

## ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ЗАДАЧА КОШИ

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

которое кроме независимых переменных и неизвестных функций от них содержит еще и производные неизвестных функций или их дифференциалы. Наивысший порядок входящих в уравнение производных неизвестных функций называется порядком дифференциального уравнения. Если искомые функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Задачи решения дифференциальных уравнений возникают при математическом моделировании многих реальных явлений. При этом, как правило, точное решение не удается выразить через элементарные функции. Доля задач, решаемых в явном виде, ничтожна мала. Поэтому возникает необходимость применять приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (6.1)$$

Решением уравнения (6.1) являются дифференцируемая функция  $y(t)$ , которая при подстановке в данное уравнение обращает его в тождество. На рис. 1 приведен график решения дифференциального уравнения (6.1). Такой график называют *интегральной кривой*.

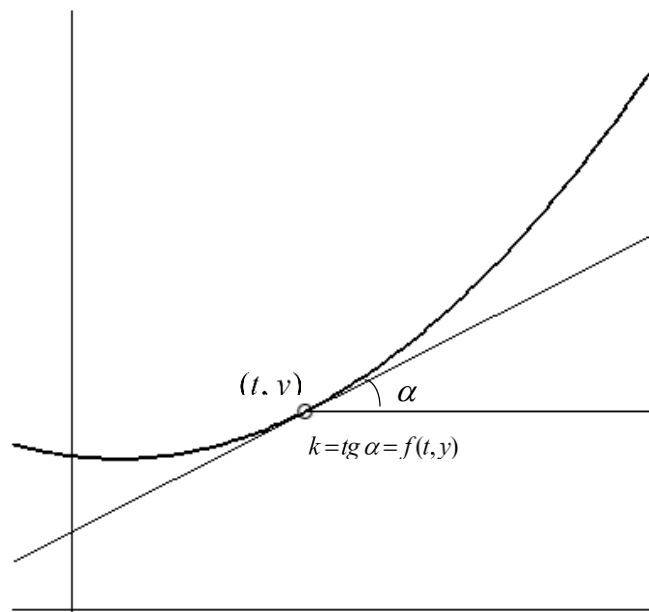


Рис. 6.1. Графическая иллюстрация решения дифференциального уравнения

Производную  $y'(t)$  в каждой точке  $(t, y)$  можно геометрически интерпретировать как тангенс угла  $\alpha$  наклона касательной к графику решения, проходящего через эту точку, т.е.  $k = \operatorname{tg} \alpha = f(t, y)$ .

Уравнение (6.1) определяет целое семейство решений. Чтобы выделить одно решение, задают *начальное условие*

$$y(t_0) = y_0, \quad (6.2)$$

где  $t_0$  – некоторое заданное значение аргумента  $t$ ;  $y_0$  – начальное значение функции.

Задача Коши заключается в отыскании функции  $y = y(t)$ , удовлетворяющей уравнению (6.1) и начальному условию (6.2). Обычно определяют решение задачи Коши на отрезке, расположенном справа от начального значения  $t_0$ , до некоторого значения  $T \geq t_0$ , т.е. для  $t \in [t_0, T]$ .

Разрешимость задачи Коши определяет следующая теорема.

**Теорема 6.1.** Пусть функция  $f(t, y)$  определена и непрерывна при  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $-\infty < y < +\infty$  и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|,$$

где  $L$  – некоторая постоянная;  $y_1, y_2$  – произвольные значения. Тогда для каждого начального значения  $y_0$  существует единственное решение  $y(t)$  задачи Коши для  $t \in [t_0, T]$ .

При исследовании численных методов для задачи Коши будем заранее предполагать, что ее решение существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

При решении дифференциальных уравнений большое значение имеют численные методы решения. Приближенные методы используют различные упрощения самих уравнений путем обоснованного отбрасывания некоторых содержащихся в них членов, а также специальным выбором классов искомых функций. В приближенных методах также широко используется разложение решения в ряд по некоторому малому параметру, содержащемуся в данной задаче.

Мы будем рассматривать численные методы решения дифференциальных уравнений, которые в настоящее время являются основным инструментом при исследовании научно-технических задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Отметим, что данные методы особенно эффективны в сочетании с использованием современных компьютеров. Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. Его суть состоит в том, что область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку, а искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке (эта функция называется сеточной). Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Зададим сетку с узлами  $t_i$  и шагом  $h_i = t_{i+1} - t_i$ . Часто рассматривают равномерные сетки с шагом  $h_i = h = \frac{T - t_0}{n}$ . При этом решение получается в виде таблицы, в которой каждому узлу сетки  $t_i$  соответствуют приближенные значения функции  $y(t)$  в узлах сетки, т.е.  $y_i \approx y(t_i)$ .

Численные методы не позволяют найти решение в общем виде, зато они применимы к широкому классу дифференциальных уравнений. Если все же нужно иметь приближенное решение  $y(t)$  в любой точке  $t$ , то для этого к полученной таблице значений  $y_i$  можно применить полиномиальную интерполяцию или интерполяцию сплайнами (см. раздел 1.).

Пусть  $y(t)$  – решение задачи Коши. При решении дифференциальных уравнений обычно требуется оценить погрешность аппроксимации не в одной точке, а на всей сетке. В качестве глобальной погрешности  $R$  на сетке с шагом  $h$  можно принять некоторую величину, связанную с локальными погрешностями  $\varepsilon_i = y(t_i) - y_i$  в узлах  $t_i$ , например,  $R = \max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|$ .

Численный метод решения задачи Коши называется *сходящимся*, если для него  $R \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

## § 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

### 2.1. Метод Эйлера

Простейшим методом решения задачи Коши является метод Эйлера. Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

$$y(t_0) = y_0$$

на отрезке  $[t_0, T]$ .

Существуют несколько способов вывода данного метода Эйлера, рассмотрим один из них – квадратурный способ. Проинтегрируем левую и правую части уравнения (6.1) в

границах от  $t_0$  до  $t$ : 
$$\int_{t_0}^t y'(t)dt = \int_{t_0}^t f(t, y(t))dt.$$

Отсюда, с учетом того, что одной из первообразных для  $y'(t)$  служит  $y(t)$ , получаем

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(t, y(t))dt$$

или, с использованием начального условия (6.2),

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t))dt \quad (6.3)$$

Таким образом, данное дифференциальное уравнение (6.1) с начальным условием (6.2) преобразовалось в интегральное уравнение (6.3).

Выберем шаг  $h = \frac{T-t_0}{n}$  и построим сетку с системой узлов  $t_i = t_0 + ih, i = 0, \dots, n$ .

Обозначим  $y_i = y(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Если в уравнение (6.3) вместо  $t$  подставить  $t_1$ , получим равенство

$$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt. \quad (6.4)$$

Применение к интегралу в правой части равенства (6.4) простейшей формулы левых прямоугольников дает приближенную формулу

$$y_1 \approx y_0 + hf(t_0, y_0).$$

В общем случае расчетная формула метода Эйлера получается численным интегрированием посредством простейшей формулы левых прямоугольников в равенстве

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt, \quad (6.5)$$

в предположении, что на  $i$ -м шаге в роли начальной точки  $(t_0, y_0)$  выступает точка  $(t_i, y_i)$ . Таким образом, получим

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i). \quad (6.6)$$

На практике для грубой оценки погрешности метода Эйлера пользуются правилом Рунге, которое заключается в следующем: пусть  $y_i^{\frac{h}{2}}$  – приближения, полученные с шагом  $h/2$ , а  $y_i^h$  – приближения, полученные с шагом  $h$ , тогда справедливо приближенное равенство

$$R \approx \frac{1}{2^p - 1} \left| y_i^{\frac{h}{2}} - y_i^h \right|,$$

где  $p$  – порядок точности.

Метод Эйлера относится к методам первого порядка точности. Пользуясь правилом Рунге, можно приближенно решить задачу Коши методом Эйлера с заданной точностью  $\varepsilon$ . Начав вычисления с некоторого шага  $h$ , последовательно уменьшают это значение в 2 раза, каждый раз определяя приближенное значение  $y_i^{\frac{h}{2}}$  ( $i=0, \dots, n$ ). Вычисления прекращают при выполнении условия

$$R \approx \left| y_i^{\frac{h}{2}} - y_i^h \right| < \varepsilon,$$

при этом приближенным решением будут значения  $y_i^{\frac{h}{2}}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

## 2.2. Модифицированные методы Эйлера

Применение к интегральному равенству (6.5) других простейших квадратурных формул будет порождать новые методы численного интегрирования задачи Коши.

Так, если в (6.5) использовать простейшую квадратурную правых прямоугольников, придем к методу

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}). \quad (6.7)$$

Этот метод называют неявным (или обратным) методом Эйлера, поскольку для вычисления неизвестного значения  $y_{i+1} = y(t_{i+1})$  по известному значению  $y_i = y(t_i)$  требуется решать уравнение, в общем случае нелинейное. Этот метод, так же как и явный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Применение к интегралу в равенстве (6.5) простейшей квадратурной формулы трапеций приводит тоже к неявному методу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})), \quad (6.8)$$

который будем называть методом трапеций. Поскольку квадратурная формула трапеций на порядок точнее формул левых и правых прямоугольников, то метод трапеций для решения задачи Коши по сравнению с явным и неявным методами Эйлера имеет более высокий (на единицу) порядок точности, т.е. данный метод второго порядка.

Интерес представляет совместное применение методов трапеций и Эйлера. Для вычисления  $y_{i+1}$  можно применить один из итерационных методов. Если имеется хорошее начальное приближение  $y_i$ , то можно построить решение с использованием двух итераций следующим образом. Считая  $y_i$  начальным приближением, вычисляем первое приближение  $y_{i+1}$  по формуле метода Эйлера (6.6):

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

Вычисленное значение  $\tilde{y}_{i+1}$  подставляем вместо  $y_{i+1}$  в правую часть соотношения (6.8) и находим окончательное значение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})). \quad (6.9)$$

Рекуррентные соотношения (6.9) описывают новую разностную схему, являющуюся модификацией метода Эйлера, которая называется методом Хойна (или методом Эйлера с пересчетом).

Ясно, что можно достичь большей точности, если, исходя из того же начального приближения

$$y_{i+1}^0 = y_i + hf(t_i, y_i),$$

выполнить не одну, а несколько итераций по методу трапеций

$$y_{i+1}^k = y_i + \frac{h}{2} \left( f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}) \right), k = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Такой вариант совместного применения метода Эйлера и метода трапеций называют усовершенствованным методом Эйлера-Коши с итерационной обработкой. Делать много итераций по формуле (6.10) не рекомендуется (обычно их выполняют не более трех-четырех).

Чтобы получить следующую модификацию метода Эйлера, проинтегрируем уравнение (6.1) по отрезку  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ . Имеем

$$\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt,$$

Откуда следует равенство

$$y(t_{i+1}) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (6.11)$$

Применяя к последнему интегралу простейшую квадратурную формулу средних прямоугольников и заменяя значения  $y(t_{i-1})$  и  $y(t_i)$  известными приближенными значениями  $y_{i-1}$  и  $y_i$  соответственно, из (6.11) получим формулу

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(t_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.12)$$

которую будем называть уточненным методом Эйлера.

Как известно, квадратурная формула прямоугольников (средней точки) имеет тот же порядок точности, что и квадратурная формула трапеций, так что уточненный метод Эйлера (6.12) тоже является методом второго порядка.

Обратим внимание на одно принципиальное отличие метода (6.12) от всех других рассмотренных до этого момента методов: он является двухшаговым. Здесь для вычисления значения  $y_{i+1}$  привлекаются два предыдущих значения  $y_i$  и  $y_{i-1}$ . Двухшаговость накладывает определенные ограничения, по крайней мере, на начало численного процесса: значение  $y_1$  не может быть найдено непосредственно этим методом с тем же шагом  $h$ . Поэтому недостающую вторую начальную для процесса (6.12) точку приходится получать другим путем, например, явным методом Эйлера, а чтобы не сделать сразу большой ошибки, применяя на старте метод более низкого порядка точности, рекомендуется осуществлять постепенное вхождение в процесс (6.12). Так, «разгон» можно выполнить по формулам

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0), y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{1/2}\right),$$

а далее уже переключаться на счет по формуле (6.12).

**Пример 6.1.** Рассмотрим простое линейное уравнение  $y' = 2t - 3y$  с начальным условием  $y(0) = 1$ . Проследим за вычислениями, реализующими метод Эйлера и его модификации. Знание ее точного решения  $y(t) = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3}t + \frac{11}{9}e^{-3t}$  позволяет провести сравнение результатов приближенных вычислений по разным формулам с истинным решением и проверить, насколько соответствуют представления о точности тех или иных методов тому, что наблюдается в данном случае.

*Решение.* Проведем подсчет приближенных значений решения  $y(t)$  данной задачи в точке  $t=0,2$  численным методом Эйлера и его модификациями, принимая  $h=0,1$ . Результаты

этих вычислений и фактические ошибки, найденные сравнением с точным значением  $y(0,2)=0,581881\dots$ , отражены в таблице.

Метод	$y_1 \approx y(0,1)$	$y_2 \approx y(0,2)$	$y(0,2) - y_2$
Метод Эйлера	0,7	0,51	$\approx 0,07$
Неявный метод Эйлера	$\approx 0,7846$	$\approx 0,6343$	$\approx -0,05$
Метод трапеций	$\approx 0,7478$	$\approx 0,5788$	$\approx 0,003$
Метод Хойна	0,755	$\approx 0,5895$	$\approx -0,008$
Уточненный метод Эйлера	0,755	0,587	$\approx -0,005$

Последний столбец в этой таблице со всей очевидностью показывает более высокую точность методов второго порядка.

### 2.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Метод Рунге-Кутты является одним из наиболее часто используемых методов численного решения дифференциальных уравнений высокой точности. Метод Эйлера можно рассматривать как простейший вариант метода Рунге-Кутты.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения  $y'(t) = f(t, y(t))$  с начальным условием  $y(t_0) = y_0$ .

Выберем шаг  $h = \frac{T-t_0}{n}$  и построим сетку с системой узлов  $t_i = t_0 + ih, i = 0..n$ .

Обозначим через  $y_i$  приближенное значение искомого решения в точке  $t_i$ .

Приведем расчетные формулы метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4), \quad (6.13)$$

где  $k_i^1 = f(t_i, y_i)$ ,

$$k_i^2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^1\right),$$

$$k_i^3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^2\right),$$

$$k_i^4 = f(t_i + h, y_i + hk_i^3).$$

Таким образом, данный метод Рунге-Кутты требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части  $f(t, y(t))$  уравнения (6.1). Глобальная погрешность этого метода есть величина  $O(h^4)$ .

Пользуясь правилом Рунге, можно приближенно решить задачу Коши методом Рунге-Кутты четвертого порядка с заданной точностью  $\varepsilon$ . Начав вычисления с некоторого шага  $h$ , последовательно уменьшают это значение в 2 раза, каждый раз определяя приближенное значение  $y_i^{\frac{h}{2}}$  ( $i=0..n$ ). Вычисления прекращают при выполнении условия

$$R \approx \frac{1}{15} \left| y_i^{\frac{h}{2}} - y_i^h \right| < \varepsilon.$$

При этом приближенным решением являются значения  $y_i^{\frac{h}{2}}$ ,  $i = 0..n$ .

Метод Рунге-Кутты (6.13) требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификациями, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения

результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуются значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутты (6.13).

## 2.4. Многошаговые методы

Другой путь построения разностных схем основан на том, что для вычисления значения  $y_{i+1}$  используются результаты не одного, а  $k$  предыдущих шагов, т. е. значения  $y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, \dots, y_i$ . В этом случае получается  $k$ -шаговый метод.

Многошаговые методы могут быть построены путем замены в интегральном равенстве (6.5) подынтегральной функции  $f(t, y(t))$  интерполяционным многочленом  $P_{k-1}(t)$  степени  $k-1$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  по значениям  $f(t_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(t_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \dots, f(t_i, y_i)$ .

Таким образом, получим

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{k-1}(t) dt. \quad (6.14)$$

На основе этой формулы можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности. Порядок точности зависит от степени интерполяционного многочлена  $P_{k-1}(t)$ , для построения которого используются значения сеточной функции  $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i-k+1}$ , вычисленные на  $k$  предыдущих шагах.

Широко распространенным семейством многошаговых методов являются методы Адамса. Простейший из них, получающийся при  $k=1$ , совпадает с рассмотренным ранее методом Эйлера первого порядка точности. В практических расчетах чаще всего используется вариант метода Адамса, имеющий четвертый порядок точности и использующий на каждом шаге результаты предыдущих четырех. Именно его и называют обычно методом Адамса. Рассмотрим этот метод.

Пусть найдены значения  $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$  в четырех последовательных узлах ( $k=4$ ). При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части  $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$ , где  $f_j = f(t_j, y_j)$ . В качестве интерполяционного многочлена  $P_3(t)$  можно взять многочлен Ньютона (см. гл. 1, § 2, п. 2.2). Тогда разностную схему четвертого порядка метода Адамса можно записать в виде

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2} \Delta f_i + \frac{5h^3}{12} \Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8} \Delta^3 f_i, \quad (6.15)$$

где  $\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$ ,

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$

$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

Сравнивая метод Адамса с методом Рунге-Кутты той же точности, отмечаем его экономичность, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге-Кутты – четырех). Но метод Адамса неудобен тем, что невозможно начать счет по одному лишь известному значению  $y_0$ . Расчет может быть начат только с узла  $x_3$ . Значения  $y_1, y_2, y_3$ , необходимые для вычисления  $y_4$ , нужно получить каким-либо другим способом (например, методом Рунге-Кутты), что существенно усложняет алгоритм. Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменить шаг  $h$  в процессе счета; этого недостатка лишены одношаговые методы.

Рассмотрим еще одно семейство многошаговых методов, которые используют неявные схемы, – методы прогноза и коррекции (они называются также методами предиктор-корректор). Суть этих методов состоит в следующем. На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы: с помощью явного метода (предиктора) по

известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение  $y_{i+1} = y_{i+1}^0$  в новом узле; используя неявный метод (корректор), в результате итераций находятся приближения  $y_{i+1}^1, y_{i+1}^2, \dots$ .

Один из вариантов метода прогноза и коррекции может быть получен на основе метода Адамса четвертого порядка. Приведем окончательный вид разностных соотношений:

$$\text{на этапе предиктора } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}); \quad (6.16)$$

$$\text{на этапе корректора } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (6.17)$$

Явная схема (6.16) используется на каждом шаге один раз, а с помощью неявной схемы (6.17) строится итерационный процесс вычисления  $y_{i+1}$  с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Заметим, что в этих формулах, как и в случае метода Адамса, при вычислении  $y_{i+1}$  необходимы значения сеточной функции в четырех предыдущих узлах  $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$ . Следовательно, расчет по этому методу может быть начат только со значения  $y_4$ . Необходимые при этом  $y_1, y_2, y_3$  находятся по методу Рунге-Кутты,  $y_0$  задается начальным условием. Это характерная особенность многошаговых методов.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

### Цель работы

Изучить численные методы решения задачи Коши и провести сравнительный анализ рассмотренных методов.

### Задание к лабораторной работе

1. Найти численное решение задачи Коши  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$  на отрезке  $[t_0, T]$  с точностью не ниже  $\varepsilon = 10^{-8}$ , используя следующие численные методы:
  - 1) явный метод Эйлера;
  - 2) метод Хойна;
  - 3) уточненный метод Эйлера;
  - 4) метод Рунге-Кутты;
  - 5) метод Адамса;
  - 6) метод прогноза и коррекции на основе метода Адамса.
2. Найти точное решение поставленной задачи с помощью встроенной функции Maple решения обыкновенных дифференциальных уравнений `dsolve` и в каждом случае оценить глобальную погрешность приближенного решения.
3. Для рассмотренных методов сравнить шаг интерполирования  $h$  при заданной точности  $\varepsilon$  и сделать выводы об их скорости сходимости.

N	Функция $f(t, y)$	Отрезок $[t_0, T]$		Начальное условие $y_0$
		$t_0$	$T$	
1	$-\frac{t}{1+t} \cdot y$	0	2	2
2	$-\frac{y}{t} \cdot \ln\left(\frac{y}{t}\right)$	1	2	$e^2$



N	Функция $f(t, y)$	Отрезок $[t_0, T]$		Начальное условие $y_0$
		$t_0$	$T$	
3	$-2y + 4t$	0	2	0
4	$2y - t^2$	0	3	1/4
5	$-y + \cos t$	0	$\pi$	1/2
6	$e^{2t} - e^t \cdot y$	0	2	0
7	$\frac{y}{t} + t \cdot \cos t$	1	3	$\sin 1$
8	$y + \frac{e^t}{t}$	1	2	0
9	$\frac{2y}{1+t} + e^t(1+t)$	0	2	1
10	$-\frac{y}{t} + 2\ln t + 1$	1	3	1
11	$-2y + e^{3t}$	0	1	6/5
12	$-\operatorname{tg} t \cdot y + \frac{1}{\cos t}$	0	$\frac{\pi}{3}$	1
13	$\frac{y}{t \cdot \ln t} + \frac{1}{t}$	0	2	1
14	$-\frac{t}{1+t} \cdot y$	0	2	1
15	$(\sin t - y) \cdot \cos t$	0	$\pi$	0

### Требования к оформлению отчета по работе

Отчет по работе должен содержать:

- 1) цель работы;
- 2) постановку задачи;
- 3) листинги программ с необходимыми комментариями;
- 4) результаты работы программ (оформлены в виде таблиц, увязывающих входные данные – точность вычислений и результаты – шаг интерполирования);
- 5) анализ полученных результатов;
- 6) выводы по проделанной работе.

### Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называют дифференциальным?
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Какое дифференциальное уравнение называют обыкновенным?
4. Представьте графическую интерпретацию решения обыкновенного дифференциального уравнение первого порядка.
5. Сформулируйте задачу Коши.
6. Сформулируйте теорему, определяющую разрешимость задачи Коши.
7. Почему возникает необходимость использования численных методов при решении ОДУ?
8. В чем состоит суть разностных численных методов решения ОДУ?

9. В каком виде представляется решение ОДУ, полученное с помощью численных методов?
10. Что называют локальной погрешностью численного метода решения задачи Коши?
11. Что называют глобальной погрешностью численного метода решения задачи Коши?
12. Какой метод решения задачи Коши называется сходящимся?
13. Выведите формулу явного метода Эйлера квадратурным способом.
14. Каков порядок точности формулы Эйлера?
15. Выведите формулу неявного метода Эйлера.
16. Каков порядок точности неявного метода Эйлера?
17. Выведите формулу трапеций.
18. Каков порядок точности трапеций?
19. В чем состоит суть метода Хойна? Представьте рекуррентную формулу.
20. Каков порядок точности неявного метода Хойна?
21. Какой метод называют усовершенствованным методом Эйлера-Коши с итерационной обработкой?
22. Каков порядок точности усовершенствованного метода Эйлера-Коши с итерационной обработкой?
23. Какая модификация метода Эйлера называется уточненным методом Эйлера?
24. Каков порядок точности уточненного метода Эйлера?
25. В чем состоит принципиальное отличие уточненного метода Эйлера от других модификаций метода Эйлера?
26. Приведите расчетные формулы метода Рунге-Кутты 4-го порядка.
27. Каков порядок точности метода Рунге-Кутты 4-го порядка?
28. Каковы преимущества и недостатки метода Рунге-Кутты 4-го порядка перед методом Эйлера и его модификациями?
29. Какие методы называются многошаговыми?
30. Каким образом могут быть построены многошаговые методы?
31. Приведите разностную схему метода Адамса.
32. Каков порядок точности метода Адамса?
33. Каковы преимущества и недостатки метода Адамса перед методом Рунге-Кутты 4-го порядка?
34. В чем состоит основной принцип методов прогноза и коррекции?
35. Приведите расчетную схему метода прогноза и коррекции, полученного на основе метода Адамса.