ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§1. ЗАДАЧА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по *формуле Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{2.1}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, вследствие чего вычисление определенного интеграла по формуле (2.1) может быть затруднительным или даже практически невыполнимым.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому приходится прибегать к приближенному вычислению определенных интегралов.

Для построения формул приближенного вычисления интегралов используем замену функции $f(x)$ интерполирующей функцией $\varphi(x)$.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b p(x)f(x)dx,\ p(x) > 0, \tag{2.2}$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а весовая функция $p(x)$ непрерывна на интервале (a, b). Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \varphi(x) + R(x), \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$ – интерполяционный многочлен, а $R(x)$ – остаточный член. Тогда

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)dx + \int_a^b p(x)R(x)dx.$$

Первый член справа будет давать формулу численного интегрирования, а второй – остаточный член этой формулы. Интерполяционный многочлен $\varphi(x)$ можно представить в виде $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi_i(x).$

Будем предполагать, что интегралы $\int_a^b p(x)\Phi_i(x)dx = c_i$ мы умеем вычислять точно. Они не зависят от функции $f(x)$. Их можно использовать для вычисления интегралов $\int_a^b p(x)f(x)dx$ при произвольных $f(x)$. Тогда формула приближенного интегрирования будет иметь вид

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i). \tag{2.4}$$

§2. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА-КОТЕСА

2.1. Принцип построения формул Ньютона-Котеса

Рассмотрим формулы для приближенного вычисления интегралов, которые получаются путем замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа для равноотстоящих узлов. Эти формулы носят название *формул Ньютона-Котеса*.

Пусть для данной функции $f(x)$ требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Выбрав шаг $h=\dfrac{b-a}{n}$, разобьем отрезок $[a,b]$ равноотстоящими точками $x_0=a,\ x_i=x_0+ih\ (i=1,2,\dots,n-1),\ x_n=b$ на n равных частей. Положим, для функции $f(x)$ известны в $n+1$ точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ отрезка $[a,b]$ ее значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Заменяя функцию $f(x)$ соответствующим интерполяционным многочленом Лагранжа $L_n(x)$, получим приближенную квадратурную формулу

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{2.5}$$

где A_i – некоторые постоянные коэффициенты.

Найдем явные выражения для коэффициентов A_i формулы (2.5). По заданным значениям $f(x_i), i=1,\dots,n$ построим интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i} f(x_i)\frac{C_n^i}{n!}\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i}, \tag{2.6}$$

где $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Заменяя в формуле (2.5) функцию $f(x)$ полиномом $L_n(x)$, в силу формулы (2.6) имеем

$$A_i=\int\limits_{x_0}^{x_n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{n!}\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i}dx. \tag{2.7}$$

Поскольку $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, то $dt=\dfrac{dx}{h}$. Тогда, сделав замену переменных в определенном интеграле, формулу (2.7) можно записать в виде

$$A_i=h\frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{n!}\int\limits_0^n\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i}dt\ (i=0,1,\dots,n).$$

Так как $h=\dfrac{b-a}{n}$, то обычно полагают $A_i=(b-a)H_i$, где

$$H_i=\frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{n!}\int\limits_0^n\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i}dt\ (i=0,1,\dots,n). \tag{2.8}$$

Коэффициенты H_i называются *коэффициентами Котеса*.

Таким образом, квадратурная формула (2.5) при этом принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{i=0}^{n}H_i f(x_i). \tag{2.9}$$

Нетрудно убедиться, что справедливы соотношения:

1. $\sum_{i=0}^{n} H_i = 1$;

2. $H_i = H_{n-i}$.

2.2. Формулы прямоугольников

Метод прямоугольников – это, самый простой метод приближённого вычисления определённого интеграла. Суть метода заключается в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке.

Вывод этой формулы основан на замене определенного интеграла интегральной суммой. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Получим

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}),$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Если положить $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$, то получим формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).$$

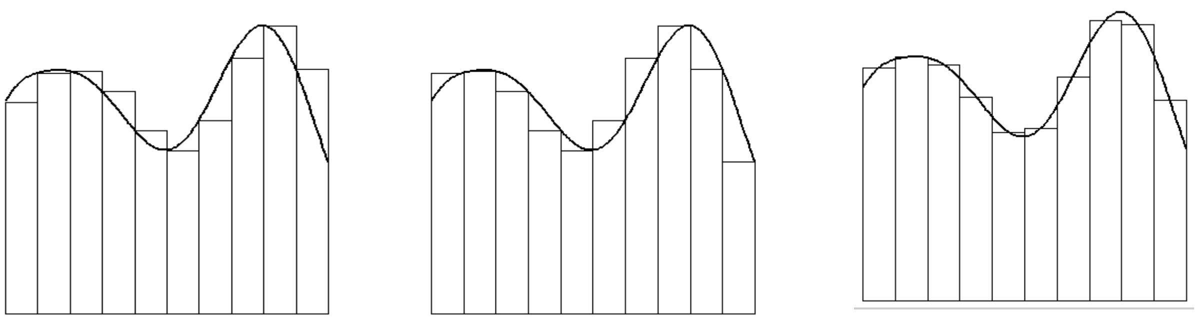
В зависимости от выбора точки $\xi_i, i = 0..n-1$ стандартно выделяют три модификации метода прямоугольников:

1. Формула левых прямоугольников: $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$;

2. Формула правых прямоугольников: $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))$;

3. Формула средних прямоугольников: $\int_a^b f(x)dx \approx h\left(f\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)\right)$.

С геометрической точки зрения для неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$ точное значение определенного интеграла представляет собой площадь криволинейной трапеции, а приближенное значение по методу прямоугольников – площадь ступенчатой фигуры.



а) Формула левых прямоугольников | б) Формула правых прямоугольников | в) Формула средних прямоугольников

Рис. 2.1. *Метод прямоугольников*

Остаточный член формул левых и правых прямоугольников равен

$$R = -\frac{(b-a)h}{2} f'(\xi), \text{где } \xi \in [a, b].$$

Остаточный член формулы средних прямоугольников равен

$$R = -\frac{(b-a)h^2}{2} f''(\xi), \text{где } \xi \in [a, b].$$

Пример 2.1. Вычислить значение интеграла $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ по формуле прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Решение. В качестве метода решения вы берем формулу левых прямоугольников. Результаты вычислений приведены в таблице

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	0,5
2	0,2	0,2
3	0,3	0,1
4	0,4	0,0588235
5	0,5	0,0384615
6	0,6	0,027027
7	0,7	0,02
8	0,8	0,0153846
9	0,9	0,0121951

Полагая $h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$, по формуле левых прямоугольников получаем $I \approx h\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}80998.$

2.3. Обобщенная формула трапеций

Применяя формулу (2.8), при $n=1$ имеем $H_0 = H_1 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2}$. Отсюда получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) \tag{2.10}$$

известную *формулу трапеций* для приближенного вычисления определенного интеграла.

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ разделим промежуток интегрирования $[a, b]$ на n равных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ и к каждому из них применим формулу трапеций (2.10). Полагая $h = \frac{b-a}{n}$ и обозначая через $y_i = f(x_i)$, будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}). \tag{2.11}$$

Квадратурная формула (2.11) носит название *обобщенной формулы трапеций*.

С геометрической точки зрения для неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ точное значение определенного интеграла, представляющее собой площадь криволинейной трапеции, аппроксимируется прямоугольными трапециями.

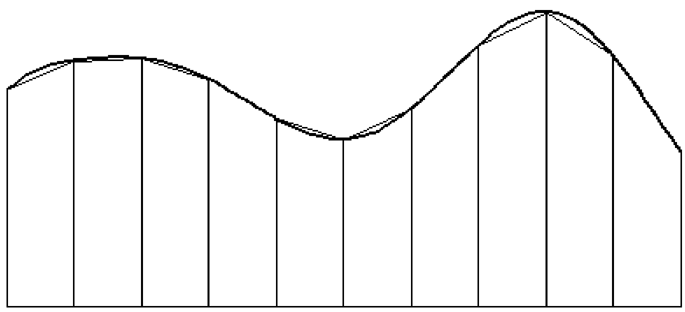


Рис. 2.2. *Метод трапеций.*

Остаточный член формулы (2.11) равен

$$R=-\frac{nh^3}{12}f''(\xi)=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi),$$

где $\xi\in[a,b]$.

Пример 2.2. Вычислить значение интеграла $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+1}$ по обобщенной формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Решение. Результаты вычислений приведены в таблице

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	0,990099
2	0,2	0,961588
3	0,3	0,917431
4	0,4	0,862069
5	0,5	0,8
6	0,6	0,735294
7	0,7	0,671141
8	0,8	0,609756
9	0,9	0,552486
10	1	0,5

Полагая $h=\frac{1-0}{10}=0{,}1$, по формуле (2.11) получаем $I\approx h(\frac{y_0}{2}+\frac{y_{10}}{2}+\sum\limits_{i=1}^{9}y_i)=0{,}784981.$

2.4. Обобщенная формула Симпсона (параболическая формула)

Применяя формулу (2.8) при $n=2$, имеем

$$H_0=H_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^2(t-1)(t-2)dt=\frac{1}{4}(\frac{8}{3}-6+4)=\frac{1}{6},$$

$$H_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\int\limits_0^2t(t-2)dt=\frac{2}{3},$$

Следовательно, так как $x_2-x_0=2h$, имеем

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)). \tag{2.12}$$

Формула (2.12) носит название *формулы Симпсона*.

Пусть $n=2m$ и $y_i = f(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ – значения функции $f(x)$ для равноотстоящих точек $a=x_0, x_1,\ldots, x_n=b$ с шагом $\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$.

Применяя формулу Симпсона (2.12) к каждому удвоенному промежутку $[x_0, x_2],[x_2, x_4],\ldots,[x_{2m-2}, x_{2m}]$ длины $2h$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}).$$

Отсюда получаем *обобщенную формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})]. \tag{2.13}$$

Введя обозначения $\sigma_1 = y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1}, \sigma_2 = y_2+y_4+\ldots+y_{2m}$, формулу (2.13) можно записать в более простом виде

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0+y_n)+4\sigma_1+2\sigma_2]. \tag{2.14}$$

Остаточный член обобщенной формулы Симпсона (2.14) равен

$$R = -\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi),$$

где $\xi \in [a,b]$.

Пример 2.3. С помощью формулы Симпсона вычислить интеграл $I=\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$, приняв $n=10$.

Решение. Имеем $2m=10$, отсюда $h=\frac{1-0}{10}=0{,}1$. Результаты вычислений приведены в таблице

i	x_i	y_{2j-1}	y_{2j}
0	0		$y_0 = \underline{1{,}00000}$
1	0,1	0,90909	
2	0,2		0,83333
3	0,3	0,76923	
4	0,4		0,71429
5	0,5	0,66667	
6	0,6		0,62500
7	0,7	0,58824	
8	0,8		0,55556
9	0,9	0,52632	
10	1		$\underline{0{,}50000 = y_n}$
$\sum$		$\underline{3{,}45955}$ (σ_1)	$\underline{2{,}72818}$ (σ_2)

По формуле (2.14) получаем $I \approx \frac{h}{3}(y_0+y_n+4\sigma_1+2\sigma_2) = 0{,}69315.$

§3. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ЧЕБЫШЕВА

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i), \qquad (2.15)$$

где B_i – постоянные коэффициенты.

Чебышев предложил выбрать абсциссы t_i таким образом, чтобы:

1) коэффициенты B_i были равны между собой;
2) квадратурная формула (2.15) являлась точной для всех полиномов до степени n включительно.

Покажем, как могут быть найдены в этом случае величины B_i и t_i. Полагая $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = B$ и учитывая, что при $f(t) \equiv 1$, будем иметь $2 = \sum_{i=1}^{n} B_i$. Отсюда получаем

$$B = \frac{2}{n}.$$

Следовательно, *квадратурная формула Чебышева* имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i). \qquad (2.16)$$

Для определения абсцисс t_i заметим, что формула (2.16), согласно условию 2, должна быть точной для функций вида $f(t) = t, t^2, \ldots, t^n$. Подставляя эти функции в формулу (2.16), получим систему уравнений

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = \dfrac{n}{3}, \\ t_1^3 + t_2^3 + \ldots + t_n^3 = 0, \\ t_1^4 + t_2^4 + \ldots + t_n^4 = \dfrac{n}{5}, \\ \quad \ldots \\ t_1^n + t_2^n + \ldots + t_n^n = \dfrac{n[1-(-1)^{n+1}]}{2(n+1)}, \end{cases} \qquad (2.17)$$

из которой могут быть определены неизвестные t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Чебышев показал, что решение системы (2.17) сводится к нахождению корней некоторого алгебраического уравнения степени n. В таблице приведены значения корней t_i системы (2.17) для $n = 2, 3, \ldots, 7$.

n	x_i	y_i
2	1; 2	$\mp 0,577350$
3	1; 3	$\mp 0,707107$
	2	0
4	1; 4	$\mp 0,794654$
	2; 3	$\mp 0,187592$
5	1; 5	$\mp 0,832498$
	2; 4	

6 7	3 1; 6 2; 5 3; 4 1; 7 2; 6 3; 5 4	$\mp 0,374541$ 0 $\mp 0,866247$ $\mp 0,422519$ $\mp 0,266635$ $\mp 0,883862$ $\mp 0,529657$ $\mp 0,323912$ 0

Заметим, что система (2.17), как показал С. Н. Берштейн, при $n=8$ и $n\geq 10$ не имеет действительных решений. В этом состоит принципиальный недостаток квадратурной формулы Чебышева.

Чтобы применить квадратурную формулу Чебышева к интегралу вида $\int_a^b f(x)dx,$ следует преобразовать его с помощью подстановки $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t,$ переводящей отрезок $a\leq x\leq b$ в отрезок $-1\leq t\leq 1$. Применяя к преобразованному интегралу формулу Чебышева (2.16), получим

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad (2.18)$$

где $x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$, а t_i $(i=1,2,\ldots,n)$ – корни системы (2.17) (помещены в таблице).

Пример 2.4. Вычислить интеграл $I=\int_0^1\frac{xdx}{1+x}$ по формуле Чебышева с пятью ординатами.

Решение. Введем обозначение $f(x)=\frac{x}{1+x}$, имеем

$$I=\frac{1}{5}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)].$$

Результаты вычислений приведены в таблице

i	x_i	$f(x_i)$
1	0,08375	0,0773
2	0,31273	0,2382
3	0,50000	0,3333
4	0,68727	0,4073
5	0,91625	0,4781
$\sum$		1,5342

Таким образом, по формуле (2.18) получаем $I=\frac{1}{5}\cdot 1,5342=0,3068.$

§4. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА

Рассмотрим функцию $f(t)$, заданную на стандартном промежутке $[-1,1]$. Поставим задачу подобрать точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \qquad (2.19)$$

была точной для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени N.

Так как в нашем распоряжении имеется $2n$ постоянных t_i и A_i ($i=1,2,\ldots,n$), а полином степени $2n-1$ определяется $2n$ коэффициентами, то эта наивысшая степень в общем случае, очевидно, равна $N=2n-1$.

Для обеспечения равенства (2.19) необходимо и достаточно, чтобы оно было верным при $f(t)=1, t, t^2, \ldots, t^{2n-1}$.

Таким образом, учитывая соотношения

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1}, \text{ если } k - \text{четное;} \\ 0, \text{ если } k - \text{нечетное,} \end{cases}$$

заключаем, что для решения поставленной задачи достаточно определить t_i и A_i из системы $2n$ уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \dfrac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Система (2.20) нелинейная, и ее решение обычным путем вызывает большие математические трудности. Однако здесь можно применить следующий искусственный прием.

Рассмотрим полиномы

$$f(t) = t^k P_n(t) \; (k=0,1,\ldots,n-1), \qquad (2.21)$$

где $P_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!} \cdot \dfrac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$ $(n=0,1,2,\ldots)$ – полином Лежандра.

Отметим важнейшие свойства полиномов Лежандра:

1) $P_n(1)=1, P_n(-1)=(-1)^n$ $(n=0,1,\ldots)$;
2) $\int_{-1}^{1} P_n(t)Q_k(t)dt = 0$, где $Q_k(t)$ – любой полином степени не выше $n-1$, т. е. $k<n$;
3) полином Лежандра $P_n(t)$ имеет n различных и действительных корней, расположенных на интервале $(-1,1)$.

Так как степени полиномов (2.21) не превышают $2n-1$, то на основании системы (2.20) для них должна быть справедлива формула (2.19), тогда

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

С другой стороны, в силу свойства 2) ортогональности полиномов Лежандра выполнены равенства

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = 0, \text{ где } k < n,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.22}$$

Равенства (2.22) будут заведомо обеспечены при любых значениях A_i, если положить

$$P_n(t_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. для достижения наивысшей точности квадратурной формулы (2.19) в качестве точек t_i достаточно взять нули соответствующего полинома Лежандра. Из свойства 3 известно, что эти нули действительны, различны и расположены на интервале $(-1, 1)$. Зная абсциссы t_i, легко можно найти из линейной системы первых n уравнений системы (2.20) коэффициенты A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Определитель этой подсистемы есть определитель Вандермонда, он отличен от нуля и, следовательно, A_i определяются однозначно.

Формула (2.19), где t_i – нули полинома Лежандра $P_n(t)$ и A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы (2.20), называется *квадратурной формулой Гаусса*.

Рассмотрим использование формулы Гаусса для вычисления общего интеграла $\int_a^b f(x)dx.$

Делая замену переменной $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right)dt.$$

Применяя к последнему интегралу квадратурную формулу Гаусса (2.19), будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \tag{2.23}$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, t_i – нули полинома Лежандра $P_n(t)$.

Остаточный член формулы Гаусса (2.23) с n узлами выражается следующей формулой

$$R_n(f) = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)},$$

где $\xi \in [a, b]$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Цель работы

Изучить основные принципы и методы численного интегрирования; научиться применять формулы трапеций и Симпсона, а также квадратурные формулы Чебышева и Гаусса для вычисления значений определенного интеграла.

Задание к лабораторной работе

1. Написать программы на *Maple*, вычисляющие значение интеграла $I=\int_a^b f(x)dx$ согласно своему варианту с помощью формул прямоугольников, обобщенной формулы трапеций и обобщенной формулы Симпсона. Во всех случаях оценить величину погрешности при различном числе узлов, результаты представить в таблицах.
2. Написать программу, вычисляющую значение интеграла I с помощью квадратурной формулы Чебышева. Оценить величину погрешности при различном числе ординат, результаты представить в таблице.
3. Написать программу, вычисляющую значение интеграла I с помощью квадратурной формулы Гаусса. Оценить величину погрешности при различном числе ординат, результаты представить в таблице.
4. Применяя рассмотренные квадратурные формулы, вычислить интеграл I с точностью 0.0001, предварительно оценив шаг интегрирования, при котором достигается заданная точность. Сделать выводы.
5. Сравнить результаты, сделать выводы.

№ варианта	***f*(*x*)**	**[*a*, *b*]**
1.	$(2x)^3\cos x$	$[0; \frac{\pi}{2}]$
2.	$e^{-2\sin x}$	$[-\frac{\pi}{2}; 0]$
3.	$(x+2x^4)\sin x^2$	$[0; \frac{\pi}{2}]$
4.	$(x^2-2x^3)\cos x^2$	$[-\pi; 0]$
5.	$e^{x^2}\sin x$	$[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$
6.	$(\cos x - x)e^{x^2}$	$[-\frac{\pi}{2}; 0]$
7.	$\sqrt[3]{2x}(\cos x^2 - 2)$	$[-\frac{\pi}{2}; 0]$
8.	$x^2(\sin(\sqrt[3]{x})-3)$	$[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$
9.	$\ln(2x+\sin x^2)$	$[1; 4]$
10.	$\frac{1}{tg2x+1}$	$[2; 2{,}1]$
11.	$\frac{\cos 3x}{(1-\cos 3x)^2}$	$[0{,}8; 1{,}6]$
12.	$5x + x\lg x$	$[0{,}2; 1]$

13.	$\sqrt{1+e^{-x}}$	$[0,4;1,2]$
14.	$\dfrac{1}{1+x+x^2}$	$[0;4]$
15.	$x^2 arctg(x/3)$	$[0,8;1,6]$

Требования к оформлению отчета по работе

Отчет по работе должен содержать:

1) цель работы;
2) постановку задачи;
3) листинги программ с необходимыми комментариями;
4) результаты работы программ (оформлены в виде таблиц, увязывающих входные данные и результаты);
5) анализ полученных результатов (оценка и сравнение погрешностей интегрирования различными способами);
6) выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. В каких случаях прибегают к методам численного интегрирования?
2. В чем заключается принцип численного интегрирования?
3. Получите формулу приближенного интегрирования.
4. Как получить формулы Ньютона-Котеса?
5. Вычислите коэффициенты Ньютона-Котеса.
6. Перечислите свойства коэффициентов Ньютона-Котеса.
7. В чем состоит суть метода прямоугольников?
8. Какие бывают виды формул прямоугольников?
9. Какова геометрическая интерпретация формул прямоугольников?
10. Чему равна погрешность формулы прямоугольников?
11. Выведите обобщенную формулу трапеций.
12. Какова геометрическая интерпретация формулы трапеций?
13. Какова оценка погрешности обобщенной формулы трапеций?
14. Выведите квадратурную формулу Симпсона.
15. Какова оценка погрешности формулы Симпсона?
16. В чем заключается принцип построения квадратурной формулы Чебышева?
17. Выведите квадратурную формулу Чебышева.
18. В чем состоит недостаток квадратурной формулы Чебышева?
19. В чем заключается принцип построения квадратурной формулы Гаусса?
20. Что называют полиномом Лежандра?
21. Перечислите основные свойства полинома Лежандра.
22. Выведите квадратурную формулу Гаусса.
23. Установите, какая из квадратурных формул: Ньютона-Котеса, Чебышева или Гаусса точнее и объясните, почему.

Задачи

1. Оцените минимальное число разбиений отрезка для вычисления интеграла $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ по обобщенной формуле трапеций, обеспечивающее точность 10^{-4}.
2. Покажите, что квадратурная формула Симпсона точна не только для многочленов второй степени, но и для многочленов третьей степени.
3. Выведите формулы остаточных членов для квадратурных формул трапеций и Симпсона.
4. Сколько требуется знать значений подынтегральной функции для подсчета интеграла $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 0,01$?
5. Определите, с какой точностью можно вычислить $\int_0^1 \sin(e^x)dx$, привлекая девять значений подынтегральной функции:
   a) по формуле трапеций;
   b) по формуле Симпсона.
6. Найдите значения коэффициентов квадратурной формулы
$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx Af(-h) + Bf(0) + Cf(h),$$
   считая ее точной для многочленов второй степени; убедитесь, что она совпадает с формулой Симпсона.
7. Покажите, что формула
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$
   даст точные значения, если $f(x)$ – многочлен степени не выше 4.
8. Вычислите следующие интегралы
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \int_1^3 \frac{dx}{1+x}, \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx, \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx, \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$$
   с точностью 10^{-4} по квадратурным формулам трапеций, Симпсона, Чебышева и Гаусса.
9. Убедитесь в совпадении формул Чебышева и Гаусса при $n = 2$ и найдите точные значения узлов t_1, t_2.
10. Получите квадратурную формулу Гаусса для случая $p(x) = 1$ при $n = 1$.
11. Постройте квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx.$