16. В чем состоит метод простых итераций?
17. Каковы условия сходимости метода простых итераций?
18. Как привести уравнение к виду, удобному для простых итераций?
19. Каковы условия применения метода Ньютона решения нелинейных уравнений?
20. В чем состоит метод Ньютона?
21. Какова графическая интерпретация метода Ньютона?
22. Каковы условия сходимости метода Ньютона?
23. Каковы особенности метода Ньютона?
24. В состоит принцип метода Чебышева решения нелинейных уравнений?
25. Каковы условия применения метода Чебышева?
26. Составьте итерационный процесс метода Чебышева.
27. Каков порядок сходимости метода Чебышева?

Задачи

1. Построить итерационный процесс вычислений всех корней уравнения $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ методом простой итерации.
2. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.
3. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}\ (a > 0)$, где p – вещественное число.
4. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\frac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали ни одной операции деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.
5. Оценить скорость сходимости метода хорд.
6. Оценить скорость сходимости метода Ньютона.
7. Найти решения следующих уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ с помощью методов
   1) половинного деления;
   2) хорд;
   3) простой итерации;
   4) Ньютона;
   5) Чебышева 3-го порядка.

1. $x^4 - 3x - 20 = 0\ \ (x > 0)$.	5. $x^3 - 2x - 5 = 0\ \ (x > 0)$.
2. $x + e^x = 0$.	6. $x^5 - x - 2 = 0$.
3. $2 - \ln x - x = 0$.	7. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}e^x = 0\ \ (x > 0)$.
4. $x^2 - \cos x = 0\ \ (x > 0)$.	8. $x^2 + \ln x = 0$.

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Линейные системы имеют в вычислениях очень большое значение, так как к ним может быть приведено приближенное решение широкого круга задач. Так, основными источниками возникновения систем линейных алгебраических уравнений являются теория электрических цепей, уравнения балансов и сохранения в механике, гидравлике и т.п.

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.1}$$

или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица $n \times n$ с вещественными коэффициентами $a_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{b}$ – заданный вектор с вещественными компонентами, $\mathbf{x}$ – искомый вектор.

Известно, что если $\det \mathbf{A} = 0$, то СЛАУ или не имеет решения, или имеет бесчисленное множество решений. Если же $\det \mathbf{A} \neq 0$, то система имеет решение, притом единственное. Далее будем рассматривать только последний случай.

На практике кроме существования и единственности решения важна еще устойчивость относительно погрешностей правой части и элементов матрицы. Формально перепишем систему (4.2) в виде $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Варьируя это равенство и определяя вариацию обратной матрицы из соотношения $\boldsymbol{\delta}\mathbf{E} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{A}^{-1} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$, получим $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{b} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$. Формально устойчивость есть, поскольку при $\det \mathbf{A} \neq 0$ обратная матрица существует. Но если матрица $\mathbf{A}^{-1}$ имеет большие элементы, то можно указать такой вид погрешности исходных данных, который сильно изменит решение. В этом случае систему называют плохо обусловленной. Очевидно, что у плохо обусловленных систем $\det \mathbf{A} \approx 0$; однако заметим, что этот признак плохой обусловленности является необходимым, но не достаточным.

Методы численного решения системы (4.2) делятся на две группы: *прямые методы* и *итерационные методы*. В *прямых* (или *точных*) методах решение x системы (4.2) находится за конечное число арифметических действий. Примером прямого метода является метод Гаусса. Отметим, что вследствие погрешностей округления при решении задач на ЭВМ прямые методы на самом деле не приводят к точному решению системы (4.2) и называть их точными можно лишь отвлекаясь от погрешностей округления. Сопоставление различных прямых методов проводится обычно по числу арифметических действий (а еще чаще – по асимптотике при больших m числа арифметических действий), необходимых для получения решения. При прочих равных условиях предпочтение отдается методу с меньшим числом действий.

Итерационные методы (их называют также методами последовательных приближений) состоят в том, что решение $\mathbf{x}$ системы (4.2) находится как предел при $n \to \infty$ последовательных приближений $\mathbf{x}^{(n)}$, где n – номер итерации. Как правило, за конечное число итераций этот предел не достигается. Обычно задается некоторое малое число $\varepsilon > 0$ (точность) и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка $\left\| \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x} \right\| < \varepsilon$.

§ 2. МЕТОДЫ УТОЧНЕНИЯ КОРНЕЙ

2.1. Метод Гаусса

Наиболее распространенным методом решения СЛАУ является метод Гаусса, в основе которого лежит идея последовательного исключения неизвестных. Метод Гаусса является прямым методом решения СЛАУ. Метод Гаусса для произвольной системы основан на приведении матрицы системы к треугольной. Решение проводиться в два этапа: 1) прямой ход (приведение системы к треугольному виду) и 2) обратный ход (последовательное нахождение неизвестных).

Прямой ход состоит из $n-1$ шагов. На первом шаге исключается переменная x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого нужно из второго, третьего, …, n-го уравнений вычесть первое, умноженное на величину $m_i^1 = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, 3, ..., n$. Введем обозначения:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - m_i^1 a_{1j}, b_i^1 = b_i - m_i^1 b_1.$$

Легко убедиться, что для всех уравнений, начиная со второго, $a_{i1}^1 = 0, i = 2, 3, \ldots, n$. Преобразованная система запишется в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \qquad a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + \ldots + a_{3n}^1 x_n = b_3^1, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^1 x_2 + a_{n3}^1 x_3 + \ldots + a_{nn}^1 x_n = b_n^1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Все уравнения (4.3), кроме первого, образуют систему ($n-1$)-го порядка. Применяя к ней ту же процедуру, мы можем исключить из третьего, четвертого, …, n-го уравнений переменную x_2. Точно так же исключаем переменную x_3 из последних $n-3$ уравнений.

На некотором k-ом шаге в предположении, что *главный элемент k-ого шага* $a_{kk}^{k-1} \neq 0$, переменная x_k исключается с помощью формул:

$$m_i^k = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - m_i^k a_{kj}^{k-1}, b_i^k = b_i^{k-1} - m_i^k b_k^{k-1}, i, j = k+1, k+2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Индекс k принимает значения 1, 2, …, $n-1$.

При $k = n-1$ получим треугольную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \qquad\qquad a_{33}^2 x_3 + \ldots + a_{3n}^2 x_n = b_3^2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1}. \end{cases} \tag{4.5}$$

с треугольной матрицей $\mathbf{A}_n$.

Приведение системы (4.1) к треугольному виду (4.5) составляет прямой ход метода Гаусса.

Обратный ход состоит в последовательном вычислении переменных $x_n, x_{n-1}, ..., x_k, ..., x_2, x_1$. Из последнего уравнения системы (4.5) определяем x_n. Подставляя его в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1} и т. д. Общие формулы вычисления неизвестных системы уравнений (4.5) имеют вид:

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}},\; x_k = \frac{1}{a_{kk}^{k-1}}\left(b_k^{k-1} - a_{k,k+1}^{k-1}x_{k+1} - a_{k,k+2}^{k-1}x_{k+2} - \ldots - a_{kn}^{k-1}x_n\right),\; k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{4.6}$$

Для реализации метода исключения Гаусса требуется примерно $2/3n^3$ операций для прямого хода и n^2 операций для обратного хода. Таким образом, общее количество операций составляет примерно $2/3n^3 + n^2$.

Пример 4.1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases} \tag{4.7}$$

Решение. Проведем прямой ход метода Гаусса и представим процесс вычисления в виде следующей схемы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & -2/3 & -2 \\ 0 & -2/3 & 5/3 & -7/3 & -3 \\ 0 & -16/3 & 10/3 & -11/3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & -2/3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & -2/3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 15/2 \end{array}\right).$$

На обратном ходу метода Гаусса получаем:

$$x_4 = 3,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2} + \frac{5}{2}x_4\right) = 2,$$

$$x_2 = \frac{3}{8}\left(-2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right) = -1,$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(6 - x_2 + x_3 - 2x_4\right) = 1.$$

2.2. Схема Гаусса с выбором главного элемента

Рассмотрим СЛАУ (4.1). Запишем расширенную прямоугольную матрицу коэффициентов системы (4.1)

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} & \dots & a_{pn} & b_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \qquad (4.8)$$

Среди элементов матрицы $a_{ij}\ (i,\ j=1,\dots,n)$ выберем наибольший по модулю, называемый *главным элементом*. Пусть им будет, например, элемент a_{pq}. Строка, содержащая главный элемент, называется *главной строкой*.

Далее вычисляем множители $m_i=\dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$ для всех $i\neq p$. Затем преобразуем матрицу (4.8) следующим образом: из каждой i-ой неглавной строки вычитаем почленно главную строку, умноженную на m_i. В результате получим матрицу, у которой все элементы q-го столбца за исключением a_{pq}, равны 0.

Над матрицей $\mathbf{A}_1$ повторяем те же операции, после чего получим матрицу $\mathbf{A}_2$ и т.д. Таким образом продолжаем до тех пор, пока не получим матрицу $\mathbf{A}'$, которая в ходе некоторой перестановки строк и столбцов окажется треугольной. Полученная матрица эквивалента исходной матрице (4.8). На этом заканчивается этап вычислений, называемый прямым ходом**.**

Решив систему с полученной треугольной матрицей коэффициентов, найдём последовательно значения неизвестных x_i (i = 1, 2, ..., n). На этом заканчивается обратный ход.

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими числа m_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

Пример 4.2. Решить СЛАУ (4.7) методом Гаусса с выбором главного элемента. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Решение. Прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента представим в виде следующей вычислительной схемы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ \boxed{-5} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{13}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & \boxed{-\frac{24}{5}} & \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{3} & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \boxed{-\frac{35}{12}} & -\frac{15}{4} \\ 0 & -\frac{24}{5} & \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 4/7 & 0 & 8/7 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 5/2 & -35/12 & -15/4 \\ 0 & -24/5 & 18/5 & -19/5 & 3/5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -4 & 3 & -12 \\ 0 & -24/5 & -19/5 & 18/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -35/12 & 5/2 & -15/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/7 & 8/7 \end{array}\right) \end{array}.$$

Далее переходим к этапу обратного хода, на котором последовательно вычислим $x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_2 = -1, x_1 = 1.$

2.3. Метод квадратных корней

Метод квадратных корней применяется для решения систем с симметрической матрицей и сводится к преобразованию исходной системы к равносильной системе с верхнетреугольной матрицей.

Любая линейная система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ может быть симметризована умножением слева на матрицу $\mathbf{A}^\mathbf{T}$. Поэтому далее будем считать, что $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – симметрическая матрица, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ при любом $i, j = 1..n$. Будем строить ее представление в виде $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\mathbf{T}\mathbf{U}$, где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такое представление матрицы **A** дает возможность записать исходную систему (4.2) в виде двух систем уравнений, а именно

$$\mathbf{Ax = b} \to \mathbf{U^TUx = b} \to \begin{cases} \mathbf{U^Ty = b,} \\ \mathbf{Ux = y.} \end{cases}$$

Тогда решение системы (4.2) сводится к последовательному решению систем с треугольными матрицами $\mathbf{U}^\mathbf{T}$ и **U**.

Элементы u_{ij} матрицы **U** определяются из следующих уравнений $\sum_{k=1}^{i} u_{ki}u_{kj} = a_{ij},\ i \le j.$

Вычислительная схема метода состоит из двух этапов. На первом этапе, называемом прямым ходом, определяются элементы u_{ij} матрицы **U** и неизвестные $y_1, y_2, ..., y_n$. Второй этап, называемый обратным ходом, состоит в нахождении неизвестных $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$.

Прямой ход реализуется по следующим формулам

$$\begin{aligned} &u_{11} = \sqrt{a_{11}}, u_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}},\ j = 2, 3, ..., n, \\ &u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2},\ i = 2, 3, ..., n, \\ &u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}},\ j = 3, ..., n, i < j, \\ &u_{ij} = 0, i > j. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Для вычисления $y_1, y_2, ..., y_n$ используются формулы

$$y_1 = \frac{b_1}{u_{11}},\ y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} y_k}{u_{ii}} \text{ при } i = 2, 3, ..., n. \tag{4.10}$$

Для определения $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ на обратном ходу применяют формулы

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}},\ x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}} \text{ при } i = n-1, n-2, ..., 1. \tag{4.11}$$

Формулами (4.9) – (4.11) определятся поэлементная форма записи вычислительной схемы метода квадратных корней. Условием применимости метода является неравенство нулю элементов u_{ii}, т.е. $u_{ii} \neq 0$ при $i = 1, 2, ..., n$.

В случае систем с положительно определенными матрицами можно ожидать хороших результатов применения метода квадратных корней. В противном случае нет, например, гарантий, что в процессе разложения не появятся мнимые числа, которые не отразятся на результатах.

Пример 4.3. Найти решение системы методом квадратных корней:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_2 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего запишем матрицу **A** системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

На первом этапе вычислений определим значения элементов матрицы **U**

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2,\ u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = -\frac{1}{2},\ u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{1}{2};$$

$$u_{21} = 0,\ u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \frac{\sqrt{11}}{2},\ u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12}u_{13}}{u_{22}} = \frac{5}{2\sqrt{11}};$$

$$u_{31} = u_{32} = 0,\ u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{\frac{46}{11}}.$$

Далее найдем значения y_1, y_2, y_3

$$y_1 = \frac{b_1}{u_{11}} = \frac{8}{2} = 4;\ y_2 = \frac{b_2 - u_{12}y_1}{u_{22}} = \frac{2 - (-0,5)\cdot 4}{\frac{\sqrt{11}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{11}};$$

$$y_3 = \frac{b_3 - u_{13}y_1 - u_{23}y_2}{u_{33}} = \frac{8 - 0,5\cdot 4 - \frac{5}{2\sqrt{11}}\cdot\frac{8}{\sqrt{11}}}{\sqrt{\frac{46}{11}}} = \sqrt{\frac{46}{11}}.$$

Наконец вычислим корни системы x_1, x_2, x_3

$$x_3 = \frac{y_3}{u_{33}} = \sqrt{\frac{46}{11}} \cdot \sqrt{\frac{11}{46}} = 1; \; x_2 = \frac{y_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{11}} - \frac{5}{2\sqrt{11}} \cdot 1}{\frac{\sqrt{11}}{2}} = 1;$$

$$x_1 = \frac{y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} = \frac{4 - (-0,5) \cdot 1 - 0,5 \cdot 1}{2} = 2.$$

В данном примере получено точное решение системы уравнений.

2.4. Схема Холецкого

Рассмотрим систему линейных уравнений, записанную в матричной форме (4.2). Представим матрицу **A** в виде произведения нижней треугольной матрицы $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ и верхней треугольной матрицей $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ с единичной диагональю, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}, \tag{4.12}$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы c_{ij} и d_{ij} определяются по формулам

$$\begin{cases} c_{i1} = a_{i1}, \\ c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} d_{kj}, \; (i \ge j > 1) \end{cases} \tag{4.13}$$

и

$$\begin{cases} d_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{c_{11}}, \\ d_{ij} = \dfrac{1}{c_{ii}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} d_{kj}), \; (1 < i < j). \end{cases} \tag{4.14}$$

Отсюда искомый вектор **x** может быть вычислен из цепи уравнений

$$\mathbf{Cy} = \mathbf{b}, \; \mathbf{Dx} = \mathbf{y}. \tag{4.15}$$

Так как матрицы **C** и **D** треугольные, то системы (4.15) легко решаются.

Схема Холецкого удобна для работы на вычислительных машинах, так как в этом случае операции «накопления» (4.13) и (4.14) можно проводить без записи промежуточных результатов.

Пример 4.4. Решить систему уравнений (4.7) методом Холецкого. Запишем матрицу системы **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассчитаем элементы матриц **C** и **D** согласно формул (4.13) и (4.14):

$$1)\ \begin{aligned} c_{11}&=a_{11}=3,\\ c_{21}&=a_{21}=-5,\\ c_{31}&=a_{31}=2,\\ c_{41}&=a_{41}=1; \end{aligned}\qquad 2)\ \begin{aligned} d_{12}&=\frac{a_{12}}{c_{11}}=\frac{1}{3},\\ d_{13}&=\frac{a_{13}}{c_{11}}=-\frac{1}{3},\\ d_{14}&=\frac{a_{14}}{c_{11}}=\frac{2}{3}; \end{aligned}\qquad 3)\ \begin{aligned} c_{22}&=a_{22}-c_{21}d_{12}=\frac{8}{3},\\ c_{32}&=a_{32}-c_{31}d_{12}=-\frac{2}{3},\\ c_{42}&=a_{42}-c_{41}d_{12}=-\frac{16}{3}; \end{aligned}$$

$$4)\ \begin{aligned} d_{23}&=\frac{1}{c_{22}}(a_{23}-c_{21}d_{13})=0,5,\\ d_{24}&=\frac{1}{c_{22}}(a_{24}-c_{21}d_{14})=-0,25; \end{aligned}\qquad 5)\ \begin{aligned} c_{33}&=a_{33}-c_{31}d_{13}-c_{32}d_{23}=2,\\ c_{43}&=a_{43}-c_{41}d_{13}-c_{42}d_{23}=6; \end{aligned}$$

$$6)\ d_{34}=\frac{1}{c_{33}}(a_{34}-c_{31}d_{14}-c_{32}d_{24})=-1,25;\quad 7)\ c_{44}=a_{44}-c_{41}d_{14}-c_{42}d_{24}-c_{43}d_{34}=2,5.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0\\ -5 & 8/3 & 0 & 0\\ 2 & -2/3 & 2 & 0\\ 1 & -16/3 & 6 & 2,5 \end{pmatrix}\ \text{и}\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3\\ 0 & 1 & 0,5 & -0,25\\ 0 & 0 & 1 & -1,25\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее решим систему $\mathbf{Cy}=\mathbf{b}$. Запишем расширенную матрицу этой системы

$$\mathbf{C}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 6\\ -5 & 8/3 & 0 & 0 & -12\\ 2 & -2/3 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -16/3 & 6 & 2,5 & 3 \end{array}\right).$$

Отсюда легко получаем $y_1=2,\ y_2=-0,75,\ y_3=-1,75,\ y_4=3.$ Теперь решим систему $\mathbf{Dx}=\mathbf{y}$. Запишем расширенную матрицу этой системы.

$$\mathbf{D}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 2\\ 0 & 1 & 0,5 & -0,25 & -0,75\\ 0 & 0 & 1 & -1,25 & -1,75\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Окончательно получаем $x_4=3,\ x_3=2,\ x_2=-1,\ x_1=1.$

2.5. Метод Якоби

Рассмотрим систему

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \tag{4.16}$$

где матрица $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ $(i,\ j=1,2,...,n)$ имеет обратную матрицу; $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – вектор неизвестных, $\mathbf{b}$ – вектор свободных членов.

Система (4.16) может быть преобразована к эквивалентной ей системе вида

$$\mathbf{x}=\mathbf{Bx}+\mathbf{c}, \tag{4.17}$$

где **x** – тот же вектор неизвестных, а **B** и **c** – некоторые новые матрица и вектор соответственно. Систему (4.17) можно трактовать как задачу о неподвижной точке линейного отображения **B** в пространстве R_n и определить последовательность приближений $\mathbf{x}^{(k)}$ к неподвижной точке $\mathbf{x}^*$ рекуррентным соотношением

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{4.18}$$

Итерационный процесс (4.18), начинающийся с некоторого вектора $\mathbf{x}^{(0)}$, называют *методом простых итераций* (МПИ).

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0 \; (i = 1, 2, ..., n)$, разрешим первое уравнение системы (4.16) относительно x_1, второе – относительно x_2 и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = -(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n - b_1) / a_{11}, \\ x_2 = -(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n - b_2) / a_{22}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = -(a_{n1}x_2 + a_{n2}x_3 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} - b_n) / a_{nn} \end{cases}$$

или

$$x_i = -\sum_{j=1,\; j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (i = 1, ..., n). \tag{4.19}$$

Основанный на таком приведении системы (4.16) к виду (4.17) метод простых итераций (4.18) называют *методом Якоби*. Теперь, полагая $k = 0, 1, 2, \dots$, запишем итерационный процесс

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1,\; j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (i = 1, ..., n). \tag{4.20}$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}, ...$ имеет предел $\mathbf{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, то этот предел является решением системы уравнений (4.19).

Окончание итерационного процесса определяют либо заданием максимального числа итераций n_0, либо следующим условием:

$$\max_{1\le i\le n} | x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$.

Обратимся к векторно-матричной форме метода простых итераций. Представим матрицу $\mathbf{A}$ системы (4.16) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R},$$

где $\mathbf{D}$ – диагональная, а $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$– соответственно левая и правая строго треугольные (т.е. с нулевой диагональю) матрицы. Тогда система (4.16) может быть записана в виде

$$\mathbf{Lx} + \mathbf{Dx} + \mathbf{Rx} = \mathbf{b}. \tag{4.21}$$

Если на диагонали исходной матрицы $\mathbf{A}$ нет нулей, то эквивалентной (4.16) задачей вида (4.17) будет

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \tag{4.22}$$

т.е. в (4.17) и (4.18) следует положить $\mathbf{B} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})$, $\mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$. В векторно-матричных обозначениях итерационный процесс определяется формулой

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{4.23}$$

Приведем без доказательства достаточное условие сходимости процесса итерации.

Теорема 4.1. *Если для приведенной системы* (4.19) *выполнено по меньшей мере одно из условий* $\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \;\; (i = 1..n)$ *или* $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \;\; (j = 1..n)$, *то процесс итераций* (4.20) *сходится к единственному решению этой системы независимо от выбора начального приближения.*

Следствие 4.1. *Для системы* (4.16) *метод итераций сходится, если выполнены неравенства* $\left|a_{ii}\right| > \sum_{j \neq n} \left|a_{ij}\right| \;\; (i, j = 1..n)$, *т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов* (*не считая свободных членов*).

Теорема сходимости 4.1 накладывает жесткие условия на коэффициенты исходной линейной системы (4.16). Чтобы привести данную систему к виду, удобному для итераций, умножим ее на матрицу $(\mathbf{A}^{-1} - \boldsymbol{\delta})$, где $\boldsymbol{\delta} = [\delta_{ij}]$ – матрица с малыми по модулю элементами. Тогда получим

$$(\mathbf{A}^{-1} - \boldsymbol{\delta})\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1} - \boldsymbol{\delta})\mathbf{b}$$

или

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}, \tag{4.24}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}^{-1} - \boldsymbol{\delta})\mathbf{b}$. Очевидно, что, если $[\delta_{ij}]$ достаточно малы, то система (4.24) удовлетворяет условиям теоремы сходимости.

Как установлено выше, сходимость метода простых итераций для системы (4.24) гарантируется при любом начальном векторе $\mathbf{x}^{(0)}$. Очевидно, итераций потребуется тем меньше, чем ближе $\mathbf{x}^{(0)}$ к $\mathbf{x}^{*}$. Если нет никакой дополнительной информации о решении задачи, за $\mathbf{x}^{(0)}$ обычно принимают вектор $\boldsymbol{\beta}$ свободных членов системы (4.24). Мотивация этого может быть такова, что матрица $\boldsymbol{\alpha}$ «мала», значит и вектор $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}$ «мал», следовательно, и вектор $\mathbf{x}^{*}$ не долен сильно отличаться от вектора $\boldsymbol{\beta}$.

2.6. Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простых итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (k+1)-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее (k+1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$.

Пусть дана приведенная линейная система

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Выберем произвольно вектор начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$. Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить (k+1)-е приближения корней по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, ...). \end{cases} \tag{4.25}$$

Рассмотрим случай, когда приведение системы (4.16) к виду (4.17) основано на представлении (4.21), т.е. когда метод Зейделя есть модификация метода Якоби. В этом случае расчетные формулы имеют вид

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1\right) / a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = -\left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2\right) / a_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = -\left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n\right) / a_{nn}, \end{cases} \tag{4.26}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots;$ $\mathbf{x}^{(0)}$ задается.

Обратимся к векторно-матричной форме метода Зейделя. Легко видеть, что если неявный вид метода Якоби, вытекающий из представления (4.21) системы (4.16), есть

$$\mathbf{Lx}^{(k)} + \mathbf{Dx}^{(k+1)} + \mathbf{Rx}^{(k)} = \mathbf{b},$$

то равнозначный (4.25) неявный вид метода Зейделя в векторно-матричных обозначениях суть

$$\mathbf{Lx}^{(k+1)} + \mathbf{Dx}^{(k+1)} + \mathbf{Rx}^{(k)} = \mathbf{b}.$$

Следовательно, тот же вектор $\mathbf{x}^{(k+1)}$, который фигурирует в системе (4.25) , может быть получен по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{Rx}^{(k)} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}. \tag{4.27}$$

Последнее выражение определяет не что иное, как метод простых итераций (4.18) для системы вида (4.17), где $\mathbf{B} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{R}$, $\mathbf{c} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$.

Заметим, что указанная выше теорема сходимости 2.1 для МПИ остается верной для итераций по методу Зейделя.

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем МПИ, но, вообще говоря, он приводит к более громоздким вычислениям. Процесс Зейделя может сходиться даже в том случае, если расходится процесс итераций. Однако это бывает не всегда. Возможны случаи, когда процесс Зейделя сходится медленнее процесса простых итераций. Более того, могут быть случаи, когда процесс простых итераций сходится, а процесс Зейделя расходится.

2.7. Метод релаксации

Рассмотрим одно обобщение метода Зейделя, позволяющее иногда в несколько раз ускорить сходимость итерационной последовательности.

Пусть $z_i^{(k)}$ – обозначение i-й компоненты k-го приближения к решению системы (4.16) по методу Зейделя, а обозначение $x_i^{(k)}$ будем использовать для i-й компоненты k-го приближения новым методом. Этот метод определим равенством

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}), \tag{4.28}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots;$ $x_i^{(0)}$ – задаваемые начальные значения; ω – числовой параметр, называемый *параметром релаксации*. Очевидно, при $\omega = 1$ метод (4.28), называемый методом релаксации совпадает с методом Зейделя.

Пользуясь введенными обозначениями, запишем на основе (4.26) дополнительное к (4.28) равенство для выражения компонент векторов $\mathbf{z}^{(k)} = \left\{ z_i^{(k)} \right\}_{i=1}^{n}$ через компоненты векторов $\mathbf{x}^{(k)} = \left\{ x_i^{(k)} \right\}_{i=1}^{n}$:

$$z_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right). \qquad (4.29)$$

Таким образом, метод релаксации можно понимать как поочередное применение формул (4.28) и (4.29) при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$. Подставив (4.29) в (4.28), получим

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (4.30)$$

Перейдем к векторно-матричной форме записи процесса релаксации. С этой целью перепишем (4.30) в виде

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = (1-\omega) a_{ii} x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \omega b_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и далее, учитывая аддитивное представление матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R}$, получаем векторно-матричный итерационный процесс в неявной форме

$$(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L}) \mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega) \mathbf{D} \mathbf{x}^{(k)} - \omega \mathbf{R} \mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b}.$$

Умножив последнее равенство слева на матрицу $(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1}$, приходим к эквивалентному (4.30) методу простых итераций

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} ((1-\omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{R}) \mathbf{x}^{(k)} + \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}. \qquad (4.31)$$

Заметим, что при $\omega = 1$ метод релаксаций представляет собой метод Зейделя.

Представление метода релаксации (4.30) в виде (4.31) позволяет сделать для него некоторые утверждения о сходимости на основании соответствующих теорем о сходимости МПИ. Например, можно применить теорему 4.1 и следствие 4.1, полагая в них $\mathbf{B} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} ((1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{R})$, правда, получаемые при этом результаты вряд ли будут вызывать интерес. Более глубокие результаты на этом пути получают, изучая спектральные свойства таких матриц **B**. Так, установлено, что для сходимости процесса (4.30), необходимо, чтобы $\omega \in (0, 2)$. Для некоторых классов СЛАУ (4.16) это требование к параметру релаксации является и достаточным.

Теорема 4.2. *Для нормальной системы* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *метод релаксации* (4.30) *сходится при любом* $\mathbf{x}^{(0)}$ *и любом* $\omega \in (0, 2)$.

Поскольку итерационный процесс (4.30) содержит параметр, естественно распорядиться им так, чтобы сходимость последовательности $\left\{ \mathbf{x}^{(k)} \right\}$ была наиболее быстрой. В общем случае задача нахождения оптимального значения ω не решена, поэтому на практике чаще всего применяют метод проб и ошибок.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Цель работы

Научиться применять рассмотренные прямые и итерационные методы к решению систем линейных алгебраических уравнений; выявить преимущества и недостатки прямых методов решения СЛАУ перед итерационными.

Задание к лабораторной работе

Задана система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

1. Найти решение системы с помощью прямого метода (согласно варианту) по расчетным формулам.
2. Решить данную систему итерационным методом (согласно варианту) по расчетным формулам с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
3. Убедиться в правильности расчетов, проведя вычисления в векторно-матричной форме и с помощью функции solve программы Maple.
4. Сравнить полученные результаты, сделать выводы.

N	**A**	**b**	Методы
1	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -17 \\ -22 \\ 22 \\ 39 \\ -9 \end{pmatrix}$	1) метод Гаусса 2) метод последовательных приближений
2	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 22 \\ 35 \\ -3 \\ 38 \\ 44 \end{pmatrix}$	1) метод главных элементов 2) метод Зейделя
3	$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 27 \\ -10 \\ 41 \\ -24 \\ 22 \end{pmatrix}$	1) метод квадратных корней 2) метод релаксации
4	$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & -5 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 28 \\ -17 \\ -28 \\ -3 \\ 24 \end{pmatrix}$	1) метод Холецкого 2) метод последовательных приближений
5	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ -4 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -17 \\ 12 \\ -5 \\ -20 \\ -15 \end{pmatrix}$	1) метод Гаусса 2) метод Зейделя

6	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -4 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix}$	1) метод главных элементов 2) метод релаксации
7	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & -3 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 29 \\ 48 \\ -35 \\ 7 \\ -29 \end{pmatrix}$	1) метод квадратных корней 2) метод простых итераций
8	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	1) метод Холецкого 2) метод Зейделя
9	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -1 & -4 \\ -3 & -5 & -3 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -31 \\ 2 \\ 28 \\ 34 \\ 19 \end{pmatrix}$	1) метод Гаусса 2) метод релаксации
10	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 1 \\ 17 \\ -26 \end{pmatrix}$	1) метод главных элементов 2) метод последовательных приближений
11	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & -2 & -5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -10 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$	1) метод квадратных корней 2) метод Зейделя
12	$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 & -5 & 4 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -54 \\ -13 \\ -3 \\ -24 \\ -1 \end{pmatrix}$	1) метод Холецкого 2) метод релаксаций

13	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & -1 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 \\ 32 \\ 30 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$	1) метод Гаусса 2) метод последовательных приближений
14	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ -27 \\ -14 \\ -15 \\ -49 \end{pmatrix}$	1) метод главных элементов 2) метод Зейделя
15	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & 3 & -4 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -26 \\ 12 \\ 25 \\ -4 \\ 28 \end{pmatrix}$	1) метод квадратных корней 2) метод релаксации

Требования к оформлению отчета по работе

Отчет по работе должен содержать:
1) цель работы;
2) постановка задачи;
3) листинги программ с необходимыми комментариями;
4) результаты работы программ (оформлены в виде таблиц, увязывающих входные данные и результаты);
5) анализ полученных результатов (оценка и сравнение векторов невязки для прямого метода и итерационного метода при различном числе итераций n);
6) выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Какую систему называют системой линейных алгебраических уравнений?
2. При каких условиях СЛАУ имеет единственное решение?
3. Какую систему называют плохо обусловленной, и как это отражается на погрешности решения?
4. На какие группы делятся методы приближенного решения СЛАУ?
5. Дайте понятие прямого метода решения СЛАУ.
6. Дайте понятие итерационного метода решения СЛАУ.
7. К какой группе методов относится метод Гаусса решения СЛАУ?
8. В чем состоит идея метода Гаусса решения СЛАУ?
9. Сколько этапов включает реализация метода Гаусса решения СЛАУ?
10. Как организуется прямой ход метода Гаусса
11. Как строится обратный ход метода Гаусса?
12. Сколько операций необходимо для реализации метода Гаусса?
13. В чем состоит отличие схемы Гаусса с выбором главного элемента от классической схемы Гаусса?

14. Каковы главные особенности метода квадратных корней решения СЛАУ?
15. Как можно симметризовать произвольную СЛАУ?
16. В чем состоит принцип реализации метода квадратных корней?
17. Как организуется прямой ход метода квадратных корней?
18. Как организуется обратный ход метода квадратных корней?
19. В чем состоит основной принцип реализации метода Холецкого решения СЛАУ?
20. Как организуется прямой ход метода Холецкого?
21. Как организуется обратный ход метода Холецкого?
22. Сформулируйте задачу о неподвижной точке.
23. По каким формулам строится итерационный процесс метода простых итераций?
24. Сформулируйте достаточные условия сходимости метода простых итераций?
25. Как привести СЛАУ к виду удобному для итераций?
26. Как реализовать метод простых итераций в векторно-матричном виде?
27. В чем состоит главное отличие метода Зейделя от метода простых итераций?
28. По каким формулам строится итерационный процесс метода Зейделя?
29. Как реализовать метод Зейделя в векторно-матричном виде?
30. Что собой представляет метода релаксации?
31. Каковы условия сходимости метода релаксации?
32. Как реализовать метод релаксации в векторно-матричном виде?

Задачи

1. Используя метод Гаусса, решить следующие системы уравнений с погрешностью 10^{-4}:

$$1)\ \begin{cases} 1.17x_1 + 0.53x_2 - 0.84x_3 = 1.15, \\ 0.64x_1 - 0.72x_2 - 0.43x_3 = 0.15, \\ 0.32x_1 + 0.43x_2 - 0.93x_3 = -0.48; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 1.20x_1 - 0.20x_2 + 0.30x_3 = -0.60, \\ -0.20x_1 + 1.60x_2 - 0.10x_3 = 0.30, \\ -0.30x_1 + 0.10x_2 - 1.50x_3 = 0.40. \end{cases}$$

2. Методом квадратных корней решить систему уравнений

$$\begin{cases} 16x_1 - 8x_2 - 4x_3 = -8, \\ -8x_1 + 13x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 7, \\ -4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 6, \\ -3x_2 + 3x_4 = -3. \end{cases}$$

3. При каких α, β сходится метод простой итерации $x^{(k+1)} = \mathbf{B}x^{(k)} + \mathbf{c}$, где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

4. Сделать по пять итераций метода Якоби и Зейделя для системы

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 = -5. \end{cases}$$

Сколько верных знаков можно гарантировать в приближенных решениях, полученных тем и другим способом?

5. Решить методом Гаусса-Зейделя с погрешностью 10^{-3} системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} 5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9, \\ 3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4, \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 7.1x_1 + 6.8x_2 + 6.1x_3 = 7.0, \\ 5.0x_1 + 4.8x_2 + 5.3x_3 = 6.1, \\ 8.2x_1 + 7.8x_2 + 7.1x_3 = 5.8. \end{cases}$$