагональные матрицы $\mathbf{\Lambda}_L, \mathbf{\Lambda}_R$.

Решение задачи Коши будет выглядеть как серия разрывов (Рис. 2.2), но слева от нуля эти решения будут претерпевать разрывы вдоль собственных векторов матрицы системы \mathbf{A}_L , а справа — \mathbf{A}_R . Тогда (2.23) запишется в виде

$$\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = \mathbf{R}\alpha, \quad (2.28)$$

где матрица $\mathbf{R} = \left(\left\{ \mathbf{r}_i^{(L)} \right\}_{i:\lambda_i^{(L)} > 0}, \left\{ \mathbf{r}_i^{(R)} \right\}_{i:\lambda_i^{(R)} < 0} \right)$. Матрица \mathbf{R} составлена из собственных векторов левой области, для которых собственные числа больше нуля, и векторов правой области, для которых собственные числа меньше нуля.

Для произвольной системы в частных производных гиперболического типа при определении коэффициентов разложения может возникнуть переопределенная или недоопределенная СЛАУ. Действительно, пусть матрицы системы имеет размер 3×3 , причем в левой части — 1 собственное число отрицательное и два — положительных, а в правой — наоборот. Тогда в СЛАУ (2.28) будет три уравнения для определения четырех параметров α . Если поменять знаки собственных чисел, то таких параметров будет всего два. Такие случаи описывают специфическое поведение системы уравнений на границе (например, переход от дозвукового течения газа к сверхзвуковому) и требуют постановки дополнительных условий, например условий разрешимости. Они применяются для того, чтобы уменьшить количество переменных или дополнительных условий на границе и восстановить однозначно решение. Для линейных систем гиперболического типа такие задачи не актуальны. Считаем, что количество положительных и отрицательных собственных чисел слева и справа от границы одинаково.

Решая (2.28), находим, что

$$\alpha = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) \quad (2.29)$$

Решение ЗР можно найти, используя (2.24), которые в данном случае примут вид

$$\mathbf{u}^\downarrow(t) = \mathbf{u}_L + \sum_{i:\lambda_i^{(L)} < 0} \alpha_i \mathbf{r}_i^{(L)} = \mathbf{u}_R - \sum_{i:\lambda_i^{(R)} > 0} \alpha_i \mathbf{r}_i^{(R)} \quad (2.30)$$

Используя выражения для потока слева и справа ($\mathbf{F}_L^\downarrow = \mathbf{A}_L \mathbf{u}^\downarrow, \mathbf{F}_R^\downarrow = \mathbf{A}_R \mathbf{u}^\downarrow$), после преобразований получаются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L^\downarrow &= \left(\mathbf{A}_L - \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}_L - |\mathbf{\Lambda}_L|) \mathbf{R}^{-1} \right) \mathbf{u}_L - \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}_L - |\mathbf{\Lambda}_L|) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_R, \\ \mathbf{F}_R^\downarrow &= -\frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}_R - |\mathbf{\Lambda}_R|) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_L + \left(\mathbf{A}_R - \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}_R + |\mathbf{\Lambda}_R|) \mathbf{R}^{-1} \right) \mathbf{u}_R. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3.3 Граничные условия

Выше везде полагалось, что уравнения справедливы во всем пространстве, следовательно решение остается непрерывным при переходе через границу $x = 0$. В таком случае говорят, что поставлены условия непрерывности решения, которые вполне соответствуют неконсервативной форме уравнений.

Если гиперболическая система является следствием каких-либо законов сохранения, то в уравнениях вместо слагаемого $\mathbf{A}\mathbf{u}_x$ стоит дивергенция потока. В линейном одномерном случае такое слагаемое можно представить в виде $(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u})_x$. На границе неявно задано условие непрерывности потока $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}$. Если в уравнениях матрица \mathbf{A} постоянная, то учет этого условия не играет роли – матрицу можно просто вынести за знак дифференцирования. В случае систем с переменными коэффициентами, характер решения такого уравнения изменяется.

Иногда на границе раздела возникают дополнительные условия, которые не описываются в терминах непрерывности потока или решения. Они возникают в случае, когда на границе области уравнения не выполняются и являются условиями связи решений по обе стороны от границы. Примером могут служить условия проскальзывания для уравнений упругости (Ламе). Эти условия таковы: $[\mathbf{v}_x] = 0$, $[\sigma_{xx}] = 0$, $(\sigma_{xy})_L = (\sigma_{xy})_R = 0$. Здесь квадратные скобки означают скачок величины, σ — компоненты тензора деформации. Такие дополнительные условия возникают и в случае, когда изменяется количество положительных и отрицательных характеристик при переходе через границу.

Учет дополнительных условий может быть аккуратно выполнен при конструировании алгоритма решения задачи, а именно:

1. Решение ЗР представим в виде набора разрывов, распространяющихся вдоль соответствующих характеристик (при этом слева и справа от начального разрыва параметры среды могут быть различны). Амплитуды разрывов являются неизвестными $\mathbf{a} = (\alpha_L, \alpha_R)$
2. Считая амплитуды известными, находим решения u^- и u^+ вблизи разрыва.
3. Подбираем амплитуды разрывов таким образом, чтобы удовлетворить условиям на разрыве. В случае, если эта задача не имеет единственного решения заключаем, что задача некорректно поставлена.
4. После того, как амплитуды скачков найдены можно восстановить решение, по которому находятся потоки слева и справа от разрыва.

2.4 Построение расчетного алгоритма

В данном пункте мы применим разрывный метод Галеркина для решения задачи акустики.

Напомним, как выглядит система уравнений (1.1):

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x + \mathbf{B}\mathbf{q}_y = 0, \quad (2.32)$$

где $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ρ — плотность среды, K — модуль упругости.

При этом показано, что данная система является гиперболической, а также была получена система собственных векторов в направлении $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$. Матрицы правых собственных векторов и собственных значений системы, после перехода к инвариантам Римана выглядят следующим образом:

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} -Z & 0 & Z \\ n_x & n_y & n_x \\ n_y & n_x & n_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

где $Z = \sqrt{K\rho}$, $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$.

В области интегрирования Ω построим структурированную прямоугольную сетку, состоящую из прямоугольников $\{R^{(p)}\}$, образующую нормальное разбиение. Такая сетка выбрана для упрощения изложения материала, алгоритм допускает использование неструктурированных сеток. Приближенное решение будем искать в пространстве функций, которые являются полиномами степени не выше k в каждом прямоугольнике:

$$V_h = V_h^k = \left\{ f \in L^1 : f|_{R^{(p)}} \in P^k(R^{(p)}) \right\}, \quad (2.34)$$

где $P^k(R^{(p)})$ - пространство полиномов относительно двух переменных не выше k -ой степени, с носителем (областью, где функция принимает ненулевые значения) — прямоугольником $R^{(p)}$. Размерность такого пространства равна $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Как и в одномерном случае, допускаются разрывы численного решения на границах сеточных прямоугольников (элементов разбиения).

Тогда численное решение можно представить в виде:

$$\mathbf{q}_h^{(p)} = H_l(x, y) \mathbf{q}_l^{(p)}(t), \quad (2.35)$$

где H_l - базисные функции в пространстве $P^k(R^{(p)})$, а $q_l^{(p)}(t)$ - коэффициенты в разложении численного решения по базисным функциям. Будем называть $q_l^{(p)}(t)$ степенями свободы. Чтобы восстановить численное решение необходимо вычислить именно эти функции.

Для этого умножим уравнения системы (2.32) на базисную функцию H_k и проинтегрируем по прямоугольнику $R^{(p)}$. В результате получим соотношение:

$$\int_{R^{(p)}} H_k \mathbf{q}_t dx dy + \int_{R^{(p)}} \mathbf{A} H_k \mathbf{q}_x dx dy + \int_{R^{(p)}} \mathbf{B} H_k \mathbf{q}_y dx dy = 0 \quad (2.36)$$

Проинтегрировав по частям второе и третье слагаемые, получаем

$$\int_{R^{(p)}} H_k \mathbf{q}_t dx dy + \int_{\partial R^{(p)}} H_k \mathbf{F}^h dl - \int_{R^{(p)}} \left[(H_k)_x \mathbf{A} \mathbf{q} + (H_k)_y \mathbf{B} \mathbf{q} \right] dx dy = 0 \quad (2.37)$$

В (2.37) был введен численный поток \mathbf{F}^h при интегрировании по границе прямоугольника $R^{(p)}$, поскольку решение на границе может быть разрывным (аналогично одномерному случаю). В общем случае вычисление потока трудоемкая задача, поскольку для этого необходимо решить задачу эволюции двумерной системы при начальных условиях — полиномиальных функциях — в каждом прямоугольнике. И если для простых систем уравнений можно построить точное решение, то для более сложных, а тем более нелинейных, это невозможно.

Возникает идея приближенного решения ЗР для получения значения численного потока. Поэтому для нахождения функции численного потока $F^h(x, y)$ будем считать, что все пространство разбито прямой — касательной к границе $\partial R^{(p)}$ в точке (x, y) — на две полуплоскости, причем начальные значения по обе стороны прямой постоянны и

совпадают с пределами решения в граничной точке. Можно показать, что при решении такой приближенной ЗР будет получен численный поток, отличающийся от точного значения на величину порядка $O(h)$, где h - мелкость сетки. На этом пути невозможно построить метод выше первого порядка аппроксимации, однако реальная скорость сходимости такого метода может быть достаточно высокой.

Как и в одномерном случае, после дискретизации по пространству будет получена система ОДУ для степеней свободы $q_l^{(p)}(t)$. Эта система ОДУ будет решаться с шагом τ , который обязан удовлетворять условию Куранта $\frac{c\tau}{h} \leq 1$. Таким образом, за время τ до

точки границы не могут дойти возмущения от прямоугольных ячеек, удаленных от этой границы. Более того, чем меньше шаг τ , тем меньше область начальных условий, которая влияет на решение на границе и, как следствие, численный поток. Это означает, что наиболее важным являются значение численного решения в данной точке границы.

Поскольку мы предполагаем инвариантность системы (2.32) относительно поворотов системы координат (СК), то численный поток может быть вычислен в системе координат - Oxy , ось Ox которой сонаправлена с внешней нормалью к границе. Преобразование, которое описывает заданный поворот будет:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_n \mathbf{q}^n, \quad (2.38)$$

где \mathbf{q}^n - вектор переменных в СК, выровненной относительно границы. Для системы уравнений акустики имеем:

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Таким образом, пользуясь упрощенной постановкой ЗР и поворотами СК, можно выписать замкнутую формулу для численного потока:

$$\mathbf{F}^h = \frac{1}{2} \mathbf{T}_n (\mathbf{A} + |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_n)^{-1} \mathbf{q}_l^{(p)} H_l^{(p)} + \frac{1}{2} \mathbf{T}_n (\mathbf{A} - |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_n)^{-1} \mathbf{q}_l^{(p_j)} H_l^{(p_j)}, \quad (2.40)$$

где величины $\mathbf{q}_l^{(p)} H_l^{(p)}$ и $\mathbf{q}_l^{(p_j)} H_l^{(p_j)}$ - предельные значения решения внутри и снаружи прямоугольника $R^{(p)}$.

Формула (2.40) верна в случае, когда параметры среды в прямоугольнике $R^{(p_j)}$ и его соседе $R^{(p_{j+1})}$ совпадают. В более сложных случаях необходимо применять технику, описанную в 2.3.2 и 2.3.3.

Подставляя выражение (2.40) в (2.37), получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{R^{(p)}} H_k H_l dx dy \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}_l^{(p)} + \\ & + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} \mathbf{T}_{n_j} (\mathbf{A} + |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_{n_j})^{-1} \mathbf{q}_l^{(p)} \int_{(\partial R^{(p)})_j} H_k^{(p)} H_l^{(p)} dl + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \mathbf{T}_{n_j} (\mathbf{A} - |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_{n_j})^{-1} \mathbf{q}_l^{(p_j)} \int_{(\partial R^{(p)})_j} H_k^{(p)} H_l^{(p_j)} dl - \\ & - \mathbf{A} \mathbf{q}_l^{(p)} \int_{R^{(p)}} H_l \frac{\partial}{\partial x} H_k dx dy - \mathbf{B} \mathbf{q}_l^{(p)} \int_{R^{(p)}} H_l \frac{\partial}{\partial y} H_k dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Проведем небольшой анализ данной системы. Во-первых, построенная система ОДУ относительно степеней свободы $\mathbf{q}_l^{(p)}$ – система первого порядка с массовой матрицей $M_{kl} \int_{R^{(p)}} H_k H_l dx dy$ размера $\left| \{R^{(p)}\} \right| \times \left| P^k(R^{(p)}) \right|$. Из (2.41) следует, что уравнения

группируются по прямоугольникам $R^{(p)}$, при этом нет связи между группами на уровне производных. Это означает, что в каждой группе уравнений можно независимо обращаться с массовой матрицей M_{kl} и привести систему к виду, разрешенному относительно старших производных (нормальному виду Коши).

Во-вторых, построенный метод практически не зависит от введенного разбиения плоскости. Все формулы остаются верными при других разбиениях плоскости с точностью до числа соседей у элемента.

В-третьих, в алгоритме используются интегралы от произведений базисных функций и их производных. Все эти интегралы можно точно вычислить один раз и не вычислять на каждом шаге интегрирования системы.

В-четвертых, полученную систему ОДУ можно решать любым методом с автоматическим контролем точности (либо методом с постоянным шагом, удовлетворяющим условию Куранта). Обычно пользуются методами невысокого порядка, поскольку было произведено огрубление порядка $O(h)$ при построении численного потока.

2.5 Граничные условия

Метод Римана является универсальным механизмом для учета всевозможных условий на внутренних границах в области интегрирования. В пункте 2.3.3 был описан алгоритм для учета граничных условий в численном методе. Воспользуемся им для корректной обработки двух типов граничных условий.

2.5.1 Свободная граница

Граничное условие типа «Свободная граница» означает, что на данную поверхность не действует внешняя (нормальная) сила. Для уравнений акустики это означает, что давление на границе должно равняться нулю

$$p|_{\Gamma} = 0. \quad (2.42)$$

Построим решение задачи Римана (ЗР) с данным условием.

Для учета граничного условия ЗР решается не на всей плоскости (x, t) , а только в полуплоскости. Это связано с тем, что другая часть не входит в расчетную область (см. Рис. 2.3).

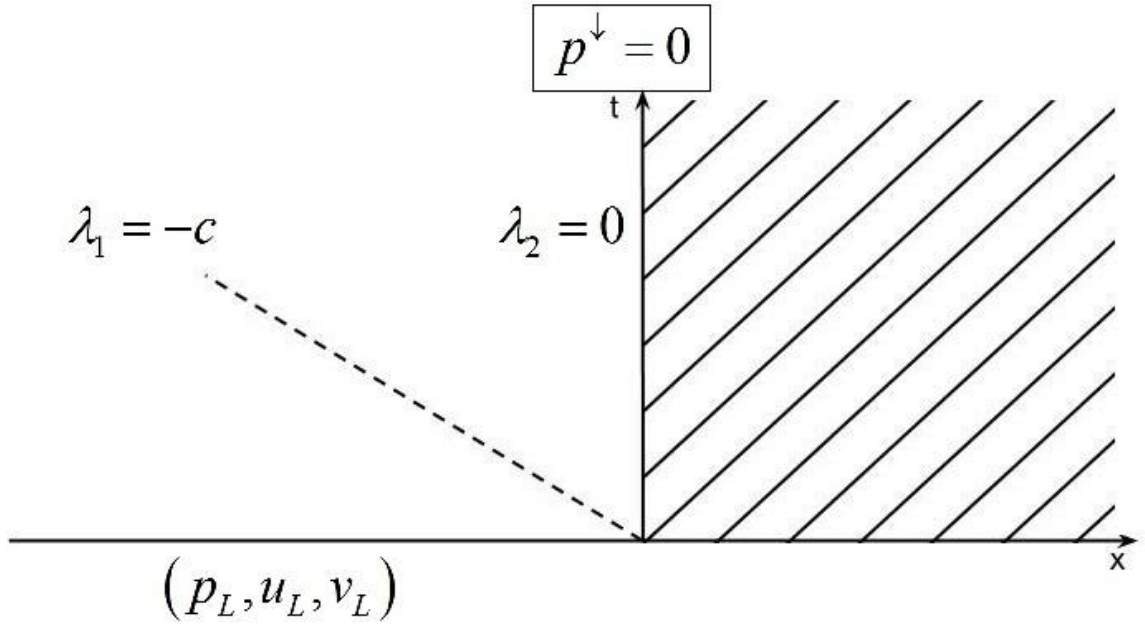


Рис. 2.3. Задача Римана для граничного условия типа "Свободная граница"

Для задачи акустики есть всего два инварианта Римана, которые могут распространяться в левой полуплоскости. Они соответствуют собственным числам $\lambda_1 = -c$, $\lambda_2 = 0$ и правым собственным векторам

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -Z \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Припишем этим правым собственным векторам неизвестные веса α и β и найдем значение решения на границе

$$\mathbf{q}^\downarrow = \mathbf{q}_L + \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} p_L - \alpha Z \\ u_L + \alpha \\ v_L + \beta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Попробуем удовлетворить условиям на границе:

$$p = 0 \Leftrightarrow p_L - \alpha Z = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{p_L}{Z} \quad (2.45)$$

При этом неопределенным остался коэффициент β . В общем случае неоднозначность решения ЗР является проблемой, поскольку при этом функция численного потока также не определяется единственным образом. Однако неопределенным остался коэффициент при инварианте Римана, который соответствует нулевому собственному числу, а значит

$$\mathbf{F}_{Free} = \mathbf{A}_L \mathbf{q}^\downarrow = \mathbf{A}(\mathbf{q}_L + \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2) = \mathbf{A} \mathbf{q}_L - \alpha c \mathbf{r}_1 + 0 \cdot \beta \mathbf{r}_2 \quad (2.46)$$

Или если преобразовать (2.46)

$$\mathbf{F}_{Free} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_L \\ u_L \\ v_L \end{bmatrix} - \frac{p_L}{Z} c \begin{bmatrix} -Z \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ku_L + p_L c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Функция потока восстанавливается однозначно. В общем случае подобные неоднозначности при корректной постановке граничных условий возникают, если в системе есть нулевые собственные числа. Такие характеристики порождают стационарные

разрывы решения. Но эти стационарные разрывы не влияют на величину потока и могут не учитываться.

2.5.2 Открытая граница

Условие открытой границы является более сложным по смыслу. Они означают, что извне не должны приходить возмущения в область расчета, а те волны, которые выходят за границу, не должны от нее отражаться. Теория неотражающих граничных условий является отдельной частью вычислительной математики. Для данной задачи мы приведем простой способ постановки таких условий, дающий удовлетворительные результаты.

Рассмотрим численный поток, выведенный в формуле (2.40). Заметим, что он состоит из двух частей. Первая зависит только от волн, идущих к границе из рассматриваемого элемента (т.е. вправо в повернутой системе координат), а вторая - от волн, которые идут к границе от соседнего элемента. Если мы не хотим учитывать приходящие извне волны, нужно приравнять нулю вторую часть потока. Тогда поток может быть представлен в виде

$$F_{Open} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_n (\mathbf{A} + |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_n)^{-1} \mathbf{q}_l^{(p)} H_l^{(p)} \quad (2.48)$$

Формула (2.48) верна в том случае, когда задача записана в терминах возмущений, или, другими словами «тождественный ноль является подходящим решением задачи с нулевыми начальными условиями». Это не всегда так. Часто возникают задачи, в которых требуется учитывать тот факт, что система помещена во внешнее поле силы тяжести, а, значит, под собственным весом изменяется стационарное значение давления. Это приводит к тому, что задача решается не в терминах возмущений, но в терминах абсолютных значений величин (важно в нелинейных задачах). В таких случаях (2.48) преобразуется к виду

$$\mathbf{F}^h = \frac{1}{2} \mathbf{T}_n (\mathbf{A} + |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_n)^{-1} \mathbf{q}_l^{(p)} H_l^{(p)} + \frac{1}{2} \mathbf{T}_n (\mathbf{A} - |\mathbf{A}|) (\mathbf{T}_n)^{-1} \mathbf{Q}_s, \quad (2.49),$$

где \mathbf{Q}_s - стационарное значение параметров задачи в данной точке (на данном граничном ребре). Эта формула аналогична (2.40), с фиксированным значением решения извне. [Equation Section \(Next\)](#)

3 Решение уравнений акустики конечно-разностными методами

3.1 Численное интегрирование уравнений акустики внутри расчетной области

В данном разделе рассмотрим алгоритмы численного решения поставленной задачи с использованием конечно разностных методов.

Будем рассматривать линейное уравнение акустики с постоянными коэффициентами. Рассмотрим исходную систему уравнений (1.1):

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A} \mathbf{q}_x + \mathbf{B} \mathbf{q}_y = 0,$$

где $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ρ — плотность среды, K — модуль упругости.

Все параметры среды постоянны во всей области интегрирования.

В область интегрирования вводится равномерная прямоугольной сетки с постоянными шагами h_x и h_y по каждой оси. При решении многомерных задач математической физики часто строятся локально-одномерные разностные схемы (метод покоординатного расщепления). В литературе известно большое количество разных методов расщепления по пространственным переменным с разными свойствами. Для численного интегрирования уравнений акустики в двумерной области будем применять следующий метод расщепления по пространственным координатам. Введем два произвольных действительных параметра следующим образом

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{q}_t + \frac{\alpha_1}{\alpha_1} \mathbf{A} \mathbf{q}_x + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} \mathbf{B} \mathbf{q}_y = 0,$$

$$0 < \alpha_{1,2} < 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 h_x = \alpha_2 h_y.$$

$$\text{Перепишем схему в следующем виде: } \alpha_1 \left(\mathbf{q}_t + \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{A} \mathbf{q}_x \right) + \alpha_2 \left(\mathbf{q}_t + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{B} \mathbf{q}_y \right) = 0.$$

В каждой скобке стоит линейная система уравнений. Легко проверить, что для каждой скобки в отдельности сохраняются свойства гиперболичности (наличие действительных собственных чисел матрицы и собственных векторов).

Разобьем формально задачу на две независимых задачи

$$\mathbf{q}_{1t} + \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{A} \mathbf{q}_{1x} = 0, \quad \mathbf{q}_{2t} + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{B} \mathbf{q}_{2y} = 0.$$

Каждая задача зависит только от одной пространственной переменной. Эти задачи можно решать одновременно, может быть, на разных исполнителях. Затем восстанавливается значение $\mathbf{q} = \alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2$.

Непосредственно проверяется, что у матрицы \mathbf{A} имеется полная система из собственных векторов. Это означает, что можно составить матрицу \mathbf{L} левых и матрицу \mathbf{R} правых собственных векторов.

Приведем одномерную систему к инвариантам Римана, умножив уравнения слева на матрицу левых собственных векторов

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t + \mathbf{L} \mathbf{w}_x = 0, \\ \mathbf{w} = \mathbf{L} \mathbf{q}. \end{cases}$$

$$\text{здесь } \mathbf{L} = \frac{1}{\alpha_1} \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad - \text{ скорость звука в среде, } \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T \quad - \text{ вектор}$$

инвариантов Римана.

Получаем запись исходной системы уравнений в инвариантах Римана. Поскольку матрица \mathbf{L} в данной системе диагональная, то полученная система уравнений состоит из трех независимых уравнений переноса. Их можно решать независимо, используя любую из конечно-разностных схем.

После того, как все уравнения переноса решены, нам необходимо найти решение в естественных переменных, для этого умножим вектор из инвариантов Римана на матрицу \mathbf{R} , учитывая что $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}$:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \mathbf{w}$$

Опишем алгоритм для программной реализации, основываясь на описанных методах:

1. Решаем одномерную гиперболическую задачу, зависящую только от переменной x . Матрицы правых и левых собственных векторов будут иметь вид

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} -Z & 0 & Z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1/Z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1/Z & 1 & 0 \end{bmatrix}, Z = \sqrt{K\rho}$$

2. Переходим к инвариантам Римана и решаем независимо набор линейных уравнений переноса.

3. На основе решения в инвариантах Римана, полученного на шаге 2 алгоритма, получаем решения на первом шаге расщепления, $\mathbf{q}_A^{n+1} = \mathbf{R}_x \mathbf{w}^{n+1}$.

4. Повторяем шаги 1-3, решаем одномерную гиперболическую задачу, зависящую только от переменной y . Матрицы левых и правых векторов:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} -Z & 0 & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1/Z & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/Z & 0 & 1 \end{bmatrix}, Z = \sqrt{K\rho}, \mathbf{q}_B^{n+1} = \mathbf{R}_y \mathbf{w}^{n+1}$$

5. На основе полученных решений \mathbf{q}_A^{n+1} и \mathbf{q}_B^{n+1} восстанавливаем исходное решение \mathbf{q}^{n+1} , $\mathbf{q}^{n+1} = \alpha_1 \mathbf{q}_A^{n+1} + \alpha_2 \mathbf{q}_B^{n+1}$.

6. Переходим к следующему шагу расчёта по времени

3.2 Учет граничных условий

Приведенный выше алгоритм позволяет находить решение во внутренних точках области. Для этого случая все характеристики, выходящие из расчетного узла, на следующем временном слое остаются лежать в области интегрирования. В граничных узлах ситуация иная. Одна характеристика выходит из расчетной области.

В таком случае необходимо использовать граничные условия. Учет граничных условий осуществляется практически одинаково для всех границ. Рассмотрим переход от инварианта Римана к естественным переменным в граничном узле

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{R} \mathbf{w}^{n+1} = \sum_i w_i^{n+1} \mathbf{r}_i, \quad (3.1)$$

где \mathbf{r}_i - i -й столбец матрицы \mathbf{R} . Разобьем (3.1) на две части. Для первого слагаемого характеристики остаются внутри расчетной области - λ^{in} . У второго характеристики из расчетной области не выходят - λ^{out} .

$$\mathbf{q}^{n+1} = \sum_i w_i \mathbf{r}_i = \sum_{i \in \lambda^{in}} w_i \mathbf{r}_i + \sum_{i \in \lambda^{out}} w_i^{n+1} \mathbf{r}_i = \sum_{i \in \lambda^{in}} w_i^{n+1} \mathbf{r}_i + \mathbf{R}^{out} \mathbf{w}^{out} = \mathbf{q}^{in} + \mathbf{R}^{out} \mathbf{w}^{out},$$

здесь \mathbf{R}^{out} - прямоугольная матрица, составленная из собственных векторов, соответствующих характеристикам, которые выходят за область интегрирования. Вектор \mathbf{w}^{out} - вектор, составленный из компонент вектора инварианта Римана. Вектор \mathbf{q}^{in} может быть рассчитан при решении уравнения переноса. Осталось только найти \mathbf{w}^{out} .

Граничное условие может быть представлено в общем виде

$$\mathbf{C} \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{b}$$

где \mathbf{C} - прямоугольная матрица, а \mathbf{b} - известный вектор. Для свободной границы $\mathbf{C} \mathbf{q}^{n+1} = p \mathbf{n}$, $p = 0$, \mathbf{n} - вектор нормали к границе. Подставив \mathbf{q}^{n+1} , вычисленный по формулам (3.1), получим $\mathbf{C}(\mathbf{q}^{in} + \mathbf{R}^{out} \mathbf{w}^{out}) = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{w}^{out} = -(\mathbf{C} \mathbf{R}^{out})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{q}^{in}$. С учетом полученного значения выходных инвариантов Римана и следствий (3.1), получим $\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^{in} - \mathbf{R}^{out} (\mathbf{C} \mathbf{R}^{out})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{q}^{in} = \mathbf{q}^{in} - \mathbf{R}^{out} (\mathbf{C} \mathbf{R}^{out})^{-1} p^{in} \mathbf{n}$.

Отсюда в зависимости от шага расщепления и направления нормали к границе можно найти выражения для граничных значений. Рассмотрим уравнения, зависящие от переменной x . Подставив в уравнение соответствующие собственные векторы и с учетом того, что направление нормали к границе совпадает с координатной осью, получим:

$$\begin{cases} p^{n+1} = 0 \\ u^{n+1} = u^{in} \mp p^{in} / (K\rho) \\ v^{n+1} = v^{in} \end{cases} \quad (3.2)$$

Аналогично при расщеплении по другому направлению

$$\begin{cases} p^{n+1} = 0 \\ u^{n+1} = u^{in} \\ v^{n+1} = v^{in} \mp p^{in} / (K\rho) \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь знак «-» относится к левой границе интегрирования, а знак «+» к правой.

В случае неотражающих граничных условий необходимо, чтобы значения тех инвариантов Римана, которые переносятся вдоль характеристик, выходящих из области интегрирования, не учитывались. В этом случае соответствующая компонента инварианта Римана не меняется.

Опишем алгоритм для программной реализации в граничных узлах:

1. В случае свободной границы в граничных узлах производим расчет только вдоль тех характеристик, которые входят в область интегрирования, а затем корректируем по формулам (3.2), (3.3).
2. В случае неотражающих граничных условий учитываются только те компоненты инвариантов Римана, которые сохраняются вдоль входящих в область характеристик. Остальные значения инвариантов Римана оставляем без изменения.
3. Переходим к расчету следующего шага.

3.3 Разностная схема для простейшего уравнения переноса

Рассмотрим вначале простейшее из уравнений гиперболического типа - однородное линейное уравнение переноса

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = u^1(t). \quad (3.4)$$

Как известно, его решение для произвольной точки (t, x) есть

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^0(x - \lambda t) = u_*, \quad \text{if } x - \lambda t \geq 0 \\ u(t, x) &= u^1(t - x/\lambda) = u_*, \quad \text{if } x - \lambda t < 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

т.е. u постоянно вдоль характеристики $dx = \lambda dt$. В плоскости (t, x) введем равномерную разностную сетку $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_m = mh$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

с пространственным шагом h и временным шагом τ . Обозначая $0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1$ и используя явный сеточный шаблон $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, (Рис. 3.1) запишем все линейные разностные схемы с неопределенными коэффициентами $\alpha_{-2}^0, \alpha_{-1}^0, \alpha_0^0, \alpha_1^0$ на этом шаблоне в виде

$$u_m^{n+1} = \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_1^0 u_{m+1}^n. \quad (3.6)$$

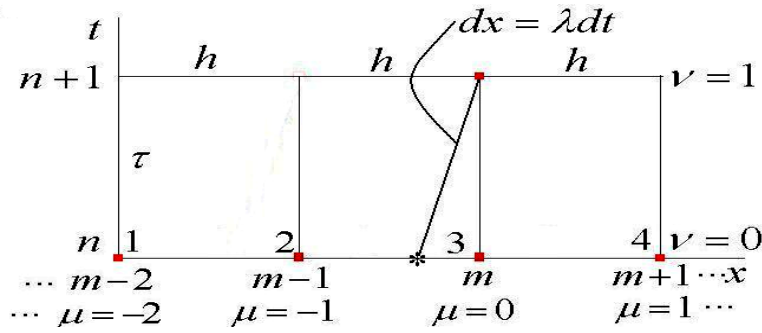


Рис. 3.1. Используемый на (t, x) плоскости явный сеточный шаблон.

Условиями аппроксимации первого (3.7), второго (3.7)-(3.8) и третьего порядка (3.7)-(3.9) будут линейные относительно неопределенных коэффициентов уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 = 1 \\ 2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma \end{cases} \quad (3.7)$$

$$4\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 = \sigma^2 \quad (3.8)$$

$$8\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma^3 \quad (3.9)$$

Эти условия можно легко получить, если разложить все значения функции u в выражении (3.6) в ряд Тейлора относительно любой из точек нашего сеточного шаблона, например (t^n, x_m) :

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n + \tau(u_t)_m^n + \frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_m^n + \frac{\tau^3}{6}(u_{ttt})_m^n + O(\tau^4) \\ \alpha_1^0 u_{m+1}^n = \alpha_1^0 \left(u_m^n + h(u_x)_m^n + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_m^n + \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right) \\ \alpha_0^0 u_m^n = \alpha_0^0 u_m^n \\ \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n = \alpha_{-1}^0 \left(u_m^n - h(u_x)_m^n + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_m^n - \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right) \\ \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n = \alpha_{-2}^0 \left(u_m^n - 2h(u_x)_m^n + 2h^2(u_{xx})_m^n - \frac{4h^3}{3}(u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right) \end{cases}$$

Также нужно воспользоваться следствиями уравнения (3.4): $u_t = -\lambda u_x$, $u_{tt} = \lambda^2 u_{xx}$, $u_{ttt} = -\lambda^3 u_{xxx}$ \rightarrow $u_m^{n+1} = u_m^n - \lambda\tau(u_x)_m^n + \frac{\lambda^2\tau^2}{2}(u_{xx})_m^n - \frac{\lambda^3\tau^3}{6}(u_{xxx})_m^n + O(\tau^4)$. Приравнявая значения u_m^n , $(u_x)_m^n$, $(u_{xx})_m^n$, $(u_{xxx})_m^n$ в левой и правой части (3.6), получаем условия аппроксимации (3.7)-(3.9), при этом надо понимать, что количество уравнений в (3.7)-(3.9) не может быть больше, чем число неопределенных коэффициентов α_μ^v нашего сеточного шаблона. Поэтому разностные схемы с более высоким порядком аппроксимации на данном сеточном шаблоне построить невозможно.

Следующий вопрос, который стоит рассмотреть отдельно - почему схема (3.6) не может иметь порядок аппроксимации выше третьего при том, что значения функции в узлах нашего сеточного шаблона мы раскладывали в ряд Тейлора вплоть до 4-го порядка по τ и h . Давайте найдем её первое дифференциальное приближение. Для этого, выразим все коэффициенты α_μ^v нашего сеточного шаблона из условий в (3.7)-(3.9) и подставим их

в (3.6), заменив значения функции в узлах шаблона на их приближённые значения из разложения в ряд Тейлора:

$$u_t + \lambda u_x = \frac{h^4 u_{xxxx}}{24\tau} \left(\sigma^4 + \sum_{\mu=-2}^1 \mu^4 \alpha_\mu^0 \right) = \frac{u_{xxxx}}{24} (\lambda^4 \tau^3 + 2\lambda^3 \tau^2 h + \lambda^2 \tau h^2 - 2\lambda h^3)$$

Отсюда видно, что максимальный порядок аппроксимации для схемы (3.6) будет третий $O(\tau^3, h^3)$.

Важный класс для (3.4) составляют монотонные разностные схемы, переводящие монотонный профиль u_m^n на слое $t = t^n$ в монотонный профиль u_m^{n+1} на слое $t = t^{n+1}$. В случае выполнения условия Куранта $0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1$, характеристика $dx = \lambda dt$ выходящая из точки (t^{n+1}, x_m) пересекает слой t^n в точке (t^n, x_*) , где $x_{m-1} < x_* < x_m$. Тогда характеристическое условие монотонности записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{m-1}^n < u_m^{n+1} = u_* < u_m^n, & \text{if } \Delta_0 = u_{m-1}^n - u_m^n < 0 \\ u_{m-1}^n > u_m^{n+1} = u_* > u_m^n, & \text{if } \Delta_0 = u_{m-1}^n - u_m^n > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Используя условия аппроксимации (3.7)-(3.8) и подставляя их в (3.6), получаем однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации со свободным параметром α_{-2} :

$$u_m^{n+1} = u_* = u_m^n + \sigma(\Delta_0 + \Delta_1)/2 + \sigma^2(\Delta_0 - \Delta_1)/2 + \alpha_{-2}^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1) \quad (3.11)$$

где $\Delta_1 = u_m^n - u_{m+1}^n$ и $\Delta_{-1} = u_{m-2}^n - u_{m-1}^n$. Подставляя (3.11) в (3.10) и вычитая из обеих частей u_m^n , получим условие монотонности разностных схем (3.7)-(3.8) в виде

$$\begin{cases} \Delta_0 < \sigma(\Delta_0 + \Delta_1)/2 + \sigma^2(\Delta_0 - \Delta_1)/2 + \alpha_{-2}^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1) < 0, & \text{if } \Delta_0 < 0 \\ \Delta_0 > \sigma(\Delta_0 + \Delta_1)/2 + \sigma^2(\Delta_0 - \Delta_1)/2 + \alpha_{-2}^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1) > 0, & \text{if } \Delta_0 > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Разделив затем оба неравенства на Δ_0 , получаем характеристическое условие монотонности в виде одного неравенства:

$$0 \leq w = \sigma(1 + \delta_1)/2 + \sigma^2(1 - \delta_1)/2 + \alpha_{-2}^0(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) \leq 1 \quad (3.13)$$

где $\delta_{-1} = \Delta_{-1}/\Delta_0$, $\delta_1 = \Delta_1/\Delta_0$, $\Delta_0 \neq 0$. На плоскости (δ_{-1}, δ_1) (Рис. 3.2) условие монотонности (3.13) выделяет полосу между пучками параллельных прямых:

$$\begin{cases} w(\delta_{-1}, \delta_1, \alpha_{-2}^0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_{-1} + \delta_1 = 2 \\ \sigma(1 + \delta_1)/2 + \sigma^2(1 - \delta_1)/2 = 0 \end{cases} \\ w(\delta_{-1}, \delta_1, \alpha_{-2}^0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_{-1} + \delta_1 = 2 \\ \sigma(1 + \delta_1)/2 + \sigma^2(1 - \delta_1)/2 = 1 \end{cases} \end{cases} \quad (3.14)$$

проходящими соответственно через точки:

$$\begin{cases} (\delta_{-1} = (3 - \sigma)/(1 - \sigma), \delta_1 = (1 + \sigma)/(\sigma - 1)) \\ (\delta_{-1} = (\sigma - 2)/\sigma, \delta_1 = (\sigma + 2)/\sigma) \end{cases} \quad (3.15)$$

При изменении свободного параметра α_{-2}^0 от $-\infty$ до $+\infty$ прямые (3.14), оставаясь параллельными, поворачиваются относительно точек (3.15), покрывая всю плоскость (δ_{-1}, δ_1) . Предельным значениям свободного параметра $\alpha_{-2}^0 = \pm\infty$ соответствует прямая $\delta_{-1} + \delta_1 = 2$.

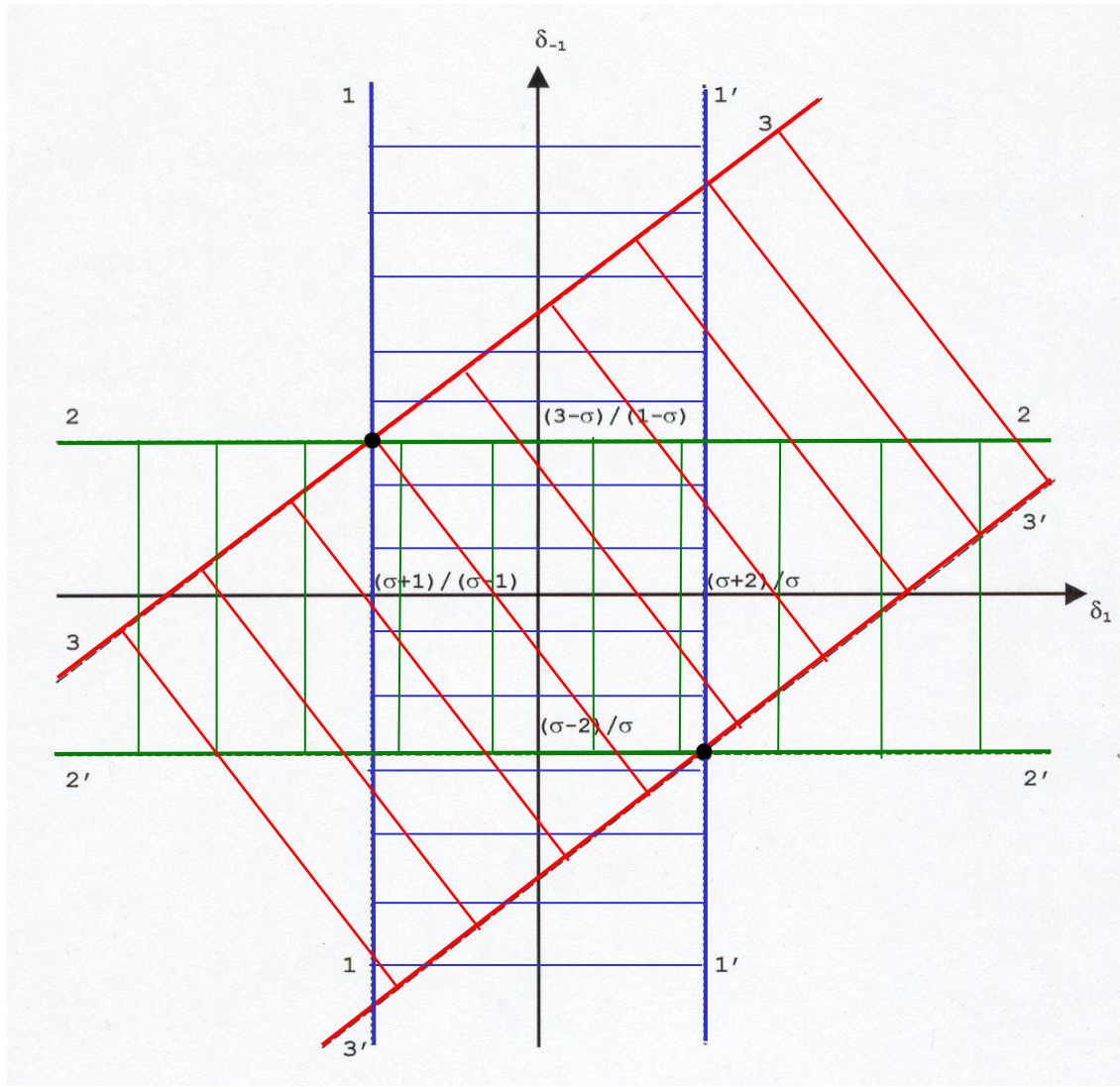


Рис. 3.2. Области монотонности схем на плоскости (δ_{-1}, δ_1) .

В классе нелинейных схем $\alpha_\mu^v = \alpha(\sigma, u)_\mu^v$, как показывают приведенные выше построения, всегда возможно построить монотонную схему не ниже второго порядка аппроксимации. Если в рассчитываемой точке (t^{n+1}, x_m) , соответствующие значения (δ_{-1}, δ_1) попадают в область монотонности схемы третьего порядка аппроксимации, то α_{-2}^0 следует выбирать из условий (3.7)-(3.9), если же нет, то следует выбирать α_{-2}^0 , соответствующее той схеме второго порядка аппроксимации, в область монотонности которой попадают найденные значения (δ_{-1}, δ_1) . Легко показать, что такая схема всегда существует. Из характеристического критерия монотонности, можно получить отрезок значений α_{-2}^0 , соответствующий области монотонности схем второго порядка аппроксимации (3.11) при любых значениях (δ_{-1}, δ_1) :

$$\alpha_{-2}^0 \in \left[\frac{\sigma(1+\delta_1)/2 + \sigma^2(1-\delta_1)/2}{(2-\delta_{-1}-\delta_1)}, \frac{1-\sigma(1+\delta_1)/2 + \sigma^2(1-\delta_1)/2}{(\delta_{-1}+\delta_1-2)} \right] \quad (3.16)$$

Он может содержать или не содержать в себе точку, соответствующую схеме третьего порядка, но монотонные схемы второго порядка, в смысле определения (3.10)-(3.13), на нём всегда присутствуют.

Выбор базовых схем для построения гибридной схемы второго-третьего порядка аппроксимации может быть различным. Тем не менее, всегда можно воспользоваться наиболее простым алгоритмом построения гибридных схем:

- вычисляем $u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) u_{m+\mu}^{n+\nu}$ по схеме третьего порядка аппроксимации;
- подставляем получившееся значение u_m^{n+1} в неравенства (3.10), если схема третьего порядка монотонна – переходим к следующему расчетному узлу, если нет, то проверяем за какую границу неравенства выскочило u_m^{n+1} : u_{m-1}^n или u_m^n и присваиваем u_m^{n+1} то значение, которое оказалось ближе;

Этот алгоритм становится очевидным, если обратить внимание на то, что границы отрезка монотонности схем второго порядка аппроксимации (3.16) $\alpha_{-2}^0 \in [(\alpha_{-2}^0)_{\min}, (\alpha_{-2}^0)_{\max}]$ находятся путем приравнивания выражения (3.11) к значениям u_{m-1}^n и u_m^n , и если схема третьего порядка оказалась не монотонной, то логично в качестве решения взять тот конец отрезка (3.16), который лежит ближе всего к значению, полученному по схеме третьего порядка аппроксимации.

Если в исходном уравнении $\lambda < 0$, то можно повторить все шаги, сделанные выше, при соответствующем изменении сеточного шаблона на $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$ и коэффициентов на $\alpha_{-1}^0, \alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0$. При $\sigma < 0$ и $\alpha_{-2}^0 = 0$ аналогичные разностные схемы получаются заменой σ на $-\sigma$ и коэффициентов α_{μ}^{ν} на $\alpha_{-\mu}^{\nu}$. В этом случае мы получим однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации со свободным параметром α_2^0 :

$$u_m^{n+1} = u_* = u_m^n + \sigma(\Delta_0 + \Delta_1)/2 + \sigma^2(\Delta_0 - \Delta_1)/2 + \alpha_2^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1) \quad (3.17)$$

где теперь $\Delta_{-1} = u_{m+2}^n - u_{m+1}^n$, $\Delta_0 = u_{m+1}^n - u_m^n$, $\Delta_1 = u_m^n - u_{m-1}^n$ и характеристическим условием монотонности (3.13) в следующем виде:

$$0 \leq w = |\sigma|(1 + \delta_1)/2 + \sigma^2(1 - \delta_1)/2 + \alpha_2^0(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) \leq 1 \quad (3.18)$$

где $\delta_{-1} = \Delta_{-1}/\Delta_0$, $\delta_1 = \Delta_1/\Delta_0$, $\Delta_0 \neq 0$.

Если теперь отказаться от знакопостоянства λ и соответственно σ , то нам придется использовать сеточный шаблон $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$, в который будут входить обе точки (t^n, x_{m-2}) и (t^n, x_{m+2}) одновременно. В таком случае, мы получаем уже двухпараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = & u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ & + \alpha_{-2}^0(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n) + \alpha_{-2}^0(-u_{m-1}^n + 3u_m^n - 3u_{m+1}^n + u_{m+2}^n), \end{aligned}$$

которое можно преобразовать к однопараметрическому виду путем замены

коэффициентов α_{-2}^0 и α_2^0 на $\alpha_{-2}^0 = c \frac{\sigma + |\sigma|}{2|\sigma|}$ и $\alpha_2^0 = c \frac{|\sigma| - \sigma}{2|\sigma|}$:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ + c \frac{\sigma + |\sigma|}{2|\sigma|} (u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n) + c \frac{|\sigma| - \sigma}{2|\sigma|} (-u_{m-1}^n + 3u_m^n - 3u_{m+1}^n + u_{m+2}^n).$$

Упростив получившееся выражение, мы получим схемы (3.11) для $\lambda^+ = \frac{\lambda + |\lambda|}{2}$, $\sigma^+ = \frac{\sigma + |\sigma|}{2}$ и

(3.17) для $\lambda^- = \frac{\lambda - |\lambda|}{2}$, $\sigma^- = \frac{\sigma - |\sigma|}{2}$, записанные в одном общем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ + \frac{c}{2} (\sigma(u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + 2u_{m+1}^n - u_{m+2}^n) + |\sigma|(u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n))$$

где $c = \alpha_{-2}^0 / |\sigma|$ если $\sigma > 0$ или $c = \alpha_2^0 / |\sigma|$ если $\sigma < 0$, а критерии монотонности (3.13), (3.18) свернутся к одной общей форме:

$$0 \leq w = |\sigma|(1 + \delta_1)/2 + \sigma^2(1 - \delta_1)/2 + c|\sigma|(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) \leq 1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. RANDAL J. LeVEQUE. FINITE VOLUME METHODS FOR HYPERBOLIC PROBLEMS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2004, 580 p.
2. ФЛЕТЧЕР К. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА: ПЕР С АНГЛ. – М.: МИР, 1988. – 352 с.
3. REED W.H., HILL T.R. TRIANGULAR MESH METHODS FOR THE NEUTRON TRANSPORT EQUATION, TECHNICAL REPORT, LA-UR-73-479, LOS ALAMOS SCIENTIFIC LABORATORY, 1973
4. COCKBURN B., KARNIADAKIS G.E., SHU C.W., DISCONTINUOUS GALERKIN METHODS. THEORY, COMPUTATION AND APPLICATIONS. LNCSE, 11, SPRINGER, 2000
5. КОСАРЕВ В.И. 12 ЛЕКЦИЙ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ (ВВОДНЫЙ КУРС): УЧЕБ. ПОСОБИЕ: ДЛЯ ВУЗОВ. ИЗД. 2-Е, ИСПР. И ДОП. – М.: ИЗД-ВО МФТИ, 2000. – 224 с.
6. КУЛИКОВСКИЙ А.Г., ПОГОРЕЛОВ Н.В., СЕМЕНОВ А.Ю. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
7. МАГОМЕДОВ К.М., ХОЛОДОВ А.С. СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. – МОСКВА: НАУКА, 1988 – 287 с.