ГЛАВА 1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§1. ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

В вычислительной практике часто приходится иметь дело с функциями $f(x)$, заданными таблицами своих значений для некоторого конечного множества значений аргумента x: $f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2), ...,\ f(x_n)$. Например, когда аналитическое задание функции связано с большими вычислительными трудностями, для упрощения составляют таблицу нескольких значений этой функции и переходят к ее новому более простому аналитическому представлению. В этом случае строят функцию $\varphi(x)$, достаточно простую для вычислений, которая в заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$, принадлежащего области определения $f(x)$, приближенно представляет функцию $f(x)$ с той или иной степенью точности, и при решении задачи вместо функции $f(x)$ оперируют с функцией $\varphi(x)$. Задача построения такой функции $\varphi(x)$ называется *задачей интерполирования*.

Таким образом, задача интерполирования функции представляет собой задачу определения параметров a_j из системы уравнений

$$\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_n) = f(x_i),$$

где $i,\ j \in \{0, ..., n\}$.

Среди способов интерполирования наиболее распространен случай линейного интерполирования, когда приближение ищется в виде

$$g(x; a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ – фиксированные функции; значения коэффициентов a_i определяются из условий совпадения с приближаемой функцией в узлах интерполяции x_j:

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x_j),\ j = 0, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Возьмем в качестве $\varphi_i(x)$ последовательность $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$. Функции этой системы линейно независимы на любом отрезке. Таким образом, функцию $f(x)$ можно приблизить интерполяционным многочленом вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \tag{1.2}$$

Тогда система уравнений (1.1) примет вид

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = f(x_j),\ j = 0, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Далее предположим, что все x_j различные. Определитель этой системы имеет вид

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Это определитель Вандермонда. Он равен $\triangle = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$. В силу наших предположений о x_j определитель отличен от нуля. Следовательно, система (1.3) всегда имеет решение, и притом единственное. Таким образом, доказано существование и единственность интерполяционного многочлена вида (1.2).

§2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГРАНЖА И НЬЮТОНА

2.1. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа

Можно получить явные представления интерполяционного многочлена (1.2), не прибегая к непосредственному решению системы (1.3).

Пусть δ_i^j есть символ Кронекера, определенный соотношениями

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Задача интерполирования будет решена, если удастся построить многочлены $\Phi_i(x)$ степени не выше n такие, что $\Phi_i(x_j) = \delta_i^j$ при $i, j = 0, \ldots, n$.

Итак, чтобы отыскать $\Phi_i(x)$, нужно найти многочлен степени n, обращающийся в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и равный 1 в точке x_i. Отсюда

$$\Phi_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n).$$

Так как $\Phi_i(x_i) = 1$, то

$$1 = A(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n).$$

Получаем окончательно:

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

и

$$g(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} + \cdots$$
$$\cdots + f(x_n)\frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}.$$

Этот многочлен и решает задачу интерполирования. Будем называть его *интерполяционным многочленом Лагранжа* и обозначать $L_n(x)$, где n – степень интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен Лагранжа может быть записан в форме

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1.4}$$

Пример 1.1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

Решение. В этом случае

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} + 3\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} + 2\frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)} + 5\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)} =$$

$$= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

Легко проверить, что если узлы x_i являются равноотстоящими, т. е. $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h,$ то многочлен Лагранжа можно записать следующим образом

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(x_i) \frac{C_n^i}{t-i},$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Пример 1.2. Построить многочлен Лагранжа по следующим данным:

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	4	1	2

Решение. Воспользуемся формулой Лагранжа для равноотстоящих узлов. В этом случае $h = 1$. Отсюда $t = x$. Получаем

$$L_3(x) = (-1)^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{3!} \left(2 \cdot \frac{C_3^0}{t} - 4 \cdot \frac{C_3^1}{t-1} + 1 \cdot \frac{C_3^2}{t-2} - 2 \cdot \frac{C_3^3}{t-3} \right) =$$

$$= -\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{6} \left(\frac{2}{x} - \frac{12}{x-1} + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \right) = \frac{3}{2}x^3 - 7x^2 + \frac{15}{2}x + 2.$$

2.2. Интерполяционная формула Ньютона

2.2.1. Разделенные разности

Возьмем некоторую функцию $f \in R$ и систему узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$. Для этой функции и узлов образуем всевозможные отношения

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0; x_1); \\ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1; x_2); \\ \ldots \\ \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n). \end{cases}$$

Такие отношения называют *разделенными разностями первого порядка*. Получив разделенные разности первого порядка, можно образовать отношения

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0; x_1; x_2); \\ \dfrac{f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)}{x_3 - x_1} = f(x_1; x_2; x_3); \\ \ldots \\ \dfrac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n). \end{cases}$$

Эти отношения называют *разделенными разностями второго порядка*. Вообще, если уже определены разности k-го порядка $f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k})$, то разделенные разности $(k+1)$-го порядка находятся следующим образом

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}) - f(x_{i-1}; x_i; \ldots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}} = f(x_{i-1}; x_i; \ldots; x_{i+k}).$$

Основные свойства разделенных разностей:

1) разделенная разность k-го порядка равна

$$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_k)};$$

2) разделенная разность суммы равна сумме разделенных разностей слагаемых;
3) постоянный множитель можно выносить за знак разделенной разности;
4) разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов.

2.2.2. Вывод формулы Ньютона

Пусть $f \in R$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – узлы интерполирования и $L_k(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для этой функции по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Тогда

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)].$$

Рассмотрим отдельную разность, стоящую в правой части $L_k(x) - L_{k-1}(x)$. Это многочлен степени k, он обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Поэтому

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}),$$

где A – некоторая константа. Для определения величины A положим $x = x_k$. Учитывая $f(x_k) = L_k(x_k)$, получим

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}).$$

Таким образом,

$$A = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})} - \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} f(x_j) \dfrac{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1})\ldots(x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_{k-1})}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_k)} = f(x_0; x_1; \ldots; x_k).$$

Отсюда

$$\begin{gathered} L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \ldots \\ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа носит название *интерполяционного многочлена Ньютона*. Она более удобна для вычислений, чем формула Лагранжа, поскольку добавление одного или нескольких узлов не приводит к повторению всей проделанной работы заново, как это было при вычислениях по формуле Лагранжа.

Пример 1.3. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по данным из примера 1.1:

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

Решение:

		Разделенные разности		
x	$f(x)$	1	2	3
0 2 3 5	1 3 2 5	1 -1 3/2	-2/3 5/6	3/10

$$L_3(x)=1+x\cdot 1+x(x-2)(-\frac{2}{3})+x(x-2)(x-3)\frac{3}{10}=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

2.3. Погрешность интерполирования

Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, мы допускаем погрешность

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x),$$

которая называется погрешностью интерполирования или, что тоже самое, остаточным членом интерполяционной формулы. Ясно, что в узлах интерполирования эта погрешность равна нулю. Оценим погрешность в любой точке $x\in[a,b]$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x)=f(x)-L_n(x)-K\omega_n(x),$$

где $x\in[a,b]$, K – некоторая постоянная и $\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Очевидно,

$$g(x_0)=g(x_1)=\ldots=g(x_n)=0.$$

Подберем постоянную K из условия $g(x)=0$. Тогда

$$K=\frac{f(x)-L_n(x)}{\omega_n(x)}.$$

Предположим, что $f(x)$ имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Функция $g(x)$ имеет не менее $n+2$ нулей на этом отрезке, а именно в $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. На основании теоремы Ролля ее производная $g'(x)$ обращается в нуль по крайней мере $n+1$ раз на $[a,b]$. Применяя теорему Ролля к $g'(x)$, получаем, что ее производная $g''(x)$ обращается в нуль по крайней мере в n точках на $[a,b]$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что существует по крайней мере одна точка $\xi\in(a,b)$, в которой $g^{(n+1)}(\xi)=0$.

Поскольку $g^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-K\cdot(n+1)!,$ из условия $g^{(n+1)}(\xi)=0$ будем иметь

$$K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Следовательно, соотношение $g(x)=0$ можно переписать в виде

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),\ \xi\in[a,b], \tag{1.6}$$

или, полагая $M_{n+1}=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$, получим

$$|f(x)-L_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|. \tag{1.7}$$

Эти два выражения могут служить оценкой отклонения $f(x)$ от $L_n(x)$, если производная $f^{(n+1)}(x)$ может быть оценена.

Остаточный член формулы Ньютона точно такой же, как и у формулы Лагранжа, но его можно записать в другой форме. Для этого рассмотрим

$$f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Отсюда

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} +$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\, f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Итак, $f(x) = L_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\, f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)$. Таким образом,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\, f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n). \qquad (1.8)$$

Сопоставляя (1.6) и (1.8), видим, что существует точка $\xi \in [a, b]$, для которой

$$f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Полученная формула устанавливает связь между разделенной разностью порядка $n+1$ и $(n+1)$-й производной функции $f(x)$.

2.4. Оптимальный выбор узлов интерполирования

Величину $|\omega_n(x)|$, входящую в оценку (1.7), можно минимизировать за счет выбора узлов интерполирования. Задача состоит в том, чтобы подобрать узлы $x_k \in [a, b],\ k = 0, 1, \ldots, n$ с целью минимизировать величину

$$\max_{x\in[a,b]} \left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|.$$

Эта задача решается с помощью многочлена Чебышева, поскольку он является многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на заданном отрезке $[a, b]$ среди всех многочленов степени $n+1$ со старшим коэффициентом 1. Он имеет следующий вид

$$T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos\left((n+1)\cdot \arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a} \right). \qquad (1.9)$$

В качестве узлов интерполирования надо взять корни многочлена (1.9), т.е. точки

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

При этом

$$\max_{x\in[a,b]} \left|\omega_n(x)\right| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

и оценка (1.7) примет вид

$$\left| f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \qquad (1.10)$$

2.5. О сходимости интерполяционного процесса

Возникает вопрос, будет ли стремиться к нулю погрешность интерполирования $f(x)-L_n(x)$, если число узлов n неограниченно увеличивать. Вообще говоря, нет.

Сформулируем определение сходимости интерполяционного процесса. Множество точек x_i, $i=0,1,\dots,n$ таких, что

$$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$$

назовем сеткой на отрезке $[a,b]$ и обозначим через Ω_n. До сих пор предполагалось, что число узлов интерполяции фиксировано. Переходя к изучению сходимости интерполяционного процесса, необходимо рассмотреть последовательность сеток с взрастающим числом узлов, и именно последовательность

$$\Omega_0 = \{x_0^{(0)}\}, \Omega_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}, \dots, \Omega_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}, \dots .$$

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Тогда модно задать последовательность интерполяционных многочленов $L_n[f(x)]$, построенных для функции $f(x)$ по ее значениям в узлах сетки Ω_n.

Говорят, что интерполяционный процесс сходится в точке $x^* \in [a,b]$, если существует

$$\lim_{n\to\infty} L_n[f(x^*)] = f(x^*).$$

Свойство сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависит как от выбора последовательности сеток, так и от гладкости функции $f(x)$.

Известны примеры несложных функций, для которых интерполяционный процесс расходится. Так, последовательность интерполяционных многочленов, построенных для непрерывной функции $f(x)=|x|$ по равноотстоящим узлам на отрезке $[-1,1]$, не сходится к функции $|x|$ ни в одной точке отрезка $[-1,1]$, кроме точек $-1, 0, 1$.

Теорема Фабера. *Какова бы ни была последовательность сеток Ω_n, найдется непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ такая, что последовательность интерполяционных многочленов $L_n[f(x)]$ не сходится к $f(x)$ равномерно на отрезке $[a,b]$.*

Для заданной непрерывной функции можно добиться сходимости за счет выбора расположения узлов интерполяции. Справедлива теорема Марцинкевича.

Теорема Марцинкевича. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то найдется такая последовательность сеток, для которой соответствующий интерполяционный процесс сходится равномерно на $[a,b]$.*

Заметим, что построить такие сетки чрезвычайно сложно и, кроме того, для каждой функции требуется своя сетка.

В практике вычислений избегают пользоваться интерполяционными многочленами высокой степени. Вместо этого применяется кусочно-полиномиальная интерполяция или, как ее еще называют, интерполяция сплайнами.

§3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

Интерполирование многочленом Лагранжа или Ньютона на всем отрезке $[a, b]$ с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязано приводить к повышению точности. Для того чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок $[a, b]$ разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом невысокой степени (так называемая кусочно-полиномиальная интерполяция).

Одним из способов интерполирования на всем отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций. Сплайн-функцией или сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке $[a, b]$ и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Слово «сплайн» (английское «spline») означает гибкую линейку, используемую для проведения гладких кривых через заданные точки плоскости.

Преимуществом сплайнов перед обычной интерполяцией является, во-первых, их сходимость и, во-вторых, устойчивость процесса вычислений.

Рассмотрим один из наиболее распространенных вариантов интерполирования кубическим сплайнами.

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем непрерывную сетку

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначим $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n.$

Сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}_0^n$, называется функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$, функция $s(x)$ является многочленом третьей степени;

б) функция $s(x)$, а также ее первая и вторая производные функции непрерывны на $[a, b]$;

в) равенство значений сплайнов $s(x)$ и аппроксимируемой функции $f(x)$ в узлах интерполирования – условие Лагранжа, т.е. $s_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, s_i(x_i) = f_i$.

Докажем существование и единственность сплайна, определяемого перечисленными условиями. Приведенное ниже доказательство содержит также способ построения сплайна.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$ будем искать функцию $s(x) = s_i(x)$ в виде многочлена третьей степени

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты, подлежащие определению, $i = 1, 2, \ldots, n$ – номер сплайна.

Из условий интерполирования $s_i(x_i) = f_i, i = 1, 2, \ldots, n$ получаем, что $a_i = f_{i.}$. Доопределим, корме того, $a_0 = f_0$.

Далее требование непрерывности функции $s(x)$ приводит к условиям

$$s_{i-1}(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}), i = 2, 3, ..., n.$$

Отсюда, учитывая выражения для функций $s_i(x)$, получаем при $i=1, 2, ..., n$ уравнения

$$a_{i-1} = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3.$$

Обозначая $h_i = x_i - x_{i-1}$, перепишем эти уравнения в виде

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, ..., n. \tag{1.11}$$

Условия непрерывности первой производной $s_{i-1}'(x_{i-1}) = s_i'(x_{i-1}), i = 2, 3, ..., n$ приводят к уравнениям

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}. \tag{1.12}$$

Из условия непрерывности второй производной получаем уравнения

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 2, 3, ..., n. \tag{1.13}$$

Объединяя (1.11)–(1.13) получим систему $3n-2$ уравнений относительно $3n$ неизвестных $b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, ..., n.$

Два недостающих уравнения получают, задавая те или иные граничные условия для $s(x)$. Предположим, например, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f''(a) = f''(b) = 0$. Тогда естественно требовать, чтобы $s''(a) = s''(b) = 0$. Отсюда получаем, $s_1''(x_0) = 0,$ $s_n''(x_n) = 0,$ т.е. $c_1 - h_1 d_1 = 0, c_n = 0$.

Заметим, что условие $c_1 - h_1 d_1 = 0$ совпадает с уравнением (1.13) при $i = 1$, если положить $c_0 = 0$. Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1, 2, ..., n, c_0 = c_n = 0, \tag{1.14}$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, i = 2, 3, ..., n, \tag{1.15}$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, ..., n. \tag{1.16}$$

Убедимся в том, что эта система имеет единственное решение. Исключим из (1.14)–(1.16) переменные $b_i, d_i, i = 1, 2, ..., n-1$ и получим систему, содержащую только $c_i, i = 1, 2, ..., n-1$. Для этого рассмотрим два соседних уравнения (1.16):

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

и вычтем второе уравнение из первого.

Тогда получим

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}.$$

Подставляя найденное выражение для $b_i - b_{i-1}$ в правую часть уравнения (1.15), получим

$$h_i c_i + h_{i-1} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{3} d_{i-1} - \frac{2h_i^2}{3} d_i = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right). \qquad (1.17)$$

Далее из уравнения (1.14) получаем

$$h_i^2 d_i = h_i (c_i - c_{i-1}),\ h_{i-1}^2 d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

и подставляя эти выражения в (1.17), приходим к уравнению

$$h_{i-1} c_{i-2} + 2(h_{i-1} + h_i) c_{i-1} + h_i c_i = 6\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right).$$

Окончательно для определения коэффициентов c_i получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), i = 1, 2, ..., n-1, \\ &c_0 = c_n = 0. \end{aligned} \qquad (1.18)$$

В силу диагонального преобладания система (1.18) имеет единственное решение. Так как матрица системы трехдиагональная, в данном случае устойчива, поэтому решение легко найти методом прогонки.

По найденным коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i определяются с помощью явных формул

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i},\ b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн, определяемый условиями а)–в) и граничными условиями $s''(a) = s''(b) = 0$. Заметим, что можно рассматривать и другие граничные условия.

Метод прогонки

Метод прогонки или **алгоритм Томаса** (англ. Thomas algorithm) используется для решения систем линейных уравнений вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{F}$, где A – трёхдиагональная матрица, т.е. матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix}.$$

Система уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{F}$ равносильна соотношению

$$a_i x_{i-1} + c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i. \qquad (*)$$

Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}. \qquad (**)$$

Используя это соотношение, выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в уравнение (*):

$$(a_i\alpha_i\alpha_{i+1} + c_i\alpha_{i+1} + b_i)x_{i+1} + a_i\alpha_i\beta_{i+1} + a_i\beta_i + c_i\beta_{i+1} - f_i = 0.$$

Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

$$\begin{cases}(a_i\alpha_i\alpha_{i+1} + c_i\alpha_{i+1} + b_i) = 0,\\ a_i\alpha_i\beta_{i+1} + a_i\beta_i + c_i\beta_{i+1} - f_i = 0.\end{cases}$$

Отсюда следует

$$\begin{cases}\alpha_{i+1} = -\dfrac{b_i}{a_i\alpha_i + c_i},\\ \beta_{i+1} = \dfrac{f_i - a_i\beta_i}{a_i\alpha_i + c_i}.\end{cases}$$

Из первого уравнения получим $\alpha_2 = -\dfrac{b_1}{c_1}$ и $\beta_2 = \dfrac{f_1}{c_1}$. После нахождения прогоночных коэффициентов α и β, используя уравнение (**), получим решение системы. При этом

$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = n-1..1,$

$x_n = \dfrac{f_n - a_n\beta_n}{c_n + a_n\alpha_n}.$

Интерполирование кубическими сплайнами является сходящимся процессом, т. е. при неограниченном увеличении числа узлов n соответствующая последовательность сплайн-функций сходится к интерполируемой функции $f(x)$. Оценки погрешности интерполяции $R(x) = f(x) - s(x),$ зависят от выбора сеток и от гладкости $f(x)$.

§4. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

К численному дифференцированию приходится прибегать в том случае, когда функция $f(x)$, для которой нужно найти производную, задана таблично или же функциональная зависимость x и $f(x)$ имеет очень сложное аналитическое выражение. В первом случае методы дифференциального исчисления неприменимы, а во втором случае их применение вызывает значительные трудности.

Тогда вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $\varphi(x)$ и считают производную от $f(x)$ приближенно равной производной от $\varphi(x)$. Естественно при этом производная от $f(x)$ будет найдена с некоторой погрешностью.

Функцию $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

где $\varphi(x)$ – интерполирующая функция, а $R(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы. Дифференцируя это тождество q раз (в предположении, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные q-го порядка), получим

$$f^{(q)}(x) = \varphi^{(q)}(x) + R^{(q)}(x).$$

При замене $f(x)$ интерполирующей функцией $\varphi(x)$ предполагается, что остаточный член мал, но из этого совсем не следует, что мало $R^{(q)}(x)$, ибо производные от малой функции могут быть весьма велики.

В качестве примера получим одну из формул численного дифференцирования, исходя из интерполяционной формулы Ньютона

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \ldots \\ & \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n) + \\ & + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Для сокращения записей обозначим $x - x_i = \alpha_i$. Дифференцируя обе части равенства (1.19) один раз, будем иметь

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & f(x_0; x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots \\ & \ldots + (\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2} + \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}) \times f(x_0; x_1; \ldots; x_n) + \\ & + \frac{d\omega_n(x)}{dx} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \omega_n(x) \frac{df(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx}. \end{aligned}$$

За приближенное значение первой производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$\begin{aligned} L_n'(x) = {} & f(x_0; x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots \\ & \ldots + (\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2} + \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}) \times f(x_0; x_1; \ldots; x_n). \end{aligned}$$

Дифференцируя еще раз, получим:

$$\begin{aligned} f''(x) = {} & 2 f(x_0; x_1; x_2) + 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots \\ & \ldots + 2(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}) \times f(x_0; x_1; \ldots; x_n) + \\ & + \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + 2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{df}{dx}(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \frac{d^2 f(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx^2}\omega_n(x). \end{aligned}$$

За приближенное значение второй производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$\begin{aligned} L_n''(x) = {} & 2 f(x_0; x_1; x_2) + 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots \\ & \ldots + 2(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}) \times f(x_0; x_1; \ldots; x_n). \end{aligned}$$

В общем случае при $q \le n$ получим

$$\begin{aligned} f^{(q)}(x) = {} & q![f(x_0; x_1; \ldots; x_q) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_q) f(x_0; x_1; \ldots; x_{q+1}) + \\ & + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \ldots + \alpha_q\alpha_{q+1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_{q+2}) + \ldots \\ & \ldots + (\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-q-1} + \ldots + \alpha_q\alpha_{q+1}\ldots\alpha_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n)] + \\ & + \frac{d^q}{dx^q}[\omega_n(x) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)]. \end{aligned}$$

Остаточный член при численном отыскании производной порядка q может быть представлен в виде

$$R = \sum_{i=0}^{n} \frac{q!}{(q-i)!(n+i+1)!} f^{(n+i+1)}(\xi_i)\omega_n^{(q-i)}(x),$$

где ξ_i – некоторые точки, заключенные в интервале между наибольшим и наименьшим из чисел $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Пример 1.4. По таблице

x	10°	14°	16°	20°
$\sin(x)$	0,173648	0,241922	0,275637	0,342020

используя формулы численного дифференцирования, найти $\cos(15^\circ)$ и $\sin(15^\circ)$.

Решение. Составим таблицу разделенных разностей:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;\,x_{i-1})$	$f(x_i;\,x_{i+1};\,x_{i+2})$	$f(x_i;\,x_{i+1};\,x_{i+2};\,x_{i+3})$
10° 14° 16° 20°	0,173648 0,241922 0,275637 0,342020	0,0170685 0,0168575 0,0165955	–0,00003517 –0,00004362	–0,00000084

Отсюда, учитывая, что $\alpha_0 = 5, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$, получим

$$\cos 15^\circ = [\,f(x_0;\,x_1) + (\alpha_0+\alpha_1)\,f(x_0;\,x_1;\,x_2) + (\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)\,f(x_0;\,x_1;\,x_2;\,x_3)]\frac{180}{\pi} =$$

$$= [0,0170685 - 0,000211 + 0,00000084]\cdot 57,295779 = 0,965912.$$

Точное значение с шестью верными знаками $\cos 15^\circ = 0,965926$.

Используя формулу для второй производной, получим:

$$\sin 15^\circ = -2[\,f(x_0;\,x_1;\,x_2) + (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\,f(x_0;\,x_1;\,x_2;\,x_3)](\frac{180}{\pi})^2 =$$

$$= 2[0,00003517 + 5\cdot 0,00000084]\cdot 3282,8063 = 0,257027.$$

Точное значение с шестью верными знаками $\sin 15^\circ = 0,258819$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Цель работы:

ознакомиться с принципами приближения функций интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона; научиться составлять для функции $f(x)$ многочлены Лагранжа и Ньютона произвольной степени, а также исследовать способы минимизации погрешности интерполирования; изучить основные аспекты сплайн-интерполяции; ознакомиться с принципами численного дифференцирования.

Задание к лабораторной работе

1. Задана функция $y = f(x)$ в явном виде. Определить функцию $f(x)$ таблично, вычислив значения $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = a + hi$, $i = 1, \ldots, n$ на отрезке $[a, b]$ (n выбрать произвольно). Написать программу в *Maple* для приближения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона при n узлах интерполирования. На одном чертеже построить графики приближающих многочленов и функции $f(x)$.
2. Сравнить качества приближения при различном числе n узлов интерполирования, оценив погрешность приближения. Результаты оформить таблицей. Сделать выводы.

3. Минимизировать величину погрешности интерполирования, построив интерполяционные многочлены для исходной функции по узлам Чебышева при различном числе n узлов (как в п.2). Результаты оформить таблицей. Сравнить полученные результаты с результатами интерполирования по равноотстоящим узлам.
4. Провести интерполяцию исходной функции кубическими сплайнами на отрезке $[a, b]$ при различном числе n узлов. Оценить погрешность интерполирования для каждого n. Результаты оформить таблицей. Сравнить качества сплайн и полиномиальной интерполяций.
5. Для исходной функции найти значение первой и второй производных в точке $x = \frac{(a+b)}{2}$, используя принцип численного дифференцирования. Сравнить полученные результаты с точными значениями производных при различном числе n узлов интерполирования. Результаты оформить таблицей. Сделать выводы.

№ варианта	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{[a, b]}$
1	$\ln(\sin(\sqrt{x}))$	$[1; 4]$
2	$x^3 \cos(x^2)$	$[1; 3]$
3	$x + e^{-x^2}$	$[0; 2]$
4	$x^2 \cos(x)$	$[1; 5]$
5	$x \sin(x^2)$	$[1; 3]$
6	$0,4^{x \sin(x)}$	$[3; 5]$
7	$1/(1 + x + x^2)$	$[-2; 2]$
8	$(2x + 3)\sin x$	$[0; 5]$
9	$e^{2x} \sin 3x$	$[2; 4]$
10	$x^2 \operatorname{arctg}(x/3)$	$[-2; 2]$
11	$\sqrt{x} \cdot tg(x^3)$	$[0; 0,5]$
12	$\sqrt{\arccos(x)}$	$[0; 0,5]$
13	$x \cdot arctg \frac{1}{2x}$	$[1; 5]$
14	$\cos(\sqrt{x})$	$[0; 2]$
15	$\ln(\cos(2x))$	$[\pi/4; 3\pi/4]$

Требования к оформлению отчета по работе

Отчет по работе должен содержать:
1) цель работы;
2) постановку задачи;
3) листинги программ с необходимыми комментариями;
4) результаты работы программ (в виде таблиц, увязывающих входные данные – число узлов интерполирования и результаты – погрешность интерполирования);
5) анализ полученных результатов;
6) выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Когда возникает необходимость интерполирования функций?
2. В чем состоит задача интерполирования функций?
3. Что такое линейная интерполяция?
4. Покажите однозначную разрешимость задачи интерполяции алгебраическими многочленами.
5. Обоснуйте существование и единственность интерполяционного многочлена.
6. Выведите интерполяционную формулу Лагранжа.
7. Что называют разделенной разностью?
8. Перечислите свойства разделенных разностей.
9. Выведите интерполяционную формулу Ньютона.
10. Чем интерполяционная формула Ньютона удобней формулы Лагранжа?
11. Как оценивается погрешность интерполяции интерполяционными многочленами?
12. На основе записи интерполяционного многочлена Лагранжа получите оценку погрешности интерполирования.
13. Каким способом можно минимизировать величину погрешности интерполирования?
14. По каким узлам проводят интерполяцию, чтобы погрешность была наименьшей? Какова при этом величина погрешности?
15. Что называют сходимостью интерполяционного процесса?
16. От чего зависит сходимость интерполяционного процесса?
17. Что называют сплайном?
18. В чем состоит преимущество сплайнов перед интерполяционными многочленами?
19. Сформулируйте понятие кубического сплайна.
20. Докажите существование и единственность сплайна.
21. Для чего предназначен метод прогонки?
22. Опишите алгоритм метода прогонки.
23. От чего зависит погрешность интерполирования кубическими сплайнами?
24. В каких случаях прибегают к численному дифференцированию?
25. В чем состоит принцип численного дифференцирования?
26. Как оценивается погрешность численного дифференцирования?

Задачи

1. Покажите, что интерполяционный многочлен Лагранжа может быть построен по рекуррентным формулам

$$L_0(x) = f(x_0),$$

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + (f(x_k) - L_{k-1}(x_k))\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)},$$

где $\omega_{k+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_k).$

2. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, получите следующие формулы

$$\frac{1}{m-n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_m^n C_n^k}{m-k} \quad (m > n),$$

$$\frac{m}{m-n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{k}{m-k} C_m^n C_n^k \quad (m > n).$$

3. При интерполировании функций с равноотстоящими узлами $x_i = a + i \cdot h,\ h > 0,\ i = 0, \ldots, n$, покажите справедливость равенств

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1!}\vartriangle y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\vartriangle^2 y_0 + \ldots + \vartriangle^n y_0,$$

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{\vartriangle^n y_0}{n!h^n}.$$

4. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях параметра A оценка погрешности не превосходит 10^{-5}?
5. Оцените погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$, построенным по узлам $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2$ в точках $x = 0{,}05$ и $x = 0{,}15$.
6. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0,\ P_3(1) = 1,\ P_3(2) = 2,\ a_3 = 1$.
7. Оценить, с какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 100{,}5$, если известны значения $\ln 100, \ln 101, \ln 102, \ln 103$.
8. С какой точностью можно вычислить $\sin 5^\circ$ по формуле Лагранжа, если известны значения $\sin 0^\circ, \sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ$.
9. По следующим данным построить интерполяционный многочлен
   а) Лагранжа; б) Ньютона:

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	1	3	2	5	6

10. Дана таблица значений функции $y = \lg(x)$:

x_i	11	12	13	14	15
y_i	1,0414	1,0792	1,1139	1,1461	1,1761

   a) С помощью интерполяционной формулы Лагранжа вычислите $\lg(11{,}6)$, оцените погрешность и сравните ее с фактической ошибкой.
   b) С какой точностью можно вычислить по этим данным $\lg(11{,}6)$ посредством интерполяционной формулы Лагранжа третьей степени? Запишите расчетную формулу для вычисления $\lg(11{,}6)$.
   c) Можно ли в данных условиях построить интерполяционный многочлен пятой степени?
11. Дана таблица значений многочлена третьей степени:

x	0	2	3	5	6	-1
$f(x)$	-1	113	381	1754	3029	-16

   Известно, что допущена одна ошибка. Найдите ошибку и исправьте ее. По формуле Ньютона вычислите $f(1),\ f(4),\ f(7)$. Восстановите исходный многочлен.
12. Покажите, что если аргументы умножить на одну и ту же константу c, а значения функции оставить неизменными, то разделенные разности $f(x_0; x_1; \ldots; x_n)$ умножатся на c^{-n}.
13. Покажите, что разделенные разности не изменятся, если аргументы увеличить/уменьшить на одну и ту же величину, а значения функции оставить неизменными.