помагало за математика и информатика

3 / 2016

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

PER ASPERA AD ASTRA
2002

МАТЕМАТИКА +

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

помагало по математика и приложения

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 24 (95), Number 3, 2016

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат 600×840/8 Печатни коли 9
Дадена за печат на 15. 09. 2016 Подписана за печат на 26. 09. 2016 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой на списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието и науката.

Математика плюс
бр. 3, 2016

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

Драги читатели,

Все по-често се говори за „рейтинг на университетите", който е свързан и с оценка на научната дейност на преподавателите, а следователно и със Световната система за рефериране, индексиране и оценяване на съответните публикации. Понятието „рейтинг на университетите" се превръща много бързо в един от най-важните инструменти, използвани от студентите и представителите на академичните среди в целия свят. Чрез него университетите определят представянето си, професионалната си репутация и статуса, а студентите избират бъдещото си място за учене и изследвания.

През 2014 г. Европейската комисия лансира т. нар. U-Multirank – рейтинг, който следи и сравнява 5 представителни области за даден университет: преподаване и учене; научна дейност; трансфер на знания; международна ориентация; регионален ангажимент. Въпросният рейтинг се обсъжда по време на годишните международни симпозиуми за рейтинг и качество на университетите. Тазгодишният симпозиум беше 8-ми по ред и се проведе на 15 юни 2016 г. в Брюксел. Между организаторите на симпозиума е Европейската асоциация за гарантиране качество на висшето образование.

Най-голямата рейтингова институция е Международната експертна група за класифициране на университетските и научните институции (International Ranking Expert Group – IREG). Тя прави анализ на виртуалното университетско и изследователско пространство. Групата IREG е създадена през 2004 г. от Европейския център на ЮНЕСКО за висше образование (CEPES) и Института за политика във висшето образование във Вашингтон със съдействието на Центъра за информация и документация към Националния съвет за научни изследвания на Испания.

Класациите, които се публикуват на сайта Webometrics, се основават на разбирането, че качеството на висшето образование и на науката зависи не само от функционирането на организациите на национално равнище, но и от умението им да поднесат лесно достъпна и богата информация за себе си в Интернет. Киберкласацията за университетите се нарежда до два други международни рейтинга за университетско качество – на Шанхайския университет и на в. „Таймс", които са с по-ограничени наблюдения от IREG. Съществуват и други класации, в т. ч. и руска.

С най-голямо влияние се ползва IREG. Тя е обществена и независима организация, която прави сравнителен анализ по единна методология между висшите училища в света, като чрез своите стандарти за качество и добри практики два пъти годишно оценява и подрежда както университетите, така и организациите, занимаващи се само с наука. IREG черпи информация от Интернет сайтовете на оценяваните институции и от техните научни публикации, които могат да бъдат намерени в популярни търсачки като Google, Yahoo, MSN. Ask, Alexa и от двете специализирани научни бази данни на Google – Google Scholar и Live Academic. Измерването на качеството става по 4 основни показателя: библиометрични данни за продуктивност; обем и яснота на уеб-страниците; богатство на представената в сайтовете информация и препратки за научни и публикационни дейности; брой на статиите и цитатите за всяка научна област. IREG прави няколко класирания: общо световно класиране; рейтинг за всяка страна; класиране за Европа, а в частност и за Източна Европа; класация на вузовете от Бразилия, Русия, Индия и Китай; отделно на вузовете от Югоизточна Азия и от Африка. Класират се организации като цяло, както и техни отделни звена.

По-долу са представени 2 класации. Първата е на първите 50 университета в света, а втората съдържа информация за българските висши учебни заведения и техните позиции в световната класация за 2015 и 2016 година.

СВЕТОВНА КЛАСАЦИЯ ЗА 2016 ПО ДАННИ ОТ САЙТА WEBOMETRICS

№	Университет	Държава
1	Харвардски университет	САЩ
2	Масачузетски университет по технологии	САЩ
3	Станфордски университет	САЩ
4	Калифорнийски университет – Бъркли	САЩ
5	Мичигански университет	САЩ
6	Университет Корнел	САЩ
7	Вашингтонски университет	САЩ
8	Колумбийски университет – Ню Йорк	САЩ
9	Пенсилвански университет	САЩ
10	Оксфордски университет	Англия
11	Калифорнийски университет – Лос Анджелис	САЩ
12	Университет Джон Хопкинс	САЩ
13	Университет в Йел	САЩ
14	Университет в Кеймбридж	САЩ
15	Университет в Уисконсин Медисън	САЩ
16	Мичигански държавен университет	САЩ
17	Университет в Тексас на Остин	САЩ
18	Университет в Чикаго	САЩ
19	Калифорнийски университет – Сан Диего	САЩ
20	Университет в Торонто	Канада
21	Пенсилвански държавен университет	САЩ
22	Университет в Илинойс	САЩ
23	Нюйоркски университет	САЩ
24	Университет Дюк	САЩ
25	Университет в Северна Каролина	САЩ
26	Пристънски университет	САЩ
27	Юнивърсити колидж в Лондон	Англия
28	Университет в Юта	САЩ
29	Университет Бритиш Колумбия	Канада
30	Университет в Мериленд	САЩ
31	Университет във Флорида	САЩ
32	Университет в Южна Каролина	САЩ
33	Университет Пърдю	САЩ
34	Национален университет Че Кянг	Китай
35	Калифорнийски институт по технологии Калтек	САЩ
36	Швейцарски федерален университет в Цюрих	Швейцария
37	Калифорнийски университет – Дейвис	САЩ

38	Пекински университет	Китай
39	Северозападен университет	САЩ
40	Държавен университет в Охайо	САЩ
41	Университет във Вирджиния	САЩ
42	Университет Цинхуа	Китай
43	Университет Карнеги Мелън	САЩ
44	Университет в Питсбърг	САЩ
45	Калифорнийски университет – Ървин	САЩ
46	Тексаски университет	САЩ
47	Държавен университет Rutgers в Ню Джърси	САЩ
48	Аризонски университет	САЩ
49	Университет в Единбург	Шотландия
50	Университет д Сао Пауло	Бразилия

КЛАСАЦИЯ НА БЪЛГАРСКИТЕ ВИСШИ УЧИЛИЩИ ЗА 2017 И 2016 ГОДИНА ПО ДАННИ ОТ САЙТА WEBOMETRICS

№ 2016	Университет	Класация 2015	Класация 2016	№ 2015
1	Софийски университет „Св. Кл. Охридски“	798	840	1
2	Пловдивски университет „П. Хилендарски“	2286	2371	2
3	Технически университет – София	2462	2453	4
4	Нов български университет	2387	2500	3
5	Химикотехнологичен и металургичен унив.	3514	2786	7
6	Тракийски университет	3887	3160	8
7	Медицински университет - Варна	4399	3284	11
8	Русенски университет „А. Кънчев“	4365	3305	10
9	Медицински университет - София	3077	3691	6
10	Висше училище международен колеж Албена	6810	3853	21
11	Бургаски свободен университет	3072	4119	5
12	Югозападен университет „Н. Рилски“	4588	4199	14
13	Лесотехнически университет	4242	4258	9
14	Великотърновски университет	4913	4374	15
15	Шуменски университет „Еп. К. Преславски“	7786	4479	26
16	УНСС – София	4567	4682	13
17	Технически университет – Габрово	5082	4979	17
18	У-т по архитектура строителство и геодезия	6664	5073	20
19	Аграрен университет	4970	5625	16
20	Медицински университет – Пловдив	4435	5749	12
21	У-т „Проф. д-р А. Златаров“ – Бургас	5593	5909	18
22	Технически университет - Варна	8606	6137	30
23	Минно-геоложки унив. „ Св. Иван Рилски“	7668	6264	25
24	Икономически университет – Варна	7496	6272	24
25	Варненски свободен унив. „Ч. Храбър“	6282	6356	19
26	Американски университет в България	15402	6477	47
27	Университет по хранителни технологии	6871	7105	23

28	Медицински университет – Плевен	6867	7482	22
29	Стопанска академия „Д. Ценов“ – Свищов	7989	8568	28
30	Университет по библиотекознание и ИТ	8254	8887	29
31	Национална спортна академия „В. Левски“	11208	10049	35
32	Висше транспортно училище „Т. Каблешков“	7851	10223	27
33	Висше военноморско училище „Н. Вапцаров“	10011	10987	32
34	ВУЗФ	10728	11846	33
35	Технически унив. София – клон Пловдив	9937	11944	31
36	НАТФИЗ „Кръстьо Сарафов“	10881	12131	34
37	Национален военен университет –В. Търново	11309	12544	36
38	Национална художествена академия	12156	12835	40
39	Висше строително училище „Л. Каравелов“	11632	12846	37
40	Военно-медицинска академия	12672	13146	41
41	Селскостопанска академия	16390	13291	50
42	Академия на М-во на вътрешните работи	11782	14165	38
43	Академия за муз., танцово и изобр. изкуство	14259	14187	43
44	Национална музикална академия	13656	14255	42
45	Европейски колеж по иконимика и управл.	16236	15398	49
46	Европейски политехнически университет	14333	15777	44
47	Международно висше бизнес училище	16172	15962	48
48	Diplomatic Inst. – Ministry of Foreign Affairs	15033	16404	45
49	К-ж по мениндж.,търговия и маркетинг София	15103	16508	46
50	ВУ по агробизнес и развитие на регионите	16433	17290	51
51	Военна академия „Георги Стойков Раковски“	17940	20110	52
52	Колеж по икон. и администрация – Пловдив	19432	20849	54
53	Колеж по туризъм – Благоевград	18937	21627	53
54	Театрален колеж „Любен Гройс“	21612	22523	55
55	ВУ по сигурност и икономика – Пловдив	-	23253	-
56	ВУ по телекомуникации и пощи	12021	24180	39

Една от причините за недостатъчно високото ниво на научните изследвания в нашата страна е битуващото разделение между научната и преподавателската дейност. Това е процес, който в България е започнал след Втората световна война и за съжаление все още не затихва. В същото време аксиоматично правило за висшето образование е, че успех могат да имат само онези преподаватели, които провеждат собствени научни изследвания в областите, в които преподават. При това става дума за качествени научни изследвания. А обективната оценка за качеството е според международните стандарти. Науката не е нито българска, нито американска или китайска. Науката е световна, откъдето следва, че първостепенна задача на преподавателите е да активират публикационната си дейност в издания, които попадат в Световната система за рефериране, индексиране и оценяване. Това е минимумът, защото по-високото стъпало, което е и значително по-трудно, е да се попадне в издания с импакт-фактор. Повишаването на индивидуалните рейтинги на преподавателите ще доведе и до повишаване рейтинга на съответното висше училище. По тази причина е вероятно целесъобразно обвързване на възнаграждението на всеки преподавател с индивидуалния му рейтинг.

Ваш, Д-р М. Плюс

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество
1618, София, ул. Гусла 1
тел.. + 359 2 40 15 815
e-mail: r_petrova@vuzf.bg

VUZF – University of Finance, Business and Entrepreneurship
1618, Sofia, 1 Gusla str.
tel. int. + 359 2 40 15 815
e-mail: r_petrova@vuzf.bg

ИНФОРМАЦИОННО ПИСМО

Уважаеми читатели,

Списание "Математика плюс" се списва и издава със съдействието на изявени учители, изтъкнати университетски преподаватели и учени от страната и чужбина в областта на математиката, икономиката, финансите, бизнеса, информатиката. То е одобрено от МОН като помагало за класна и извънкласна работа. И през учебната 2016/2017 г. ще бъдат поддържани рубриките: Национален конкурс **Издирване на таланти в областта на математиката уМ+** – за ученици от 4, 5, 6 и 7 клас, **Ако кандидатствате във ВУЗ** – подготовка и теми от основните ВУЗ; **Подготовка за външно оценяване и зрелостни изпити**. Място ще бъде отделяно за конкурси, олимпиади и състезания за ученици, учители и студенти, ще се публикуват статии от български и чуждестранни автори, които насочват към тънкости в икономиката и математиката, решаването на задачи, приложенията на математиката и информатиката във финансите и бизнеса.

С настоящото писмо Ви даваме възможност, ако желаете, да участвате в абонаментната кампания за 2017 г. Вие от своя страна бихте могли да привлечете Ваши колеги или близки. Става въпрос за извършване на колективни абонаменти (поне 10) във Вашето училище или Университет. Информираме Ви, че в **пощенските клонове** цената на годишен абонамент е **28 лв**. и каталожният номер на списанието е **1467.** Цената на **индивидуален абонамент чрез редакцията е 24 лв.** Чрез **колективния абонамент**, в който Ви предлагаме да се включите, са осигурени **отстъпки**. В редакцията трябва да пристигат **чрез пощенски запис по 20 лв. на абонамент.** Отстъпката от 4 лв. е за извършващите абонамента (т.е. за Вас или Вашите колеги). Разходите за пощенските записи, както и всички разходи, които се налага да извършите при организацията на абонаментната кампания, са за сметка на редакцията и следва да ги приспаднете и задържите от сумата 20 лв.

Преди изпращане на суми **с пощенски запис**, моля, направете заявка и уточнение на следния телефон: **0888 438 437**. Моля, при попълване на пощенския запис да посочвате трите имена и точния адрес с пощенския код на лицето, което ще получава списанията!

Възможни са и преводи **по банков път** при цена на **годишен абонамент 24 лв**. на следната банкова сметка:

Математика плюс Х ЕООД
IBAN BG68STSA93 00000 168 3465
BIC STSABGSF
„БАНКА ДСК" ЕАД, клон Гео Милев

Допълнително трябва да позвъните, за да посочите адрес за получаване на списанията.

Ако имате въпроси, можете да ползвате телефон 0888 438 437. Срок за приключване на кампанията и изпращане на набраните суми е 31 януари 2017 г. Моля, информирайте за горното и Вашите колеги. В случай на закъснение, дайте информация на горния телефон. Възможен е и абонамент само за бр.1 и 2/2016 г. при цени, намалени съответно наполовина.

Благодарим Ви за съдействието!
Редколегия на сп. Математика плюс


15 години
ВУЗФ
Стани наш Студент
Защо ВУЗФ?
Практически насочени програми
Иновативно обучение
Обучение, съобразено със съвременната бизнес среда
Тук се учите от най-добрите в бранша
Тук инвестирате в своето бъдеще
BRITISH ACCREDITATION COUNCIL
Единственият български университет с
БРИТАНСКА АКРЕДИТАЦИЯ
ТУК
ПРЕПОДАВА
БИЗНЕСЪТ
Прием:
2016-2017
www.vuzf.bg

МЕЖДУНАРОДНИ КОНКУРСИ
ЗА РАЗРАБОТВАНЕ НА ПРОЕКТИ (РЕФЕРАТИ)
(по икономика, финанси, счетоводство, застраховане, осигуряване, бизнес)

В рамките на Международния проект **MITE** (**M**ethodology and **I**nformation **T**echnologies in **E**ducation – Методика и информационни технологии в образованието) през учебната 2016-2017 г. се организират два конкурса – единият за ученици, а вторият – за учители. Научната част на проекта има за цел разработването на методики и съвременни информационни технологии в образованието изобщо. Партньори по проекта са:

- Висше училище по застраховане и финанси (София, България)
- Академия за социално управление (Москва, Русия)
- Факултет по педагогическо образование при Московския държавен университет "М. Ломоносов" (Москва, Русия).
- Сдружение „Европейско кенгуру"

I. Международен конкурс за ученици

II. Международен конкурс за учители

Конкурсите се състоят в разработване на проекти (реферати). В първия конкурс могат да участват ученици (индивидуално или в екип до трима ученици, независимо в кое училище и клас учат) под ръководството на учители и преподаватели. Вторият конкурс е предназначен за учители (индивидуално). Проектите се представят в електронен вид. Те трябва да са оформени като мултимедийни презентации с обем до 20 Mb на MS Power Point или на друг софтуер, който се разпространява свободно. Бонусни точки се присъждат на проекти, в които информатиката и информационните технологии се използват не само в презентацията, а и по същество при решаването на съответната икономическа задача. Тематичните направления са:

1. Финанси и банково дело (за ученици и учители)
2. Счетоводство и контрол (за ученици и учители)
3. Застраховане и осигуряване (за ученици и учители)
4. Предприемачество (за ученици и учители)
5. История на икономиката (за ученици)
6. Икономиката като наука (за ученици)
7. Организация на класната работа за повишаване на успеваемостта (за учители)
7. Организация на извънкласната работа на учениците (за учители)
8. Организация на проектната и изследователската дейност на учениците (за учители)

Състезателната част е организирана в три етапа:

- **Задочен** – краен срок за изпращане на разработките е 16 януари 2017 г.

- **Очен (национален)** – през м. февруари 2017 г. (точната дата и мястото на провеждане ще бъдат съобщени допълнително, а допуснатите до Националния кръг ще бъдат информирани в края на м. януари 2017 г.)

- **Международен** – в периода от 1 до 10 май 2017 г. в гр. Москва, Русия

Участието в конкурса става след предварително превеждане на такса правоучастие в размер на 25 (двадесет и пет) лева **на участник** (ако проектът е представен от повече от един участник, като научните ръководители са също участници) или 50 (петдесет) лева на проект (в случай на един участник) в срок до 9 януари 2017 г. по следната банкова сметка:

Математика плюс Х ЕООД
IBAN BG68STSA93 00000 168 3465
BIC STSABGSF
„БАНКА ДСК" ЕАД, клон Гео Милев

Участниците в конкурса (ученици) получават правото на преференциални условия при кандидатстване във ВУЗФ (Висше училище по застраховане и финанси) – Университет по финанси, бизнес и предприемачество. **Те получават и 20% отстъпка от семестриалната такса във ВУЗФ** (виж www.vuzf.bg).

ТАЛОН

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Ако желаете да ползвате правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса, изпратете този талон заедно с проекта.

Имена ....

Адрес ...., e-mail..........

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ....

Изпращане на проектите с краен срок на получаване 16 януари 2017 г.:
По пощата на *CD*, на адрес: ВУЗФ, За конкурса М+, ул. "Гусла" № 1, 1618 София

В придружаващото писмо напишете име на автора(ите), клас, училище, научен ръководител, заглавие на проекта и по кое от направленията е разработката, кратко описание на проекта и указания за работа с файловете (ако е необходимо), а също и възможни начини за връзка (за предпочитане e-mail адрес и мобилен телефон). Контакти и допълнителна информация можете да получите от г-жа Петрова на тел. 0888 438 437

По време на задочния етап ще бъдат избрани най-добрите разработки за участие в очния (национален) етап. Победителите в Националния етап ще бъдат поканени за участие в Международния етап. Националният и Международният етапи се състоят в представяне на всяка разработка в рамките на 15 минути (за международния етап на английски или руски език), след което в рамките на 5 минути състезателите отговарят на уточняващи въпроси (включително и по представяната материя). Критериите за оценка на ученическите проекти включват оригиналност, достоверност, атрактивност, ползваемост, оформление. Учителските проекти ще бъдат оценявани за ефективност на представяните идеи и методики, пълнота, дизайн, естетическо оформление, вътрешна съгласуваност и балансираност, стил на презентирането. **Класираните на първите три места в Националния етап на всеки от двата конкурса ще получат дипломи и награди, а останалите участници в Националния етап – грамоти. За първенеца при учениците е осигурен безплатен престой и културна програма по време на Международния етап в Москва.**

M + КОНКУРС

ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ

ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ е задочно математическо състезание. Провежда се в 3 кръга. В този брой ви представяме задачите от I кръг. Не се отчайвайте, ако не се справите и с трите задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. В писмата си внимавайте за следното:

1. Пишете решения на задачите само за класа, в който учите.

2. Решението на всяка задача да е на отделен лист, като най-отгоре на листа напишете трите си имена, града и класа, в който учите.

3. Съобразявайте се с обявения срок за изпращане на работите.

4. Напишете собствения си адрес за кореспонденция.

Допуска се колективно участие (ако например задачите се разглеждат в школа по математика). В този случай изпращайте само едно писмо с името на избран от вас капитан на отбора. Пишете ни на адрес:

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
ВУЗФ
ул. „Гусла" № 1
1618 София

Жури под председателството на акад. Благовест Сендов проверява изпращаните от вас решения. Най-добре представилите се ще бъдат поканени заедно със своите учители на специално организирания Фестивал у$\mathcal{M}$+. На фестивала ви очакват интересни срещи и страхотни изненади.

I КРЪГ

Задачи за 4 клас

1. Иван си измислил ново действие, което означил със знака @. То изглежда така:

$$M @ N = M.N - (M - N).$$

Например $5 @ 2 = 5.2 - (5-2) = 10 - 3 = 7$.

Петър също си измислил свое действие, което означил със звездичка. То изглежда така:

$$M * N = 11.M + 2.N.$$

Например $5 * 6 = 11.5 + 2.6 = 55 + 12 = 67$.

Двамата приложили действията си за числата $M = 223$ и $N = 12$. Намерете разликата на получените от тях числа. Колко се получава, ако се пресметне $(M @ N) * N$?

2. Семейството на Мариана и Николай има две деца: Ани и Гошо. Когато се родил Гошо, Ани била на 3 години. Сега сборът от годините на децата е два пъти по-малък от годините на майка им, която е с 4 години по-млада от баща им. Преди 36 месеца сборът от годините на четиримата е бил 67. Да се определи на колко години са сега Ани, Гошо, Мариана и Николай.

3. Пет момичета от 4 клас са облечени в синя, червена, жълта, зелена и лилава рокли. Всяка от тях носи панделка в цвета на роклята си. По колко различни начина могат момичетата да си разменят панделките така, че всяка да носи панделка в различен цвят от роклята си?

(Обосновете отговора си!)

Задачи за 5 клас

1. Записани са естествените числа от 1 до 80. Задраскваме някои от тях така, че да не остане число, което е два пъти по-голямо от друго. Колко най-много числа могат да останат?

2. Да се намерят две естествени числа, чийто сбор е 2016 и такива, че като разделим първото на 15, а второто на 10, да получим равни частни и равни остатъци.

3. В един коридор има 8 врати, всяка боядисана различно в един от 8 цвята. Майстор трябва да боядиса стаите, към които водят вратите, в цвета на съответната врата.

а) По колко начина може да стане това?

б) Ако всяка врата и стаята към, която води тя, трябва да са в различен цвят, по колко начина може да стане боядисването?

Задачи за 6 клас

1. Намерете най-високата степен на 6, която дели числото $314 \times 315 \times 316 \times \ldots \times 2016$.

2. Измеренията на правоъгълен паралелепипед в сантиметри са двуцифрени числа, а обемът му в кубически сантиметри е число, записано само с цифрата 6. Да се намери лицето на повърхнината на паралелепипеда.

3. Георги разполага с два пясъчни часовника, които отмерват съответно 13 минути и 5 минути. Той трябва да отмери точно 47 минути. Как може да стане това?

Задачи за 7 клас

1. Да се намерят целите числа k, за които абсолютната стойност на израза $k^2 + 6.k - 2016$ е просто число.

2. Даден е успоредник $ABCD$, за който точка P е от страната BC, а точките E и F са съответно върху отсечките AP и DP така, че $AE = 3EP$ и $DF = 3FP$. Да се намери отношението на лицата на четириъгълниците $ADFE$ и $BCFE$.

3. Решете уравнението $2y - 5x = 103$ в естествени числа и намерете минималната стойност на $x + y$.

Задачите са предложени от:
Ирина Шаркова и Христо Лесов

Срок за изпращане на решения на задачите от I кръг 30.11.2016 г.

Изрежете талона за участие от трета корица на настоящия брой на списанието, попълнете го и го изпратете заедно с решенията на задачите.

Резултатите от приключилия конкурс през учебната 2015/2016 г. ще бъдат публикувани в следващия брой.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНО УЧАСТИЕ
В ИЗДАНИЕТО НА КОНКУРСА ЗА УЧЕБНАТА 2016/2017 ГОДИНА!

M + НАЙ-МАЛКИТЕ

БРОЕНЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Четиво за 4 – 5 клас

Здравейте, приятели!

По случай празника на детето 1-ви юни учениците от един клас решили да разменят подаръци помежду си. Разбира се, никой нямал желание да остане със собствения си подарък. Естественият въпрос е по колко различни начина може да се извърши разпределението, ако всеки ученик участва с точно един подарък. Задачата е от групата на т. нар. комбинаторни задачи. Отговорът зависи от броя на учениците в класа. Колко е броят на възможните различни разпределения, ако класът наброява например 20 ученици? Да се отговори веднага е трудно и затова ще разсъждаваме последователно. В задачите по-долу става дума за група ученици, които приготвили по един подарък. Подаръците се разпределят между учениците така, че всеки получава подарък, различен от собствения.

Задача 1. По колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са двама?

Решение: Отговорът е очевиден – по един единствен начин.

Задача 2. По колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са трима?

Решение: Да означим учениците с A, $Б$ и $В$. Без ограничение можем да разсъждаваме от позицията на A. За A има две възможности – да даде своя подарък на $Б$ или на $В$. Без ограничение, нека A дава подаръка си на $Б$. Тогава $Б$ трябва да даде своя подарък на $В$. В противен случай $В$ ще остане със собствения си подарък и това противоречи на условието на задачата. Заключаваме, че възможността е единствена и следователно броят на разпределенията при трима ученици е равен на 2.

Задача 3. По колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са четирима?

Решение: Да означим учениците с A, $Б$, $В$ и $Г$. Без ограничение можем да разсъждаваме отново от позицията на A. За A има три възможности – да даде своя подарък на $Б$, на $В$ или на $Г$. Това означава, че резултатът от следващите разсъждения трябва накрая да умножим по 3. А тези следващи разсъждения включват два варианта. При първия от тях този, който е получил подарък от A, връща своя на A. За останалите двама възможността е единствена съгласно задача 1. При втория вариант стигаме до задачата за разпределение на подаръците между трима, което е точно задача 2. Като използваме резултата от задача 2, заключаваме, че вторият вариант се разпада на 2 случая и случаите (общо за двата варианта) стават 3. Заключаваме, че броят на разпределенията при четирима ученици е $3.3=9$.

Задача 4. Ивана разполага с пет кръгчета в пет различни цвята и с пет звездички в същите цветове. Тя иска да залепи звездичка върху кръгче, но забелязва, че ако двете са едноцветни, звездичката не се вижда. По колко начина може Ивана да залепи всички звездички върху кръгчетата така, че да се виждат?

Решение: Забелязахте ли, че това е всъщност задача от вида, който разглеждахме досега: по колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са петима?

Да означим цветовете с *А*, *Б*, *В*, *Г* и *Д*. Ще разсъждаваме отново от позицията на *А*. За звездичката *А* има четири възможности – да бъде залепена върху кръгче *Б*, *В*, *Г* или *Д*. Следователно резултатът от следващите разсъждения трябва накрая да се умножи по 4. Следващите разсъждения включват пак два варианта. При първия от тях звездичката с цвета на кръгчето, върху което е *А*, залепяме на *А*. За останалите три звездички прилагаме задача 2, съгласно която случаите са 2. При втория вариант имаме 4 свободни кръгчета и четири свободни звездички, като стигаме до задачата за разпределение на подаръците между четирима, което е точно задача 3. Като използваме резултата от задача 3, заключаваме че вторият вариант се разпада на 9 случая и случаите (общо за двата варианта) стават $2+9=11$. Заключаваме, че броят на залепванията е $(2+9).4=11.4=44$.

Резултатите от решените задачи нанасяме в таблица:

2	3	4	5
1	2	9	44

Нека направим изводи от полученото до тук.

Да обърнем внимание, че когато става дума за един единствен ученик, той няма с кого да размени своя подарък и следователно броят на разпределенията е равен на 0. Таблицата може да се разшири:

брой ученици	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
брой разпределения	0	1	2	9	44	265				

Как се получава бройката на втория ред в шестата колонка? Събираме числата от втория ред на предишните две колонки (в конкретния случай четвърта и пета колонка) и умножаваме сбора с номера на предната колонка, т.е. $(9+44).5=53.5=265$.

<u>За упражнение</u>:

Задача 5. Попълнете числата в колонките с номера 7, 8, 9 и 10.

Задача 6. Ива разполага с 6 топки в 6 различни цвята и с 6 кутийки в същите цветове. Тя поставила по една топка във всяка кутийка. Оказало се, че няма топка, поставена в кутийка със същия цвят. По колко различни начина може да стане това?

(Опишете разсъжденията си!)

До нови срещи!

Автор на четивото: Д-р М. Плюс

М + НАЙ-МАЛКИТЕ

ЧЕРВЕНАТА ШАПЧИЦА И ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Четиво за 6 – 7 клас

Червената шапчица скочи от леглото и изтича в кухнята при баба си:

- Бабо, искам варено яйце!

- Добре, моето дете, но за да стане, както ти го обичаш, яйцето трябва да се вари точно 15 минути. За съжаление, часовникът е спрял и не мога да измеря 15 минути. Трябва да изчакаме дядо ти, който отиде да купи батерия за часовника.

- Но, бабо, защо не използваш пясъчния часовник?

- Не мога да го използвам, защото той отмерва 7 минути. Не мога да използвам и пясъчния часовник на дядо ти, защото той пък отмерва 11 минути.

- О, бабо, виж как ще получим 15 минути. Ще пуснем и двата часовника. Когато първият отмери 7 минути, ще сложиш яйцето да се вари. Понеже $11-7=4$, то точно след 4 минути ще изтече пясъкът от втория часовник. Значи можем да отмерим 4 минути. Но тогава ще обърнем втория часовник и той ще отмери още 11 минути. Ето, задачата е решена, защото $11+4=15$ минути.

Възхитена от математическите способности на внучката си, бабата се зае да изпълни предложението. Скоро яйцето беше сварено точно за 15 минути и Червената шапчица го изяде с удоволствие. Тъкмо се облизваше и в кухнята влезе дядо й.

- Я, да те видя сега каква математичка си! – каза той и показа двете кофи, които носеше със себе си. – Едната кофа е 8-литрова, а другата е 14-литрова. Трябва да измеря точно 4 литра и не знам как да постъпя.

- О, дядо, тази задача е много лесна! Хайде, напълни 14-литровата кофа с вода от чешмата.

Дядото напълни кофата и се обърна очакващо към внучката.

- А сега, дядо, с водата от 14-литровата кофа напълни втората кофа. Тъй като втората кофа е 8-литрова, то в първата ще останат $14-8=6$ литра. Сега излей втората кофа и прелей в нея 6-те останали литра от първата кофа. Отново напълни 14-литровата кофа догоре с вода от чешмата. Какво имаме сега: 14 литра в първата кофа и 6 литра във втората. По-нататък допълни втората кофа с вода от първата. Допълването става точно с $8-6=2$ литра, защото втората кофа е 8-литрова, а в нея има 6 литра. Какво получаваме? Получаваме $14-2=12$ литра в първата кофа и 8 литра във втората. Но сега, дядо излей втората кофа и я напълни догоре с вода от първата кофа. Тогава в първата кофа ще останат $12-8=4$ и ето ги твоите 4 литра.

- Браво, моето внуче, откъде ги знаеш тези „фокуси“?

- Дядо, забележи, че $14.2-8.3=28-24=4$. Това означава, че два пъти сме напълнили 14-литровата кофа догоре и три пъти сме напълнили 8-литровата кофа. Точно това и направихме, разбира се в подходяща последователност. Преди малко се справих със задачата да се отмерят 15 минути с помощта на двата пясъчни часовника, единият от които отмерва 7 минути, а другият – 11 минути. В нея използвах, че $2.11-7=22-7=15$. Това означава, че часовникът за 11 минути е използван два пъти, а другият часовник – веднъж. На пръв поглед двете задачи са различни, но всъщност принципът им е един и същ. Общата задача е да се намерят цели числа x и y така, че при дадени цели числа a, b и c да е изпълнено равенството $ax+by=c$. Това равенство се нарича Диофантово уравнение, за което учихме миналата седмица в школата по математика. Учителката ни каза, че тези уравнения носят името на гръцкия математик Диофант, живял през 3. век. Наричат се още неопределени уравнения, защото имат повече от едно неизвестно. Интересуваме се само от решения, които са цели числа. В случая с кофите Диофантовото уравнение е $14x+8y=4$, а в случая с часовниците уравнението е $11x+7y=15$. И в двата случая Диофантовите уравнения имат решение. Но има уравнения, които нямат решения. Такова е например Диофантовото уравнение $14x+8y=3$. Затова, дядо, ако беше поискал да ти отмеря 3 литра с твоите кофи, щях да ти отговоря, че това е невъзможно. Ако искаш да научиш повече подробности, прочети по-долу това, което ни разказа учителката.

Дефиниция 1. Най-голямото число измежду всички делители на числата a и b се нарича най-голям общ делител на a и b. Бележи се с НОД (a,b) или само (a,b).

Например (10,25) = 5; (6,21) = 3; (4,16) = 4; (5,22) = 1.

Дефиниция 2. Ако най-големият общ делител на числата a и b е равен на 1, т.е. ако $(a,b) = 1$, числата a и b се наричат *взаимнопрости.*

Дефиниция 3. Уравнение от вида $ax+by=c$, където a, b и c са цели числа и $ab\neq 0$, се нарича *линейно Диофантово уравнение от първи ред с две неизвестни.*

Теорема 1. Линейното Диофантово уравнение $ax+by=c$ има решение тогава и само тогава, когато най-големият общ делител $d=(a,b)$ на числата a и b дели числото c.

Доказателство: Думите „тогава и само тогава" означават, че условието $d=(a,b)$ да дели c е необходимо и достатъчно, т.е. ако уравнението има решение, то със сигурност $d=(a,b)$ дели c и обратно, ако $d=(a,b)$ дели c, то уравнението има решение. Доказателството, че условието е достатъчно, е доста сложно и затова ще го пропуснем. Напротив, доказателството, че условието е необходимо, е лесно. Настина нека (x_0, y_0) е решение на уравнението. Това означава, че $ax_0+by_0=c$. Тъй като $d = (a,b)$ дели a и b, то d дели лявата страна на равенството и следователно дели дясната му страна. Заключаваме, че d дели c.

Теорема 2. Ако $d=(a,b)$ дели c и (x_0, y_0) е решение на уравнението $ax+by=c$, то всички решения се дават с формулата $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$, където t е произволно цяло число, т.е. $t=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$

Доказателство: Директната проверка показва, че:

$$ax+by=a\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=c,$$

което означава, че $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$ е решение за всяко $t=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\dots$ Сега ще покажем, че всяко решение може да се представи в тази форма. Нека (x,y) е решение. Имаме $ax+by=ax_0+by_0$, откъдето $a(x-x_0)=b(y_0-y)$ и оттук $\frac{a}{d}(x-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y)$. Тъй като $d=(a,b)$, то $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ и от последното равенство следва, че $\frac{b}{d}$ дели $(x-x_0)$ и $\frac{a}{d}$ дели (y_0-y). Следователно $x-x_0=\frac{b}{d}u$ и $y_0-y=\frac{a}{d}v$ за някои цели числа u и v. Като заместим в равенството $a(x-x_0)=b(y_0-y)$, получаваме, че $u=v$ и това завършва доказателството.

За решаване на линейни Диофантови уравнения от първи ред с две неизвестни са известни два основни метода – на Евклид и на Ойлер. Тук ще се спрем на метода на Ойлер.

Задача 1. Да се реши Диофантовото уравнение $738x+621y=45$ по метода на Ойлер.

Решение: Нека (x,y) е решение на уравнението. Тъй като $621<738$, изразяваме y чрез x, вземайки предвид, че $738=1.621+117 \quad 45=0.621+45$. Следователно

$$y=\frac{-738x+45}{621}=-x+\frac{-117x+45}{621}.$$

От горното равенство заключаваме, че числото $\frac{-117x+45}{621}=t$ е цяло. Освобождаваме се от знаменателя и стигаме до $621t+117x=45$, което е ново Диофантово уравнение от същия вид, но с по-малки коефициенти пред неизвестните. Продължаваме по същия начин и изразяваме x чрез t, защото $117<621$. Вземаме предвид, че $621=5.117+36$ и $45=0.117+45$, откъдето следва, че

$$x=\frac{-621t+45}{117}=-5t+\frac{-36t+45}{117}.$$

Така, числото $\frac{-36t+45}{117}=u$ е цяло и $117u+36t=45$ е ново Диофантово уравнение с по-малки коефициенти. По-нататък изразяваме t чрез u и вземаме предвид, че $117=3.36+9$, $45=1.36+9$. Оттук

$$t=\frac{-117u+45}{36}=-3u+1+\frac{-9u+9}{36}=-3u+1+\frac{-u+1}{4}.$$

Числото $\frac{-u+1}{4}=v$ е цяло и $4v+u=1$. Процесът спира, защото коефициентът пред неизвестното u е единица и u се изразява направо чрез v. Стигаме до $u=-4v+1$ и връщайки се обратно, намираме:

$$t=-3u+1+v=-3(-4v+1)+1+v=13v-2$$

$$x=-5t+u=-5(-3u+1+v)+u=16u-5-5v=16(-4v+1)-5-5v=-69v+11$$

$$y=-x+t=69v-11+13v-2=82v-13.$$

Последните две равенства представляват т. нар. *параметрично представяне* на всички решения на изходното уравнение, а именно:

$$x=-69v+11,\ y=82v-13,\ v=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\dots$$

Задача 2. Разполагате с два пясъчни часовника – единият отмерва 11 минути, а вторият – съответно 7 минути. Възможно ли с използване на двата часовника да се отмерят 15 минути?

Решение: Отговорът е положителен. Нека x и y са съответно бройките използвания на първия и втория часовник. Тогава трябва да е изпълнено $11x+7y=15$, което е линейно Диофантово уравнение от първи ред с две неизвестни. То има решение, защото $(11,7)=1$. Ще го решим по метода на Ойлер:

$$y=\frac{-11x+15}{7}=-x+2+\frac{-4x+1}{7}=-x+2+t$$

$$\frac{-4x+1}{7}=t \Leftrightarrow 7t+4x=1$$

$$x=\frac{-7t+1}{4}=-t+\frac{-3t+1}{4}=-t+u$$

$$\frac{-3t+1}{4}=u \Leftrightarrow 4u+3t=1$$

$$t=\frac{-4u+1}{3}=-u+\frac{-u+1}{3}=-u+v$$

$$\frac{-u+1}{3}=v \Leftrightarrow u=-3v+1.$$

Връщаме се обратно:

$$t=-u+v=3v-1+v=4v-1$$
$$x=-t+u=-4v+1-3v+1=-7v+2$$
$$y=-x+2+t=7v-2+2+4v-1=11v-1.$$

Всичките решения на уравнението са $x=-7v+2$, $y=11v-1$, където v е произволно цяло число. Ако $v=0$, то $x=2$ и $y=-1$. Това означава следното (Обърнете внимание на отрицателните числа!):

Стартираме двата часовника едновременно. Вторият часовник отмерва 7 минути. От този момент нататък можем да отмерим точно $11-7=4$ минути, оставайки първия часовник, т.е. точно след 4 минути пясъкът в първия часовник ще изтече. След тези 4 минути обръщаме първия часовник и изчакваме пясъка да изтече. По този начин отмерваме още 11 минути или общо получаваме $11+4=15$ минути. Първият часовник е използван 2 пъти ($x=2$), а вторият е използван веднъж, но с изваждане на отмереното време от него ($y=-1$).

Задача 3. Разполагате с две кофи за вода – едната е 14-литрова, а втората е 8-литрова. Възможно ли е с помощта на двете кофи да се отмерят точно 4 литра?

Решение: Отговорът е положителен. Нека x и y са съответно бройките използвания на първата и втората кофа. Тогава трябва да е изпълнено $14x+8y=4$, което е линейно Диофантово уравнение от първи ред с две неизвестни. То има решение, защото $(14,8)=2$ и 2 дели 4. Ако разделим двете страни на 2, получаваме $7x+4y=2$. Ще използваме отново метода на Ойлер:

$$y=\frac{-7x+2}{4}=-x+\frac{-3x+2}{4}=-x+t$$

$$\frac{-3x+2}{4}=t \Leftrightarrow 4t+3x=2$$

$$x=\frac{-4t+2}{3}=-t+\frac{-t+2}{3}=-t+u$$

$$\frac{-t+2}{3}=u \Leftrightarrow t=-3u+2.$$

Връщаме се обратно:

$$x=-t+u=3u-2+u=4u-2$$

$$y=-x+t=-4u+2-3u+2=-7u+4.$$

Така, всичките решения са $x=4u-2$, $y=-7u+4$, където u е произволно цяло число. Ако $u=0$, то $x=-2$ и $y=4$. Това означава следното (Обърнете внимание на отрицателната стойност на x!):

Напълваме 14-литровата кофа от чешмата. От нея напълваме втората кофа. Тогава в първата кофа остават $14-8=6$ литра. Изпразваме втората кофа и наливаме в нея 6-те литра от първата. Отново напълваме 14-литровата кофа догоре от чешмата. От нея допълваме втората кофа. Допълването е точно с 2 литра. Тогава в първата кофа остават $14-2=12$ литра. Сега изпразваме втората кофа и я напълваме с вода от първата. В първата кофа остават $12-8=4$ литра и задачата е решена.

Последователните ходове можем да отбележим по следния начин:

$(0,0)\to(14,0)\to(6,8)\to(6,0)\to(0,6)\to(14,6)\to(12,8)\to(12,0)\to(4,8)\to(4,0)$.

Задача 4. Да се реши Диофантовото уравнение $14x+8y=3$.

Решение: Уравнението няма решение, защото $(14,8)=2$ и 2 не дели дясната страна 3.

Задачи за упражнение:

Задача 5. Да се намерят всички цели решения на уравненията:

а) $13x-2y=7$; б) $24x+3y=15$; в) $7x-28y=15$.

Задача 6. Да се намерят всички решения на уравненията, които са естествени числа:

а) $5x+6y=7$; б) $-4x+12y=64$; в) $8x-24y=7$.

Задача 7. Да се намерят цели числа x и y, за които $5x+11y=3$ и сумата $x+y$ е възможно най-малкото естествено число.

Отг. $(x,y)=(5,-2)$

Задача 8. Да се намерят цели числа x и y, за които $3x+14y=5$ и разликата $y-x$ е възможно най-малкото естествено число, което е просто.

Отг. $(x,y)=(-73,16)$

Задача 9. Да се намерят цели числа x и y, за които $2x+3y=7$ и числото $-xy$ е възможно най-малкият точен квадрат.

Отг. $(x,y)=(-7,7)$

Задача 10. Да се намерят всички цели числа x и y, които се делят на 9 и за които $-5x+3y=9$.

Отг. $(x,y)=(27u+9,45u+18)$, където u е произволно цяло число.

Автор на четивото: Д-р М. Плюс

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Д-р М. Плюс

Поредната 57-а международна олимпиада по математика се проведе в Хонг Конг от 6 до 16 юли 2016 г. В нея взеха участие 602 ученици (531 момчета и 71 момичета) от 109 държави. Както обикновено, регламентът предвиждаше половината състезатели да получат медали, като златните, сребърните и бронзовите да са приблизително в отношение $1:2:3$. Журито на олимпиадата в Хонг Конг разпредели общо 280 медала, от които 44 златни с граници от 29 до 42 точки вкл., 101 сребърни с граници от 22 до 28 точки вкл. и 135 бронзови с граници от 16 до 21 точки вкл. Българският отбор заслужи 3 сребърни и 3 бронзови медала, с което подобри слабите си представяния през последните години. Той беше в състав: Александър Черганскн (СМГ "П. Хилендарски"), Виолета Найденова (СМГ "П. Хилендарски"), Даниел Атанасов (СМГ "П. Хилендарски"), Станислав Славов (СМГ "П. Хилендарски"), Атанас Динев (ПМГ „Н. Обрешков", Бургас) и Христо Папазов (Американски колеж). В отборното класиране по медали делим 22–26. място с Германия, Израел, Индонезия и Иран, а по точки сме на 18. място. Спечелените общо 132 точки не вдъхват особен оптимизъм, а по-скоро песимизъм, предвид високото и ниското ръководство, съставено съответно от доносници и некадърни марионетки. Победители в олимпиадата са шестима ученици, постигнали максималните 42 точки: трима от Южна Корея, двама от САЩ и един от Китай. Ето резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.

Име	Място по точки	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Общо точки	Медал
Александър Чергански	68 – 77	7	5	0	7	7	0	26	сребърен
Даниел Атанасов	68 – 77	7	1	1	7	3	7	26	сребърен
Станислав Славов	68 – 77	7	3	0	7	2	7	26	сребърен
Виолета Найденова	184 – 205	7	3	0	7	2	0	19	бронзов
Атанас Динев	206 – 223	7	0	0	7	4	0	18	бронзов
Христо Папазов	224 – 252	7	1	2	7	0	0	17	бронзов
ОБЩО	18	42	13	3	42	18	14	132	

Място	Държава	Брой участници	Златни медали	Сребърни медали	Бронзови медали	Точки
1	САЩ	6	6	0	0	214
2	Република Корея	6	4	2	0	207
3	Китай	6	4	2	0	204
4	Сингапур	6	4	2	0	196
5	Тайван	6	3	3	0	175
6	КНДР	6	2	4	0	168
7–8	Великобритания	6	2	4	0	165
	Русия	6	4	1	1	165
9	Хонконг	6	3	2	1	161
10	Япония	6	1	4	1	156
11	Виетнам	6	1	4	1	151
12–13	Канада	6	2	2	1	148
	Тайланд	6	2	2	1	148
14	Унгария	6	1	3	2	145
15–16	Бразилия	6	0	5	1	138
	Италия	6	1	3	0	138
17	Филипини	6	2	2	0	133
18	**България**	**6**	**0**	**3**	**3**	**132**
19	Германия	6	0	3	3	131
20–21	Индонезия	6	0	5	0	130
	Румъния	6	0	5	1	130
22	Израел	6	0	3	3	127
23	Мексико	6	0	4	1	126
24	Иран	6	0	3	3	125
25–27	Австралия	6	0	2	4	124
	Франция	6	0	3	2	124
	Перу	6	0	2	3	124
28	Казахстан	6	1	1	3	122
29	Турция	6	0	2	4	121
30–32	Украйна	6	0	2	4	118
	Армения	6	0	1	4	118
	Хърватска	6	0	1	4	118
33	Монголия	6	0	2	2	115
34	Индия	6	0	1	5	113
35–36	Беларус	6	0	1	4	112
	Бангладеш	6	0	1	3	112
37–38	Чехия	6	0	2	1	109
	Швеция	6	0	3	0	109
39	Макао	6	1	1	0	108
40	Сърбия	6	0	1	4	106
41	Саудитска Арабия	6	0	0	4	104
42	Полша	6	0	2	2	102
43	Швейцария	6	0	1	4	99
44	Холандия	6	0	0	3	98
45	Босна и Херцеговина	6	0	0	4	97

46	Австрия	6	0	0	3	89
47	Португалия	6	0	0	1	88
48	Сирия	6	0	0	3	87
49	Испания	6	0	0	2	86
50–51	Литва	6	0	0	3	84
	Гърция	6	0	0	2	84
52	Белгия	6	0	0	3	82
53	Нова Зеландия	6	0	1	1	81
54	Азербайджан	6	0	0	1	79
55	Словакия	6	0	0	2	78
56	Малайзия	6	0	0	2	77
57	Аржентина	6	0	0	2	75
58	Южна Африка	6	0	0	1	73
59–60	Грузия	6	0	0	1	69
	Коста Рика	6	0	0	2	69
61	Естония	6	0	0	1	67
62	Таджикистан	6	0	0	0	66
63–65	Кипър	6	0	1	0	65
	Молдова	5	0	0	1	65
	Словения	6	0	0	0	65
66–67	Колумбия	6	0	0	2	63
	Шри Ланка	6	0	0	1	63
68	Салвадор	5	0	0	1	60
69–70	Албания	6	0	0	1	58
	Туркменистан	6	0	0	0	58
71–72	Финландия	6	0	0	0	55
	Парагвай	6	0	0	2	55
73	Македония	6	0	0	0	53
74	Латвия	6	0	0	0	52
75	Ирландия	6	0	0	0	51
76	Тунис	6	0	0	0	50
77–78	Косово	6	0	0	1	47
	Узбекистан	6	0	0	1	47
79	Мароко	6	0	0	1	46
80	Никарагуа	5	0	0	1	45
81	Дания	6	0	0	0	44
82	Алжир	4	0	0	0	41
83	Еквадор	6	0	0	0	38
84–85	Киргизстан	6	0	0	0	34
	Норвегия	6	0	0	0	34
86	Венесуела	3	0	0	1	29
87	Пуерто Рико	2	0	0	1	27
88–89	Черна гора	2	0	1	0	24
	Нигерия	6	0	0	0	24
90	Исландия	6	0	0	0	23
91–92	Чили	3	0	0	0	18
	Пакистан	6	0	0	0	18

93	Уругвай	1	0	0	1	17
94	Тринидад и Тобаго	4	0	0	0	15
95	Люксембург	3	0	0	0	14
96–97	Камбоджа	6	0	0	0	13
	Мианмар	6	0	0	0	13
98	Уганда	6	0	0	0	12
99	Кения	6	0	0	0	11
100–101	Хондурас	2	0	0	0	10
	Мадагаскар	5	0	0	0	10
102	Ямайка	1	0	0	0	9
103	Ботсвана	6	0	0	0	7
104–105	Египет	5	0	0	0	5
	Гана	3	0	0	0	5
106	Танзания	2	0	0	0	3
107–108	Ирак	5	0	0	0	2
	Лихтенщайн	1	0	0	0	2
109	Лаос	6	0	0	0	0

Ето задачите от 57-ата международна олимпиада по математика:

Първи ден, 11 юли 2016 г.

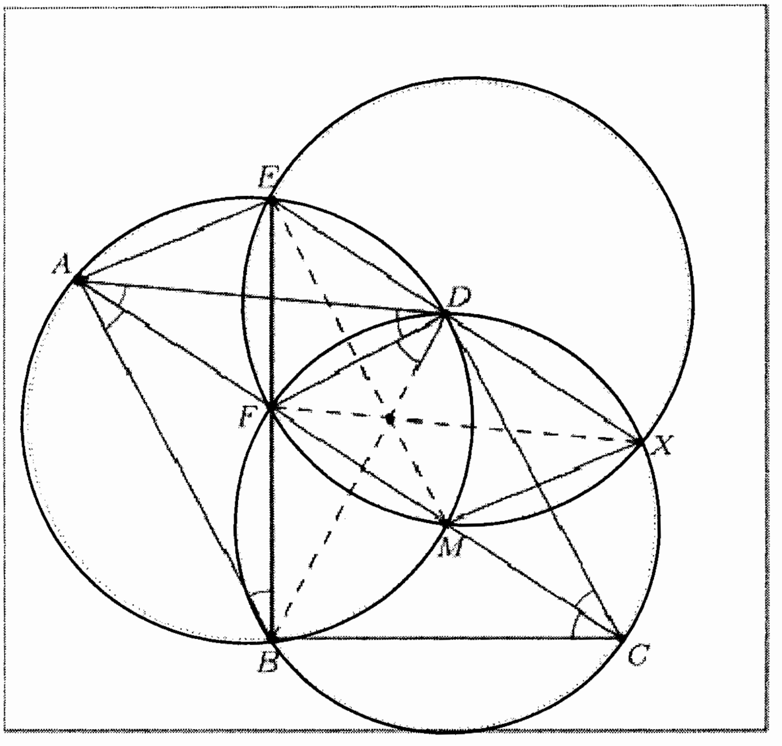
Време за работа 4 часа и 30 мин.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Задача 1. Даден е триъгълник BCF с прав ъгъл при върха B. Нека A е точката върху правата CF, за която $FA = FB$ и F лежи между A и C. Точката D е избрана така, че $DA = DC$ и AC е ъглополовящата на $\angle DAB$. Точката E е избрана така, че $EA = ED$ и AD е ъглополовящата на $\angle EAC$. Нека M е средата на CF, а X е точката, за която $AMXE$ е успоредник (където $AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Да се докаже, че правите BD, FX и ME се пресичат в една точка.

(*предложена от Белгия*)

Решение: Да забележим, че $\Delta FAB \sim \Delta DAC \sim \Delta EAD$, откъдето следва, че $\Delta FAD \sim \Delta BAC$. Лесно получаваме, че $\angle DFC + \angle DCF = \angle BAF + \angle ACB + \angle DCF = 90^0$. Оттук следва, че D лежи на описаната окръжност около ΔBCF (с център M). От друга страна, F е център на вписаната окръжност около ΔABD, защото $MB = MF$. Заключаваме, че M лежи на описаната окръжност около ΔADB. По-нататък:

$\angle DMF = 2\angle DCF = 2\angle EAD = 180^0 - \angle AED$ и следователно E лежи на описаната окръжност около ΔADB. Следователно точките A, E, D, M и B лежат на една окръжност. Оттук $EA = ED = DM = MB$. Тогава $MX = AE = MD$ и значи точките B, F, D, X и C лежат на една окръжност. Получаваме, че $\angle MDX = \angle MXD = \angle MAE$ и точките E, D и X лежат на една права. Но $EF = EA = MX$ и $EX \parallel FM$. Следователно четириъгълникът $EFMX$ е равнобедрен трапец, откъдето заключаваме, че точките E, F, M и X лежат на една окръжност. Това означава, че BD, FX и ME се пресичат в радикалния център.



Задача 2. Да се намерят всички естествени числа n, за които всяка клетка на таблица с размери $n \times n$ може да бъде запълнена с една от буквите I, M и O по такъв начин, че:

• във всеки ред и всяка колона една трета от елементите са I, една трета са M и една трета са O;

• във всеки диагонал, ако броят елементи в диагонала е кратен на 3, то една трета от елементите са I, една трета са M и една трета са O.

Забележка: Редовете и колоните на таблица с размери $n \times n$ са номерирани с числата от 1 до n по обичайния начин. Така, на всяка клетка отговаря двойка естествени числа (i, j), $1 \leq i, j \leq n$. За $n > 1$, таблицата има точно $4n - 2$ *диагонала* от два типа. Диагонал от първия тип се състои от всички клетки (i, j), за които $i + j$ е константа, а диагонал от втория тип се състои от всички клетки (i, j), за които $i - j$ е константа.

Решение: Нека $n = 3k$. Да наречем един диагонал *добър*, ако броят на клетките в него е кратен на 3. Ще казваме, че една клетка е *късметлийска*, ако се намира в два добри диагонала. Ще казваме още, че една клетка е *некъсметлийска*, ако изобщо не се намира в добър диагонал. Ако t късметлийски клетки съдържат едно I, то ще има точно $2k^2 - t$ букви I в некъсметлийски и следователно има $k^2 + t$ букви I в некъсметлийски клетки. Сега да преброим буквите I, които се намират в редове и стълбове с номера, равни на 2 по модул 3 (възможно и двете, като в този случай буквите се броят два пъти). Общата бройка по предположение е $2k^2$. От друга страна, лесно се проверява, че клетките в тези редове и стълбове са само късметлийски или некъсметлийски. Броят на буквите I в тези клетки е $k^2 + 3t$. Заключаваме, че $t = \frac{k}{3}$ и k е кратно на 3. Конструкцията е директна. На диаграмата са показани късметлийските клетки (X) и некъсметлийските (o).

	o			o	
o	X	o	o	X	o
	o			o	
	o			o	
o	X	o	o	X	o
	o			o	

Задача 3. В равнината е даден изпъкнал многоъгълник $P = A_1A_2...A_k$. Върховете A_1, A_2, ..., A_k имат целочислени координати и лежат на една окръжност. Нека S е лицето на P. Дадено е такова нечетно естествено число n та, че квадратите на дължините на страните на P са цели числа, които се делят на n. Да се докаже, че $2S$ е цяло число, което се дели на n.

(*предложена от Русия*)

Втори ден, 12 юли 2016 г.

Време за работа 4 часа и 30 мин.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Задача 4. Множество от естествени числа се нарича *ароматно*, ако съдържа поне два елемента и всеки от неговите елементи има общ прост делител с поне един от останалите елементи. Нека $P(n) = n^2 + n + 1$. Да се намери минималното възможно естествено число b, за което съществува цяло неотрицателно число a така, че множеството

$$\{P(a+1), P(a+2), ..., P(a+b)\}$$

е ароматно.

Решение:

Лема. Ако $x \equiv n, n^2 (\mathrm{mod}\, P(n))$, то $P(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, P(n))$.

Доказателство: Ако $x \equiv n (\mathrm{mod}\, P(n))$, твърдението е очевидно. Ако $x \equiv n^2 (\mathrm{mod}\, P(n))$, то $P(x) = n^4 + n^2 + 1 = (n^4 + n^3 + n^2) - (n^3 + n^2 + n) + (n^2 + n + 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}(n^2 + n + 1)) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, P(n))$.

Така, $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow P(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$; $n \equiv 2, 4 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow P(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$;

$n \equiv 3, 9 (\mathrm{mod}\, 13) \Rightarrow P(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$; $n \equiv 7, 49 (\mathrm{mod}\, 57) \Rightarrow P(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 57)$;

$n \equiv 7, 11 (\mathrm{mod}\, 19) \Rightarrow P(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 19)$.

Сега лесно следва, съществува 6 последователни $P(n)$: $n \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 19)$, $n+1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$, $n+2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, $n+3 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$ и т.н. Решения съществуват при $a \equiv 196 (\mathrm{mod}\, 399)$. Ако $b \leq 5$, решения няма. Отговорът на задачата е 6.

Задача 5. На дъската е написано уравнението

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

с по 2016 линейни множителя от всяка страна. Да се намери минималната възможна стойност на k, за която е възможно да се изтрият точно k от всичките 4032 линейни множителя така, че да остане поне по един множител от всяка страна и полученото уравнение да няма реални корени.

Задача 6. Дадени $n \geq 2$ отсечки в равнината така, че всеки две се пресичат във вътрешна точка и никои три не се пресичат в една точка. За всяка отсечка Джеф трябва да избере единия й край и да постави в него жаба, обърната с лице към другия край. След това Джеф пляска с ръце $n-1$ пъти. Всеки път, когато Джеф пляска с ръце, всяка жаба веднага скача напред в следващата пресечна точка по своята отсечка. Жабите никога не променят посоката на движението си. Джеф желае да разположи жабите така, че да няма момент, в който някои две от тях да се окажат едновременно в една и съща пресечна точка.

(а) Да се докаже, че Джеф винаги може да изпълни желанието си, ако n е нечетно.

(б) Да се докаже, че Джеф няма как да изпълни желанието си, ако n е четно.

МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

проф. Сава Гроздев, Ирина Шаркова

От 24 до 29 юни 2016 г. в гр. Слатина, Румъния се проведе юбилейната 20. младежка балканска олимпиада по математика за ученици до 15,5-годишна възраст. В нея взеха участие 21 отбора от 19 държави, между които официалните държави-участници Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Македония, Молдова, Румъния (с 2 отбора), Сърбия, Турция и Черна гора, както и държавите-гости Азербайджан, Индонезия, Казахстан, Саудитска Арабия, Таджикистан, Туркменистан, Филипини, Франция и отбор на Община Слатина. Отборът на България, съставен от шестима ученици, спечели общо 1 златен, 3 сребърин и 2 бронзови медала. Златен медалист е Евгени Кайряков (8. клас, СМГ „П. Хилендарски“), който се нареди второто в кайното индивидуално класиране след Озан Каймак, ученик от Турция. Сребърни медалисти са Виктор Балтин (8. клас, ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас), Иво Петров (8. клас, СМГ „П. Хилендарски) и До Виет Кьонг (7. клас, СМГ „П. Хилендарски“). Бронзови медали заслужиха Кристиан Минчев (8. клас, ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас) и Светлин Лалов (7. клас, СМГ „П. Хилендарски“). В отборното класиране по точки България е на четвърто място с 140 т. след Румъния (182 т.), Турция (180 т.) и Сърбия (154 г.) Ето класирането по медали:

№	държава	златни	сребърни	бронзови	точки
1	Турция	3	2	1	180
2	Румъния	2	4	0	182
3	Сърбия	1	5	0	154
4	Бъргария	1	3	2	140
5	Гърция	1	1	3	89
6	Молдова	0	1	2	55
7	Босна и Херцеговина	0	0	4	43
8	Македония	0	0	3	37
9	Кипър	0	0	3	35
10	Албания	0	0	3	30
11	Черна Гора	0	0	1	25

Научни ръководители на отбора са проф. Сава Гроздев от ВУЗФ (Висше училище по застраховане и финанси) и неговата докторантка Ирина Шаркова – учителка в ПЧМГ (Първа частна математическа гимназия). Шестимата състезатели бяха определени след две контролни по формата на балканиадата. Предлагаме задачите от контролните и кратки решения след тях.

ПЪРВО КОНТРОЛНО
София, 14 май 2016 г.

Задача 1. Четириъгълник $ABCD$, за който $\sphericalangle BAC < \sphericalangle DCB$, е вписан в окръжност с център O. Ако $\sphericalangle BOD = \sphericalangle ADC = \alpha$, намерете за кои стойности на α е изпълнено неравенството $AB < AD + CD$.

Задача 2. За числата $a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0$ е изпълненео равенството $a + b + c = k$.

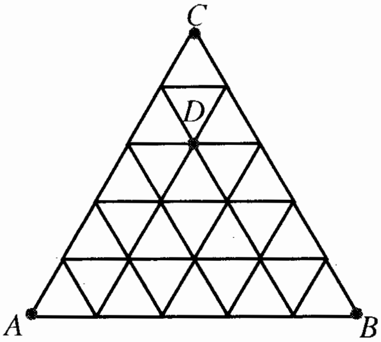
Намерете най-малката стойност на израза $M = \dfrac{b^2}{\sqrt{ka+bc}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{kc+ab}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{kb+ca}}$.

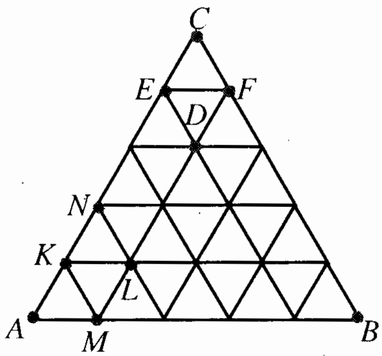
Задача 3. Даден е многочленът $M(x, y) = x^2 + xy - 2y$, където x и y естествени числа.

а) Да се реши уравнението $x^2 + xy - 2y = 64$.

б) Ако $M(x, y)$ е точен квадрат и $x > 2$, докажете, че числото $x + y + 2$ е съставно.

Задача 4. Равностранен триъгълник ABC със страна n $(n \geq 3)$ е разделен на n^2 равностранни триъгълника със страна 1 с помощта на прави, които са успоредни на страните на ΔABC. Във върховете на единичните триъгълници са поставени числа. За един ход се увеличават или намаляват с единица числата във върховете на ромб, образуван от два единични триъгълника с обща страна. Първоначално във върховете A, B, C и D са поставени единици, а във всички останали върхове – съответно нули. Възможно ли е с повтаряне на ходове числата във всички върхове на единичните триъгълници да станат нули?





Решение: Възможно е, ако *n* е нечетно число. Да намалим с единица числата във върховете на ромба *AMLK* (вж. чертежа). След това да увеличим с единица числата във върховете на ромба *KMLN*. По този начин единицата от *A* се премества в *N* и всички останали числа се запазват с първоначалните си стойности. Тъй като $n-1$ е четно число, след $\dfrac{n-1}{2}$ двойки ходове единицата от *A* ще се премести в *E*. След още толкова хода единицата от *B* ще се премести в *F*. Сега е достатъчно да намалим с единица числата във върховете на ромба *EDFC*. Ако *n* е четно число, не е възможно с повтаряне на ходове числата във всички върхове на единичните триъгълници да станат нули. За да докажем това, ще оцветим в четири цвята върховете на единичните триъгълници така, че върховете на всеки ромб от разглеждания вид да са разноцветни. Това може да стане по следния начин: оцветяваме върховете по страната *AC* последователно с червен и син цвят, тръгвайки с червен цвят от *A*; оцветяваме върховете по отсечката *MF* последователно със зелен и жълт цвят, тръгвайки със зелен цвят от *M*; за следващата вдясно успоредна отсечка оцветяваме върховете по нея отново последователно с червен и син цвят, тръгвайки с червен цвят от точката върху *AB* вдясно от *M*; и т. н., докато стигнем до върха *B*, който си сигурност ще бъде червен. Тъй като върховете A, B и C са червени, а върхът D е зелен, то първоначално сумата на числата в червените върхове на единичните триъгълници, намалена със сумата на числата в зелените върхове, е равна на 2. Очевидно при така направеното оцветяване тази разлика се запазва след всеки ход и следователно не можем да получим нули във всички върхове.

ВТОРО КОНТРОЛНО
София, 15 май 2016 г.

Задача 1. За реалните числа a, b, c, d, e и f е изпълнено $a+b+c+d+e+f=20$ и $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2+(e-2)^2+(f-2)^2=24$. Да се намери най-голямата стойност, която приема числото d.

Задача 2. Върховете на петоъгълник $ABCDE$ лежат на окръжност, а точките H_1, H_2, H_3 и H_4 са съответно ортоцентровете на ΔABC, ΔABE, ΔACD и ΔADE. Да се докаже, че четириъгълникът, образуван от ортоцентровете, е квадрат тогава и само тогава, когато $BE \parallel CD$ и разстоянието между тях е равно на $\frac{BE+CD}{2}$.

Задача 3. На дъската е записано числото 1. На всеки ход Поли изтрива последното записано число n и на негово място записва едно от числата n^2, $(n+1)^2$ или $(n+2)^2$. Възможно ли е с тези операции на дъската да се получи число, кратно на 2015?

Задача 4. Квадрат 4×4 е разделен на 16 единични квадратчета, във всяко от които е записана нула или единица. За един ход се избира ред или стълб на квадрата и се променят числата в него (нулите стават единици, а единиците стават нули). Квадратът се нарича *занулен*, ако броят на нулите в него не може да се намали. Броят на нулите в един занулен квадрат се нарича *степен на квадрата*. Намерете възможните стойности на степента.

Решение: Да забележим, че в кой да е ред или стълб на занулeния квадрат има не повече от две нули. В противен случай ще променим числата в такъв ред или стълб. Ще докажем, че броят на нулите в занулeния квадрат е не повече от 4. Ако допуснем противното, ще има ред с две нули. Да означим с A и B стълбовете, в които се намират тези две нули. Можем да считаме, че A и B съдържат по две нули. В противен случай ще променим числата в избрания ред и ще получим два стълба с по две нули. Петата нула не е в A или B. Но тогава ще сменим числата в A и B и ще получим ред с три нули, което е противоречие с факта, че квадратът е занулен. Степента на зануления квадрат може да приема стойности 0, 1, 2, 3 или 4. Пример на занулен квадрат със степен i (i = 0, 1, 2, 3 или 4) е този, всичките нули в който са разположени по един от диагоналите му.

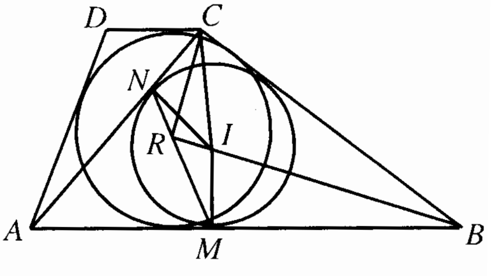
Че квадрат с нули само по диагонал е наистина занулен, следва от факта, че резултатът от многократно повтаряне на ходове зависи не от броя на ходовете, а от четността на този брой. Наистина, да номерираме редовете на произволен квадрат отгоре надолу и стълбовете отляво надясно последователно с числата 1, 2, 3 и 4. Да означим броя на ходовете за реда i, с които се получава занулен квадрат, с r_i, а броят на ходовете за стълба j, с които се получава занулен квадрат, съответно с s_j. Тогава числото в единичното квадратче (i, j), което се намира на i–ия ред и j–ия стълб, ще се смени r_i+s_j пъти. Ако r_i е четно число, можем да вземем 0 вместо самото r_i и резултатът ще бъде същият. Ако r_i е нечетно число, можем да вземем 1 вместо самото r_i и резултатът ще бъде същият. Аналогично за s_j. Следователно, за получаване на занулен квадрат можем да считаме, че редовете и стълбовете на първоначалния квадрат се променят най-много по веднъж. Сега е ясно, че ако нулите са само по диагонал, техният брой не може да бъде намален.

Подготовката се проведе от 5 до 18 юни в Олимпийския център на МОН. Предлагаме ви задачите от състезателната тема на балканиадата, в която ще отбележим задача 1, която е българско предложение с автор Мирослав Маринов.

Задача 1. Трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) е описан около окръжност. Вписаната окръжност в триъгълника ABC се допира до правите AB и AC съответно в точките M и N. Да се докаже, че центърът на вписаната окръжност в трапеца $ABCD$ лежи на правата MN.

(*предложена от България*)

Решение: Нека I е центърът на вписаната окръжност в ΔABC и правата BI пресича MN в точка R. Тъй като ΔAMN е равнобедрен ($AM = AN$ – допирателни през обща точка), то $\angle ANM = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, където $\angle MAN = \alpha$. От друга страна, CI е ъглополовяща на $\angle ACB$ и следователно $\angle BIC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$.



Заключаваме, че $\angle ANM + \angle BIC = 180^0$. Ъглите RNC и RIC допълват до 180^0 съответно ъглите $\angle ANM$ и $\angle BIC$, откъдето $\angle RNC + \angle RIC = 180^0$. Следователно четириъгълникът $NRIC$ е вписан в окръжност и тъй като $\angle INC = 90^0$ (AC се допира в N до окръжността с център I), то $\angle IRC = 90^0$. Това показва, че CR е ъглополовяща в трапеца $ABCD$ и тъй като BR е също ъглополовяща, то $R \equiv O$.

Задача 2. Нека a, b и c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2 \ge \frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

(*предложена от Босна и Херцеговина*)

Решение: От очевидното $2ab \le a^2 + b^2$ следват неравенствата

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \quad \text{и} \quad 4abc \le 2c(a^2+b^2),$$

които са изпълнени са произволни положителни реални числа a, b и c. Събираме левите и ден.сните страни на тези две неравенства и получаваме:

$(a + b)^2 + 4abc \le 2(a^2 + b^2)(c + 1)$, откъдето $\dfrac{8}{(a+b)^2+4abc} \ge \dfrac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}$. От друга страна, от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2} \ge 2\sqrt{\frac{2}{c+1}}=\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}.$$

Пак с помощта на неравенството между средното аритметично и средното геометрично намираме още, че $\frac{c+3}{8}=\frac{c+1}{8}+\frac{2}{8}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{2(c+1)}{64}}=\frac{\sqrt{2(c+1)}}{4}$, т.е. $\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}\geq\frac{8}{c+3}$.

Заключаваме, че $\frac{4}{\left(a^2+b^2\right)(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{8}{c+3}$. Сега лесно получаваме окончателния резултат:

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

Задача 3. Да се намерят всички тройки цели числа (a,b,c) така, че числото

$$N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$$

е степен на 2016.

(*Степен на* 2016 *е цяло число от вида* 2016^n, *където n неотрицателно цяло число.*)

(*предложена от Гърция*)

Решение: Нека a, b и c са такива цели числа и n е естествено така, че

$$(a-b)(b-c)(c-a)+4=2.2016^n.$$

Ако положим $a-b=-x$, $b-c=-y$, можем да запишем това равенство във вида $xy(x+y)+4=2.2016^n$. Да забележим, че дясната страна на последното се дели на 7 и значи $xy(x+y)+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$. Тогава $3xy(x+y)\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$ и следователно

$$(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 2(\mathrm{mod}\,7).$$

От малката теорема на Ферма следва, че точните кубове дават остатък -1, 0 или 1 при деление на 7, т.е. $k^3\equiv\sim -1,0,1(\mathrm{mod}\,7)$. Но тогава горното равенство е възможно само ако някое от събираемите вляво $(x+y)^3$, x^3 или y^3 се дели на 7. В такъв случай обаче и произведението $xy(x+y)$ се дели на 7. Стигаме до противоречие и заключаваме, че $xy(x+y)+4=2$, т.е. $xy(x+y)=-2$. Единствените решения на последното са $(x,y)=(-1,-1)$ и търсените тройки са $(a,b,c)=(k+2,k+1,k)$, $k\in\mathrm{Z}$, както и техните пермутации.

Забележка. Задачата може да се реши с аналогични разглеждания и по друг модул, например 9.

Задача 4. Една таблица 5×5 се нарича *правилна*, ако всяка нейна клетка съдържа едно от четири, две по две различни реални числа, така че всяко от тях се среща точно по веднъж във всяка подтаблица 2×2. Сумата на числата в една *правилна таблица* се нарича *тотална сума* на таблицата. С помощта на четири произволни числа се конструират всички възможни правилни таблици, пресмятат се техните тотални суми и се намира броят на различните суми. Да се определи възможно най-голямата стойност на този брой.

(*предложена от Гърция*)

Решение: Ще докажем, че максималният брой на тоталните суми е 60. Доказателството се основава на следното:

Твърдение. В една правилна таблица или всеки ред съдържа точно две от числата или всеки стълб съдържа точно две от числата.

Доказателство: Нека R е ред, който съдържа поне три от числата. Тогава тези три числа са в последователни позиции. Нека x, y и z са числата в последователни позиции. От условието, че във всяка подтаблица 2×2 четирите числа участват точно по веднъж, заключаваме, че в реда над R (ако има такъв) над числата x, y и z ще се намират числата z, t и x в този ред. А пък над тях ще се намират числата x, y и z в този ред. Същото се случва в редовете под R (виж фигурата).

•	x	y	z	•
•	z	t	x	•
•	x	y	z	•
•	z	t	x	•
•	x	y	z	•

Като попълним цялата таблица, лесно заключаваме, че всеки стълб съдържа точно две от числата и с това твърдението е доказано.

Завъртайки таблицата, можем да считаме, че всеки ред съдържа точно две от числата. Без първия ред и първия стълб таблицата се превръща в таблица 4×4, която може да се раздели на четири подтаблици 2×2. Заключаваме, че тази таблица 4×4 съдържа всяко от числата точно по четири пъти и тоталната й сума е $4(a+b+c+d)$. Сега е достатъчно да пресметнем по колко различни начина могат да се разположат числа в първия ред R_1 и първия стълб C_1.

Нека a_1, b_1, c_1 и d_1 са появяванията съответно на a, b, c и d в R_1 и C_1. Тогава тоталната сума на таблицата 5×5 е

$$S=4(a+b+c+d)+a_1\cdot a+b_1\cdot b+c_1\cdot c+d_1\cdot d\,.$$

Ако първият, третият и петият ред съдържат числата x и y, където с x сме означили числото в най-горното и най-лявото поле (1, 1) на таблицата, то вторият е четвъртият ред ще съдържат само числата z и t, където с z сме означили числото в полето (2, 1). Тогава $x_1+y_1=7$ и $x_1\geq3$, $y_1\geq2$, $z_1+t_1=2$ и $z_1\geq t_1$. Имаме, че $\{x_1,y_1\}=\{5,2\}$ или $\{x_1,y_1\}=\{4,3\}$ и съответно $\{z_1,t_1\}=\{2,0\}$ или $\{z_1,t_1\}=\{1,1\}$. По този начин (a_1,b_1,c_1,d_1) се получава чрез пермутация на една от следните четворки:

(5, 2, 2, 0), (5, 2, 1, 1), (4, 3, 2, 0), (4, 3, 1, 1).

Общият брой пермутации на първата е $\frac{4!}{2!}=12$, на втората е също 12, на третата е 24, а на четвъртата е отново 12. Следователно различните тотални суми са най-много 60.

Всяка от тези 60 комбинации може да се реализира. Наистина, ако вземем три реда *ababa* и ги разместим с два реда *cdcdc*, можем да получим (5, 2, 2, 0); ако вземем три реда *ababa* и ги разместим с един ред *cdcdc* и един ред *dcdcd*, можем да получим (5, 2, 1, 1); ако вземем три реда *ababc* и ги разместим с два реда *cdcda*, можем да получим (4, 3, 2, 0); накрая, ако вземем три реда *abcda* и ги разместим с два реда *cdabc*, можем да получим (4, 3, 1, 1).

С избор например на $a=10^3$, $b=10^2$, $c=10$ и $d=1$ можем да направим всички суми различни. С това задачата е решена.

Ето представянето на българските ученици с получените от тях точки:

№	Име	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Общо точки	медал
1	Евгени Кайряков	10	10	10	8	38	златен
2	Виктор Балтин	7	1	10	8	26	сребърен
3	Иво Петров	10	0	10	4	24	сребърен
4	До Виет Кьонг	10	0	10	2	22	сребърен
5	Кристиан Минчев	1	0	10	5	16	бронзов
6	Светлин Лалов	1	2	4	7	14	бронзов
	ОБЩО	39	13	54	34	140	

Ръководителите на делегациите на представените 19 държави отчетоха факта, че математиката е за млади хора и че ако един ученик започне да се занимава сериозно с математика, след като навърши пълнолетие, това е твърде късно. Интересът към математическите състезания сред по-малките е значителен. Самият факт, че на Балканската олимпиада в Румъния, а и преди нея, се включват доста представители на държави извън Балканите, показва също интерес към състезания за ученици до 16-годишна възраст. В същото време световна олимпиада за тази възраст липсва. В световната олимпиада за по-големи ученици, която е с почти 60-годишна история, участващите държави тази година са повече от 100. Въз основа на това ръководителите на делегациите подписаха Меморандум и избраха Комитет, включващ двама представители на Европа и трима на Азия. Задача на Комитета съгласно Меморандума е да се регистрира световна олимпиада за ученици до 16-годишна възраст под името Младежка международна олимпиада по математика с превод на английски език „Junior International Mathematical Olympiad" и съкращение JIMO. За председател на Комитета единодушно беше избран ръководителят на българската делегация.

Домакин на следващата Балканска олимпиада през 2017 г. е България.

МЕТОД НА ПОДРЕЖДАНЕТО
(подготовка за младежката балканиада)

Д-р М. Плюс

Задача 1. Дадени са 7 различни естествени число със сума 100. Да се докаже, че сумата на 3 от тях е не по-малка от 50.

Решение: Да подредим дадените числа по големина: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Ще покажем, че $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$. Ако $a_5 > 15$, твърдението е очевидно, защото $a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51 > 50$. Затова можем да считаме, че $a_5 \leq 15$. Тогава $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, т.е. $-(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq -50$ и следователно отново е изпълнено $a_5 + a_6 + a_7 = 100 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq 100 - 50 = 50$

Задача 2. Върху дъската са отбелязани $2n+2$ точки, никои 3 от които не лежат на една права. Да се докаже, че съществува права, в двете полуравнини спрямо която лежат по n точки измежду дадените.

Решение: Да изберем най-лявата точка върху дъската и да вземем права през точката, вдясно от която са разположени поне 2 n точки от дадените (най-много една от останалите $2n+1$ точки лежи върху избраната права). Избраната точка означаваме с P_1. Разглеждаме правоъгълна координатна система xP_1y, за която оста P_1y е избраната права през P_1, ориентирана в посока север, а оста P_1x е перпендикулярна на избраната права и е ориентирана в посока изток, т. е. вдясно от P_1. Останалите точки означаваме с $P_2, P_3, \ldots, P_{2n+2}$, като ги подреждаме по нарастваща големина на ориентираните ъгли, които лъчите $\overrightarrow{P_1P_i}$ сключват с положителната посока на P_1x (P_1x е първото рамо на ъгъла), т.е. $j > i$, ако $\angle(P_1x, P_1P_j) > \angle(P_1x, P_1P_i)$. Ориентираните ъгли са в интервала $[-90^0; 90^0]$. Търсената права е P_1P_{n+2}, като е ясно, че точките $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$ лежат в ъгъла определен от лъча $\overrightarrow{P_1P_{n+2}}$ и отрицателната посока на ординатната ос, а точките $P_{n+3}, P_{n+4}, \ldots, P_{2n+2}$ лежат в ъгъла, определен от лъча $\overrightarrow{P_1P_{n+2}}$ и положителната посока на ординатната ос.

Задача 3. Да се докаже, че цифрите на произволно 6-цифрено число могат да се разместят по такъв начин, че да се получи ново 6-цифрено число, сумата от първите 3 цифри на което се различава най-много с 9 от сумата на останалите му цифри.

Решение: Да разгледаме произволно 6-цифрено число и нека $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6$ са шестте му цифри, подредени по големина. За първите 3 цифри на новото число избираме a_6, a_3 и a_1 (в някакъв ред). Ще докажем, че $|(a_6+a_3+a_1)-(a_2+a_4+a_5)| \le 9$. Имаме

$$a_6+a_3+a_1-a_2-a_4-a_5=(a_6-a_5)+(a_3-a_4)+(a_1-a_2) \le a_6-a_5 \le 9,$$

защото числата (a_3-a_4) и (a_1-a_2) са неположителни. От друга страна, по същата причина

$$a_2+a_4+a_5-a_6-a_3-a_1=(a_5-a_6)+(a_2-a_3)+(a_4-a_1) \le a_4-a_1 \le 9.$$

Тогава наистина $|(a_6+a_3+a_1)-(a_2+a_4+a_5)| \le 9$ и следователно числото $\overline{a_6a_3a_1a_2a_4a_5}$ изпълнява условието на задачата.

Задача 4. Единичният куб $K=\{(x;y;z): 0 \le x,y,z \le 1\}$ е разрязан на части с помощта на равнините $x=y$, $y=z$ и $z=x$. Намерете броя на частите.

Решение: Равнината $x=y$ разделя куба на две части. В едната част точките се характеризират с неравенството $x<y$, а в другата – с неравенството $x>y$. Същото важи и за другите две равнини. Следователно броят на частите, на които трите равнини разделят куба, е равен на различните подреждания на *x*, *y* и *z*. Те са шест: $x<y<z$, $x<z<y$, $y<x<z$, $z<x<y$, $y<z<x$ и $z<y<x$.

Задача 5. Да се докаже, че ако $2n+1$ на брой реални числа притежават свойството, че сборът на всеки *n* на брой от тях е по-малък от сбора на останалите $n+1$ на брой, то всичките числа са положителни.

Решение: Да подредим числата по големина: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2n+1}$. От условието следва, че $a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots+a_{2n+1} < a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}$. Но тогава

$$a_1 > (a_{n+2}-a_2)+(a_{n+3}-a_3)+\ldots+(a_{2n+1}-a_{n+1}).$$

Тъй като изразите във всяка скоба вдясно са неотрицателни, то $a_1>0$. Сега е достатъчно да забележим, че a_1 е най-малкото от числата.

Задача 6. Дадени са 7 различни естествени числа, ненадминаващи 1706. Да се докаже, че съществуват 3 от тях *a*, *b* и *c* така, че $a<b+c<4a$.

Решение: Да подредим числата по големина: $a_1<a_2<\ldots<a_7<1707$. Ако $a_3<4a_2-a_1$, то $a_2<a_1+a_3<4a_2$ и задачата е решена. Затова можем да считаме, че $a_3 \ge 4a_2-a_1$. Аналогично, ако $a_4<4a_3-a_1$, то $a_3<a_1+a_4<4a_3$ и задачата е отново решена. Можем да считаме, че $a_4 \ge 4a_3-a_1$. Разсъждавайки по същия начин, можем да считаме, че:

1.) $a_3 \ge 4a_2-a_1$

2.) $a_4 \ge 4a_3-a_1$

3.) $a_5 \ge 4a_4-a_1$

4.) $a_6 \ge 4a_5-a_1$

5.) $a_7 \ge 4a_6-a_1$.

От 1.) получаваме $a_3 \ge 4a_2-a_1 \ge 4(a_1+1)-a_1=3a_1+4$ и по-нататък

от 2.) $a_4 \ge 4a_3-a_1 \ge 4(3a_1+4)-a_1=11a_1+16$,

от 3.) $a_5 \ge 4a_4-a_1 \ge 4(11a_1+16)-a_1=43a_1+64$, от 4.) $a_6 \geq 4a_5 - a_1 \geq 4(43a_1 + 64) - a_1 = 171a_1 + 256$ и

от 5.) $a_7 \geq 4a_6 - a_1 \geq 4(171a_1 + 256) - a_1 = 683a_1 + 1024 \geq 1707$, което е противоречие.

Задача 7. Дадени са n различни естествени числа, най-малкото от които е a, а най-голямото е A. Най-малкото общо кратно на числата означаваме с НОК, а най-големия общ делител – съответно с НОД. Да се докаже, че $\text{НОК} \geq na$ и $\text{НОД} \leq \frac{1}{n}A$.

Решение: Да подредим дадените числа по големина: $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = A$. Тогава $\frac{\text{НОК}}{a_n} < \frac{\text{НОК}}{a_{n-1}} < \ldots < \frac{\text{НОК}}{a_1} = \frac{\text{НОК}}{a}$. Получената редица от n естествени числа е растяща и следователно $\frac{\text{НОК}}{a} \geq n$, т.е. $\text{НОК} \geq na$. По аналогичен начин имаме $\frac{a_1}{\text{НОД}} < \frac{a_2}{\text{НОД}} < \ldots < \frac{a_n}{\text{НОД}} = \frac{A}{\text{НОД}}$, което е също растяща редица от n естествени числа и следователно $\frac{A}{\text{НОД}} \geq n$, т.е. $\text{НОД} \leq \frac{1}{n}A$.

Задача 8. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ са $2n$ $(n \geq 2)$ различни естествени числа, ненадминаващи n^2. Да се докаже, че поне три от разликите $a_i - a_j$ са равни.

Решение: Дадените числа се комбинират по двойки по $\frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$ различни начина. Разликата $a_i - a_j$ (можем да считаме, че от по-голямо вадим по-малко, защото двойките са ненаредени) може да приема стойности от 1 до $n^2 - 1$, т.е. най-много $n^2 - 1$ различни стойности. Твърдението ще следва от принципа на Дирихле, ако $2n^2 - n > 2(n^2 - 1)$, т.е. ако $n < 2$. Последното не е изпълнено, поради условието $n \geq 2$. Заключаваме, че е необходимо по-тънко разсъждение отколкото чрез принципа на Дирихле.

Без ограничение можем да считаме, че $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$. Да разгледаме разликите $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, …, $a_{2n} - a_{2n-1}$. Ако никои три от тях не са равни, то

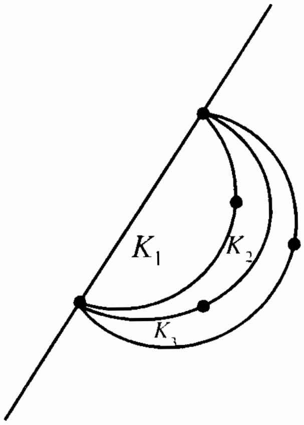
$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n-1}) \geq 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + (n-1) + (n-1) + n = \frac{2n(n-1)}{2} + n = n^2.$$

От друга страна, сумата на разликите вляво е равна на разликата $a_{2n} - a_1$, която ненадминава $n^2 - 1$ и това е противоречие.

Задача 9. (Shortlist IMO, 1993) Дадени са $2n+3$ точки в равнината, никои 3 от които не лежат на една права и никои четири от които не лежат на една окръжност. Да се докаже, че съществува окръжност през три от точките така, че точно n от точките са във вътрешността на окръжността.

Решение: Да изберем 2 от точките така, че всички останали точки да лежат от едната страна на правата, определена от избраните точки. Нека K е полуравнината, която съдържа останалите $2n+1$ точки във вътрешността си и $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{2n+1}$ са сеченията на K с кръгове, определени от окръжности през избраните 2 точки и трета точка от останалите

$2n+1$, като сеченията са наредени по включване. Множеството K_{n+1} съдържа точно n точки във вътрешността си и точно n точки във външността си.



Задача 10. Дадени са $4n$ точки в равнината, никои 3 от които не лежат на една права. Да се докаже, че съществуват n непресичащи се четириъгълника (не непременно изпъкнали) с върхове в тези точки.

Решение: Всеки две от дадените точки определят права. Броят на тези прави е краен брой. Затова можем да изберем друга права l, която не е успоредна на нито една от тези прави и която съдържа дадените точки от едната си страна. Движейки l успоредно на себе си по посока на точките, тя ще среща точките последователно една по една. Това дава възможност да номерираме дадените точки по реда на срещата им с l: A_1, A_2, ..., A_{4n}. Ясно е, че четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$, $A_5A_6A_7A_8$, ..., $A_{4n-3}A_{4n-2}A_{4n-1}A_{4n}$ са непресичащи се.

Задача 11. Дадени са 69 различни естествени числа, ненадминаващи 100. Да се докаже, че съществуват 4 измежду тях a, b, c и d така, че $a<b<c$ и $a+b+c=d$. Вярно ли е твърдението за 68 числа?

Решение: Да подредим числата по големина: $a_1<a_2<...<a_{69}\le 100$. Ясно е, че $a_1\le 32$. Разглеждаме редиците:

$$a_3+a_1<a_4+a_1<...<a_{69}+a_1 \quad \text{и} \quad a_3-a_2<a_4-a_2<...<a_{69}-a_2.$$

Членовете на тези редици са естествени числа, които ненадминават $100+32=132$. Освен това, двете редици имат общо $67+67=134$ члена, откъдето следва, че имат поне един общ член, т.е. съществуват индекси $i, j\in\{3, 4, ..., 69\}$, за които $a_i+a_1=a_j-a_2$. Следователно $a_1<a_2<a_i$ и $a_1+a_2+a_i=a_j$. Твърдението не е вярно за 68 числа, защото ако 68-те числа са 33, 34, ..., 100, то сумата на трите най-малки измежду тях $33+34+35=102>100$ не може да е равна на число от дадените.

Задача 12. Дадени са 25 различни естествени числа. Да се докаже, че могат да се изберат две от тях така, че сумата и разликата им да не са равни на числа измежду останалите 23.

Решение: Нека числата са $a_1<a_2<...<a_{25}$. Ясно е, че $a_{25}+a_1>a_{25}$ и следователно сумата на числата a_{25} и a_1 не е равна на число измежду дадените с изключение на a_{25} и a_1. Аналогично $a_{25}+a_k$ не е число измежду дадените за всяко $k=2, 3, ..., 24$ с изключение на a_{25} и a_k. Ако разликата $a_{25}-a_1$ не е число измежду a_2, a_3, ..., a_{24}, твърдението е доказано.

Затова можем да считаме, че това не е така. Същото можем да считаме и за числата $a_{25}-a_k$, където $k=2, 3, \dots, 12$. Тъй като

$$a_{25}-a_1 > a_{25}-a_2 > \dots > a_{25}-a_{12},$$

то единствената възможност е $a_{25}-a_1=a_{24}$, $a_{25}-a_2=a_{23}$, …, $a_{25}-a_{12}=a_{13}$. Оттук следва, че при $k>1$ имаме $a_{24}+a_k>a_{25}$. Ако $a_{24}-a_k$ не е число измежду дадените за някое $1<k\le 12$ с изключение на a_{24} и a_k, твърдението е доказано. Затова можем да считаме, че числата $a_{24}-a_k$ са измежду дадените за всяко $1<k\le 12$ с изключение на a_{24} и a_k. Но от равенството $a_{25}-a_2=a_{23}$ следва, че $a_{25}=a_{23}+a_2$ и значи $a_{24}<a_{23}+a_2$. Оттук $a_{24}\le a_{22}+a_2$, т.е. $a_{24}-a_2\le a_{22}$. Аналогично от равенството $a_{25}-a_3=a_{22}$ следва, че $a_{25}=a_{22}+a_3$ и значи $a_{24}<a_{22}+a_3$. Така $a_{24}\le a_{21}+a_3$, т.е. $a_{24}-a_3\le a_{21}$. Аналогично

$$a_{24}-a_4\le a_{20},\ a_{24}-a_5\le a_{19},\ \dots,\ a_{24}-a_{11}\le a_{13} \text{ и } a_{24}-a_{12}\le a_{12}.$$

Тъй като считаме, че $a_{24}-a_{12}$ е число измежду дадените с изключение на a_{24} и a_{12}, то последното неравенство трябва да е строго, т.е. $a_{24}-a_{12}\le a_{11}$ Тогава $a_{24}-a_{13}\le a_{10}$, $a_{24}-a_{14}\le a_9$, …, $a_{24}-a_{22}\le a_1$. В крайна сметка заключаваме, че числата $a_{24}+a_{23}$ и $a_{24}-a_{23}$ не са измежду дадените с изключение на a_{23} и a_{24}, с което твърдението е доказано.

Задача 13. (Санкт-Петербургска градска олимпиада, 1998) Естествените числа от 1 до 100 са разположени по едно в единичните квадратчета на квадратна таблица 10×10. От всеки ред се избира третото по големина число. Да се докаже, че сумата на избраните числа е не по-малка от сумата на числата в някой от редовете на таблицата.

Решение: Нека $a_1>a_2>\dots>a_{10}$ са избраните числа. Тъй като във всеки ред има по две числа, по-големи от третото по големина, то най-много $10.2=20$ числа са по-големи от a_1. Следователно $a_1\ge 80$. Освен тези най-много 20 числа, от a_2 са по-големи още най-много 8 числа – тези, които се намират в реда с a_1 и са третото, четвъртото и т.н. десетото включително по големина (общо осем на брой). Следователно $a_2\ge 72$. Тогава

$$a_1+a_2+\dots+a_{10}\ge 80+72+a_{10}+(a_{10}+1)+\dots(a_{10}+7)=8a_{10}+80+72+\frac{(1+7).7}{2}=8a_{10}+180.$$

От друга страна сумата на числата в реда, съдържащ a_{10}, е равна най-много на

$$100+99+a_{10}+(a_{10}-1)+\dots+(a_{10}-7)=8a_{10}+199-28=8a_{10}+171.$$

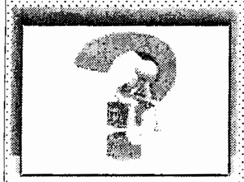
Твърдението следва от неравенството $8a_{10}+180>8a_{10}+171$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. (2005). *Подготовка за Европейско кенгуру*. София: СМБ. (ISBN 954-8880-20-2), 220 страници.

2. Andrescu, T., R. Gelca (2000). *Mathematical Olympiad Challenges*. Boston-Basel-Berlin: Birhauser. (ISBN 0-8176-4155-6), 260 pages.

3. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.



ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+553. Да се определят всички цели числа x, при които изразът $\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+554. Нека $y=\cos^4 x-\cos 2x+\sin x-2\sin^3 x-2$. За кои стойности на реалните числа a и b е изпълнено условието $y\in[a,b]$ за всички реални стойности на x.

(Росен Николаев, гр. Варна)

М+555. Ако p е естествено число, да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{pn}\sqrt{1+k^2}\,\sin(\operatorname{arctg} k-\operatorname{arctg} n)$.

(Теодора Радулеску и Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

М+556. В трапец $ABCD$ ($AB\parallel CD$) диагоналите AC и BD се пресичат в точка O, а лицата на триъгълниците ABO, CDO и BCO са съответно a, b и c. Ако е изпълнено равенството $c=a-6b$, да се намери отношението на голямата основа към малката.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+557. Точките M, N и P лежат съответно върху страните BC, CA и AB на ΔABC така, че $\sphericalangle ANP=\sphericalangle BMP=\sphericalangle MPN$.

а) Ако $CP\cap MN=Q$, да се намери геометричното място на точката Q, когато P описва страната AB.

б) Да се определи положението на точката P, при което $MN\perp CP$. Да се докаже, че при това положение на P периметърът на четириъгълника $CMPN$ е по-голям от удвоения диаметър на вписаната в ΔABC окръжност.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+558. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABD=90^\circ$ и $AC.BD=AD.BC$. Точката P лежи върху правата AD така, че D е между A и P и $\sphericalangle DCP=90^\circ$. Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците ABC и DCP са допирателни.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 15.04.2017 г.

M+ РЕШЕНИЯ

M+529. Реалните числа x и y са корени съответно на уравненията $8x^5-60x^4+184x^3-288x^2+231x-84=0$ и $81y^5-270y^4+378y^3-276y^2+107y-8=0$. Да се намери стойността на израза $2x+3y$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Полагаме $x=\dfrac{u+3}{2}$ и $y=\dfrac{v+2}{3}$. Дадените равенства преминават в следните $u^5+2u^3+3u-30=0$ и $v^5+2v^3+3v^2+30=0$. След почленно събиране на тези равенства се получава $(u+v)\left[u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4+2\left(u^2-uv+v^2\right)+3\right]=0$. Тъй като

$$u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4=\left(u-\frac{1}{4}v\right)^4+\frac{5}{8}v^2\left[\left(u-\frac{3}{4}v\right)^2+\frac{33}{32}v^2\right]\geq 0 \text{ и}$$

$u^2-uv+v^2=\left(u-\dfrac{1}{2}v\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2\geq 0$, то $u+v=0$. Тогава след почленно събиране на равенствата $u=2x-3$ и $v=3y-2$ получаваме $0=u+v=2x+3y-5$. Следователно $2x+3y=5$.

M+530. Ако n и p са естествени числа, да се докаже, че $\left\{\sum_{k=p}^{n}\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}\right\}<\dfrac{1}{p^2}$, където $\{x\}$ означава дробната част на x.

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. От неравенството на Бернули следва

$$\left(1+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right)^{k^2(k+1)^2}>1+k^2(k+1)^2.\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=2(k+1).$$

Оттук $1+\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}>\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}>1$. Сумираме тези неравенства и получаваме

$$n-p+1+\sum_{k=p}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}>\sum_{k=p}^{n}\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}>n-p+1.$$

Тъй като $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{p^2}$, то от последните неравенства получаваме $n-p+1+\dfrac{1}{p^2}>\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}>n-p+1$. Оттук следва твърдението на задачата.

M+531. Ако $x,y,z\in(2,+\infty]$, да се, че $\log_x\dfrac{yz+x}{3}+\log_y\dfrac{zx+y}{3}+\log_z\dfrac{xy+z}{3}\geq 3$.

(Каталин Кристеа, Крайова, Румъния)

Решение. От $y;z\in[2,+\infty)$ следва $yz\geq y+z$, което е еквивалентно с $(y-1)(z-1)\geq 1$. Сега от неравенството между средните следва $\dfrac{yz+x}{3}=\dfrac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$. Оттук намираме $\log_x\dfrac{yz+x}{3}\geq\log_x\sqrt[3]{xyz}=\dfrac{1}{3}\left(1+\log_x y+\log_x z\right)$. Аналогично имаме

$$\log_y \frac{zx+y}{3} \ge \frac{1}{3}\left(1+\log_y z+\log_y x\right) \text{ и } \log_z \frac{xy+z}{3} \ge \frac{1}{3}\left(1+\log_z x+\log_z y\right).$$

След събиране на последните три неравенства получаваме

$$\log_x \frac{yz+x}{3}+\log_y \frac{zx+y}{3}+\log_z \frac{xy+z}{3} \ge$$

$$\ge \frac{1}{3}\left[3+\left(\log_x y+\log_y x\right)+\left(\log_y z+\log_z y\right)+\left(\log_z x+\log_x z\right)\right] \ge$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\log_x y\log_y x}+2\sqrt{\log_y z\log_z y}+2\sqrt{\log_z x\log_x z}\right)=\frac{1}{3}(3+2+2+2)=3.$$

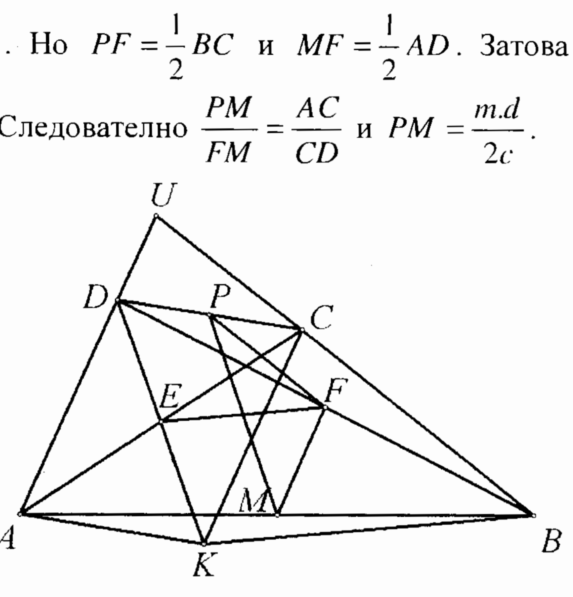
М+532. Да се намерят всички прости числа k, за които съществуват равнобедрени триъгълници с целочислени страни така, че лицата им да са k пъти по-големи от обиколките им. **(Милен Найденов, гр. Варна)**

Решение. При обичайните означения за елементите на триъгълника имаме $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=2kp$. Оттук $(p-a)(p-b)(p-c)=4k^2p$. Въвеждаме означенията $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$. Следователно $xyz=4k^2(x+y+z)$. Ако $y=x$, от последното равенство следва квадратното спрямо x уравнение $zx^2-bk^2x-4k^2z=0$. Дискриминантата му е $D=4k^2\left(4k^2+z^2\right)$, която е точен квадрат при $z=k^2-1$. Тогава положителният корен на уравнението е $x=2k+4+\frac{4}{k-1}$. Числото x е цяло положително само при $k=2,3,5$. В тези случаи получаваме триъгълници със страни $a=15$, $b=15$, $c=24$; $a=20$, $b=20$, $c=24$; $a=39$, $b=39$, $c=39$. Тъй като 2, 3 и 5 са прости числа, те са всички търсени стойности на k.

М+533. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с дължини на страните BC, CD и DA съответно b, c и d, дължини на диагоналите AC и BD – съответно m и n и мерки на ъглите A, B и D – съответно α, β и δ. Нека M и P са средите съответно на страните AB и CD, а E и F – на диагоналите AC и BD. Ако $d^2=b.c$ и $\delta=\alpha+\beta$, да се докаже, че

а) $MP=\frac{m.d}{2c}$, б) $EF=\frac{n.d}{2m}$. **(Хаим Хаимов, гр. Варна)**

Решение. а) Тъй като $\alpha+\beta=\delta<180°$, то AD и BC не са успоредни. Нека $AD\cap BC=U$. Тъй като $MF \parallel AD$ и $PF \parallel BC$ (като средни отсечки), то $\sphericalangle MFP=180°-\sphericalangle AUB=\alpha+\beta=\delta$. От условието $AD^2=BC.CD$ следва, че $\frac{AD}{CD}=\frac{BC}{AD}$. Но $PF=\frac{1}{2}BC$ и $MF=\frac{1}{2}AD$. Затова $\frac{AD}{CD}=\frac{BC}{AD}=\frac{PF}{MF}$. Оттук следва, че $\Delta ADC \sim \Delta PFM$. Следователно $\frac{PM}{FM}=\frac{AC}{CD}$ и $PM=\frac{m.d}{2c}$.



б) Означаваме с K точката, симетрична на върха D спрямо E. Четириъгълникът $AKCD$ е успоредник. Затова $AK=CD=c$, $CK=AD=d$ и $\sphericalangle AKC=\sphericalangle ADC=\delta=\alpha+\beta=180°-\sphericalangle AUB$.

Следователно четириъгълникът $AKCU$ е вписан в окръжност и $\sphericalangle KAD=\sphericalangle KCB$. От друга страна $\frac{AK}{AD}=\frac{c}{d}=\frac{d}{b}=\frac{CK}{BC}$ и затова $\Delta AKD \sim \Delta CKB$.

Оттук следват равенствата $\frac{AK}{CK}=\frac{DK}{BK}$ и

$\sphericalangle AKD = \sphericalangle BKC$. Следователно $\sphericalangle AKC = \sphericalangle AKD + \sphericalangle DKC = \sphericalangle BKC + \sphericalangle DKC = \sphericalangle BKD$. Оттук получаваме, че $\Delta AKC \sim \Delta DKB$ и затова $KB = \dfrac{BD.KC}{AC} = \dfrac{nd}{m}$. Тъй като EF е средна отсечка в ΔBKD, то $EF = \dfrac{1}{2}KB = \dfrac{n.d}{2m}$.

М+534. Не еднаквите параболи π и π' лежат в една равнина γ и имат успоредни оси. Да се докаже, че съществуват реално число k и точка H от равнината γ, такива че за произволна точка M от π съществува точка M' от π', за която е изпълнено равенството $\overrightarrow{HM'} = k.\overrightarrow{HM}$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Нека параболите π и π' имат съответно върхове O и O', фокуси F и F', фокални параметри p и p'. Тогава спрямо съответните си канонични координатни системи $K = Oxy$ и $K' = O'x'y'$ параболите π и π' имат съответно уравненията $\pi: y^2 = 2px$ и $\pi': y'^2 = 2p'x'$. Съответно спрямо $K = Oxy$ и $K' = O'x'y'$ за фокусите имаме $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ и $F'\left(\dfrac{p'}{2}, 0\right)$. Нека $O'(m,n)$ е координатното представяне на върха O' спрямо $K = Oxy$. Ако P е точка от γ, която има координати (x,y) спрямо $K = Oxy$ и координати (x',y') спрямо $K' = O'x'y'$, то от равенството $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$ следва, че връзките между координатите на точката P спрямо двете координатни системи са следните $x' = x - m$ и $y' = y - n$. Оттук намираме, че спрямо $K = Oxy$ уравнението на π' е $\pi': (y-n)^2 = 2p'(x-m)$, а координатното представяне на фокуса F' е $F'\left(\dfrac{p'}{2} + m, n\right)$. Тъй като по условие параболите не са еднакви, то $p' \neq p$, а правите OO' и FF' не са успоредни. Нека H е пресечната точка на правите OO' и FF'. Уравненията на правите OO' и FF' са съответно следните $OO': nx - my = 0$ и $FF': nx - \left(m + \dfrac{p-p'}{2}\right)y - \dfrac{np}{2} = 0$. От тези уравнения за координатите на точката H намираме $H\left(\dfrac{mp}{p-p'}, \dfrac{np}{p-p'}\right)$. Нека сега h е права през O, колинеарна с вектора $\vec{h}(\alpha,\beta)$. Тази права представяме с параметричните ѝ уравнения $h: \begin{cases} x = \dfrac{mp}{p-p'} + \alpha t, \\ y = \dfrac{np}{p-p'} + \beta t. \end{cases}$ След заместване на последните равенства в уравненията на π и π' намираме, че пресечните точки на h с π се получават при стойности на параметъра t, удовлетворяващи уравнението $\beta^2(p-p')^2t^2 - 2p(p-p')\left[(p-p')\alpha - n\beta\right]t + p^2\left[n^2 - 2m(p-p')\right] = 0$, а пресечните точки на h с π' се получават при стойности на параметъра $t = t'$, удовлетворяващи уравнението $\beta^2(p-p')^2t'^2 - 2p'(p-p')\left[(p-p')\alpha - n\beta\right]t' + p'^2\left[n^2 - 2m(p-p')\right] = 0$. От първото уравнение намираме, че правата h пресича π в точките

$$M\left(\frac{mp}{p-p'} - \frac{\alpha p(\Delta_1 + \Delta_2)}{\beta^2(p-p')}, \frac{np}{p-p'} - \frac{\beta p(\Delta_1 + \Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

$$N\left(\frac{mp}{p-p'}-\frac{\alpha p(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')},\frac{np}{p-p'}-\frac{\beta p(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

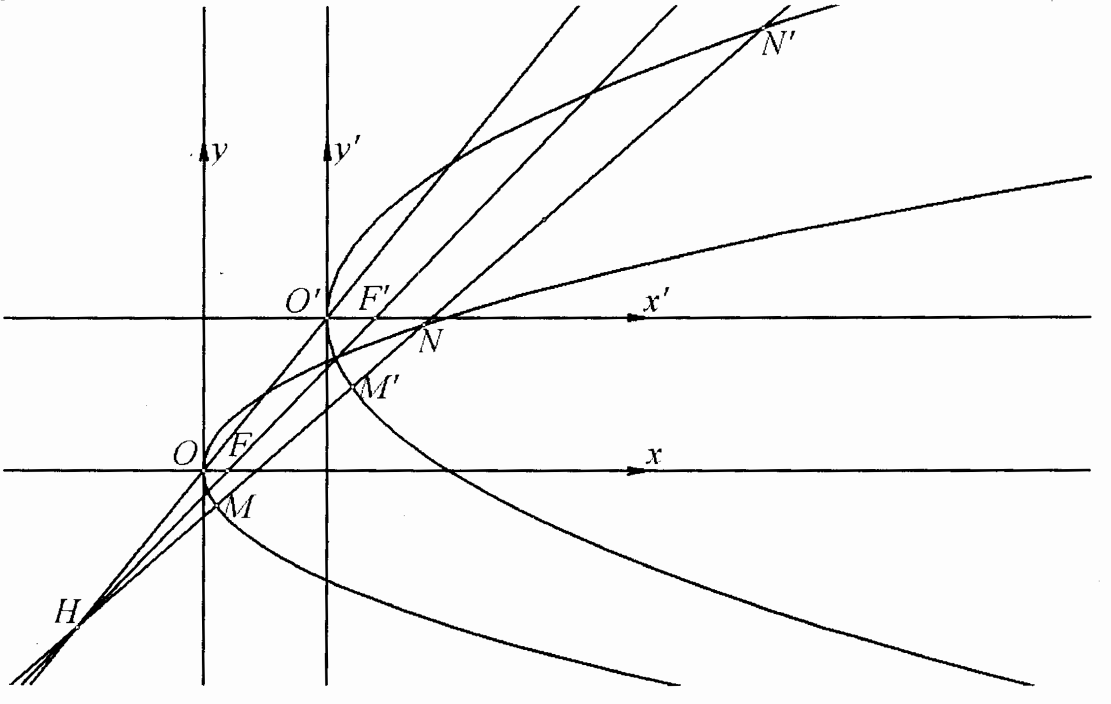
а от второто уравнение намираме, че правата h пресича π' в точките

$$M'\left(\frac{mp}{p-p'}-\frac{\alpha p'(\Delta_1+\Delta_2)}{\beta^2(p-p')},\frac{np}{p-p'}-\frac{\beta p'(\Delta_1+\Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

$$N'\left(\frac{mp}{p-p'}-\frac{\alpha p'(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')},\frac{np}{p-p'}-\frac{\beta p'(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

където $\Delta_1=(p-p')\alpha-n\beta$, $\Delta_2=\sqrt{(p-p')\left[(p-p')\alpha^2-2n\alpha\beta+2\beta^2m\right]}$.

От координатите на H и от последните координати следват равенствата $\overrightarrow{HM'}=\frac{p'}{p}\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{HN'}=\frac{p'}{p}\overrightarrow{HN}$. С това задачата е решена.



М+535. Нека $\lim\limits_{x\to 2}\frac{a^2+b^2x}{cx^2+3x+d}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^2+b^2x}{cx^2+3x+d}=3$, където $a,d\in\mathbb{N}$ и $b,c\in\mathbb{R}$. Ако изразът $a-d$ има максимална стойност, да се намерят a, b, c и d.

(Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. От $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^2+b^2x}{cx^2+3x+d}=3$ следва, че $c=0$ и $b^2=9$. Оттук $b=\pm 3$ Тогава, от $\lim\limits_{x\to 2}\frac{a^2+9x}{3x+d}=3$ следва, че $\frac{a^2+18}{6+d}=3$. Следователно $a^2=3d$. Оттук $a=3k$, $k\in\mathbb{N}$ и $d=3k^2$. Изразът $a-d=3k-3k^2$ има максимална стойност 0 при $k=1$ (естествено число), откъдето $a=d=3$. Така получихме, че $a=3$, $b=\pm 3$, $c=0$, $d=3$.

М+536. Дадено е уравнението $x^3-3kx^2+(k^2-1)x-k^3+k=0$, където $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$. Ако x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} са корените на това уравнение за $k=2,3,\dots$, да се намери сумата $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{x_{1k}x_{2k}x_{3k}}$.

(Росен Николаев, гр. Варна)

Решение. От формулите на Виет $x_{1k}x_{2k}x_{3k}=-(-k^3+k)=(k-1)k(k+1)$. Тогава:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_{1k}x_{2k}x_{3k}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{2}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}.$$

Извършваме граничен преход: $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{x_{1k}x_{2k}x_{3k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}=\dfrac{1}{4}$.

Забележка. Произведението $x_{1k}x_{2k}x_{3k}=(k-1)k(k+1)$ може да се намери и без да се използват формулите на Виет. Лесно се установява, че $x_{2k}=k$ е корен на даденото уравнение. Тогава то е равносилно на $(x-k)(x^2-2kx+k^2-1)=0$, откъдето $x_{1k}=k-1$, $x_{3k}=k+1$.

М+537. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{2\sqrt{2}+2^2\sqrt{2^2}+\dots+2^n\sqrt{2^n}+3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}+3.2^n\sqrt{3.2^n}}>$$
$$>\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\dots+\sqrt[4]{2^n}+\sqrt[4]{3.2^{n-1}}+\sqrt[4]{3.2^n}.$$

(Лучиан Туцеску, Крайова, Николае Опреа, Балцести, Румъния)

Решение. От неравенството на Коши-Буняковски имаме

$$\left[\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2^2\sqrt{2^2}}\right)^2+\dots+\left(\sqrt{2^n\sqrt{2^n}}\right)^2+\left(\sqrt{3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}}\right)^2+\left(\sqrt{3.2^n\sqrt{3.2^n}}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2^2}}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3.2^{n-1}}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3.2^n}}\right)^2\right]>$$
$$>\left(\sqrt{2\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2^2\sqrt{2^2}}.\frac{1}{\sqrt{2^2}}+\dots+\sqrt{2^n\sqrt{2^n}}.\frac{1}{\sqrt{2^n}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}}.\frac{1}{\sqrt{3.2^{n-1}}}+\sqrt{3.2^n\sqrt{3.2^n}}.\frac{1}{\sqrt{3.2^n}}\right)^2.$$

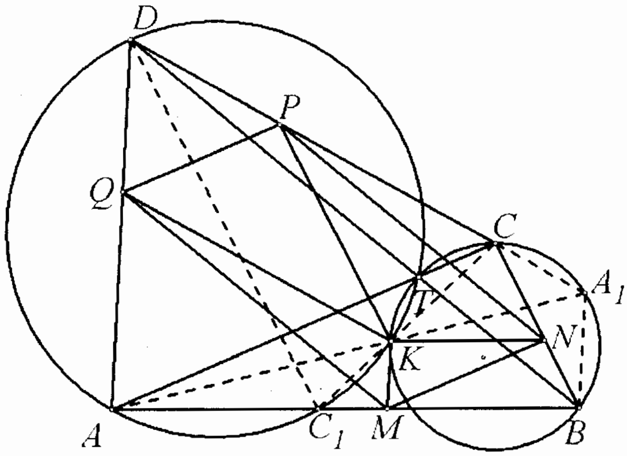
Тъй като $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3.2^{n-1}}+\dfrac{1}{3.2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{3}{3.2^n}=1$, последното неравенство е еквивалентно с

$$2\sqrt{2}+2^2\sqrt{2^2}+\dots+2^n\sqrt{2^n}+3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}+3.2^n\sqrt{3.2^n}>$$
$$>\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\dots+\sqrt[4]{2^n}+\sqrt[4]{3.2^{n-1}}+\sqrt[4]{3.2^n}\right)^2.$$

С това задачата е решена.

М+538. За изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите T са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=\sphericalangle ATD=\varphi$. Нека K е втората обща точка на описаните окръжности за ΔADT и ΔBCT, а M, N, P и Q са такива точки съответно върху страните AB, BC, CD и DA, че $KM\parallel DA$, $KN\parallel AB$, $KP\parallel BC$ и $KQ\parallel CD$. Да се докаже, че $MNPQ$ е успоредник.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)



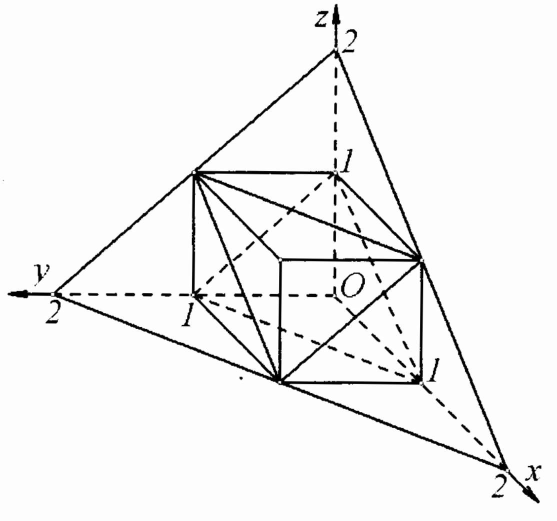
Решение. От свойствата на вписаните ъгли следват равенствата $\sphericalangle AKD = \sphericalangle ATD = \varphi$ и $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BTC = \varphi$. По същия начин се получават равенствата $\sphericalangle KAT = \sphericalangle KDT$, т.е. $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KDB$ и $\sphericalangle KCT = \sphericalangle KBT$, т.е. $\sphericalangle KCA = \sphericalangle KBD$. Следователно $\Delta KCA \sim \Delta KBD$. Оттук $\frac{KA}{KC} = \frac{KD}{KB}$ и $\sphericalangle AKC = \sphericalangle DKB$. От последното равенство следва

$\sphericalangle AKD = \sphericalangle AKC - \sphericalangle DKC = \sphericalangle DKB - \sphericalangle DKC = \sphericalangle CKB$, т.е. $\sphericalangle AKD = \sphericalangle CKB$. Това равенство заедно с получената пропорция показва, че $\Delta ADK \sim \Delta CBK$. Следователно (1) $\frac{KA}{DA} = \frac{KC}{BC} = k$ и $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCB = \varphi_1$. Сега въвеждаме означенията $AK \cap DC = A_1$ и $CK \cap AB = C_1$. Ще докажем, че $BA_1 \parallel AD$ и $DC_1 \parallel BC$. Изпълнени са равенствата $\sphericalangle AA_1D = 180° - \sphericalangle ADA_1 - \sphericalangle A_1AD = 180° - \varphi - \varphi_1$ и $\sphericalangle KBC = 180° - \sphericalangle BKC - \sphericalangle KCB = 180° - \varphi - \varphi_1$. Оттук $\sphericalangle AA_1D = \sphericalangle KBC$. Следователно четириъгълникът KBA_1C е вписан в окръжност и затова $\sphericalangle KA_1B = \sphericalangle KCB = \sphericalangle KAD$. Оттук получаваме, че $BA_1 \parallel AD$. Аналогично се доказва, че $DC_1 \parallel BC$. Сега ще докажем, че $\frac{KC}{CC_1} = \frac{KA}{AA_1} = k^2$. Тъй като $\sphericalangle BKC = \sphericalangle C_1BC = \varphi$, то $\Delta BKC \sim \Delta C_1BC$. Оттук следва $\frac{CC_1}{BC} = \frac{BC}{KC}$, т.е. $CC_1 = \frac{BC^2}{KC}$. Сега имаме $\frac{KC}{CC_1} = \frac{KC.KC}{BC^2} = \frac{KC^2}{BC^2} = k^2$. Аналогично се показва, че $\frac{KA}{AA_1} = \frac{KA^2}{DA^2} = k^2$. Тъй като по условие $KN \parallel C_1B$, то $\frac{CN}{CB} = \frac{KC}{CC_1} = k^2$. От $KP \parallel BC \parallel DC_1$ аналогично се получава, че $\frac{CP}{CD} = \frac{KC}{CC_1} = k^2$. Следователно $\frac{CN}{CB} = \frac{CP}{CD} = k^2$. Това означава, че $NP \parallel BD$ и $NP = k^2 BD$. Аналогично се доказва, че $QM \parallel BD$ и $QM = k^2 BD$. Следователно $MNPQ$ е успоредник.

М+539. Върху отсечката AB по произволен начин са избрани точките X, Y и Z. Каква е вероятността от отсечките AX, XY, YZ и ZB да е възможно да се построи четириъгълник.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека отсечката AB има дължина 2, а дължините на отсечките AX, XY, YZ и ZB са x, y, z и t. Тогава $x+y+z+t=2$. За числата x, y, z и t са изпълнени неравенствата $0<x<2$, $0<y<2$, $0<z<2$ и $0<t<2$. От последните неравенства и $x+y+z=2-t$ следва, че $x+y+z<2$. Освен това, тъй като $x+y+z=2-t$, елементарното събитие се характеризира с три параметъра x, y, z. Следователно на всяко случайно събитие съответства точка в тримерното пространство с координати x, y, z. Затова ще използваме формулата за геометрична вероятност $P=\dfrac{V_D}{V_\Omega}$, където Ω е пространството на всички събития, а D е множеството на благоприятните събития. От направения анализ следва, че $\Omega=\{0<x<2, 0<y<2, 0<z<2, x+y+z<2\}$. Следователно Ω е правоъгълен тетраедър с ръбове при правия тристенен ъгъл, равни на 2. Обемът на този тетраедър е $V_\Omega=\dfrac{1}{6}.2.2.2=\dfrac{4}{3}$. Благоприятните събития определяме по следния начин. За да съществува четириъгълникът, е изпълнено неравенството $x+y+z>t$. Затова от $t=2-x-y-z$ следва, че $x+y+z>1$. Освен това всяка от страните на четириъгълника е по-малка от периметъра му. Затова са изпълнени неравенствата $x<1$, $y<1$ и $z<1$. Следователно $D=\{x<1, y<1, z<1, x+y+z>1\}$. Това е тялото, което се получава след отрязването от куб с ръб 1 на два правоъгълни тетраедъра с ръбове при правия тристенен ъгъл, равни на 1. Следователно обемът на D е $V_D=1^3-2.\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$. Така получаваме, че търсената вероятност е $P=\dfrac{V_D}{V_\Omega}=\dfrac{1}{2}$.



M+540. Двойките точки A_1, B_1; A_2, B_2 и A_3, B_3 са противоположните върхове на правилен октаедър с обем T. Ако за произволна точка P от описаната за октаедъра сфера с V_0, V_1, V_2, V_3, W_0, W_1, W_2, W_3 са означени обемите съответно на тетраедрите $A_1A_2A_3P$, $A_2A_3B_1P$, $A_3A_1B_2P$, $A_1A_2B_3P$, $B_1B_2B_3P$, $B_2B_3A_1P$, $B_3B_1A_2P$, $B_1B_2A_3P$, да се докажат равенствата:

а) $V_0^2+W_0^2+V_1^2+W_1^2+V_2^2+W_2^2+V_3^2+W_3^2=\left(\dfrac{T}{2}\right)^2$;

б) $\left(V_0^2-W_0^2\right)^2+\left(V_1^2-W_1^2\right)^2+\left(V_2^2-W_2^2\right)^2+\left(V_3^2-W_3^2\right)^2=\left(\dfrac{T^2}{6}\right)^2$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Нека точката O е центърът на описаната около октаедъра сфера. Разглеждаме Декартова координатна система $Oxyz$, както е показано на чертежа, като $A_1(1,0,0)$,

$A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$ и $P(\lambda,\mu,\nu)$. Лесно се вижда, че $T=\frac{4}{3}$. Обемът V_0 на тетраедъра $A_1A_2A_3P$ получаваме по следния начин:

$$V_0=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ \lambda & \mu & \nu & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|1-\lambda-\mu-\nu|.$$

Аналогично се получават и обемите на останалите тетраедри:

$$V_1=\frac{1}{6}|-1-\lambda+\mu+\nu|,\ V_2=\frac{1}{6}|-1+\lambda-\mu+\nu|,\ V_3=\frac{1}{6}|-1+\lambda+\mu-\nu|,\ W_0=\frac{1}{6}|-1-\lambda-\mu-\nu|,$$

$$W_1=\frac{1}{6}|1-\lambda+\mu+\nu|,\ W_2=\frac{1}{6}|1+\lambda-\mu+\nu|,\ W_3=\frac{1}{6}|1+\lambda+\mu-\nu|.$$

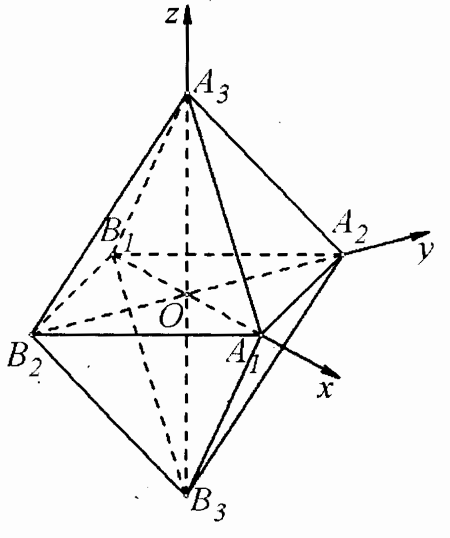
След повдигане в квадрат на тези равенства и почленното им събиране получаваме

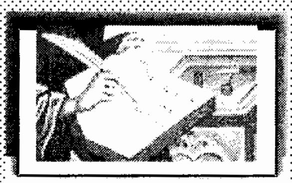
$$V_0^2+W_0^2+V_1^2+W_1^2+V_2^2+W_2^2+V_3^2+W_3^2=\frac{2}{9}\left(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right).$$

Тъй като P е точка от описаната около октаедъра сфера, то $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$. Сега от полученото равенство намираме $V_0^2+W_0^2+V_1^2+W_1^2+V_2^2+W_2^2+V_3^2+W_3^2=\frac{2}{9}.2=\left(\frac{T}{2}\right)^2$.

От намерените равенства за обемите следва, че $V_0^2-W_0^2=-\frac{1}{9}(\lambda+\mu+\nu)$, $V_1^2-W_1^2=-\frac{1}{9}(-\lambda+\mu+\nu)$, $V_2^2-W_2^2=-\frac{1}{9}(\lambda-\mu+\nu)$, $V_3^2-W_3^2=-\frac{1}{9}(\lambda+\mu-\nu)$. Следователно

$$\left(V_0^2-W_0^2\right)^2+\left(V_1^2-W_1^2\right)^2+\left(V_2^2-W_2^2\right)^2+\left(V_3^2-W_3^2\right)^2=\frac{4}{9^2}\left(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right)=\frac{4}{9^2}.1=\left(\frac{T^2}{6}\right)^2.$$





M + СЕМИНАР

ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧНИ СИСТЕМИ И ХАОС

Пресиана Маринова, Ивета Македонска

Резюме. Настоящата разработка разглежда дадена динамична система с параметър и поведението ѝ в дългосрочен план. Наблюдаваме, че след достатъчен брой итерации на функцията $f(x) = r - x^2$, която представлява нашата динамична система, за едни стойности на параметъра r тя се ориентира към определено число, но за други стойности – към периодично поведение. Оказва се, че в един момент се постига хаос. Изучават се интересните явления „периодичен прозорец" и „синхронизиран хаос".

Key words: dynamical system, chaos, function, orbit diagram, periodic window, synchronized chaos

1. Въведение.

Да си представим, че имаме дадена функция $f : X \to X$ и начална точка $x_0 \in \mathbb{R}$. Рекурентната зависимост $x_n = f(x_n - 1)$ се интерпретира по следния начин: x_n означава състоянието на системата в момент n и състоянието на системата в следващия момент се определя от правилото, зададено от изображението f. Фундаментален въпрос е какво е поведението на системата в дългосрочен план.

За определени функции f независимо от началната точка $x_0| f$ клони към константа. Сега да предположим, че f съдържа някакъв параметър r. За едни стойности на този параметър f^n клони към константа или към зависещо от параметъра число, но за други стойности това число се превръща в циклично поведение на функцията, т.е. например $f^n(x) = p, f^{n+1} = q$ и $f^{n+2} = p$. Такова поведение се нарича $2-$цикъл. За други стойности на r можем да получим $4-$цикъл, $8-$цикъл, дори $5-$цикъл. В определен момент достигаме хаос, т.е. няма регулярно периодично поведение.

Всъщност, ако графиката на f притежава единствен максимум и е вдлъбната, поведението ѝ е качествено определено. Всяка функция, изпълняваща тези условия, се държи по един и същи начин, който ще опишем за $f(x) = r - x^2$.

2. Дефиниции.

Дефиниция 2.1. *Логистично изображение* е рекурентна зависимост от втора степен, която често се използва, за да определи хаотично поведение.

Дефиниция 2.2. *Орбита:* Стойностите *x*, итерирани по функцията $x_{n+1} = f(x_n)$, образуват редица от резултати x_0, x_1, x_2 и т.н. Тази редица всъщност се нарича орбита, започваща от x_0.

Дефиниция 2.3. *Фиксирана точка* x^* е точка, която удовлетворява връзката $f(x^*) = x^*$. Всъщност, ако $x_n = x^*$, то $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) = x^*$.

Дефиниция 2.4. *Линейна стабилност:* Точка от графиката на дадена функция е линейно стабилна тогава и само тогава, когато производната на функцията в тази точка е по-малка от 1 по абсолютна стойност.

Дефиниция 2.5. *Глобална стабилност* на фиксирана точка: За дадена функция f точка $x = f(x^*)$ е стабилна тогава и само тогава, когато $f^n(x_0) \to x^*$ за $\forall\, x_0$ при $n \to \infty$.

Бележка: Разликата между двете е показана чрез пример 3.1 в секция 3, подсекция 3.2.

Дефиниция 2.6. *Производната на функция* характеризира скоростта на изменението на функцията. Геометричното ѝ съдържание е, че задава наклона на графиката на функцията в дадена точка. Функция, която има производна, се нарича диференцируема.

Дефиниция 2.7. *Бифуркация* е драматична промяна в поведението на динамична система с варирането на параметъра.

Дефиниция 2.8. *Хаос* е апериодично дългосрочно поведение на динамична система, при което се наблюдава чувствителност спрямо началното условие.

3. Фиксирани точки и паяжинни диаграми.

3.1. Фиксирани точки и линейна стабилност.

Нека x^* е фиксирана точка за дадена функция f. За да определим стабилността на x^*, разглеждаме много близък до x^* член: $x_n = x^* + \eta_n$, където $\eta_n \in \mathbb{R}$ е с много малка стойност. Задаваме си въпроса дали отклонението расте или намалява с увеличаването на *n*. Заместваме и получаваме следния резултат:

$$x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) =$$
$$= f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n)^2$$
$$f(x^* + \eta_n) = f(x_n)$$

Но тъй като $f(x) = x$, уравнението се свежда до

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n)^2$$

Уравнението се разделя на два случая.

Случай 1. При $|f'(x^*)| \neq 0$

Поради пренебрежително малката стойност на $O(\eta_n)^2$ можем да разглеждаме уравнението без него. Тогава получаваме линейната графика $\eta_{n+1} = f'(x^*)$ със собствена стойност или множител $\lambda = f'(x^*)$. Всъщност решението на това линейно изображение се забелязва доста лесно $\eta_1 = \lambda . \eta_0, \eta_2 = \lambda . \eta_1 = \lambda^2$ и т.н. Така получаваме, че $\eta_n = \lambda^n . \eta_0$.

Ако $|\lambda| = |f'(x^*)| < 1$, то $\eta_n \to 0$, когато $n \to \infty$ и тогава фиксираната точка е линейно стабилна. И обратното, ако $|f'(x^*)| > 1$, фиксираната точка е нестабилна. Тези заключения за стабилността са базирани на линеаризацията, но могат да се докажат и с нелинейни изображения.

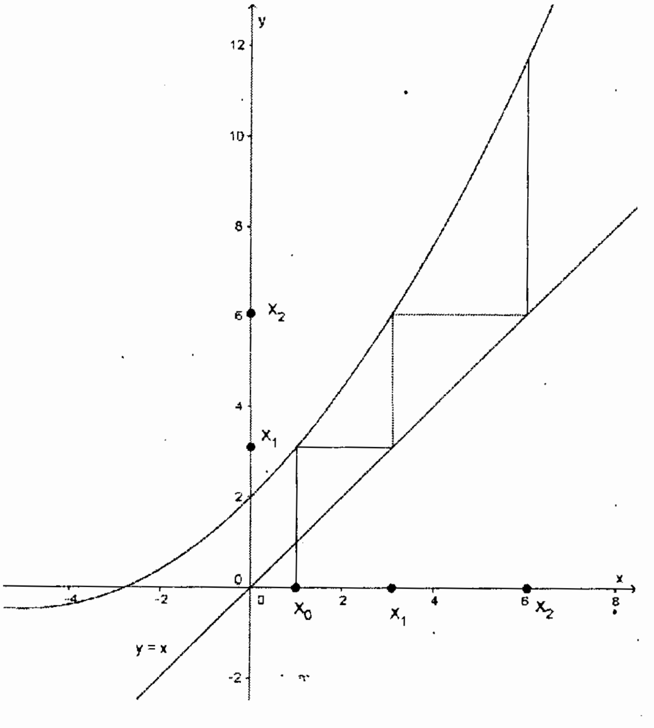
Случай 2. При $|f'(x^*)| = 0$

Всъщност линеаризацията не ни показва нищо за този граничен случай и тогава пренебрегнатият член $O(\ _n)^2$ има значение за определянето на стабилността. Оказва се, че когато $|f'(x^*)| = 0$, функцията клони с много по-голяма скорост към фиксираната точка x . Такава точка се нарича *суперстабилна.*

3.2. Паяжинни диаграми.

В тази част ще покажем практически метод за намиране на стабилните фиксирани точки на дадена функция $f(x)$.

Избираме начална точка x_0, от която започваме итерацията. Нанасяме я на абсцисната ос и издигаме перпендикуляр от нея, докато не пресече графиката на функцията. Ординатата на пресечната точка е $f(x_0) = x_1$. Вместо обаче да нанасяме x_1 на абсцисата и да повтаряме операцията, за улеснение построяваме успоредна на абсцисата права и я пресичаме с правата $y = x$. От новата пресечна точка издигаме вертикал, който пресича графиката, и повтаряме за всяка итерация на функцията. Получаваме диаграма, която напомня паяжина, както на фиг. 1.



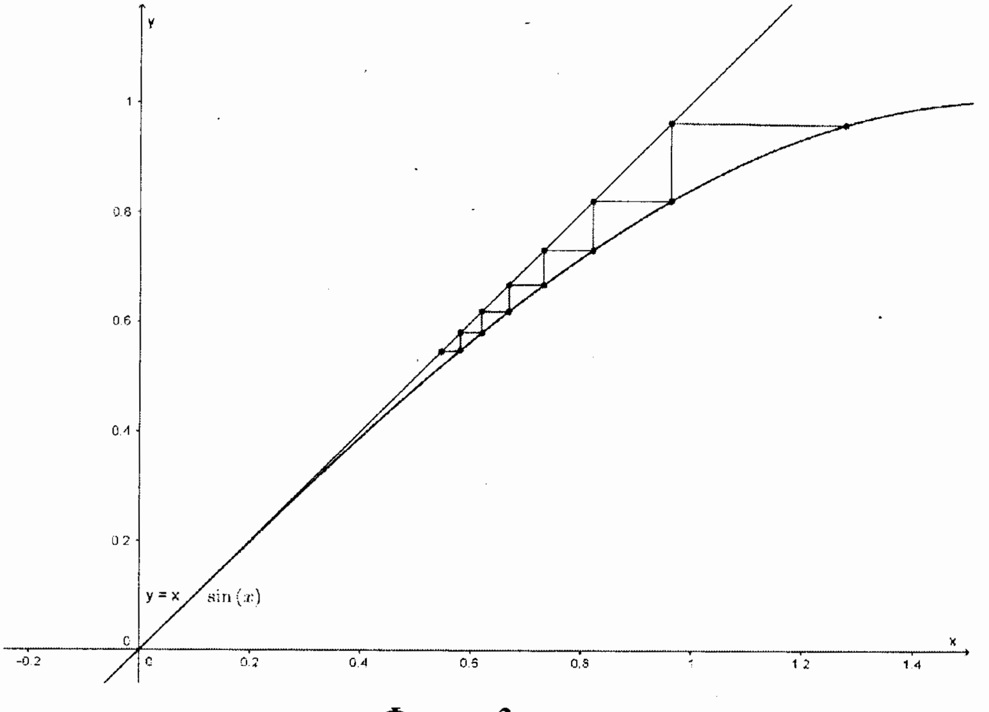
Фигура 1. Паяжинна диаграма

Паяжинните диаграми са доста полезни, понеже дават нагледно значителна информация за поведението на функцията след итерирането й и така по-лесно усвояваме линейно получените резултати. Паяжинните диаграми стават още по-ценни, когато линейният анализ не може да се справи както в следващия пример.

Пример 3.2.1. Разглеждаме изображението $x_{n+1} = \sin x_n$. Ще покажем, че стабилността на фиксираната точка $x^* = 0$ не е определена от линеаризацията. След това ще използваме паяжинна диаграма, за да покажем, че x = 0 е глобално стабилна в целия интервал.

Доказателство. Множителят $x^* = 0$ е $f'(0) = \cos 0 = 1$, което е граничният случай, където линейният анализ не дава решение. Обаче паяжинната диаграма от фигура 2 показва, че x_0 е стабилна. Орбитата бавно се насочва към тясно каналче във фиксирана точка. (Подобно изображение се получава и при $x_0 < 0$).

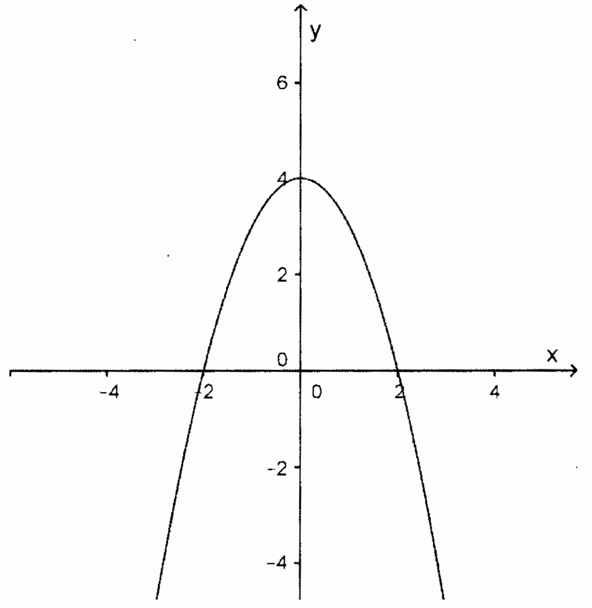
За да покажем, че стабилността е в целия интервал, трябва да проверим, че всички орбити удовлетворяват условието $x_n \to 0$. Но за всяко x_0 първата итерация ни изпраща незабавно към интервала $-1 \leq x_1 \leq 1$, докато $|\sin_x| \leq 1$. В този интервал паяжинната диаграма качествено изглежда като на фигура 2, така че срещата е сигурна.



Фигура 2.

4. Логически изображения.

В настоящата разработка разглеждаме функцията $f(x) = r - x^2$ в зависимост от параметъра r. На фиг. 3 е показана графиката на f в интервала $0 \leq r \leq 5$. Както можем да видим, тя представлява парабола и с изменението на параметъра r променя позицията си по ординатната ос. В тази статия изследваме функцията в интервала $r \in [-\infty, 1.8]$, защото тук се наблюдава много интересно поведение на графиката.

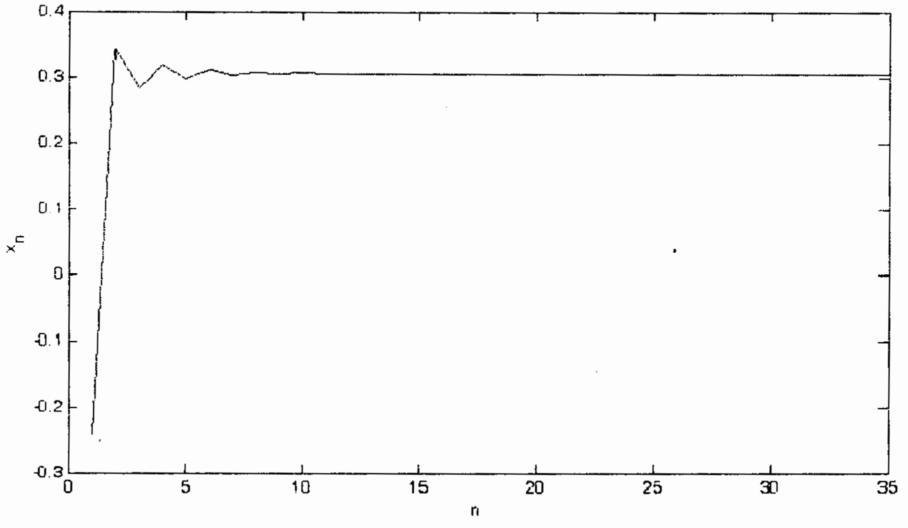


Фигура 3. Графика на функцията $f(x) = r - x^2$ при $r = 4$

4.1. Удвояване на периода.

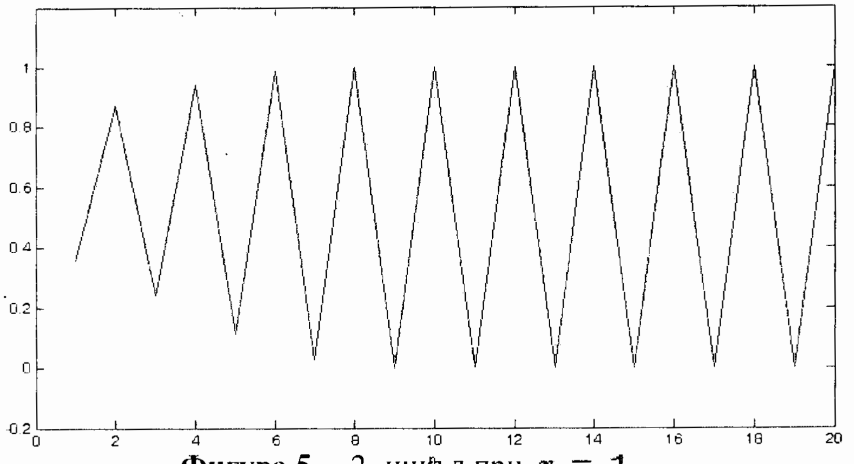
Както вече споменахме, ще изследваме функцията в интервала $r \in [-\infty, 1.8]$. В този интервал графиката ѝ драстично променя поведението си за изключително кратки периоди.

За $r < -0.25$ графиката клони към 1. В малкия интервал $0.25 < r < 0.75$ стойността расте и графиката клони към една фиксирана точка. Наблюдава се драстично изменение на графиката на f (фиг. 4).



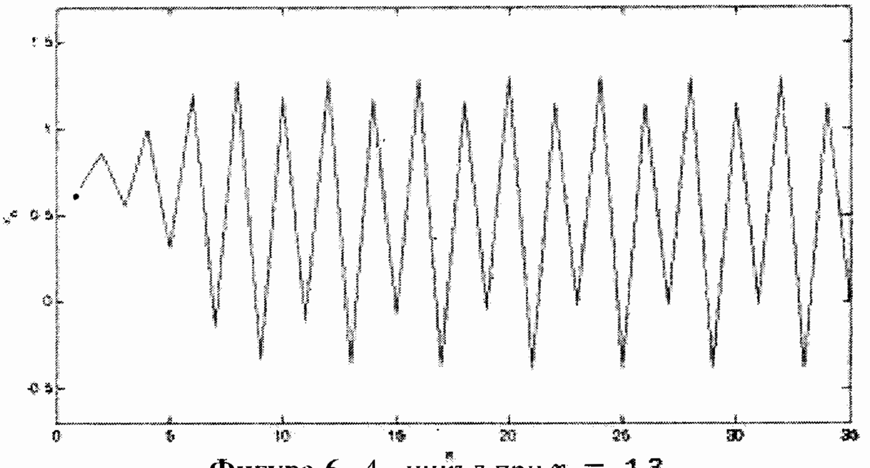
Фигура 4. Графиката, клоняща към една фиксирана точка при $r = 0.4$

За по-голямо r, например при $r = 1$ стойностите отново растат, но се редуват по-голяма стойност с по-малка. Такова изменение, в което x_n се изменя на всеки две итерации, се нарича периодичен $2-$цикъл. Този резултат ясно се забелязва на фиг. 5



Фигура 5. 2- цикъл при $r = 1$

При още по-голямо $r, r = 1.3$ се получава друг цикъл, който този път повтаря всеки 4 стойности (фиг. 6). Този нов цикъл се получава с удвояването на предишния $2-$цикъл и се нарича $4-$цикъл.



Фигура 6. 4 - цикъл при $r = 1.3$

При по-нататъшните получаващи се цикли с увеличаване на r периодите се удвояват: $8, 16, 32$ и т.н. Тогава с компютърни експерименти достигаме до резултатите:

$r_1 = 0.75$	ражда се $2-$цикъл
$r_2 = 1.25$	4
$r_3 = 1.36789$	8
$r_4 = 1.39399$	16
$r_5 = 1.3996933$	32

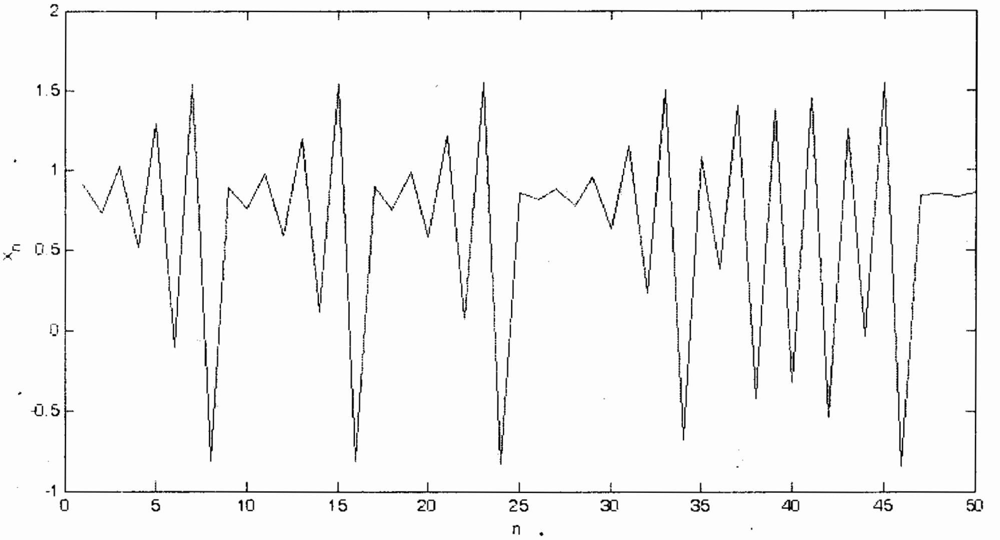
Забелязваме, че периодите се удвояват все по-бързо с нарастването на r. Оказва се, че съществува коефициент, с който апроксимативно можем да определим стойността на r за следващото удвояване на периода от предните две такива стойности:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669 \ldots$$

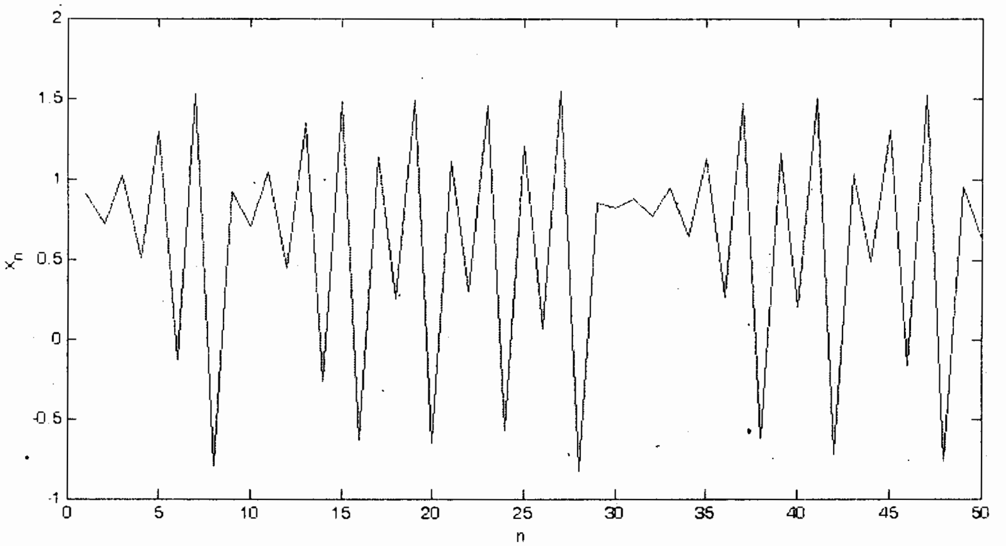
Тази граница е една и съща, без значение каква функция се итерира. В такъв смисъл числото δ = 4:669 е универсално.

4.2. Хаос и периодични прозорци.

В процеса на изследване на функцията забелязваме, че при някои стойности на r настъпва хаос. В тези случаи за няколко стойности на r последователността x_n никога не се застопорява на фиксирана точка или периодична орбита, тоест дългосрочното поведение е апериодично, както можем да се види на фиг. 7.

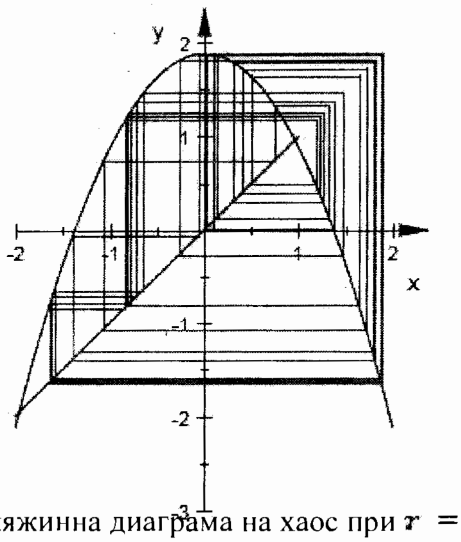


Фигура 7. Хаос при $r = 1.547, x_0 = 0.8$



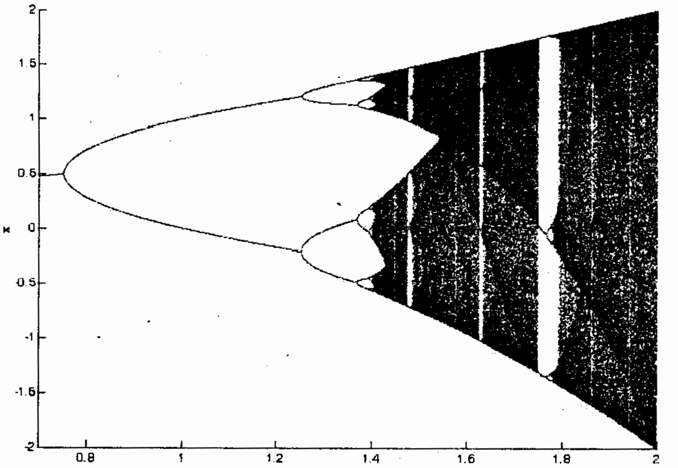
Фигура 8. Хаос при $r = 1.547, x_0 = 0.801$

Всъщност съответната паяжинна диаграма е с впечатляваща сложност (фиг. 9).

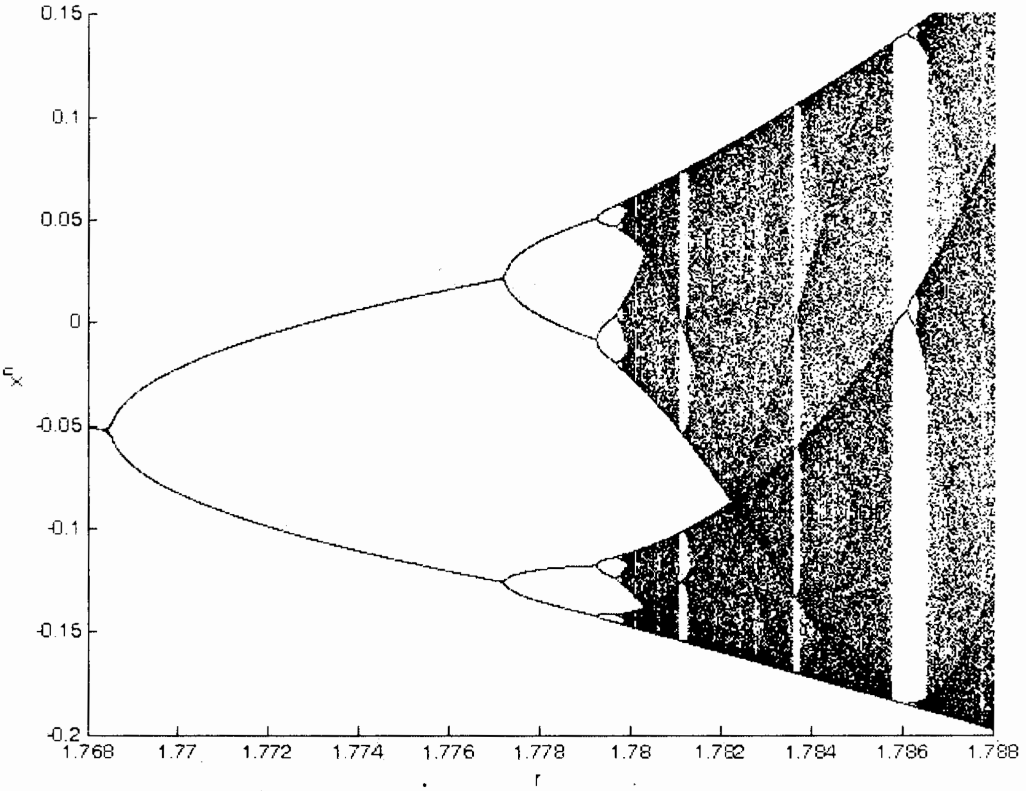


Фигура 9. Паяжинна диаграма на хаос при $r = 1.547$

Логично е да предположим, че с увеличаването на r системата става все по-хаотична, но динамиките са много по-изтънчени. За да покажем дългосрочното поведение на графиката за всички стойности на r при една и съща начална стойност x_0, сме създали орбитова диаграма (фиг. 10), която е толкова великолепна, че е станала символ на нелинейната динамика. Реализираме орбитна диаграма чрез компютърна програма с няколко стъпки. Първо генерираме орбита, започваща от произволно избрана стойност x_0 и някакво начално r. Итерираме достатъчен брой пъти (напр. 1000), за да може динамичната система да се установи към един тип поведение, като например да се получи 4–цикъл. След като приключат предходните процеси, начертаваме точките, получени от 1000–ата итерация до например 1300–а. След това избираме друга стойност на r, но много близка до предната и повтаряме операцията. Продължаваме до крайното избрано r. Така се забелязват промените при различните стойности на параметъра.



Фигура 10. Орбитова диаграма в интервала $r \in [0.7;\ 2]$



Фигура 11. Орбитова диаграма в интервала $r \in [1.768;\ 1.788]$

На фиг. 11 е показана много интригуваща част от диаграмата - в периода $1.768 \le r \le 1.788$ – намираме се в периодичен прозорец. Ясно се вижда, че графиката представлява умалено копие на общата орбитна диаграма. Разделянето, което забелязваме при $r = 1.768$, представлява бифуркацията, която удвоява периодите, но в периодичния $3-$прозорец. Ще обясним по-подробно това явление в секция 5.1.

4.3. Анализ.

4.3.1. Първа итерация.

В предната секция изведохме няколко резултата. В тази част ще покажем не само графичното им представяне, но и аналитичното им доказателство.

Пример. Намерете всички фиксирани точки и определете стабилността им за функцията $f(x) = r - x^2$.

Решение. Фиксираните точки се определят от $x^* = f(x^*) = r - (x^*)^2$. Тогава:

$$(x^*)^2 + x^* - r = 0 \text{ и } x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4r}}{2}.$$

Това всъщност са фиксираните точки на нашата функция. Стабилността зависи от множителя $f'(x^*) = -1.2x^* + 0 = -2x^*$. За да е стабилна една точка, трябва да е изпълнено условието: $|f(x^*)| < 1$. Тогава неравенството има вида $|-2x^*| < 1$, т.е. $|1 \pm \sqrt{1+4r}| < 1$.

Случай 1. $\left|1-\sqrt{1+4r}\right|<1$.

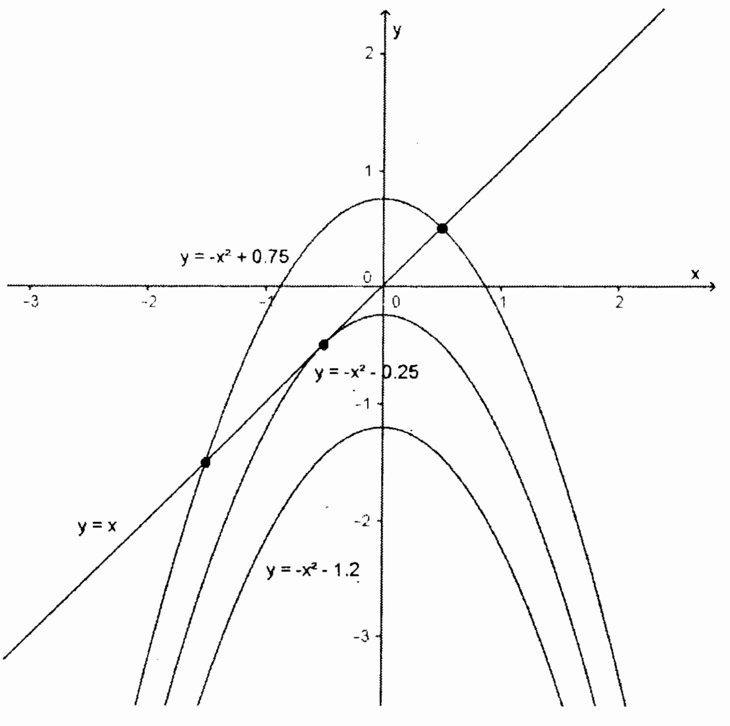
а) $1-\sqrt{1+4r}<1$, откъдето $\sqrt{1+4r}>0$ и следователно $r>-0,25$.

б) $\sqrt{1+4r}-1<1$, откъдето $\sqrt{1+4r}<2$, т.е. $1+4r<4$ и следователно $r<0,75$.

Случай 2. $\left|1+\sqrt{1+4r}\right|<1$. Но $1+\sqrt{1+4r}>0$ и този случай е невъзможен.

Следователно фиксираната точка е нестабилна..

Резултатите от примера са онагледени с графичен анализ. При $r < 0.25$ параболата лежи под диагонала и нямаме фиксирана точка. С нарастването на r параболата се движи нагоре по ординатата. Само при $r = 0.25$ диагоналът става допирателна за графиката и имаме единствена фиксирана точка. За $r > 0.75$ параболата пресича диагонала и се създава втора фиксирана точка.



Фигура 12. Графиката на $f(x)$ при $r = 0.75; -0.25$ и -1.2

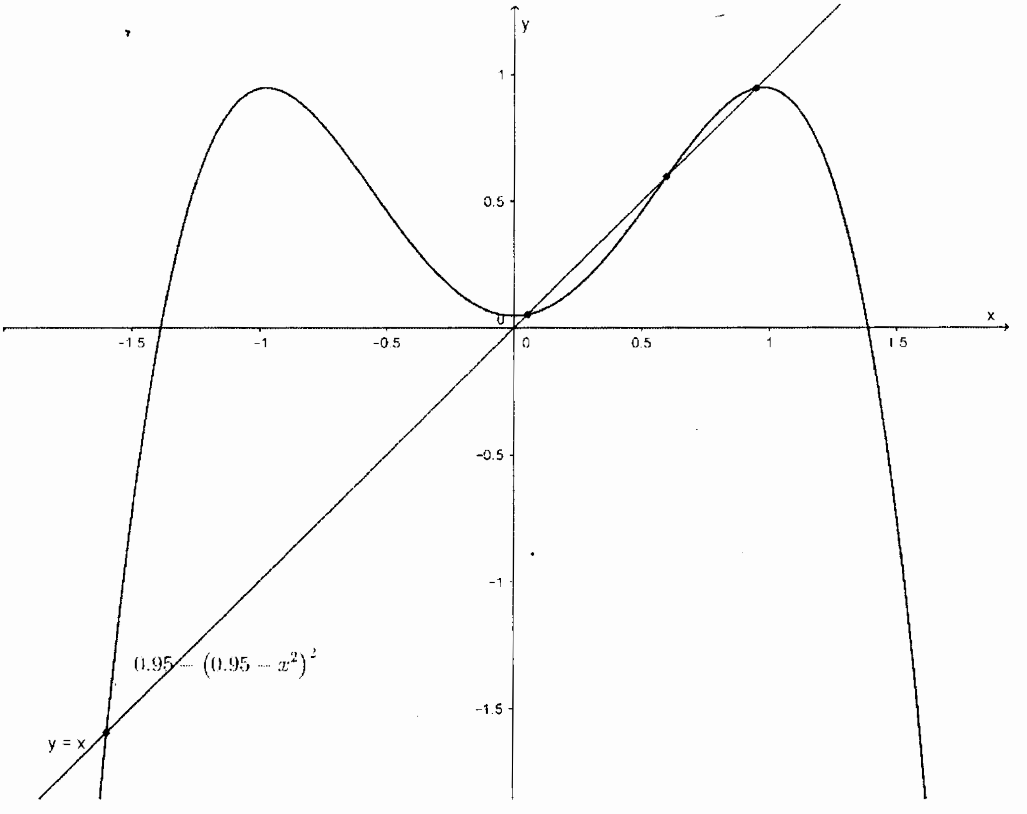
Фигурата също показва как x^* загубва стабилност. Когато r нараства повече от 1, наклонът става все по-стръмен. На фиг. 12 също може да се види, че наклонът $f'(x) = -1$ се получава при $r = 0.75$. Тази бифуркация се нарича *флип-бифуркация*. Флип-бифуркацията често се свързва с удвояването на периода. В нашето логистично изображение флип-бифуркацията настъпва при $r = 0.75$ и наистина се създава $2-$ цикъл.

4.3.2.Втора итерация.

Пример. Покажете, че логистичното изображение има $2-$цикъл за всички $r > 0.75$

и намерете стойностите на r, за които точките са стабилни.

Решение. $2-$ цикълът съществува, ако съществуват две точки p и q, които отговарят на условието $f(p) = q$ и $f(q) = p$. Еквивалентно на това: $f(f(p)) = p$, където $f(x) = r - x^2$. Всъщност p е фиксирана точка на двойно-итерираното изображение при $f^2(x) = f(f(x))$. Графиката на функцията $f^2(x)$ е показана на фиг. 13.



Фигура 13. Графиката на $f^2(x)$ при $r = 0.95$

За да намерим p и q, трябва да решим уравнението за точките, в които диагоналът пресича графиката, т. е. трябва да решим уравнение от 4 –та степен: $f^2(p) = p$.

$$f(f(p)) = f(r-p^2) = r-(r-p^2)^2 = -p^4 + 2p^2 r + r - r^2$$
$$= (p^2 + p - r)(p^2 - p + 1 - r)$$

Достатъчно е да решим само $p^2 - p + 1 - r = 0$, тъй като другият множител представлява произведението на стойностите на фиксираните точки. Тогава $D = 1 + 4r - 4 = 4r - 3 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4r-3}}{2}$ и оттук следва, че $p_1 = \frac{1+\sqrt{4r-3}}{2}$ и $p_2 = \frac{1-\sqrt{4r-3}}{2}$. Решенията са реални за $4r - 3 > 0 \Rightarrow r > 0.75$. От това разбираме, че $2-$цикълът съществува за всички $r > 0.75$. При $r = 0.75$ се получава флип-бифуркация, а при $r < 0.75$ не съществува $2-$цикъл.

Паяжинната диаграма показва как флип-бифуркацията може да удвоява периоди. Представете си графиката на функция f и вижте локалното изображение близо до фиксираните точки, където $f'(x^*) = -1$. Ако графиката е обърната надолу, близо до x^* , паяжинната диаграма създава малък стабилен $2-$цикъл, близо до фиксираните точки, както се вижда на фиг. **14**.

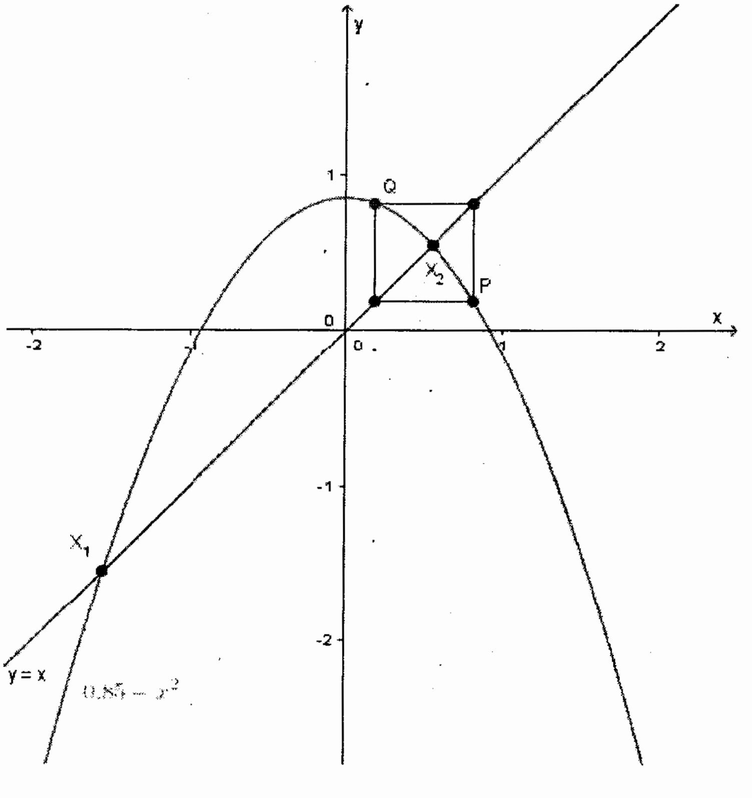
Точките p и q са стабилни при втората итерация на f, тоест:

$$|(f^2)'(p)| < 1 \Leftrightarrow |f'(f(p)).f'(p)| < 1 \Leftrightarrow |f'(q)||f'(p)| < 1 \quad .$$

Всъщност $f'(p) = -2p$ и $f'(q) = -2q \Rightarrow |4pq| < 1$ Но p и q са корени на уравнението $x^2 - x - r + 1 = 0$ и $pq = 1 - r$. Тогава: $|4(1-r)| < 1 \Leftrightarrow |4-4r| < 1$.

Случай 1. $4 - 4r < 1 \Leftrightarrow r > 0,75$.

Случай 2. $4r - 4 < 1 \Leftrightarrow r < 1,25$.



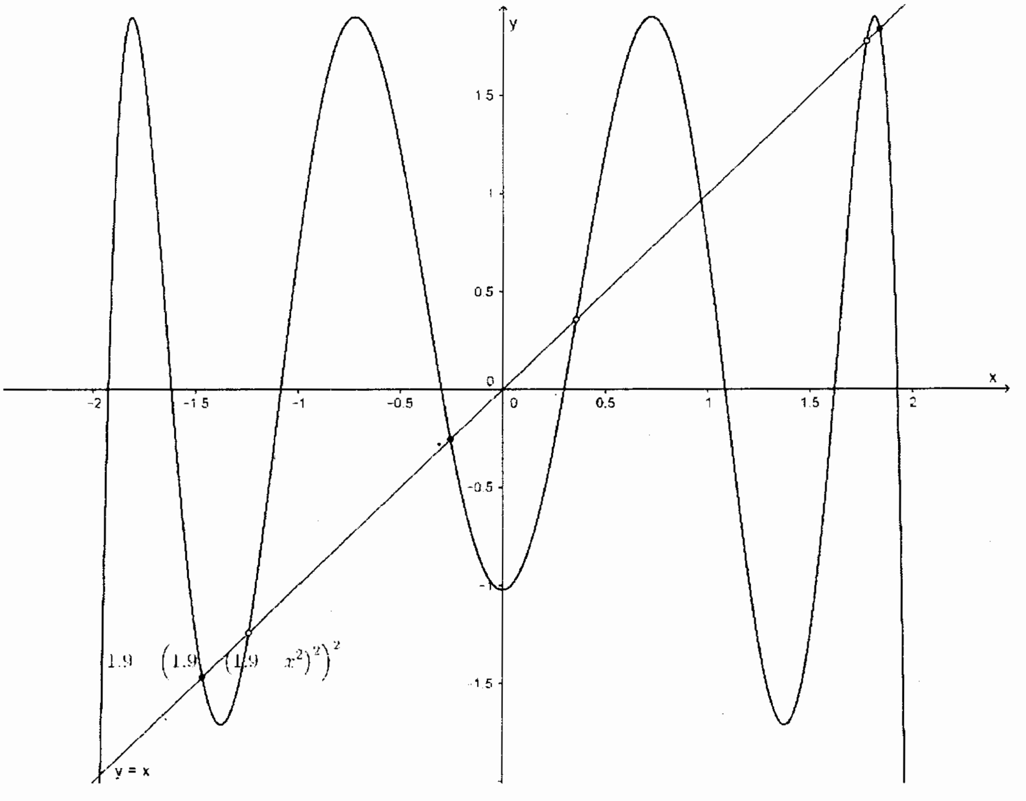
Фигура 14. Поява на $2-$цикъл при $r = 0.8$

С това стигаме до интервала $0.75 < r < 1.25$, в който точките p и q са стабилни точки.

5. Периодични прозорци.

Едно от най-интересните явления в орбитовата диаграма е появяването на периодични прозорци. Първият въпрос, на който ще отговорим, е как се появява $3-$цикълът (същият метод може да се приложи и за останалите периодични прозорци).

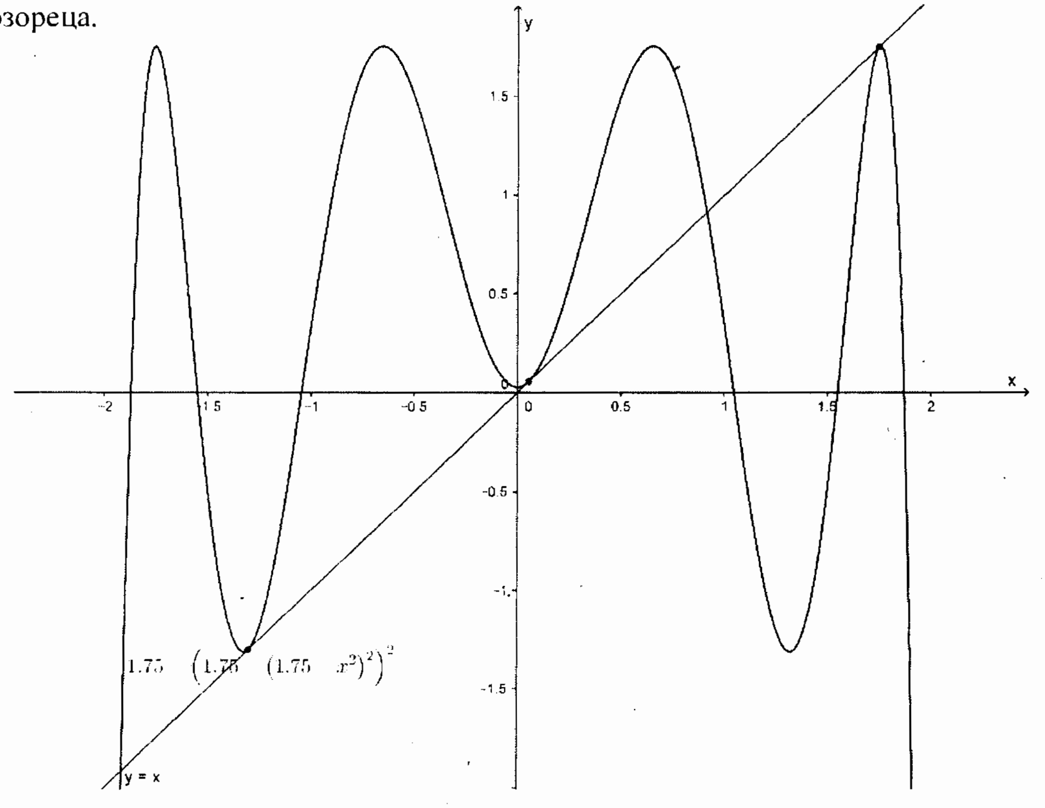
Както вече знаем, $x_{n+1} = f(x_n)$ и 2-цикъл се появява, когато $f^2(x^*) = x^*$. Аналогично, 3-цикъл се появява, когато $f^3(x^*) = x^*$, т.е. по дефиниция всяка точка p от $3-$цикъла се повтаря на всеки три итерации – изпълнява $f^3(p) = p$ и следователно е фиксирана точка за третата итерация на f. За съжаление полиномът $f^3(p)$ е от 8-ма степен и не можем да го решим напълно за фиксираните точки. Построявайки си обаче графика, можем да получим нужната информация нагледно, както на фиг. 15 $(r = 1.9)$.



Фигура 15. Графика за $f^3(x)$ при $r = 1.9$

Пресечните точки на графиката на третата итерация на f с диагонала изобразяват решенията на $f^3(x)$. Решенията са 8, но от тях ни интересуват само 6, тъй като две от тях изпълняват $f(x^*) = x^*$. Черните точки определят стабилен $3-$цикъл; при белите пък той е нестабилен. До това заключение можем да стигнем, пресмятайки наклона на допирателната в съответната точка. При черните точки той е доста по-малък по абсолютна стойност, отколкото при белите – условието за стабилност на фиксирана точка.

Сега да си представим, че намаляваме стойността на r към режима на хаос преди $3-$цикъла. Така графиката от фиг. 16 ще се промени, като „хълмчетата" ще се смъкнат надолу, а „долините" ще се издигнат нагоре – графиката ще се отдръпне от диагонала, както на фиг. 15, където шестте точки са изчезнали (r = 1,748). Следователно някъде между $r = 1.752$ и $r = 1.748$ графиката ще бъде допирателна към диагонала – ще имаме допирателна бифуркация. Тази промяна в поведението на функцията дефинира появата на 3 –прозореца.



Фигура 16. Графика за $f^3(x)$ при $r = 1.75$

За да намерим аналитично стойността, при която се появява допирателната бифуркация, трябва да вземем под внимание както съществуването на 3-цикъл, така и факта, че правата $y = x$ е допирателна към графиката на функцията, т.е. наклонът на производната на $f^3(x)$ е равен на 1.

Нека фиксираните точки за третата итерация на f са a, b и c, където a, b, c са различни. Образуваме системата

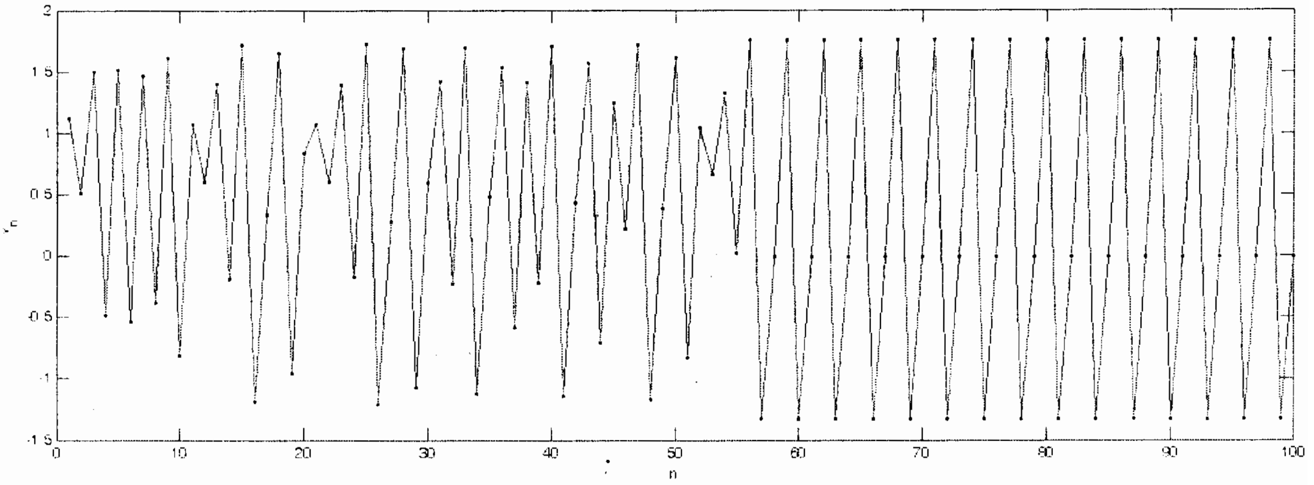
$$f(a) = r - a^2 = b$$
$$f(b) = r - b^2 = c$$
$$f(c) = r - c^2 = a$$
$$(f^3)'(a) = 1$$

Пресмятаме производната $f'(a) = -2a$ и получаваме, че $abc = -\frac{1}{8}$. Полагаме $a + b + c = A, ab + bc + ca = B, abc = C$ и преобразуваме горната система с неизвестните A, B, C и r:

$$AB - C = 1$$
$$A^2 + A - 2 = 3r$$
$$r^3 - (A^2 - 2B)r^2 + (B^2 - 2AC)r - C^2 - C = 0$$
$$C = -\frac{1}{8}$$

Решавайки системата, получаваме единствено решение за $r = \frac{7}{4}$, което потвърждава експериментално получените резултати.

Следващата графика показва появата на $3-$цикъл около $60-$тата итерация на f.



Фигура 17. Поява на $3-$цикъл при $r = 1.758$

5.1. Удвояване на периода в прозореца.

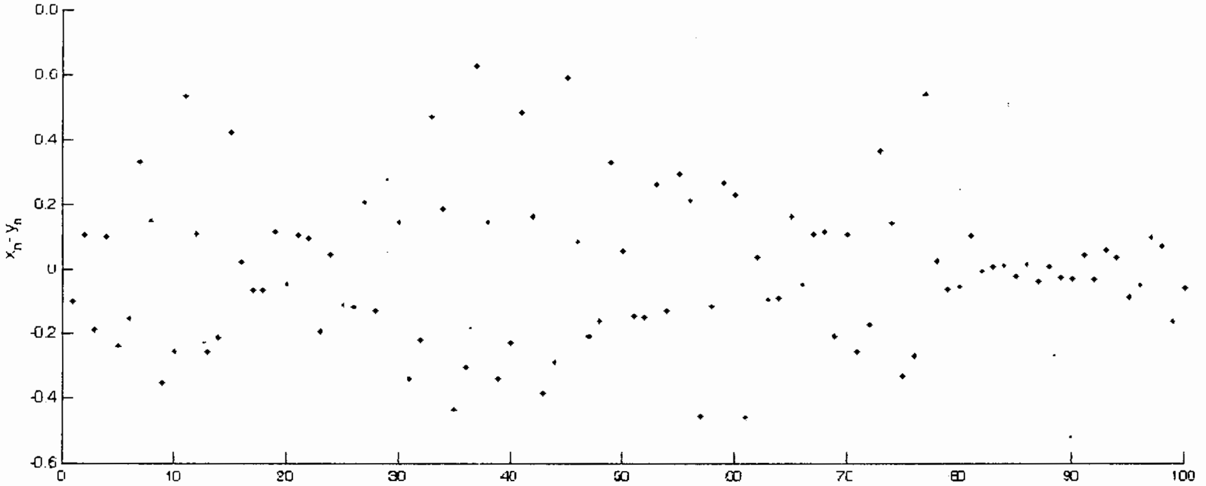
В края на секция 3.2. показахме, че графично изображение, копие на орбитната диаграма, се появява в интервала $r \in [1.768; 1.788]$, т.е. където се намира $3-$прозорецът. Обяснението отново е свързано с „хълмчетата" и „долините". Точно след като стабилният $3-$цикъл се е обособил след допирателната бифуркация, наклонът на допирателната в черните точки е много близо до $+1$. Увеличавайки r, наклонът намалява с голяма бързина от $+1$ и накрая стига до -1. Когато това се случи, флип-бифуркация кара всяка от трите черни точки да се раздвои: $3-$цикълът удвоява периода си и се превръща в $6-$цикъл. Същият механизъм на удвояване на периода работи и тук само че сега образува орбити с период 3.2^n. Аналогична конструкция на удвояване на периода може да се намери във всички периодични прозорци.

6. Синхронизиран хаос.

Разглеждаме друг тип итерации на функцията $f(x) = r - x^2$ – по две променливи x и y по следния начин:

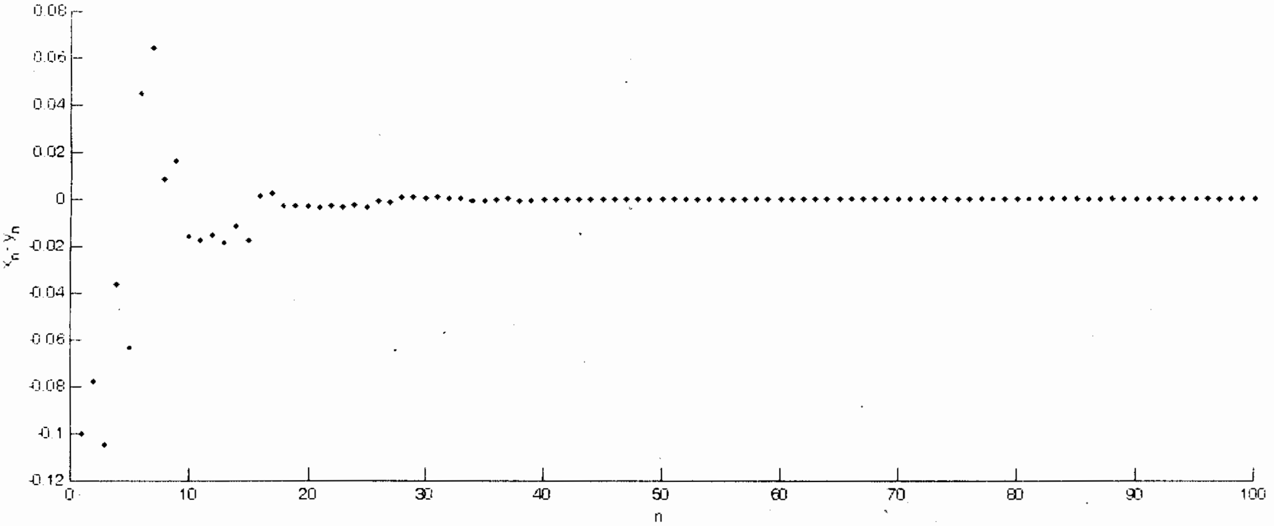
$$x_n = f(x_n - 1)(1-\varepsilon) + f(y_n - 1)\varepsilon$$
$$y_n = f(y_n - 1)(1-\varepsilon) + f(x_n - 1)\varepsilon,$$

където ε е някакво реално положително число, по-малко от 1. Нека x_0 и y_0 са началните стойности, от които започваме да итерираме. Приемаме r за константа, за която системата е в хаотичен режим. Нека $\varepsilon = 0$. Забелязваме, че двете системи са напълно независими една от друга $- x_n = f(x_n - 1)$ и $y_n = f(y_n - 1)$. При $\varepsilon = 1$ системите са обвързани, но по такъв начин, че поведението им много се различава в бъдеще. Когато $\varepsilon = 0.5$, се оказва, че x и y са напълно идентични. Оттук бихме могли да заключим, че с отдалечаването на ε от 0.5 ще имаме все по-малко зависимо поведение на двете системи една от друга.



Фигура 18. Графика на функцията при $\varepsilon = 0.09$; $x_0 = 0.6$; $y_0 = 0.7$

Наистина, на фиг. 18 са изобразени стойностите на $x_n - y_n$ в зависимост от n за $\varepsilon = 0.09$. Забелязваме, че точките са доста хаотично разположени, т.е. разликата $x_n - y_n$ варира – поведението на системите не е дори подобно. При същите начални стойности x_0 и y_0 и при $\varepsilon = 0.8$ след достатъчен брой итерации разликата започва да се ориентира към нулата, т.е. двете системи имат едно и също поведение в дългосрочен план – такова явление се нарича синхронизиран хаос.



Фигура 19. Графика на функцията при $\varepsilon = 0.8$; $x_0 = 0{:}6$; $y_0 = 0{:}7$

Както вече споменахме, за $\varepsilon = 0.5$ системите са идентични, т.е. имаме синхронизиран хаос от самото начало. Колкото повече се отдалечаваме от 0.5, толкова повече итерации ще са необходими за синхронизиране на хаоса на двете системи, докато накрая достигнем $\varepsilon = 0$, когато системите са напълно независими.

7. Бъдещо развитие.

Основната идея за разглеждане по темата е намиране на теоретични доказателства за резултатите в последната секция. Ще искаме да покажем, че наистина итерацията

$$x_n = f(x_n - 1)(1-\varepsilon) + f(y_n - 1)\varepsilon \qquad y_n = f(y_n - 1)\varepsilon + f(x_n - 1)(1-\varepsilon)$$

води до синхронизиране на поведението на $f(x)$ и $f(y)$ при достатъчен брой итерации и близки стойности на x_0 и y_0 за $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

8. Заключение.

Настоящата разработка въвежда в основите на теорията на динамичните системи и хаоса, като разглежда по-задълбочено поведението на $f(x) = r - x^2$. Бяха показани резултати от компютърни експерименти по темата, част от тях придружени с теоретичен анализ.

9. Благодарности.

В заключение искаме да благодарим на ментора ни Никола Камбуров за предложената тема и помощта му през целия процес на работа, на Яница Пехова за съветите по софтуерната част, на Иван Герганов за това, че ни помогна да се справим с проблемите при писането и дизайна. Изказваме благодарности и на Ученическия институт по математика и информатика и Американска фондация за България за предложените условия за работа по време на Лятната изследователска школа по математика и информатика, както и на списание *"Математика плюс"* за възможността да публикуваме разработката си.

10. Бележки.

S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos (Chapter 10.1-10.4), 2001

DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS AND CHAOS

Abstract. The paper considers a given dynamical parameterized system and its behaviour in long-term conditions. After enough number of iterations of $f(x) = r - x^2$, which represents the dynamical system under consideration, for some values of r it settles down to a fixed number, but for other values – to a periodic behaviour. It turns out that at some moment chaos is obtained. The interesting phenomena "periodic window" and "synchronised chaos" are studied.

Pressiana Marinova, Baba Tonka High School of Mathematics, Ruse, 7000, prs_marinova@abv.bg

Iveta Makedonska, Paisiy Hilendarski Sofia High School of Mathematics, Sofia, 1000, ivetamakedonska@gmail.com

НАГРАДАТА НА ИМЕТО НА Н. Х. АБЕЛ ЗА 2016 ГОДИНА

проф. Сава Гроздев, доц. Веселин Ненков

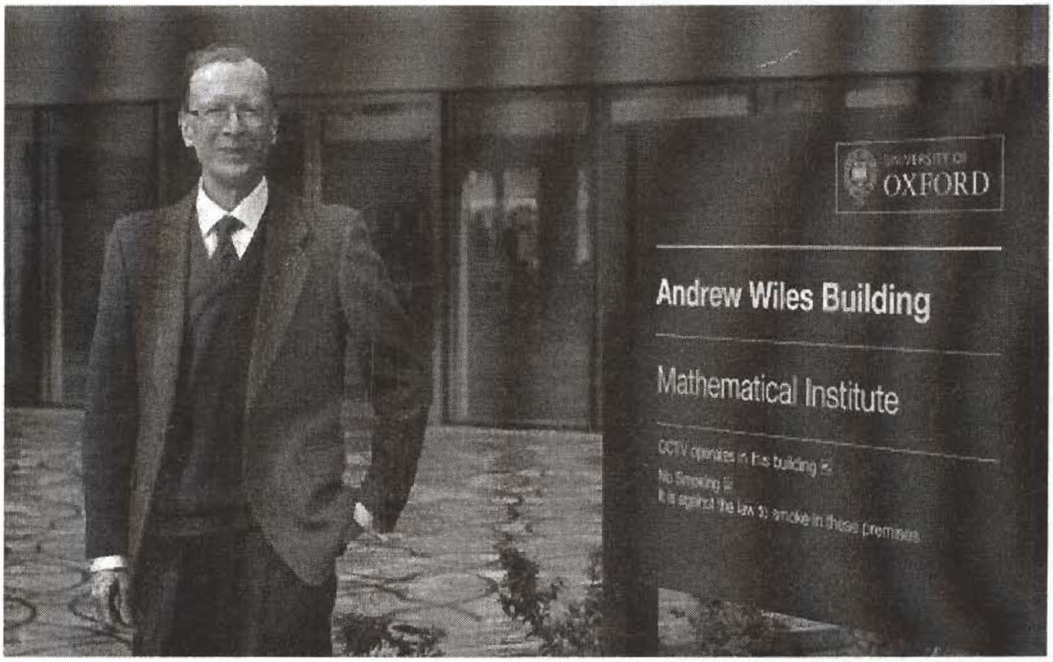
Норвежката академия на науката и изкуствата реши да присъди Абеловата награда за 2016 г. на Сър Ендрю Уайлс от Оксфордския университет „за неговото великолепно доказателство на Великата теорема на Ферма на базата на модулярната хипотеза за полу-устойчивите елиптични криви, което постави началото но нова ера в Теорията на числата." На 15 март 2016 г. Президентът на Норвежката академия на науката и изкуствата, Ole M. Sejersted, обяви носителя на Абеловата награда за 2016 г. в Академията в Осло. Ендрю Уайлс получи наградата от Негово кралско величество Принц Хаакон по време на церемония в Осло на 24 май.

Абеловите награди са признание за приноси в областта на математическата наука, които се отличават с изключителна дълбочина и оказват съществено влияние върху развитието на математиката и науката изобщо. Наградата се присъжда ежегодно от 2003 г. насам. Нейният паричен израз е 6 млн. норвежки крони (около 600 хил. евро или 700 хил щатски долара).

Ендрю Уайлс е един от малкото, ако не и единственият математик, чието доказателство се превърна във водеща международна новина. През 1994 г. той „разби" Великата теорема на Ферма, която по това време беше най-известният и най-дълго останалият без решение проблем в историята. Доказателството на Уайлс е не само връх в неговата кариера, но и епохален епизод в математиката. То е и кулминация на едно забележително лично пътешествие, което започва три десетилетия по-рано. През 1963 г. като десетгодишно момче, живеещо в Кеймбридж, Англия, Уайлс намира в местната библиотека копие на една книга за Великата теорема на Ферма. Той си спомня как бил озадачен от факта, че макар и твърде малък успял да разбере формулировката на теоремата, но толкова по-голямо било учудването му, че въпреки това, теоремата е останала без доказателство в продължение но повече от 300 години. „От този момент знаех, че няма да я изпусна." – спомня си той. „Трябва да я докажа!" Абеловият комитет съобщава: „Малко са резултатите с толкова богата математическа история и драматично доказателство, каквато е Великата теорема на Ферма."

Един живот, отдаден на математиката.

Ендрю Уайлс е роден на 11 април 1953 г. в Кеймбридж. През 1974 г. той получава бакалавърска степен по математика в Колежа „Мертън" в Оксфорд и докторска степен през 1980 г. в Колежа „Клеър" в Кеймбридж. След престой през 1981 г. в Института за авангардни изследвания в Ню Джърси, Уайлс става професор в Пристънския университет. В периода 1985–1986 той е Гугенхаймски стипендиант (Соломон Гугенхайм (1861–1949) е много богат американски бизнесмен, колекционер, дарител и филантроп) в Института за висши изследвания край Париж и в Екол Нормал Супериьор. От 1988 до 1990 г. е професор-изследовател на Кралското дружество в Оксфордския университет, след което се завръща в Принстън. От 2011 г. е отново професор-изследовател на Кралското дружество в Оксфорд.



Ендрю Уайлс пред Института по математика в Оксфордския университет
Сградата носи името на Уайлс в негова чест

Награди и отличия.

Ендрю Уайлс е носител на множество високо стойностни награди за математика и наука:

Наградата „Ролф Шок“ (Ролф Шок (1933–1986) е шведско-американски философ и художник с френско-германски произход (роден във Франция, а родителите му са германци); паричният израз на наградата е 400 хил. шведски крони (около 60 хил. щатски долара) и се връчва от Шведската кралска академия на всеки 3 години);

Наградата „Островски“ (Александър Островски (1893–1986) има украински произход и е професор по математика в Базел, който прави завещание за основаване на наградата; самата награда е в размер на 100 хил. швейцарски франка и се връчва в нечетни години от Датската и Холандската академии на науките);

Наградата „Волф“ (Рикардо (Ричард) Волф (1887–1981) е германски евреин с кубинско и израелско гражданство, откривател и посланик но Куба в Израел; наградата е ежегодна, връчва се от Волфската фондация в Израел и е в размер на 100 хил. щатски долара за всяка от областите изкуство, математика, физика, химия, медицина и селскостопански науки);

Кралски медал на Кралското дружество в Англия (известен още като медал на английската кралица), който е основан от Джордж IV през 1825 г. (медалът е изработен от позлатено сребро (такива се и златните олимпийски медали), ежегодно се връчват по 3 медала за постижения в естествените науки, медицината и приложенията);

Награда на Националната академия на науките в САЩ (връчва се на всеки 4 години за постижения в различни области; паричният израз е в размер на 5 хил. щатски долара);

Наградата „Ферма“ (присъжда се на две години от Факултета по наука в гр. Тулуза, Франция и е в размер на 20 хил. щатски долара);

Наградата „Коул“ (на името на американския математик Франк Нелсън Коул (1861–1926); на всеки три години Американското математическо дружество присъжда по две награди, всяка в размер на 5 хил. щатски долара, едната в областта на алгебрата и втората в областта на теорията на числата);

Наградата „Волфксел“ (германският лекар и любител на математиката Паул Фридрих Волфксел (1856–1906) завещава 100 хил. германски марки на този, който първи докаже Великата теорема на Ферма; сумата е била еквивалентна на 1 млн. английски паунда, които поради инфлацията след Първата световна война се превръщат в 30 хил. паунда, получени от Уайлс);

Наградата „Файсал“ (основана през 1976 г. от синовете на краля на Саудитска Арабия – Файсал (1906–1975); наградата включва 24-каратов златен медал с тегло 200 г и 200 хил. щатски долара; връчва се ежегодно в някоя от областите: В служба на Исляма, Изследвания за Исляма, Арабски език и арабска литература, Наука или Медицина);

Наградата „Питагор“ (присъжда се ежегодно за постижения в математиката по решение на Университета в Калабрия в Южна Италия (намира се на „палеца“ на Апенинския ботуш); основана е от общината в гр. Кротон, Италия (намира се на „токчето“ на Апенинския ботуш) и е в размер на 20 хил. евро);

Наградата „Шоу“ (ежегодна награда на името на Ран Ран Шоу (1907–2014) – китайски филантроп и бизнесмен в медийния бизнес в Хонг Конг, починал на 106-годишна възраст; наградата е в размер на 1,2 млн. щатски долара и е известна още като нобелова награда на изтока;

Наградата „Клей“ (годишна награда за математика на Математическия институт Клей в САЩ, основан през 1998 г. със спонсорството на Бостънския бизнесмен Лендън Клей; паричният израз на наградата е различен, но например за решаване на всяко от 7-те математически предизвикателства на второто хилядолетие се предвиждат 1 млн. щатски долара);

Награда на IMU (Международен математически съюз) – сребърен плакет, връчен за първи път и единствено досега на Ендрю Уайлс вместо Фийлдсов медал (Фийлдсовите медали са за математици до 40-годишна възраст, а Уайлс доказва Великата теорема на Ферма на 41 години);

Рицарски орден на Британската конституционна монархия – най-високият орден на Британската империя.

Ендрю Уайлс е стипендиант на Кралското дружество, чуждестранен член е на Американската и на Френската академии на науките, притежава почетни звания и степени от Оксфорд, Кеймбридж, Колумбия, Йел, Уарик и Нотингам.

Абеловата награда.

Абеловата награда се присъжда от Норвежката академия на науките и изкуствата. Носителят се определя въз основа на рекомендация на Абеловия комитет, който включва петима международно признати математици. Настоящи членове на този комитет са: John Rognes от Университета (председател), Rahul Pandharipande, Éva Tardos, Luigi Ambrosio и

Marta Sanz-Solé. Наградата и съпътстващите мероприятия се финансират от норвежкото правителство.

Нилс Хенрик Абел.

Изключителният норвежки математик Нилс Хенрик Абел е роден на 5 август 1802 г. След смъртта си, само на 26-годишна възраст, той оставя огромно количество изследвания, включително първото доказателство на общата биномна теорема, формулирана от Нютон и Ойлер. Проблемът за неразрешимостта в радикали на общото алгебрично уравнение от пета степен е с 250-годишта история и доказателството принадлежи именно на Абел.

Доказателство на теоремата.

Проблемът, който завладял Ендрю Уайлс още от детството му и който той разреши 30 години по-късно, гласи: Не съществуват цели решения на уравнението $x^n + y^n = z^n$, когато $n > 2$. Проблемът носи името на френския математик и адвокат в местния парламент на гр. Тулуза – Пиер Ферма (1601–1665), защото около 1637 г. той пише следното в полето на книга, посветена на диофантовите уравнения: „Имам наистина великолепно доказателство на това твърдение, но полето на книгата е твърде тясно, за да го изложа." Това изпълнено с лъжовни надежди изречение за съществуването на доказателство се превръща във фантастична примамка за няколко поколения математици, които се опитват безуспешно да намерят решение на проблема. Когато Уайлс е бил на момчешка възраст, Великата (нарича се още Последната) теорема на Ферма се е считала за най-известният нерешен проблем в математиката и разрешаването му се е приемало с консенсус, че не може да се осъществи с наличните концептуални средства. Със сигурност доказателството на Ендрю Уайлс от 1994 г. не е това, за което си е мислил Ферма, пишейки коментара в полето на книгата. (Днес се приема, че французинът е сгрешил, твърдейки, че притежава доказателство.) Доказателството на Уайлс се основава на две понятия, които са въведени в математиката съответно през 18. и 19. век: елиптични криви и модулярни форми. Под елиптична крива се разбира уравнение от вида $y^2 = x^3 + ax + b$, където a и b са константи. Математиците са изучавали такива уравнения при пресмятане на разстоянията, които изминават планетите по своите елиптични траектории. От началото на 19. век започва да се проявява интерес към собствените свойства на елиптичните криви, както и към трудовете на Нилс Хенрик Абел. Модулярните форми са доста по-абстрактни математически обети. Те представляват вид изображения върху вид граф и експонират изключително много симетрии. Елиптичните криви и модулярните форми нямат очевидна връзка помежду си. Те са от различни области и възникват по различни причини, изучават се от различни изследователи, които използват различна терминология и техника. Едва през 1950 г., на двамата японски математици – Ютака Танияма и Горо Шимура, им хрумва идея, която като че ли идва от нищото: двете области са еквивалентни на дълбочинно ниво. Японците започват да предполагат, че всяка елиптична крива би могла да се асоциира със своя собствена модулярна форма. Това е известната хипотеза на Танияма-Шимура – едно учудващо и радикално предположение, за което никой нямал и идея как може да се докаже. През 1984 г. германският математик Герхард Фрей за първи път прави връзка между Великата теорема на Ферма и хипотезата на Танияма-Шимура. Както беше отбелязано по-горе, теоремата твърди, че не съществуват цели решения на уравнението $x^n + y^n = z^n$, когато $n > 2$. Фрей показва, че ако приемем това твърдение за грешно, може да се предскаже съществуването на елиптична крива, която по всичко изглежда, че не притежава асоциирана модулярна форма. Две години по-късно американският математик Кен Рибет доказва предположението на Фрей: ако Великата теорема на Ферма не е вярна, то съществува елиптична крива без асоциирана модулярна форма, т.е. хипотезата на Таниама-Шимура е също грешна. Фрей и Рибет представят аргументи, че ако хипотезата на Таниама-Шимура е вярна, то Великата теорема на Ферма не може да е грешна. От този момент задачата за доказателство на Великата теорема на Ферма се превръща в доказателство на хипотезата на Таниама-Шимура. Никой обаче не знаел как да стане това. И още нещо. Дали доказателството на хипотезата на Таниама-Шимура е по-лесно от доказателството на Великата теорема на Ферма? Дали еквивалентността на хипотезата и на теоремата не означава, че доказателството и на двете е невъзможно? Ендрю Уайлс, специалист по елиптични криви (каквато е темата на докторската му дисертация) е също специалист и по модулярни форми – факт, който е свързан с точно необходимата компетентност за ангажиране с проблема. След 8-годишна интензивна работа Уайлс доказа, че хипотезата е вярна. Неговото оригинално и смело доказателство се смята за един от най-големите триумфи на съвременната математика. Схемата е следната: всяка елиптична крива притежава редица от числа, която я определя, но всъщност е така и с всяка модулярна форма. Уайлс показа, че всяка редица, принадлежаща на дадена елиптична крива, подхожда точно на редица,принадлежаща на модулярна форма. Той успява да го направи с помощта на специално изобретен инструментариум, базиран на идеи от 19. век на френския математик Еварист Галоа (1811–1832), който е откривател на симетриите, произтичащи от решенията на определени уравнения. Доказването на хипотезата на Таниама-Шимура – резултат, известен още като модулярната теорема, означава, че е доказана и Великата теорема на Ферма, с което се затваря една страница от историята на математиката, отворена 350 години преди това.

Но въпросът не е само до справянето с една стара и знаменита загадка. Приносът на модулярната теорема за развитието на математиката е огромно. Уайлс демонстрира структурната връзка между елиптичните криви и модулярните форми, което представлява богат и важен резултат в Теорията на числата с множество дълбоки следствия. Но той създаде и мощна концептуална техника, която през последните две десетилетия се прилага от други математици по импозантен начин.

Негово кралско величество Принц Хаакон връчва наградата на Сър Ендрю Уайлс

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., В. Ненков. Новият Абелов лауреат. *Математика плюс, (22)* 2, 2014, 67 – 72.
2. Гроздев, С., В. Ненков. Абеловият лауреат за 2015 година. *Математика плюс, (23)* 2, 2015.

М + ХРОНИКА

Европейска олимпиада за девойки. На проведената от 10 до 15 април 2016 г. в гр. Бущени, Румъния, Европейска олимпиада по математика за девойки (EGMO), българският отбор се представи отлично, като спечели един златен, два сребърни и един бронзов медал. В неофициалното отборно класиране България е на трето място с 99 точки след Русия (122 т.) и САЩ (111 т.), което означава, че нашият отбор е на първо място в Европейския съюз. В състезанието участваха отбори от 39 държави, като 31 отбора са от Европа. Златен медал завоюва Виолета Найденова от 11. клас на СМГ „П. Хилендарски“, сребърни медали заслужиха Деница Маркова от 12. клас и Мария Делякова от 11. клас на СМГ „П. Хилендарски“, а бронзов медал спечели Симона Кукова от 10. клас на МГ „Д-р Петър Берон“, Варна.

Балканска олимпиада по математика. 33-ото издание на балканиадата за големи ученици се проведе от 5 до 10 май 2016 г. в гр. Тирана, Албания. Класирането на 10-те най-добре представили се държави (официални участници и държави-гости) е следното: Сърбия и Казахстан (181 т.), Румъния (180 т.), Турция (172 т.), България (170 т.), Гърция (161 т.), Великобритания (152 т.), Италия (150), Саудитска Арабия (145 т.), Босна и Херцеговина (129 т.). Интересно е да се отбележи, че отборът на Казахстан спечели общо 179 т. от 180 възможни върху първите 3 задачи и само 2 т. от 60 възможни върху задача 4 (българско предложение). Максималните 40 точки бяха по силите само на двама ученици – един от Сърбия и един от Румъния. Най-малкият участник, 12-годишен французин, стана носител на бронзов медал и ще бъде интересно да се проследи неговото развитие през следващите години. Златните медали отидоха в 8 държави, между които не беше България (два златни медала спечели Саудитска Арабия). Предлагаме условието на задача 4, чийто автор е Николай Белухов, ученик на рано напусналия ни д-р Светлозар Дойчев: *Равнината е* *разделена на единични квадратчета с помощта на две множества от прави линии, получавайки по този начин безкрайна мрежа. Всяко единично квадратче е оцветено в един от* 1201 *цвята така, че никой правоъгълник със страни по линиите на мрежата и с периметър* 100 *не съдържа едноцветни квадратчета. Да се докаже, че нито един правоъгълник с размери* 1×1201 *не съдържа едноцветни квадратчета.*

Математическо състезание „Европейско кенгуру“. Националният кръг на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру“ се проведе на 4 юни 2016 г. Първо място завоюваха 17 ученици, второ място – 9 ученици и трето място – 10 ученици,

които получиха грамота и медал. Наградени бяха и 7 деца със специални образователни потребности, както и 18 ученици, които участваха в състезанието на френски език.Учениците от 8. до 12. клас, класирани на призовите места, имат право да кандидатстват за стипендия по Наредбата за даровити деца. Награждаването се проведе на 10 юни 2016 г. в Министерството на образованието и науката. Беше отбелязана 20-годишнинита от първото издание та състезанието на български език. Преди това то се провеждаше само на френски. Присъстваха много ученици и гости. Зам. министърът на образованието и науката Диян Стаматов и посланикът на Република Франция Негово Превъзходителство Ксавие Лапер дьо Кабан връчиха наградите на победителите и юбилейните медали. Посланик дьо Кабан поздрави учениците и им пожела все така да се борят за победата, а на тези, които не са успели тази година, да бъдат достатъчно работливи, за да имат успех догодина. Той заяви, че участието на толкова млади българи в конкурса е много добър знак за динамизма на обществото в нашата страна.От името на Министерството призьорите бяха поздравени от зам. министър Диян Стаматов. Той отбеляза, че математическото състезание „Европейско кенгуру“ е едно от трудните състезания, но това, че в него участват толкова много ученици, е показател за интереса към него. Във всяка една задача от това състезание има трудност, но преодоляването на трудностите ще помогне на учениците да се справят с всяко житейско препятствие, каза още г-н Стаматов. На церемонията присъстваха зам. министър проф. дмн Иван Димов, представители на Посолството на Република Франция в София, много учители и родители.

Международното математическо състезание „Европейско Кенгуру“ е най-масовото в света. Въпреки, че е международно, във всяка страна задачите се превеждат на съответния роден език. Повечето задачи са общи за всички, но част от тях са локални и характерни само за съответната страна в зависимост от конкретното учебно съдържание. Поради тази особеност не се изготвя общо международно класиране, а само национално. Отличителна особеност са интересните логически задачи, които не изискват много сметки и описания, а логика, усет, късмет и рутина. Трудността в турнира е съвкупността от нестандартни ситуации в задачите малкото време за решаването им. Тази година до Националния кръг бяха допуснати 411 ученици от участвалите общо повече от 22 000 в Областния кръг през м. март. Повече подробности могат да се намерят на http://www.bulgarian-kangaroo.eu/

Балканска олимпиада по информатика. Христо Венев (12. клас, СМГ „П. Хилендарски", София) и Енчо Мишинев (11. клас, МГ „Ат. Радев", Ямбол), спечелиха най-високото отличие – златни медали, на проведената от 27 юни до 3 юли 2016 г. в гр. Никозия, Кипър, 24. балканска олимпиада по информатика. Със сребърен медал се отличи Александър Кръстев (9. клас, МГ „Д-р П. Берон", Варна), а Даниел Атанасов (12. клас, СМГ „П. Хилендарски", София) получи бронзов медал. Ръководители на отбора са членовете на Националната комисия Емил Келеведжиев от Института по математика и информатика при БАН и Антон Шиков, от „ОПКО Сис" ООД, гр. Ямбол.

Олимпиада в Хонг Конг. Български ученици се завърнаха от международното **състезание** по математика в Хонг Конг с общо 10 медала. Те спечелиха 8 медала в индивидуалното класиране (1 златен, 4 сребърни и 3 бронзови), както 1 сребърен и 1 бронзов в отборното. Медалистите са представители на три училища: Софийската математическа гимназия „П. Хилендарски", Бургаската природо-математическа гимназия „Акад. Н. Обрешков" и столичното 125. СОУ „Проф. Б. Пенев". Златният медалист в индивидуалното състезание е Ангел (6. клас в 125. СОУ), който беше оценен с максималните 15 точки. „Много съм щастлив. Интензивната подготовка беше около 2-3 месеца преди самото състезание. Бяхме отишли да се забавляваме, защото обичаме математиката." Ангел обмисля да се занимава с любимата наука и занапред. „Много съм развълнувана", коментира почти през сълзи и лелята на Ангел – Димитрина Трифонова.

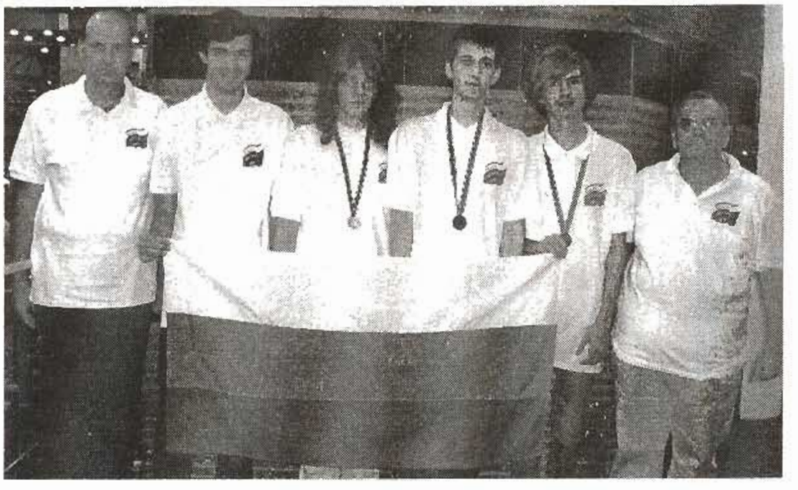
Отборът от Бургаската природоматематическа гимназия „Акад. Н. Обрешков" пък се завърна от Хонг Конг с два индивидуални медала и две купи за отборно участие. „Щастливи сме", каза Георги Апостолов от 6. клас. „Конкуренцията беше сериозна – с деца от 26 държави. „От един месец се готвим интензивно за това състезание. Преди това имахме контроли. Имаше трудни задачи, имаше и лесни, но се справихме. Като разбрахме резултатите, имаше и малко разочарование, защото очаквахме по-добре", добави Георги.

Диян Димитров от Софийската математическа гимназия „П. Хилендарски" се завърна със сребърен медал от индивидуалното състезание и второ място с отбора на СМГ. „Тайната на успеха е в решаване на много задачи", сподели Диян. „Задачите не бяха трудни, но имаше много силни отбори".

Международна олимпиада по лингвистика. Българският отбор спечели 5 медала на 14. международна олимпиада по математическа лингвистика, която се проведе в гр. Майсор, Индия от 25 до 30 юли 2016 г. Златен медал заслужи Кристиан Георгиев от Образцовата математическа гимназия „Акад. К. Попов", Пловдив. Тина Владимирова от Софийската математическа гимназия „П. Хилендарски" и Михаил Пасков от 91. Немска езикова гимназия „Проф. К. Гълъбов", София завоюваха сребърни медали. Цветелина Стефанова от СОУ по европейски езици „Св. Константин-Кирил Философ", Русе и Надежда Димитрова от 128. СОУ „Алберт Айнщайн", София бяха отличени с бронзови медали. Здравко Иванов от СМГ „П. Хилендарски" е с почетна грамота. Ръководители на отбора са Александър Велинов и гл. ас. д-р Илияна Раева от Русенски университет „А. Кънчев". В състезанието взеха участие 173 ученици от 30 държави.

Международна олимпиада по информатика. На проведената от 12 до 19 август 2016 г. в гр. Казан, Русия, 28. международна олимпиада по информатика Христо Венев (12. клас от СМГ „П. Хилендарски") спечели златен медал. Сребърни медали заслужиха Александър

Кръстев (9. клас от МГ „Д-р Петър Берон", Варна) и Енчо Мишинев (11. клас от МГ „Ат. Радев", Ямбол). В олимпиадата взе участие и Даниел Атанасов (12. клас от СМГ „П. илендарски"). Ръководители на българския отбор са членовете на Националната комисия Емил Келеведжиев от Института по математика и информатика на БАН и Младен Манев от Технически университет, Габрово.



Международно математическо състезание в Тайланд. Българските ученици във възрастова група до 13,5 години завоюваха най-голямата награда „Шампион в генералното класиране" измежду 70 отбора на Международното математическо състезание IMC, проведено в Чианг Май, Тайланд. Те бяха участници в отбора на СМГ „П. Хилендарски" и техните имена са: До Виет Кьонг – златен медал, Мартин Стефанов – златен медал, Иван Георгиев – златен медал и Калоян Фачиков – бронзов медал. Техен ръководител е учителката Ваня Данова. Успехът беше извоюван в конкуренция с отбори от 33 държави, а самото състезание беше в два кръга – индивидуален и отборен. В индивидуалния кръг се решават 15 задачи за 90 минути, а в отборния – 10 задачи за 60 минути. В отборния кръг участниците ни постигнаха 360 точки от максималните 400. Отборът на СМГ във възрастовата група до 16,5 години (ръководител Петя Тодорова) също се представи отлично както в индивидуалното, така и в отборното състезание при участието общо на 74 отбора. Отличените са Иван-Александър Мавров – златен медал, Борис Барбов – златен медал, Борислав Антов – сребърен медал и Ирина Софрониева – сребърен медал. Останалите български отбори, които представиха страната ни в Тайланд, бяха МГ „Д-р П. Берон" – Варна, Първа частна математическа гимназия – София, 125. СОУ „Проф. Б. Пенев" – София и ПМГ „Н. Обрешков" – Бургас. Учениците от Бургас спечелиха общо три отборни купи, а в индивидуалното състезание носители на златни медали станаха Орлин Кучумбов, Стефан Иванов и Константин Гаров.

Сингапурско-азиатска олимпиада. Единадесет българчета показаха трети и четвърти резултат по математика в своята възрастова група по време на Сингапурско-азиатската олимпиада на предизвикателството SIMOS. Двама третокласници от Пловдив – Де́мира Недева и Петър Узунов, станаха носители на златни медали. Други петима също спечелиха златни медали в по-горните класове. В надпреварата участваха общо 760 ученици от 2. до 7. клас от 15 държави. В рамките на 60 минути те трябваше да се справят с 25 задачи. „В математиката има предизвикателство и много адреналин." – разказва Демира. „Човек не безгрешен и решаването на задачи те кара да се учиш на различни неща и да напредваш. Когато бях в 1. клас, летях със самолет до Лондон и оттогава имам една мечта – да стана пилот. Баща ми каза обаче, че за да сбъдна желанието си, трябва да имам сериозни занимания по математика. И аз заобичах задачите."

ТАЛОН

Изрежете и попълнете задължително, ако участвате в конкурса
"Издирване на таланти Ум+"! (талонът важи за конкурсните задачи от бр. 3, 2016 г.)

Имена ...., клас...............

Адрес ...., e-mail.............

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ...., клас...............

ТАЛОН

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Виж www.vuzf.bg

Притежателят на този талон има правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса

Имена ....

Адрес ...., e-mail..........

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ....

» 01

Ако кандидатствате след 7 клас

» 02

Ако кандидатствате във ВУЗ

» 03

Олимпиади + Подготовка

» 04

Издирване на таланти уМ+

» 05

Конкурси

» 06

М+ Семинар

национален конкурс уМ+ издирване на таланти

М+ е одобрено от МОН за класна и извънкласна работа по математика и информатика

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
гр. София, 1618, кв. "Овча купел"
ул."Гусла" №1
тел: +359 2 401 58 12, факс: +359 2 401 58 21
e-mail: office@vuzf.bg
www.vuzf.bg

ISSN 0861-8321

Цена 7 лв.