Комбинаторика

Размещение: $A_n^k = n(n-1) * \dots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Размещением из n по k называется упорядоченное $k-$ эллементное подмножество n элементного множества

Размещение с повторением: $\tilde{A}_n^k = n^k$ Размещением из n по k с повторениями называется размещение из n по k в предположении, что некоторые элементы могут учитываться несколько раз.

Перестановка: $P_n = n!$ Перестановкой из n называется размещение из n по n

Перестановка с повторением: $\overline{P}_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}$ Перестановкой из n с повторениями называется перестановка мультимножества

Сочетание: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Сочитанием из n по k называется $k-$ элементное подмножество n элементного множества.

Сочетание с повторением: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$ Сочетанием из n по k с повторением называется сочетание из n по k в предположении, что некоторые элементы могу учитываться несколько раз.

Правила

Правило сложения: Выбрать книгу *или* диск из 10 книг и 12 дисков можно 10+12=22 способами.

Правило умножения: если элемент А можно выбрать n способами, и при любом выборе А элемент В можно выбрать m способами, то пару (А,В) можно выбрать m*n способами.

Специальные числа

Числа Каталана. Число C_n называется количеством корректных скобочных выражений из n открывающих и закрывающих скобок.

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Числа Стирлинга 1-го рода (без знака). Числом Стирлинга первого рода называется количество представлений n-элементного множества в виде k циклов: $S_1\binom{n}{k} = (n-1)\, S_1\binom{k}{n-1} + S_1\binom{k-1}{n-1}$

$$S_1\binom{k}{n} = \mathrm{n}!\, S_2\binom{k}{n}$$

Числа Стирлинга 2-го рода. Числом Стирлинга второго рода из n по k, обозначаемым $S_2\binom{k}{n}$, называется количество разбиений n-элементного множества на k элементные подмножества.

1) $S_2\binom{k}{n} = S_2\binom{k-1}{n-1} + k * S_2\binom{k}{n-1}$, для $0 < k \le n$

2) $S_2\binom{k}{n} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j} j^n C_k^j$

Формула Бернулли. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянная, то вероятность $P_{k,n}$ того, что событие A наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна $P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$

Числа Фибоначчи.

$F_0 = 0,\ F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Числа Эйлера 1-го рода. Числом Эйлера 1-го $E\binom{n}{k}$, называется кол-во перестановок n элементного множества с k подъемами.

1) $E_1\binom{n}{k} = (k+1)E_1\binom{k}{n-1} + (n-k)E_1\binom{k-1}{n-1}$
2) $E_1\binom{0}{0} = 1, E_1\binom{k}{0} = 0, k > 0$
3) $E_1\binom{n}{k} = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m(k+1-m)^n C_{n+1}^m$

Методы комбинаторики. *Использование формул для количеств комбинаторных конфигураций.*

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$
2) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
3) $C_n^p * C_p^m = C_n^m * C_{n-m}^{p-m}$

Использование метода математической индукции.

P(n) – высказывание истинное при n [P(1) /\ P(n) => P(n+1)]=> P(n), для любого n $\in N$

Биноминальная теорема (бином Ньютона)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Теоремы:

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

Док – во:

1) $a = 1, b = 1 => \ 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

2) $a = 1, b = 1$

$0^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

$\sum_{k=2}^{n/2} C_n^{2k} = \sum_{2k+1 \leq n} C_n^{2k+1}$

Полиномиальная теорема

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{\substack{d_i \geq 0 \\ d_1 + d + \cdots + d_k = n}} \frac{n!}{d_1!\, d_2! \ldots d_k!}$$

Док-во:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \ldots (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &= \sum B_{d_1 \ldots d_k} a_1^{d1} a_2^{d2} \ldots a_k^{dk}\end{aligned}$$

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n\ , d_1 \geq 0, d_k \geq 0$$

1) взять d_1 скобок, из которых взять a_1(C_n^{d1} способами)

2) и взять d_2 скобок (C_{n-d1}^{d2} способами)

…

n) и взять d_k скобок с a_k ($C_{n-d1-d2-\cdots-d_{k-1}}^{dk}$ способами)

Формула включения-исключения

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$