概率空间的定义与基本概念

引言

概率论是研究随机现象及其规律性的数学分支。它在统计学、工程学、金融学等众多领域中有着广泛的应用。概率空间是概率论的基础，通过对样本空间、基本事件、事件与 σ-代数的定义与研究，构建了严谨的概率理论框架。

1.1 概率空间的定义

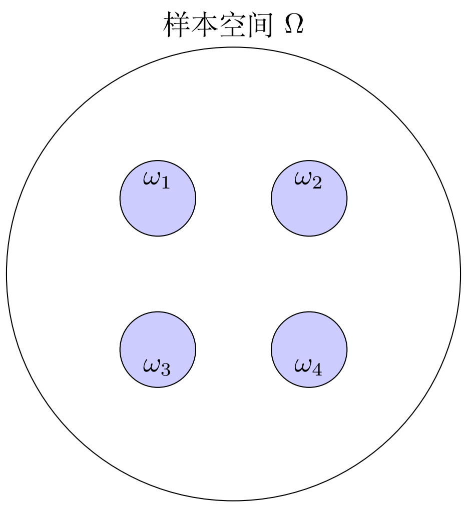
概念：样本空间、基本事件、事件与 σ-代数

定义 1 (概率空间)**.** 概率空间是一个三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，其中：

- Ω 称为样本空间，表示所有可能的基本事件的集合。
- $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的一个 σ-代数，称为事件的集合。
- P 是一个概率测度，即从 $\mathcal{F}$ 到 $[0, 1]$ 的函数，满足以下公理：
  1. $P(\Omega) = 1$。
  2. 对于任意可列个两两互不相交的事件 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$，有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$。

样本空间与基本事件

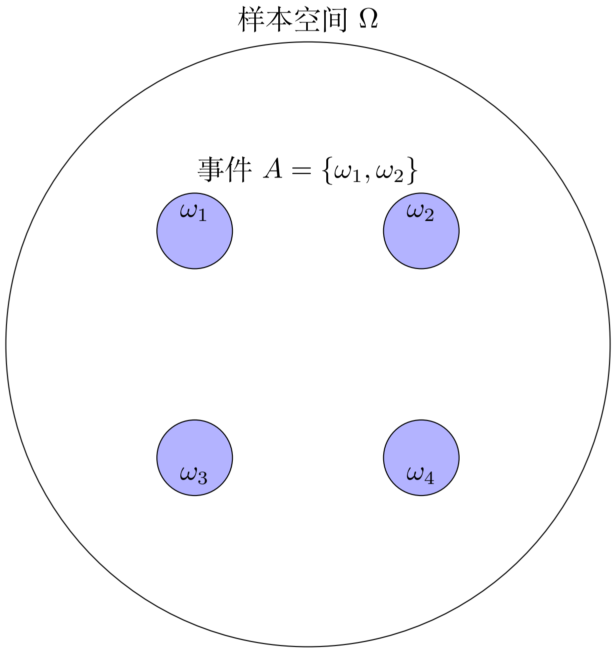
样本空间 Ω 是所有可能实验结果的集合。每一个单一的实验结果称为基本事件（basic event）。基本事件是 Ω 的基本组成部分，基本事件不可再分，所有其他事件都是基本事件的集合。



图中，Ω 表示样本空间，内部的蓝色小圆点代表基本事件 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$。

事件

事件是样本空间 Ω 的子集，由一个或多个基本事件组成。事件可以是简单事件（包含单一基本事件）或复合事件（包含多个基本事件）。



例如，事件 A 由基本事件 ω_1 和 ω_2 组成。

集类的概念

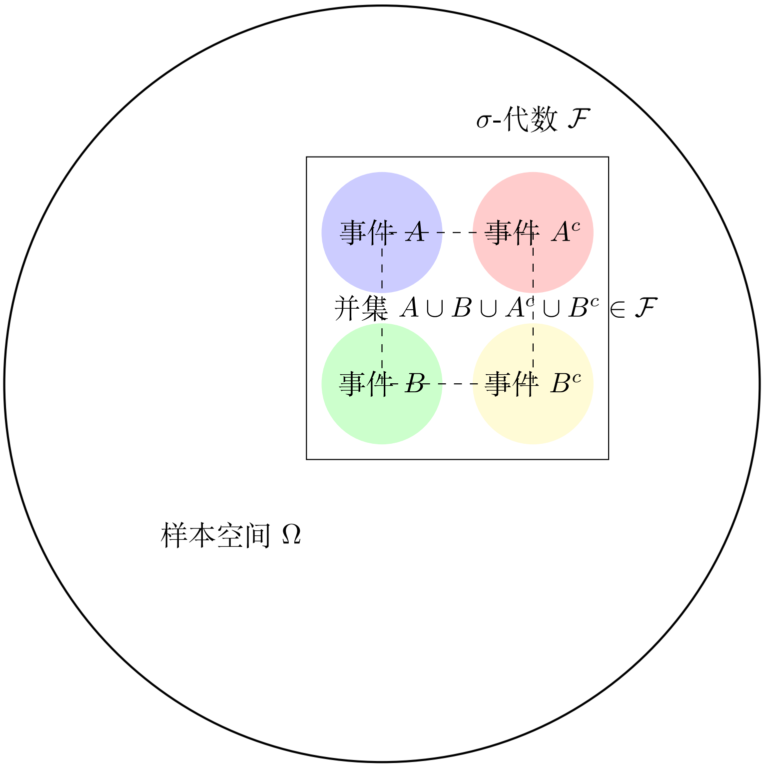
在概率论中，集类（collection of sets）是指满足特定条件的事件的集合（通俗来说，将事件视为集合，那么集类就是集合的集合，集类的元素是集合）。σ-代数是其中一种重要的集类，它为概率空间中的事件提供了结构和性质保障。

σ-代数

σ-代数 $\mathcal{F}$ 是样本空间 Ω 的子集的集合，满足以下条件：

- 如果 $A \in \mathcal{F}$，则 $A^c \in \mathcal{F}$。
- 如果 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$。

σ-代数确保了事件的集合在概率测度下具有良好的数学性质。



图中展示了 σ-代数 $\mathcal{F}$ 中的几个事件及其关系：
通过这些图示，可以直观地理解 σ-代数的构造及其在概率空间中的作用。

σ-代数的意义

σ-代数在概率论中具有重要意义，具体体现在以下几个方面：

- **确定可测集合**: σ-代数 $\mathcal{F}$ 确定了哪些集合可以被定义为事件，这些事件可以被赋予概率。
- **运算的闭合性**: σ-代数对补集和可数并集运算封闭，确保事件运算的结果仍属于 σ-代数。
- **定义概率测度**: 在 σ-代数上定义概率测度 P，使得概率满足非负性、规范性和可列可加性。

σ-代数通过提供一个封闭且严格的数学框架，使得概率论中的各种操作都具有合理性和一致性，是概率论的核心概念之一。

经典概率与 Kolmogorov 公理化定义

定义 2 (经典概率)**.** 在经典概率模型中，样本空间 Ω 是有限的或可数的，每个基本事件的概率相等。若样本空间中有 n 个基本事件，则每个基本事件的概率为 $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$，其中 ω_i 是样本空间中的基本事件。

1.2 测度论基本性质

设 μ 是测度空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个测度，则有以下性质：

1. **单调性 (monotonicity)**：若 $A \subseteq B$，则 $\mu(A) \leq \mu(B)$。
2. **次可加性 (subadditivity)**：若 $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$，则 $\mu(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$。
3. **从下连续性 (continuity from below)**：若 $A_i \uparrow A$，则 $\mu(A_i) \uparrow \mu(A)$。
4. **从上连续性 (continuity from above)**：若 $A_i \downarrow A$，则 $\mu(A_i) \downarrow \mu(A)$。

证明. **(i) 单调性**：

由测度的可加性，$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$，且 $\mu(B - A) \geq 0$，故有：

$$\mu(B) \geq \mu(A).$$

注 1. 这里利用了测度对互不相交集合的可加性，关键在于如何构造不相交集合。

(ii) 次可加性：

令 $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$，定义不相交集合 C_n 如下：

$$C_n = A_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m, \quad n \geq 2, \quad C_1 = A_1.$$

由于 C_n 互不相交，且有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = B$，则：

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

注 2. 对于集合族 $\{A_i\}$，通过构造 $C_n = A_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m$ 来得到不相交集合，接着利用 *(i)* 的结果。

(iii) 下连续性：

令 $B_1 = A_1$，$B_n = A_n - A_{n-1}, n \geq 2$。易知 B_n 互不相交，且有：

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(B_m) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

注 3. 这里 B_n 互不相交，因为 $\bigcup_{m=1}^{n-1} A_m = A_{n-1}$。

(iv) 上连续性：

注意到：

$$A_1 - A_n \uparrow A_1 - A.$$

由 (iii) 的结果可得：

$$\mu(A_1 - A_n) \uparrow \mu(A_1 - A).$$

因此：

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_1 - A_n) \downarrow \mu(A_1) - \mu(A_1 - A) = \mu(A).$$

□

定理 1. *若 $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ 是一族 σ-代数，则其交 $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ 也是一个 σ-代数。*

证明. 设 $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$，则对于任意 $i \in I$，有 $A \in \mathcal{F}_i$。

由 σ-代数的性质可知：

- 若 $A \in \mathcal{F}_i$，则 $A^c \in \mathcal{F}_i$，因此 $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$。
- 若 $A_1, A_2, \cdots \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$，则对任意 i，有 $A_k \in \mathcal{F}_i$，所以 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_i$。因此：

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i.$$

综上所述，$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ 满足 σ-代数的定义。

□

例 1 (掷骰子)**.** *考虑一个公平的六面骰子，样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$，其中每个 ω_i 表示骰子出现数字 i。每个基本事件的概率为 $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$，其中 $i = 1, 2, \ldots, 6$。例如，事件 $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ 的概率为 $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$。*

定义 3 (Kolmogorov 公理化定义)**.** *Kolmogorov 在 1933 年提出了概率的公理化定义，建立了现代概率论的基础。根据 Kolmogorov 公理，概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 满足以下三个公理：*

1. **非负性**：*对于任意事件 $A \in \mathcal{F}$，$P(A) \geq 0$。*
2. **规范性**：*$P(\Omega) = 1$。*
3. **可列可加性**：*对于任意可列个两两互不相交的事件 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$，$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$。*

例 2 (Kolmogorov 公理应用)**.** *考虑抛掷一枚公平的硬币，样本空间为 $\Omega = \{\omega_H, \omega_T\}$，其中 ω_H 表示"正面"，ω_T 表示"反面"。定义事件 A 为"出现正面"，则：*

- *$P(A) = 0.5$。*
- *$P(A^c) = 0.5$。*
- *$P(\Omega) = P(A) + P(A^c) = 1$。*

这些概率值满足 Kolmogorov 的三个公理。

总结

概率空间的定义为概率论提供了坚实的数学基础。通过样本空间由基本事件构成、事件与 σ-代数的构建，以及经典概率与 Kolmogorov 公理化定义的介绍，明确了概率的基本概念和性质。这些理论工具在后续的概率论学习和应用中起着至关重要的作用。