M

помагало за математика и информатика

2 / 2017

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

PER ASPERA AD ASTRA
2002

МАТЕМАТИКА +

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

п о м а г а л о   п о   м а т е м а т и к а   и   п р и л о ж е н и я

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 25 (98), Number 2, 2017

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат 600×840/8	Печатни коли 9
Дадена за печат на 12. 06. 2017	Подписана за печат на 23. 06. 2017 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой на списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието и науката.

Математика плюс
бр. 2, 2017

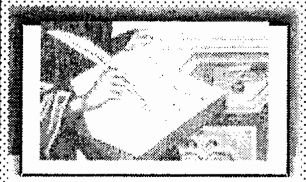
МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

Драги читатели,

Един от фундаменталните въпроси, на които човечество се опитва да даде отговор, е как е възникнала Вселената. Изучаването на Вселената е предмет на философията, както и на науката космология, произлязла от физиката и астрономията, която се занимава с произхода, строежа и еволюцията на Вселената. На гръцки „вселена” означава „нещо, което се върти в кръг“. Наименованието има връзка с модела на Вселената на древните гърци, според който материята е разположена в концентрични сфери, въртящи се около общ център – Земята. Днес се поддържат две основни теории за това как е създадена Вселената. Първата е свързана с теорията на Големия взрив. Става дума за научно обосновани обяснения, които се смятат за най-реалистични. Според тях Вселената възниква от четири основни компонента: пространство, време, маса и енергия. Съгласно теорията на Айнщайн обаче $E = mC^2$, т.е. енергията (E) е равна на масата (m) по квадрата на скоростта на светлината (C^2) в космоса или във вакуум. Това означава, че всяко тяло, което притежава маса, притежава и съответна на тази маса енергия. Оттук следва, че съгласно теорията на относителността на Айнщайн би трябвало Вселената да е съставена от три части: пространство, време и маса. Айнщайн отива по-далеч в своята теория и въвежда ново понятие *пространство-време*, обединявайки пространството и времето в едно. Следователно, с помощта на теорията на относителността заключаваме, че Вселената е съставена от две части: материя и пространство-време. Теорията на Големия взрив описва създаването на Вселената като взрив на една единствена частица, която притежава огромна маса и е съсредоточила в себе си цялото пространство и маса на Вселената. Предполага се, че частицата е била с удивително малки размери, по-малки от тези на атома. Известно е, че толкова малки частици, като протоните например, могат да се „самосътворяват”. Наистина, наблюденията на протони под микроскоп в ядрото на един атом показват, че те изчезват и се появяват сякаш от нищото. Смята се, че преди Големия взрив не е имало нито пространство, нито време, т.е. имало е едно супер начало на всичко съществуващо. Тук се крие един от недостатъците на тази теория, защото тя влиза в противоречие с основния химически принцип, че нищо не се губи, нищо не се променя, а само се превръща от едно вещество в друго. Това дава основание да се смята, че Вселената е нечие творение. Теорията, че Бог е създал Вселената, е достигнала до нас още от древността и е по-скоро религиозно обяснение, отколкото научно доказателство. Попадаме обаче на истински парадокс: Ако Бог е сътворил Вселената, той не би съществувал, ако не е сътворил сам себе си. Но за да сътвори сам себе си, Бог е трябвало да е съществувал, а в същото време той не може да е съществувал преди да бъде сътворен. Казусът е интересен и неразрешим засега. Физикът Фрийман Дайсън обяснява двойствения подход към създаването на Вселената с думите: „Науката и религията са два прозореца, през които хората гледат, опитвайки се да разберат Вселената навън.” Друг учен, Уилям Рийс-Мог, споделя: „Науката не може нито да докаже, нито да отхвърли съществуването на Бога точно както не може да докаже или отхвърли някоя морална или естетическа идея.” Вероятно най-точен е самият Айнщайн: „Науката е куца без религията, а религията е сляпа без наука.”

Д-р М. Плюс



М + ХРОНИКА

ЕДИНАДЕСЕТИ МЕЖДУНАРОДЕН КОНКУРС “MITE: Methodics and information technologies in education” („Методика и информационни технологии в образованието“)

Финалният кръг на XI Международен конкурс MITE 2017 се проведе в периода 29 април – 3 май 2017 г. в Москва в Академията за социално управление към Министерството на образованието на Московска област. Участие със свои разработки взеха ученици и учители от Русия, България и Казахстан. Жури под съпредседателството на проф. дпн Татяна Сергеева (АСУ, Русия) и проф. дпн Сава Гроздев (ВУЗФ, България) и с участието на известни учени от преподаватели от редица български и руски университети и институти изслуша и оцени презентациите на участниците, докладвани в девет ученически и една учителска секции. На вниманието на журито бе представен международен мрежов проект „Математическа мозайка“ с участие на ученици от България, Русия и Казахстан. Състезанието „Математическа вселена“ по време на втория състезателен ден по отбори, всеки от които съставен от представители на различни държави, предизвика много емоции и показа сериозните умения на участниците. Богатата културна програма, която предложиха организаторите – посещение на държавния музей-резерват „Царицино“ и обзорната екскурзия по Москва река с кораб, предизвика голям интерес и остави незабравими спомени.

България постигна забележителен успех в конкурса. Българските проекти завоюваха 7 златни и 3 сребърни медала, златен медал за представянето на мрежовия проект и злато, сребро и бронз в състезанието „Математическа вселена“. Ето подробности за представянето на българските проекти:

ЗЛАТНИ МЕДАЛИ

1. Експонентата на Хърст във фондовите борси, автор **Петко Казанджиев**, Велико Търново; научни ръководители: Цеца Байчева, Кинка Кирилова-Лупанова
2. Изкуствена имунна система, автори: **Йоанна Илиева, Селин Шемсиева, Светлана Вълчева,** Русе; научен ръководител: Сюзан Феимова
3. Окръжности, определени от вписани многоъгълници, автори: **Александра Йовкова, Ирина Христова, Лили Стефанова**, Ловеч; научен ръководител: доц. д-р Веселин Ненков
4. Исторически факти – Математика и музика, автори: **Християна Наковска, Александър Десков**, Разград; научен ръководител инж. Коста Попов
5. Стъпка по стъпка към съвременните измервания, автори: **Йоанна Илиева, Селин Шемсиева, Светлана Вълчева,** Русе; научен ръководител: Сюзан Феимова
6. NetFirm, автори **Ирина Христова, Теодор Христов**, Ловеч; научен ръководител: доц. д-р Веселин Ненков
7. Science Duels, автори: **Виктор Топоров, Кристиан Спасов**, Русе; научен ръководител: Сюзан Феимова

СРЕБЪРНИ МЕДАЛИ

1. Равновесието в живота на Джон Наш, автор **Любомира Димитрова**, Свищов; научен ръководител: Соня Димитрова
2. Приложение на матриците в икономиката, автори: **Александра Йовкова**, **Лили Стефанова,** Ловеч; научен ръководител: доц. д-р Веселин Ненков
3. Развитие на счетоводството, автор **Станимира Петрушкова**, **учител** в НФСГ, София

Резултати от представянето в международния проект „Математическа мозайка"

ЗЛАТЕН МЕДАЛ за Александра Йовкова, Ирина Христова, Лили Стефанова, Ловеч

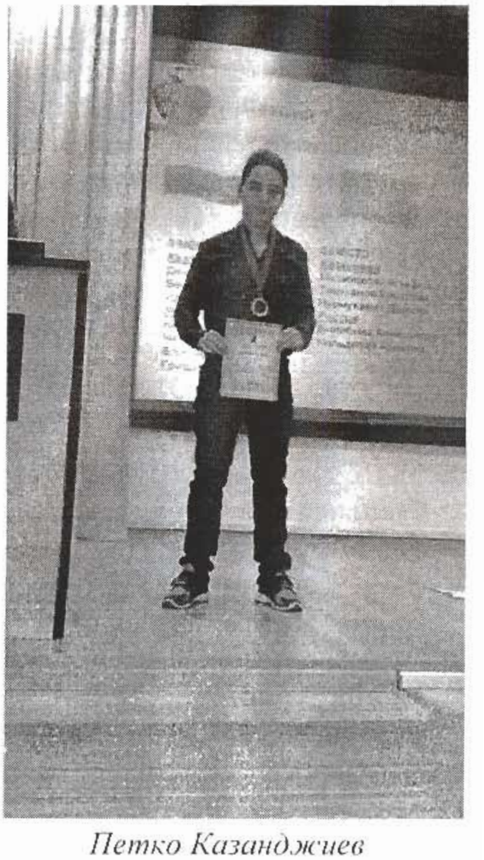
Резултати от представянето в състезанието „Математическа вселена"

ЗЛАТЕН МЕДАЛ за **Ирина Христова**, Ловеч и **Селин Шемсиева**, Русе

СРЕБЪРЕН МЕДАЛ за **Бояна Чолакова**, Русе

БРОНЗОВ МЕДАЛ за **Любомира Димитрова**, Свищов

Станимира Петрушкова



Петко Казанджиев

ЧЕСТИТО НА ПОБЕДИТЕЛИТЕ!

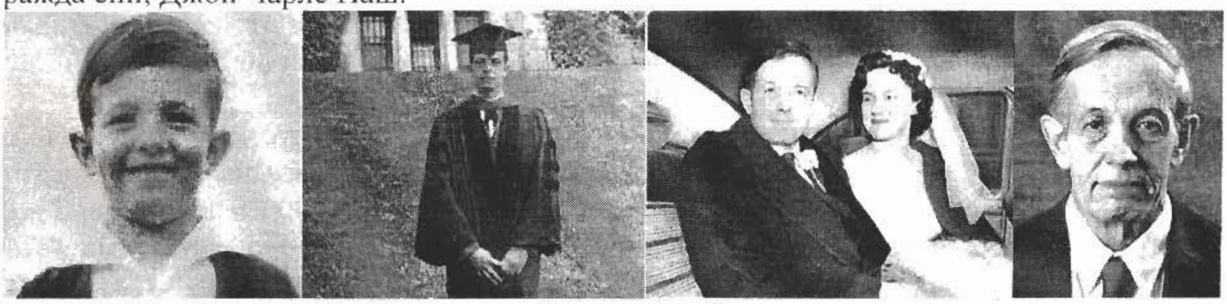
М+ СЕМИНАР

„РАВНОВЕСИЕТО" В ЖИВОТА НА ДЖОН НАШ

Любомира Димитрова, ученичка в 9. Клас

СУ „Николай Катранов", Свищов

Джон Форбс Наш-Младши се ражда на 13 юни 1928 г. в Блуфийлд, Западна Вирджиния. Завършва Технологичния Институт на Карнеги, след което продължава образованието си като стипендиант на Принстън. Със своята дисертация върху некооперативните игри през 1950 г. Наш придобива докторска степен. Година по-късно е нает от Математическия факултет към Масачузетския Технологичен Институт, където се запознава с Алиша де Ларде. Двамата се женят през 1957 г. и след година им се ражда син, Джон Чарлс Наш.



Някои от най-важните разработки на Наш от този период са статиите „Равновесни точки в игри с *N*-участници", „Задача за сделките", „Некооперативни игри" и „Кооперативни игри с двама участници". През 1959 г. научната му кариера е застрашена поради поставената му като диагноза параноидна шизофрения. Джон Наш прекарва следващите години в различни болници под действието на силни лекарства. След 1970 г. обаче той категорично отказва всякакво по-нататъшно медикаментозно лечение и постепенно се връща към предишния си начин на живот.

Джон Наш е удостоен с множество награди за приноса си към математиката в световен мащаб, най-важната от които без съмнение е Нобеловата награда за икономика. Причината именно той да я получи през 1994 г. е равновесната теория, изложена в дисертацията му десетилетия по-рано.

При връщането си от церемонията по връчването на наградата Абел, състояла се в Норвегия на 23 май 2015 г., Наш и съпругата му загиват в тежка автомобилна катастрофа. След трагичната си смърт на 86-годишна възраст Джон Наш ще бъде запомнен най-вече със своята теория за равновесието в некооперативните игри с множество участници.

Равновесието на Наш е оптималната стратегия в игра, включваща двама или повече участници. Резултатът от ситуация, завършваща в равновесна точка от този тип, е винаги благоприятен за всички играчи.

Нека си представим, че наблюдаваме игра с например двама участници. Логично е играч № 1 да взема решение как да действа, базирано на предполагаемото поведение на играч № 2. В същото време вторият участник съобразява действията си с това, което се очаква първият да направи в процеса на играта. В ситуация, развиваща се по този начин, равновесието на Наш е неизбежно. С други думи, ако по време на дадена игра един от участниците промени първоначалната си стратегия, а останалите продължат да следват своите стратегии без да последва подобрение за когото и да е от играчите, налице е пример за равновесие на Наш.

Игри, завършващи с равновесие на Наш, обикновено се представят графично чрез таблици, например такива, направени чрез програмата „Excel". Във всяка от клетките на една такава таблица първото число представя предполагаемата печалба на играч № 1, а второто показва очакваната печалба на играч № 2. С цел по-интересното публично представяне на практически пример за равновесие на Наш, е възможна презентация, включваща анимация, изработена чрез програмата Adobe Flash.

За да проверим верността на теорията на Наш, съставяме собствена ситуация, която разработваме чрез таблици. Примерната игра, която предстои да бъде разгледана, е озаглавена „Рали състезатели". Представяме си обстоятелства, при които двама автомобилни състезатели се сливат в отбор. Предстои им да си закупят нови коли, като предварително са се уговорили да си делят разходите. Всеки от тях индивидуално разполага със 100 000 лв. В Showroom-а те наблюдават две коли – червена и жълта, за да направят избор.

Вариант № 1: Двамата състезатели вече са избрали колите си. Русият е избрал червената по-евтина кола, а чернокосият – жълтата. Тъй като жълтата кола с цена 80 000 лв. е по-скъпа, това автоматично означава, че е и по-мощна от червената с цена 50 000 лв. Но понеже двамата състезатели си делят разходите, всеки ще заплати

$$0{,}5.(80\,000 + 50\,000) = 0{,}5.130\,000 = 65\,000 \text{ лв.}$$

Печалбата за всеки играч се изчислява, като от цената на колата, която е получил, извадим платената от участника сума. Русият състезател се оказва на загуба, докато чернокосият е на печалба, тъй като при него имаме 80 000 – 65 000 = 15 000 лв. Така русият играч се оказва в по-неизгодно положение – заплатил е същата сума като съотборника си за по-малко мощна кола.

Рус състезател		Чернокос състезател	
Червена кола	Жълта кола	Червена кола	Жълта кола
+	–	–	+
– 15 000 лв.	–	–	+ 15 000 лв.

Вариант № 2: Този вариант е аналогичен на вариант № 1, но ролите са разменени – русият е избрал жълтата, а чернокосият – червената кола. Отново няма равновесие между двамата – за единият (чернокосия) ситуацията е по-неблагоприятна.

Рус състезател		Чернокос състезател	
Червена кола	Жълта кола	Червена кола	Жълта кола
–	+	+	–
–	+ 15 000 лв.	– 15 000 лв.	–

Вариант № 3: И двамата са избрали червена по-евтина кола. Всеки от тях е платил по 50 000 лв., за да получи кола на стойност 50 000 лв., следователно печалбата и за двамата е 0 лв. Тук наблюдаваме равновесие на Наш – промяната в действията на който и да е от двамата състезатели ще ги постави отново в една от ситуациите, представени във варианти № 1 и№ 2, като положението за тях няма да се подобри.

Рус състезател		Чернокос състезател	
Червена кола	Жълта кола	Червена кола	Жълта кола
+	–	+	–
0 лв.	–	0 лв.	–

<u>Вариант № 4:</u> В последния вариант и двамата състезатели са избрали жълта по-скъпа кола – отново имаме равновесие на Наш (80 000 – 80 000 = 0, отново). Всъщност от всички възможности тази е най-вероятно да се реализира, тъй като за всеки от състезателите, опитващ се да съобрази стратегията си с предполагаемите решения на другия, рискът е най-малък при избора на по-скъпата кола. Така вариантът за определения състезател е или да се окаже в по-изгодна позиция спрямо съотборника си, ако той избере по-евтината кола, или в случай, че изборът им на по-скъпа кола съвпадне, двамата ще са равнопоставени.

Рус състезател		Чернокос състезател	
Червена кола	Жълта кола	Червена кола	Жълта кола
–	+	–	+
–	0 лв.	–	0 лв.

Истинският въпрос, който трябва да си зададем, е: „Как всъщност може тази теория да бъде приложена на практика?".

Теорията на игрите и в частност равновесието на Наш намират широко приложение в множество области на човешкото познание и дейностите в сферите на ежедневната комуникация, спортните залагания, международния бизнес, политиката и правото, и т.н. Бизнес-сделките, които познаваме днес, са изцяло базирани на теорията на Джон Наш. Всеки ден конкуриращи се фирми, изложени на различни обстоятелства, сключват помежду си договори и споразумения, благоприятни за всички страни.

„Всички открития на Наш бяха изненадващи. Той умееше да изненадва хората", казва математикът Саймън Коен. Макар че през живота си Наш невинаги съумява да запази равновесие, на равновесието на Наш се крепи съвременната икономика.

"EQUILIBRIUM" IN JOHN NASH'S LIFE

Ljubomira Dimitrova, student 9th grade

Secondary school "Nikolay Katranov", Svishtov

Abstract. The author was awarded first place and special prize for the present paper, presented at the National round of the Competition MITE (Methodology and Information Technologies in Education), held in VUZF in February 2017. In April-May 2017 the author was awarded silver medal for the same paper presented at the International round of the Competition MITE in Moscow, Russia. The teacher Sonja Dimitrova is scientific adviser of the author.

M+ЗНАМЕНИТОСТИ

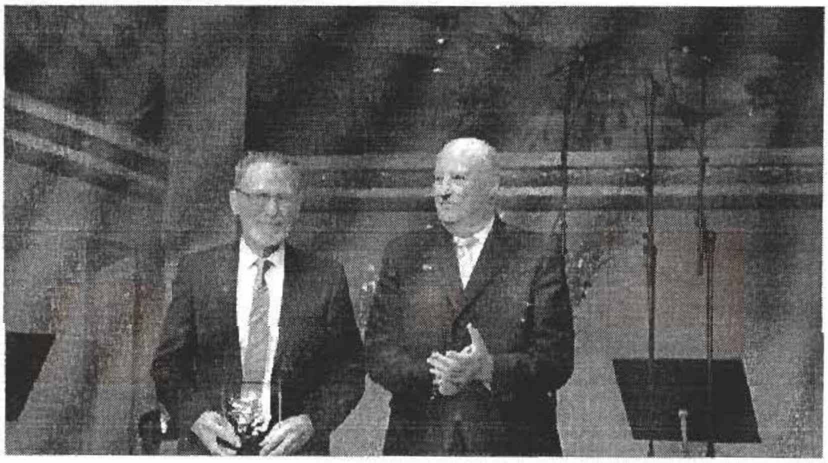
ИВ МЕЙЕР – НОСИТЕЛ НА АБЕЛОВАТА НАГРАДАТА ЗА 2017 ГОДИНА

проф. Сава Гроздев, доц. Веселин Ненков

Норвежката академия на науката и изкуствата реши да присъди Абеловата награда за 2017 г. на 77-годишния французин Ив Мейер от Екол Нормал Супериор, Париж-Сакле за „неговата централна роля в развитието на математическата теория на уейвлетите". Съобщението беше направено на 21 март 2017 г. от президента на академията Ole M. Sejersted. Следвайки традицията на Нобеловите премии, организаторите информираха лауреата по телефона сутринта в деня на официалното съобщение.

Ив Мейер е видимият лидер на съвременното развитие на теорията на уейвлетите, която се намира на границата на математиката, информационните технологии и компютърната наука. Уейвлетите имат огромно значение за приложнията в числения хармоничен анализ, компресирането на данни, намаляването на шума, образната диагностика в медицината, архивирането, цифровото кино, деконволюцията на снимките с телескоп и най-последните улавяния на гравитационни вълни, образувани от сблъсъка на две черни дупки.

Наградата беше връчена на 23 май 2017 г. в Осло от Негово Величество Краля на Норвегия Харалд V.



Ив Мейер и Харалд V

Наградата на името на норвежкия математик Абел се връчва ежегодно от 2003 г. насам за математически резултати с изключителна дълбочина и значение. Паричният ѝ израз е 6 млн норвежки крони (около 675 хил. евро). Носителят се определя въз основа на рекомендация на т. нар. Абелов комитет, който включва петима международно признати математици. Настоящи членове на този комитет са: John Rognes от Университета в Осло (председател), Marta Sanz-Solé, Luigi Ambrosio, Marie-France Vignéras и Ben J. Green. Наградата и съпътстващите мероприятия се финансират от норвежкото правителство.

Изключителният норвежки математик Нилс Хенрик Абел е роден на 5 август 1802 г. След смъртта си, само на 26-годишна възраст, той оставя огромно количество изследвания, включително първото доказателство на общата биномна теорема, формулирана от Нютон и Ойлер. Проблемът за неразрешимостта в радикали на общото алгебрично уравнение от пета степен е с 250-годишна история и доказателството принадлежи именно на Абел.

Тазгодишният носител на наградата Ив Мейер е роден на 19 юли 1939 г. в семейство с френска националност и е израснал в Тунис на Северноафриканското крайбрежие. През 1957 г. той постъпва в световно известното Екол Нормал Супериор на ул. „Улм" в Париж, класирайки се на първо място на приемния изпит. След завършване на висше образование Мейер отбива военната си служба като учител във военно училище. През 1966 г. защитава PhD дисертация в Университета в Страсбург. В периода 1966–1980 г. е професор по математика в Университета Париж-Юг, а след това в Екол Политекник (1980–1986) и в Университета Париж-Дофен (1986–1995). През 1995 г. се премества в Екол Нормал Супериор в Париж-Сакле. През 2008 г. излиза формално в пенсия, но остава на работа като асоцииран член в Научноизследователския център по математика и нейните приложения (CMLA) в Сакле. Ив Мейер е член на Френската академия на науките от 1993 г. През 1994 г. е избран за чуждестранен почетен член на Американската академия на изкуствата и науките, а през 2014 г. и за чуждестранен асоцииран член на Американската национална академия на науките. Той е член на Американското математическо дружество от 2012 г. Бил е поканен докладчик на международните математически конгреси в Ница през 1970 г., Варшава през 1983 г. и Киото през 1990 г. Бил е поканен докладчик и на Международния конгрес по физика в Суонси през 1988 г. Между престижните награди на Ив Мейер са „Салем" през 1970 г. и „Гаус" през 2010 г. Съгласно съвместно решение на Международния математически съюз (IMU) и Германското математическо дружество, наградата „Гаус" му е присъдена за постижения в областта на математиката и приложенията извън тази област.

Ив Мейер

„Не са много примерите на математически открития с директно значимо влияние върху обществото", казва Жан-Мишел Морел, който е математик-приложник и е колега на Ив Мейер в Екол Нормал Супериор, Париж-Сакле. Базираните на уейвлети компютърни алгоритми са сред стандартните инструменти, с помощта на които учените проследяват, анализират и съхраняват информацията. В областта на медицината диагностицирането се ускорява благодарение на използването на уейвлети при магнитно резонансните образи, а в областта на забавленията чрез тях става възможно декодирането на филми с висока резолюция и създаването на файлове с използваеми размери. „След революцията на уейвлетите, авангардно ръководена от Мейер през 80-те години", учебниците по редица дисциплини се промениха радикално", продължава Морел. Уейвлетите са разширение на математическия инструментариум на Фуриеровия анализ, въведен от френския математик Жозеф Фурие в началото на 18 век. Фурие забелязал, че една сложна вълнова форма може да се разбие на по-прости синусоидални вълни. По този начин дадено количество информация, например музикална нота или сеизмичен сигнал, може да се представи в компактна форма с помощта на Фуриерова техника. „Въпреки елегантността си от математическа гледна точка, оригиналната формула на Фурие не се прилага лесно за голям брой видове данни", обяснява председателят на Абеловия комитет John Rognes. Фуриеровата техника е успешна за постоянни сигнали, като например за една непрекъсната нота, произведена от цигулка. Но тя не е ефективна при изчистване на данни от шумове и извличане на преходни сигнали, подобни на „цвърченето" при сблъсък на две черни дупки, уловено на 14 септември 2015 г.

от Лабораторията LIGO (това е лаборатория за откриване на гравитационни вълни, предсказани от Общата теория на относителността на А. Айнщайн; финансира се от Американската национална фондация за наука и се обслужва от Калифорнийския институт за технологии Caltech и Масачузетския институт за технологии MIT).

Работите на Ив Мейер имат огромно въздействие върху начина, по който използваме и анализираме данни. В началото на 19 век учените разработиха алгоритми, с които успяха да приложат Фуриеровия анализ в задачи от практиката. Получиха се интересни резултати в сеизмологията. През 1981 г. френският геофизик Жан Морле от CNRS в Марсилия откри вълнови форми, които могат да заместват крайновременни синусиодални вълни. Формите бяха наречени ондолети (на френски). Това се именно уейвлетите (в английски превод). Преди обаче Мейер да започне да се занимава с изследвания в тази област наличният инструментариум не беше в състояние да използва пълните възможности на Фуриеровата теория. През 1982 г. в Екол Политекник, където е на работа по това време, Ив Мейер изчаква да се освободи ксерокса и случайно попада на уйевлетите на Морле. Негов колега копирал статия на Морле и между двамата се завързал разговор. Мейер, учен в областта на функционалния анализ, толкова се запленил от видяното във въпросната статия, че веднага взел влака за Марсилия, за да срещне с Морле и неговите сътрудници. Още същата нощ решил да смени областта на математическите си занимания. „Беше като приказка", казва Мейер в едно свое интервю през 2011 г. „Веднага почувствах, че най-накрая съм открил своя дом."

Около 1986 г. Мейер успява да конструира първото множество уейвлети, което е равносилно по мощност на Фуриеровите вълни. През следващите години, вече в Университета Париж-Дофен, Мейер е централна фигура в мрежа от математици, инженери, физици и компютърни специалисти, които „бълвали" нови резултати всяка седмица. „Той комуникираше с хора, които дори не говореха на един и същ математически език", казва Морел за него. „Всички тези хора даваха своя принос за общото дело." И добавя: „Роди се една красива, чиста, обща теория, която включва и подобрява Фуриеровия анализ, чувствително увеличавайки неговата практическа приложимост." Резултатите на Мейер показват, че техниката за проследяване на сигнали може да се използва и за компресиране на данни. Силното му желание да пресича граници между различни дисциплини се оформя още в детските му години в колониален Тунис, където прекарва детството си и постепенно стига до идеята да пресича други граници, тези на етническите различия.

Хората, които познават Мейер, го описват като щедър и справедлив. Морел споделя за него: „Той води живот на аскет, разделен между офиса и дома, където живее със съпругата си. Мейер е най-желаната, най-наивната и най-скромната личност." Наистина, научавайки за наградата си, Мейер казва: „Едновременно съм щастлив, изумен и се чувствам виновен." „Резултатите на Мейер за уейвлетите преобръщат областта на сигналната обработка", споделя Теренс Тао от Университета в Калифорния, Лос Анжелис, който пръв съобщава на Мейер по телефона за присъдената му награда сутринта в деня на нейното обявяване. „Самият аз съм срещал Майер само няколко пъти, но няма съмнение, че да се разговаря с него е доста занимателно. Той притежава заразителна любов и ентусиазъм към математиката", продължава Тао.

Както беше вече отбелязано, Мейер попада на уйвлетите случайно. След като внася нови идеи в хармоничния анализ през 70-те години на миналия век и получава важни резултати в областта, наречена Операторна теория на Кардерон-Зигмунд, Мейер прави първите стъпки към уейвлетите в средата на 80-те години. Изследванията му в операторната теория на Калдерон-Зигмунд му помагат да стигане до идеята за първия ортонормален базис от уейвлети: система от преведени и разширени варианти на т. нар. „уейвлет-майка". След като локализирането им е определено еднозначно по отношение на осите x, y и z, звуковите сигнали или сигналите-образи мога да се представят чрез спецификация в ортонормален базис на амплитудата на всяко „уейевлет-дете". По-късно Мейер и негов колега разработват теория, която позволява систематичното създаване на базисни уейвлети и трансформации на уейвлети, специализирани за конкретно приложение. Понастоящем трансформациите на уейвлети се използват навсякъде – от компресиране на JPEG 2000 до обработка на гравитационни сигнали, уловени от LIGO при сблъсък на черни дупки.

Ив Мейер има приноси и към математиката на квазикристалите и теорията на числата. Той е изследвал и уравненията на Навие-Стокс. Понастоящем Мейер пътува из цяла Франция от департамент по математика в даден университет до друг департамент. „Пътувам, защото не мога да се предпазя от пътуванията", казва той в интервюто си от 2011 г. И отново си спомня за годините, прекарани в Тунис. Спомня си за кратката кариера на учител и за опита, придобит като такъв, който моделира целия му живот. Чувства се виновен, че е бил само той винаги прав, докато децата – почти винаги погрешни. „Предпочитам да съм в ролята на ученик", казва Мейер. „Да правиш научни изследвания означава да си невежа повечето време и често да допускаш грешки, които аз критикувам, проверявайки домашните работи на моите ученици." Въпреки всичко, кариерата на Мейер е белязана с интелектуално и географско разнообразие, географско в смисъл, че променя на няколко пъти работното си място. Той искрено вярва, че математиката идва отвътре. „Трябва да дълбаеш надълбоко в самия себе си", казва Мейер в автобиографията си, която изпраща на Норвежката академия на науката и изкуствата. „Човек трябва да вярва, че притежава съкровище, което е дълбоко скрито в неговия разум, съкровище, което трябва да бъде открито."

Всяка година през м. май се присъжда още една награда, която е свързана с Абел. Това е наградата Holmboe на името на Bernt Michael Holmboe (1795 – 1850), който е бил учител по математика на Н. Х. Абел. Holmboe е известен и с това, че е автор на учебник по математика в два тома за средното училище и дискусията във връзка с този учебник в началото на 19 век е първото обществено обсъждане на учебници. Наградата Holmboe се връчва на учител по математика с постижения в областта на математическото образование.

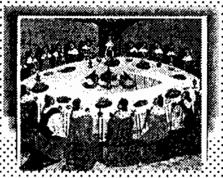
ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., В. Ненков. Новият Абелов лауреат. *Математика плюс, (22)* 2, 2014, 67 – 72.
2. Гроздев, С., В. Ненков. Абеловият лауреат за 2015 година. *Математика плюс, (23)* 2, 2015.
3. Гроздев, С., В. Ненков. Наградата на името на Н. Х. Абел за 2016 година. *Математика плюс, (24)* 3, 2016, 63 – 72.

YVES MEYER – THE ABEL PRIZE WINNER FOR 2017

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

Abstract. The paper is dedicated to one of the most eagerly awaited by the mathematical world annual event of Abel prize awarding. The 2017 winner Yves Meyer is presented with some facts from his biography. Main results of the winner are presented too.



М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

КВАДРАТНИ ПАРАМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА II ЧАСТ

Христо Лесов, гр. Казанлък

1. Да се намерят стойностите на реалния параметър d, за които числата от интервала:

а) $[0;1]$ са решения на неравенството $x^2 - x + d \leq 0$;

б) $(0;1)$ са решения на неравенството $x^2 - dx + 1 < 0$.

2. Да се намерят целите стойности на параметъра k, за които неравенството $2x^2 + (2k+9)x + 2k^2 + 3k < 0$ е изпълнено за всяко число от интервала $[-2;-1]$.

3. Да се намерят целите стойности на параметъра n, за които абсолютната стойност на всяко решение на неравенството $nx^2 + (1-n^2)x - n \geq 0$ е не по-голяма от 2.

4. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които всяко решение на неравенството $x^2 - 3x + 2 < 0$ е решение и на неравенството $mx^2 - (3m+1)x + 3 > 0$.

5. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които всяко решение на неравенството $2x^2 + (m+7)x + 5m + 1 < 0$ е решение и на неравенството $x^2 + 4x + 3 < 0$.

6. Да се намерят целите стойности на параметъра k, за които всяко решение на неравенството $x - 4k - 1 > 0$ е решение и на неравенството $x^2 - 4kx - 15k + 4 > 0$.

7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които множеството от решенията на неравенството:

а) $x^2 + ax - 2 < 0$ е интервал с дължина 3;

б) $4x(a-x) - 5(2a-5) > 0$ е интервал с дължина 2.

8. Да се намерят стойностите на реалния параметър b, за които неравенството $bx^2 - 3x + 2 < 0$ има решения и множеството от решенията му е интервал с дължина, по-малка от 1.

9. Да се намерят всички стойности на реалния параметър c, за които множеството от решенията на неравенството $cz^2 - (2c+1)z - 1 \leq 0$ съдържа точно три цели числа.

10. Да се намерят всички стойности на реалния параметър m, за които неравенството $mx^2 + 8(m-1)x + 7m - 16 \leq 0$ има най-много шест решения, които са цели числа и едното от тях е 2.

Отговори, упътвания и кратки решения

1. а) Ще използваме твърдението: Числата от интервала $[p;q]$ са решения на неравенството $f(x)=ax^2+bx+c\le 0$ при $a>0$ тогава и само тогава, когато $f(p)\le 0$ и $f(q)\le 0$. При $p=0$, $q=1$ и $f(x)=x^2-x+d$ имаме $f(0)=f(1)=d\le 0$.

б) Ще използваме твърдението: Числата от интервала $(p;q)$ са решения на неравенството $f(x)=ax^2+bx+c<0$ при $a>0$ тогава и само тогава, когато $f(p)\le 0$ и $f(q)\le 0$. При $p=1$, $q=2$ и $f(x)=x^2-dx+1$ имаме $f(1)=2-d\le 0$ и $f(2)=5-2d\le 0$, откъдето $d\ge 2$ и $d\ge 2,5$. Следователно търсените стойности са $d\ge 2,5$.

2. Както в 1., в сила е твърдението: Всяко число от интервала $[p;q]$ е решение на неравенството $f(x)=ax^2+bx+c<0$ при $a>0$ тогава и само тогава, когато $f(p)<0$ и $f(q)<0$. При $p=-2$, $q=-1$ и имаме

$$f(-2)=8-2(2k+9)+2k^2+3k=2k^2-k-10<0 \text{ и}$$

$$f(-1)=2-(2k+9)+2k^2+3k=2k^2+k-7<0.$$

Съответните решения са $-2<k<2,5$ и $\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{57}\right)<k<\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{57}\right)$. Тъй като $7<\sqrt{57}<8$, то $-2,25<\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{57}\right)<-2$ и $1,5<\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{57}\right)<2$. Оттук получаваме общото решение $-2<k<\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{57}\right)$ и следователно търсените стойности на k са -1, 0 и 1.

3. При $n=0$ даденото неравенство е $x\ge 0$ и не е изпълнено условието на задачата. При $n\ne 0$ неравенството се представя във вида $n(x-n)\left(x+\frac{1}{n}\right)\ge 0$. При $n>0$ решенията на последното са обединение на два безкрайни числови интервала и не удовлетворяват условието $|x|\le 2$. При $n<0$ даденото неравенство е равносилно на $(x-n)\left(x+\frac{1}{n}\right)\le 0$, като $n<-\frac{1}{n}$ и решенията са $n\le x\le -\frac{1}{n}$. Следователно $n\ge -2$ и $-\frac{1}{n}\le 2$, откъдето $-2\le n\le -\frac{1}{2}$, а търсените цели стойности са -2 и -1.

4. Решенията на неравенството $x^2-3x+2<0$ са $1<x<2$. При $m=0$ второто неравенство има вида $x<3$ и съдържа интервала $(1;2)$ таса, че е изпълнено условието на задачата. При $m\ne 0$ второто неравенство се представя във вида $m(x-3)\left(x-\frac{1}{m}\right)>0$. При $m<0$ то е $(x-3)\left(x-\frac{1}{m}\right)<0$, като $\frac{1}{m}<0<3$. Решенията му са $\frac{1}{m}<x<3$ и съдържат интервала $(1;2)$. При $m>0$ имаме $(x-3)\left(x-\frac{1}{m}\right)>0$ и за неговите решения има следните възможности:

1) $\frac{1}{m}=3$, т.е. $m=\frac{1}{3}$. Тогава $(x-3)^2>0$ е в сила за всяко $x\neq 3$, а и за $1<x<2$;

2) $\frac{1}{m}>3$, т.е. $m<\frac{1}{3}$. Тогава решенията са $x<3$ или $x>\frac{1}{m}$ и включват числата от $(1;2)$;

3) $\frac{1}{m}<3$, т.е. $m>\frac{1}{3}$. Тогава решенията са $x<\frac{1}{m}$ или $x>3$ и съдържат $(1;2)$ само ако $\frac{1}{m}\geq 2$, т.е. $m\leq\frac{1}{2}$. Отговорът на задачата е $m\leq\frac{1}{2}$.

5. Решенията на неравенството $x^2+4x+3<0$ са $-3<x<-1$. Решенията на първото неравенство зависят от дискриминантата D на квадратния тричлен $f(x)=2x^2+(m+7)x+5m+1$. Ако $D\leq 0$, то $f(x)\geq 0$ за всяко x, а за да има решения $f(x)<0$, е необходимо $D=(m+7)^2-8(5m+1)>0$, т.е. $m^2-26m+41>0$, откъдето $m<13-\sqrt{128}$ или $m>13+\sqrt{128}$. Тогава решенията на $f(x)<0$ са $x_2<x<x_1$, където $x_{1,2}=\frac{-(m+7)\pm\sqrt{D}}{4}$ и следва, че условието на задачата е изпълнено, когато $x_1\leq -1$ и $x_2\geq -3$, т.е. $\frac{-(m+7)+\sqrt{D}}{4}\leq -1$ и $\frac{-(m+7)-\sqrt{D}}{4}\geq -3$. Тези две неравенства се преобразуват до $\sqrt{D}\leq m+3$ и $\sqrt{D}\leq 5-m$. Тъй като $\sqrt{D}>0$, трябва $m+3>0$ и $5-m>0$, т.е. $-3<m<5$ и стигаме до неравенствата $D\leq(m+3)^2$ и $D\leq(5-m)^2$ или $m^2-26m+41\leq m^2+6m+9$ и $m^2-26m+41\leq 25-10m+m^2$, които имат общо решение $m\geq 1$. Отчитайки получените резултати, окончателно намираме $1\leq m<13-8\sqrt{2}$.

6. Дадените неравенства се записват така: $x-2k>2k+1$ и $(x-2k)^2>(k+4)(4k-1)$. След полагане $x-2k=y$ те приемат вида $y>2k+1$ и $y^2>(k+4)(4k-1)$. При $(k+4)(4k-1)<0$, т.е. $k\leq -4$ или $k\geq\frac{1}{4}$ решенията на второто неравенство са $y<-\sqrt{(k+4)(4k-1)}$ или $y>\sqrt{(k+4)(4k-1)}$. За да се съдържат в тях решенията на $y>2k+1$, трябва $2k+1\geq\sqrt{(k+4)(4k-1)}$. При $k\leq -4$ това не е в сила, защото $2k+1<0$. При $k\geq\frac{1}{4}$ имаме $2k+1>0$ и след повдигане в квадрат получаваме $(2k+1)^2\geq 4k^2+15k-4$ или $11k\leq 5$, т.е. $k\leq\frac{5}{11}$. След обединяване на резултатите намираме $-4<k\leq\frac{5}{11}$ и търсените цели стойности за k са: -3, -2, -1 и 0.

7. а) Дискриминантата на квадратния тричлен x^2+ax-2 е $D=a^2+8>0$ за всяко реално a и уравнението $x^2+ax-2=0$ има два различни корена $x_1>x_2$. Множеството от решенията на даденото неравенство е интервала $(x_2;x_1)$, чиято дължина е $x_1-x_2=3$ по условие. Тъй като $x_1-x_2=\sqrt{D}$, имаме $\sqrt{D}=3$ или $a^2+8=9$, откъдето намираме $a=\pm 1$.

б) Даденото неравенство се представя във вида $(2x-5)(2x+5-2a)<0$. Множеството от решенията му е отворен интервал с краища $\frac{5}{2}$ и $a-\frac{5}{2}$, чиято дължина е $|a-5|=2$ по условие. Оттук $a-5=2$ или $a-5=-2$ и следователно $a=7$ и $a=3$.

8. При $b=0$ неравенството е $-3x+2<0$, т.е. $x>\frac{2}{3}$ и условието на задачата не е изпълнено. При $b\neq 0$ дискриминантата на квадратния тричлен bx^2-3x+2 е $D=9-8b$. Ако $D\leq 0$, т.е. $b\geq\frac{9}{8}$, даденото неравенство няма решение. При $b<\frac{9}{8}$ имаме $D>0$ и уравнението $bx^2-3x+2=0$ има два различни корена $x_1>x_2$. При $b<0$ множеството от решенията на неравенството е обединение на два безкрайни интервала и пак не е изпълнено условието на задачата. При $0<b<\frac{9}{8}$ решенията образуват интервала $(x_2;x_1)$ и по условие $x_1-x_2<1$ или $\sqrt{D}<1$, т.е. $D=9-8b<1$, откъдето $b>1$. Отговорът на задачата е $1<b<\frac{9}{8}$.

9. При $c\leq 0$ даденото неравенство има безброй много цели решения. Разглеждаме $g(z)=cz^2-(2c+1)z-1$ при $c>0$ и дискриминантата $D=(2c+1)^2+4c>0$. Тогава уравнението $g(z)=0$ има два различни корена $z_1>z_2$ и множеството от решенията на неравенството $g(z)\leq 0$ е интервалът $[z_2;z_1]$. Тъй като $g(0)=-1<0$, то нулата е решение на $g(z)<0$. А понеже $g(-1)=3c>0$, следва, че -1 не е решение на даденото неравенство. Това показва, че множеството от решенията не съдържа отрицателни цели числа. Но $g(1)=-c-2<0$ и $g(2)=-3<0$, откъдето следва, че целите числа 0, 1 и 2 удовлетворяват условието на задачата. За да няма други цели решения, трябва $z_1<3$ или $g(3)=3c-4>0$, т.е $c>\frac{4}{3}$ и това е отговорът на задачата.

10. При $m=0$ даденото неравенство е $-8x-16\leq 0$, т.е. $x\geq -2$ и има безброй много цели решения. При $m\neq 0$ разглеждаме квадратния тричлен $f(x)=mx^2+8(m-1)x+7m-16$ и неговата дискриминанта $D=16(m-1)^2-m(7m-16)=9m^2-16m+16>0$. Уравнението $f(x)=0$ има два различни корена $x_1>x_2$ и при $m<0$ множеството от решенията на неравенството $f(x)\leq 0$ е обединение на безкрайните интервали $(-\infty;x_2]$ и $[x_1;\infty)$, които съдържат безброй много цели числа. При $m>0$ решенията на $f(x)\leq 0$ образуват интервала $[x_2;x_1]$, който по условие съдържа числото 2. Следователно $f(2)\leq 0$, т.е. $4m+16(m-1)+7m-16=27m-32\leq 0$ и оттук $m\leq\frac{32}{27}$. Но

$$f(-1)=m-8(m-1)+7m-16=-8<0,$$

което означава, че числото -1 е винаги решение на $f(x)<0$. От $f(-2)=4m-16(m-1)+7m-16=-5m<0$ при $m>0$ следва, че и числото -2 е решение на $f(x)<0$. Освен това при Следователно при $0<m\le\frac{32}{7}$ имаме

$$f(0)=7m-16\le 7\cdot\frac{32}{27}-16=-\frac{208}{7}<0 \text{ и}$$

$$f(1)=m+8(m-1)+7m-16=16m-24\le 16\cdot\frac{32}{27}-24=-\frac{136}{27}<0.$$

Следователно числата 0 и 1 са също решения на $f(x)<0$. Заключаваме, че при $0<m\le\frac{32}{27}$ неравенството $f(x)\le 0$ има поне пет цели решения. Това са числата 2, 1, 0, -1 и -2. Тъй като $f(3)=9m+24(m-1)+7m-16=40(m-1)$ и $f(-3)=9m-24(m-1)+7m-16=-8(m-1)$, разглеждаме следните случаи:

Случай 1. $m=1$. Имаме $f(3)=f(-3)=0$ и неравенството $f(x)\le 0$ има седем цели решения.

Случай 2. $0<m<1$. Имаме $f(3)<0$, $f(-3)>0$ и

$$f(-4)=16m-32(m-1)+7m-16=16-9m>0.$$

За да не станат целите решения повече от шест, трябва

$$f(4)=16m+32(m-1)+7m-16=55m-48>0.$$

Оттук следва, че при $\frac{48}{55}<m<1$ даденото неравенство има шест цели решения: 3, 2, 1, 0, -1 и -2.

Случай 3. $1<m\le\frac{32}{27}$. Имаме $f(3)>0$, $f(-3)<0$, $f(-4)>0$ и $f(4)>0$. Целите решения на даденото неравенство са шестте числа: 2, 1, 0, -1, -2 и -3.

ЛИТЕРАТУРА

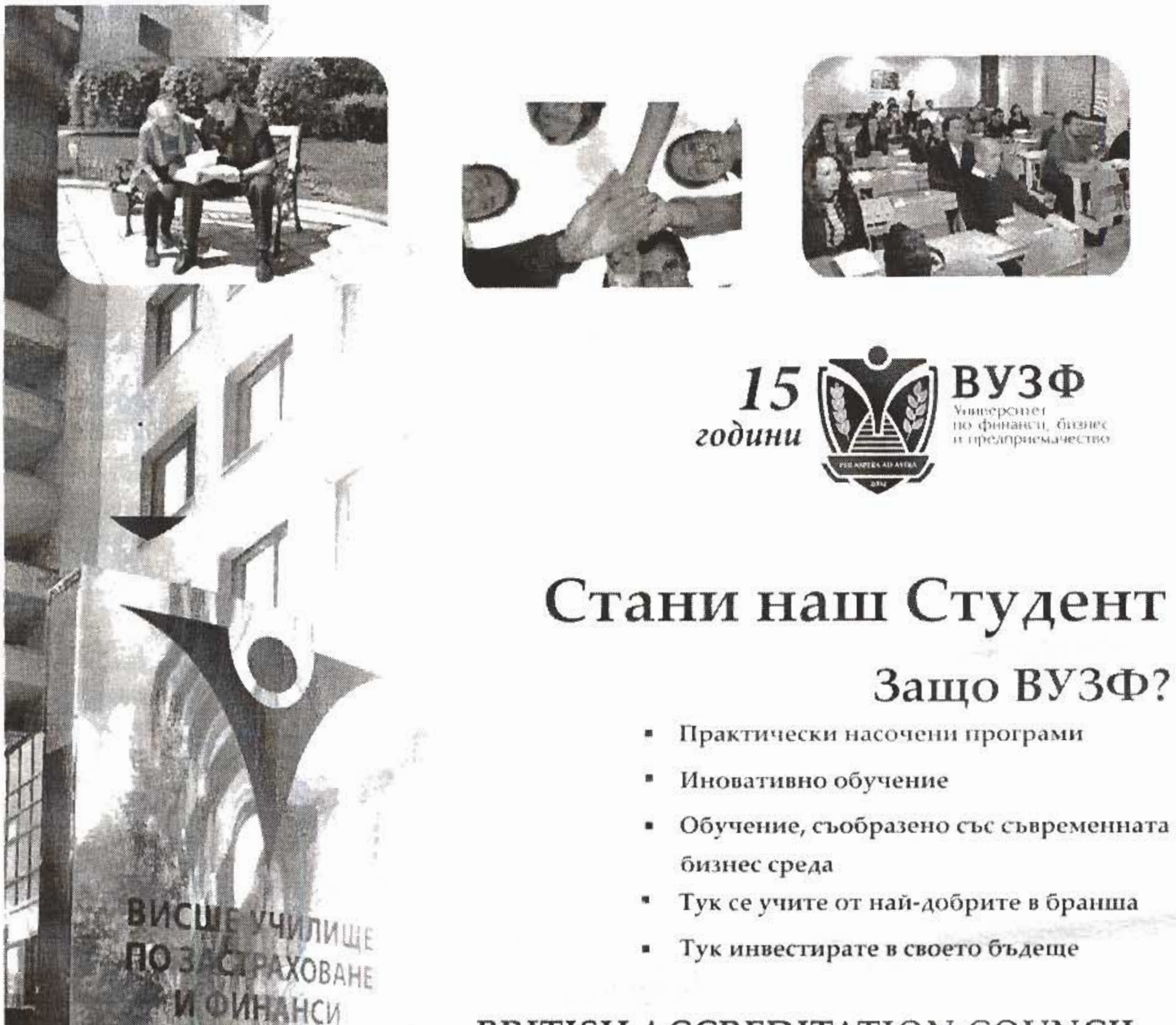
1. Becheanu, M., B. Enescu (2002). *Inegalitati elementare*. Bucurest: Gil. (973-9238-53-X), 156 pages.

2. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

SECOND ORDER ALGEBRAIC EQUATIONS WITH PARAMETERS. PART II

Hristo Lessov

Abstract. Second order algebraic equations with parameters are considered in the paper. Different cases are discussed. The proposed problems are with methodological solutions and are suitable for 9th and 10th grade students.


15 години
ВУЗФ
Университет по финанси, бизнес и предприемачество
Стани наш Студент
Защо ВУЗФ?
- Практически насочени програми
- Иновативно обучение
- Обучение, съобразено със съвременната бизнес среда
- Тук се учите от най-добрите в бранша
- Тук инвестирате в своето бъдеще
BRITISH ACCREDITATION COUNCIL
Единственият български университет с
БРИТАНСКА АКРЕДИТАЦИЯ
ВИСШЕ УЧИЛИЩЕ
И ФИНАНСИ
ТУК ПРЕПОДАВА БИЗНЕСЪТ
Прием:
2016-2017
www.vuzf.bg

р и т у р к а   п р и т у р к а

МАТЕМАТИКА плюс

КАНДИДАТ-СТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ ПО МАТЕМАТИКА 2016 г.

Сава Гроздев   Цеца Байчева

Математика плюс бр. 2, 2017 г.

в	в	а	д	в	г	б	д	а	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
в	г	б	д	д	б	г	б	г	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=1$	**22.** $x\in(0;1]$	**23.** $x=1$	**24.** НМС=-7; НГС=-4	**25.** 1102,5 лв
26. 100	**27.** $\frac{25}{42}$	**28.** $32\pi cm^2$	**29.** $\frac{a\sin\alpha\sin\varphi}{2\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\varphi}}$	**30.** $x=\frac{\pi}{3}$

Технически университет - София
4 юли 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
б	б	б	в	а	а	д	г	б	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
б	д	б	в	а	в	д	в	д	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=0$ и $x=2$	**22.** $6+2\sqrt{3}$	**23.** $x\in\left[\frac{9}{5};2\right)\cup\left(2;\frac{7}{3}\right]$	**24.** $\{1;3;4;5;6\}$	**25.** $(4;1)$, $(1;4)$
26. $\frac{1}{15}$	**27.** $4,\ \frac{\pi}{4}$	**28.** $\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\}$	**29.** $\frac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$	**30.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=-2$	**22.** $x\in(5;\infty)$	**23.** -12	**24.** 0	**25.** $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}$
26. $\frac{3}{4}$	**27.** $\frac{8}{3}cm$	**28.** $25cm$	**29.** $108cm^3$	**30.** $k\in(-2;3)$

Технически университет - София
16 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	в	в	в	а	б	г	б	б	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
г	д	а	г	д	а	б	а	б	г

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=-1$	**22.** 4	**23.** 1	**24.** $x=4$	**25.** 6
26. $x=\pi$	**27.** $2cm$	**28.** $\sqrt{5}cm$	**29.** $\frac{3}{2\cos\frac{\alpha}{2}}cm$	**30.** $a\in\left(0;\frac{1}{8}\right)$

Технически университет - София
23 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Математика второ равнище 20 март 2016 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $(x-3)(x-7)\sqrt{\frac{x-4}{x-5}}\le 0$.

Задача 2. В правоъгълния ΔABC ($BC>AC$), с прав ъгъл при върха C, радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е $r=6$, а радиусът на описаната около него окръжност е $R=\frac{39}{2}$. Да се намерят страните на триъгълника.

Задача 3. Нека $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ и $tg\alpha=-\frac{7}{24}$. Да се намери $tg\frac{\alpha}{2}$.

Задача 4. В трапеца $ABCD$, с основи $AB=3\sqrt{39}$ и $CD=\sqrt{39}$, ъглите при голямата основа са $\angle ABC=60^\circ$ и $\angle BAD=30^\circ$, а точката $E\in AD$. Да се намери дължината на отсечката BE, ако тя разполовява лицето на трапеца.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>1$.

Задача 6. В равнобедрения ΔABC, с бедра $AC=BC=13$, точката $M\in AB$ е такава, че $CM=5$. Да се намери основата на триъгълника, ако лицето му е възможно най-голямо.

Задача 7. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, със страна $AB=2$, точката $M\in BC$ е такава, че равнината α определена от точките A, D_1 и M разделя куба на две части, отношението на обемите на които е 17:7. Да се намери лицето на сечението на α и куба.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(x^2+2x+3-a)(a-|x-3|)=0$ има точно три различни решения.

Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Математика второ равнище 19юни 2016 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $(x^{2016}-1)|x|<0$.

Задача 2. В окръжност с радиус 1 е вписан триъгълник. Върховете му разделят окръжността на три дъги, чиито дължини се отнасят както 1:2:9. Да се намери лицето на триъгълника

Задача 3. Първият член a_1, седмият и седемнадесетият член на растяща аритметична прогресия са последователни членове на геометрична прогресия. Да се намери частното на геометричната пргресия и разликата на аритметичната прогресия, ако $a_1^2=9$.

Задача 4. Даден е равнобедрен ΔABC ($AC=BC$), за който $AB<AC$. Окръжност с радиус $R=10\sqrt{10}$ се допира до правата AB в точка A, минава през точка C и пресича страната BC във вътрешна точка M така, че $BM:MC=2:3$. Да се намери лицето на ΔABC.

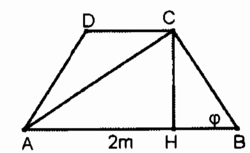
Задача 5. Да се реши неравенството $\sqrt{100-x^2}>x-2$.

Задача 6. Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната a. Да се намери дължината на най-късата отсеча, краищата на оято лежат върху контура на триъгълника и която разделя триъгълника на две равнолицеви части.

Задача 7. Основата на пирамида $EABCD$ е ромба $ABCD$, за който $BD=AB=AD=4$. Околният ръб ED е перпендикулярен на равнината на основата. Разстоянието от точката D до

б) Нека $f(\varphi)=\sin^2\varphi\sin 2\varphi=\dfrac{(1-\cos 2\varphi)\sin 2\varphi}{2}=$. $\dfrac{1}{2}\sin 2\varphi-\dfrac{1}{4}\sin 4\varphi$. Тогава $f'(\varphi)=\cos 2\varphi-\cos 4\varphi$ и $f''(\varphi)=-2\sin 2\varphi+4\sin 4\varphi$. От $f'(\varphi)=0$ получаваме $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Но $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)<0$, т.е. максималната стойност на обема се достига при $\varphi=60^0$

в) нека MP е височина в ΔADM. От ΔDOM следва $DM=\dfrac{m}{\cos\alpha}$. Тогава намираме



$$MP=\sqrt{MD^2-\frac{AD^2}{4}}=\frac{m}{\cos\alpha}\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}$$

Изразяваме обема на пирамидата $ADBM$ по два начина $V_{ADBM}=\dfrac{S_{ADB}.MO}{3}=\dfrac{S_{ADM}.d_B}{3}$, заместваме и получаваме $d_B=\dfrac{2m\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}}$.

Технически университет - София
2 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
г	г	д	г	в	б	д	а	б	б
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
б	а	д	в	г	а	д	а	б	б

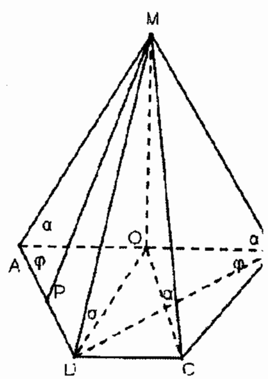
б) От $\dfrac{AO}{NO}=\dfrac{AB}{NP}=\dfrac{(k+1)a}{a-bk}$ следва $\dfrac{AN+NO}{NO}=\dfrac{(k+1)a}{a-bk}$. Тогава $\dfrac{AN}{NO}=\dfrac{(k+1)a}{a-bk}-1=\dfrac{(a+b)k}{a-bk}$.

в) Нека $OH=h$ е височина на трапеца през точката O. Използваме, че $\Delta ONP\sim\Delta OAB\sim\Delta OCD$ и получаваме последователно $\dfrac{OH_1}{OH}=\dfrac{NP}{a}$, $\dfrac{OT}{OH}=\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{OT+OH}{OH}=\dfrac{a+b}{b}$,

$OH=\dfrac{ah}{a+b}$, $OH_1=\dfrac{NP.OH}{a}=\dfrac{(a-bk)h}{(a+b)(k+1)}$,

$$\frac{S_{NPO}}{S_{ABCD}}=\frac{NP.OH_1}{(a+b)h}=\frac{(a-bk)OH_1}{(a+b)(k+1)h}=\frac{(a-bk)^2}{(a+b)^2(k+1)^2}.$$

Задача 8. а) От $\angle MAO=\angle MDO=\angle MCO=\angle MBO=\alpha$ следва $AO=DO=CO=BO=m$. Около основата може да се опише окръжност, следователно $ABCD$ е равнобедрен трапец. Нека CH е височина в ΔABC, т.е. в трапеца. От O среда на AB следва, че $\angle ACB=\angle ADB=90^0$. Тогава $AC=2m\sin\varphi$, $BC=2m\cos\varphi$ и $CH=2m\sin\varphi\cos\varphi=m\sin2\varphi$. Но $AH=\dfrac{AB+CD}{2}$ и от ΔACH получаваме $AH=2m\sin^2\varphi$. Тогава $S_{ABCD}=2m^2\sin^2\varphi\sin\varphi$. От ΔAMO следва $MO=mtg\alpha$. Намираме



$$V_{ABCDM}=\frac{S_{ABCD}.MO}{3}=2m^3tg\alpha\sin^2\varphi\sin2\varphi.$$

равнината BCE е 3. Да се намери големината на двустенния ъгъл φ между равнините BCE и $ABCD$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, при които уравнението $\left(x^2-(a+1)x+3(a-2)\right).\lg(2a-x-1)=0$ има поне един корен в интервала $[-1;2]$, а извън този интервал няма корени.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 27 март 2016 г.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайт в листа за отговори!

1. Най-голямото от посочените числа е:

А) 1,7 **Б)** $\sqrt[3]{5}$ **В)** $\sqrt[6]{26}$ **Г)** $\sqrt{3}$

2. Ако $a=3^{-1}$ и $b=-5$, то стойността на израза $\dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)$ е равна на:

А) $\dfrac{14}{5}$ **Б)** 3,5 **В)** $\dfrac{16}{5}$ **Г)** 5,3

3. Допустимите стойности на израза $\sqrt[4]{\dfrac{3-x}{(x-2)^2}}$ са:

А) $x\in(-\infty;3]$ **Б)** $x\in[2;3]$ **В)** $x\in(3;\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;2)\cup[2;3]$

4. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2-3x+2}{9-x^2}\le0$ са:

А) $x\in[-3;1]\cup[2;3]$ **Б)** $x\in(-\infty;3)\cup[1;2]\cup(3;\infty)$

В) $x\in(-3;1]\cup[2;3)$ **Г)** $x\in(-\infty;-3]\cup[1;2]\cup[3;\infty)$

5. Стойността на израза $\frac{\log_7 40}{\log_7 8}+\log_8 0,2$ е

А)-1 **Б)0** **В)128** **Г)1**

6. Броят на решенията на системата $\begin{vmatrix} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{vmatrix}$ е равен на:

А)0 **Б)1** **В)2** **Г)4**

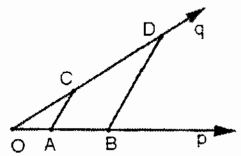
7. Ако $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ и $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$, то числата α и β са корени на уравнението:

А) $6t^2-3t-2=0$ Б) $2t^2-3t-6=0$ В) $6t^2+3t-2=0$ Г) $2t^2+3t-6=0$

8. Ако $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^2\alpha+2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ е равна на:

А)1 **Б)1,75** **В)-1.75** **Г)1,5**

9. Върху раменете на ъгъл $p^{\to}Oq^{\to}$ са взети съответно точките A, B, C и D, такива че $AC \parallel BD$, $OC=6$, $CD=10$ и $OB=12$. Дължините на отсечките OA и AB са съответно равни на:



А)4,5 и 7,5 **Б)3,5 и8,5** **В)4 и 8** **Г)5 и 7**

10. Ако основата и бедрото на равнобедрен триъгълник са съответно равни на 12 и 10, то радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е равен на:

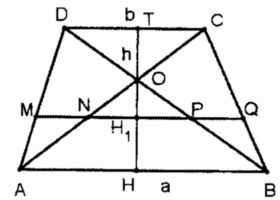
А)1 **Б)2** **В)3** **Г)4**

11. На чертежа е изобразена графиката на функцията:

б) даденото уравнение е еквивалентно на квадратното уравнение $\sqrt{2}.t^2-t-\sqrt{2}=0$ с корени $t_1=\sqrt{2}$ и $t_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. От $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ следва $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ и $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ намираме $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2l\pi$ и $x=\frac{11\pi}{6}+2n\pi$, където $k,l,n\in Z$.

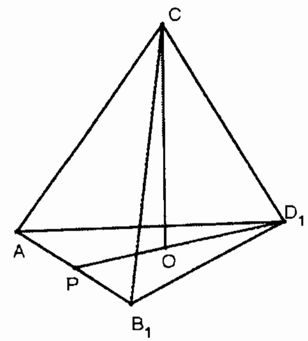
в) даденото неравенство е еквивалентно на $\sqrt{2}.t^2-t+a<0$ за $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$. Означаваме $g(t)=\sqrt{2}.t^2-t+a$ и получаваме $g(0)\le 0$ и $g\left(\sqrt{2}\right)\le 0$. Решение на системата е $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]$.

Задача 7. **а)** от $\frac{AM}{MD}=k$ следва $\frac{BQ}{QC}=\frac{AM}{MD}=k$. Нека $MD=x$ $AM=kx$. От теоремата на Талес следва $\frac{MN}{DC}=\frac{AM}{AD}$, т.е.



$MN=\frac{bk}{k+1}$ и аналогично $PQ=\frac{bk}{k+1}$. От $\frac{MP}{AB}=\frac{DM}{AD}$ намираме $MP=\frac{a}{k+1}$ и $NP=MP-MN=\frac{a-bk}{k+1}$.

$AB_1 = B_1D_1 = AD_1 = AC = CD_1 = CB_1 = b = a\sqrt{2}$. Разглеждаме пирамидата AB_1D_1C - правилен тетраедър и нека CO е нейната височина през C, т.е. CO е търсеното разстояние. Намираме $D_1O = \frac{2}{3}.\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ и от правоъгълния ΔCOD_1 по Питагоровата теорема получаваме $CO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

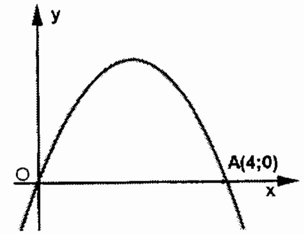


б) Да означим $\angle\left((AB_1D_1);(BCC_1B_1)\right) = \varphi$. Проектираме ортогонално ABD_1 върху равнината BCC_1B_1 и получаваме BB_1C_1. От $S_{AB_1D_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ и $S_{BB_1C_1} = \frac{a^2}{2}$ след като използваме формулата $S_{сечение}.\cos\varphi = S_{проекция}$, заместваме и намираме $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
13 юли 2016 г.

1	2	3	4	5
а	а	а	б	в

Задача 6. а) Полагаме $\sin x + \cos x = t$, повдигаме на втора степен и следва $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$, $1 + \sin 2x = t^2$, т.е. $\sin 2x = t^2 - 1$. Следователно $f(t(x)) = \sqrt{2}.t^2 - t + a$.



А) $f(x) = 4x + x^2$ Б) $f(x) = -4x + x^2$

В) $f(x) = -4x - x^2$ Г) $f(x) = 4x - x^2$

12. Ако редицата $\{b_n\}$, $n \in N$ е зададена с равенствата $b_1 = -3$, $b_n = b_{n-1} - 1$, то шестият и член е:

А)-6 **Б)-7** **В)-8** **Г)4**

13. Дадена е геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$, за която $a_8 = 1$ и $\frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$. Първият член на прогресията е:

А) $a_1 = 128$ **Б)** $a_1 = 128$ или $a_1 = -128$ **В)** $a_1 = 256$ **Г)** $a_1 = 256$ или $a_1 = -256$

14. Ако $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то за стойностите на x е изпълнено:

А) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, където $k \in \mathbf{Z}$

Б) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbf{Z}$

В) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, където $k \in \mathbf{Z}$

Г) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbf{Z}$

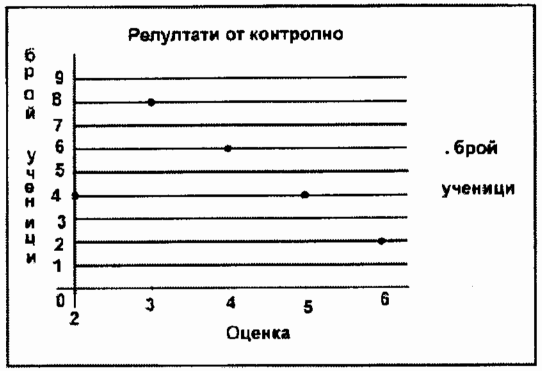
15. Вкрая на учебната година се оказало, че всички ученици от един клас са получили годишни оценки по математика –

Добър, Мн. Добър или *Отличен*, по български език и литература – *Среден, Добър, Мн. Добър* или *Отличен*, а по физическо възпитание и спорт - *Мн. Добър* или *Отличен*. Група ученици от този клас, разглеждайки бележниците си забелязали, че няма двама от групата, които да имат едни и същи оценки и по трите предмета. Колко най-много ученици има в тази група?

А)4 **Б)24** **В)3** **Г)12**

16. На диаграмата са дадени резултатите от контролно по математика.

Средното аритметично, модата и медианата са:



А) $3\frac{2}{3}, 3, 3\frac{1}{2}$

Б) $3\frac{1}{2}, 3, 3\frac{2}{3}$

В) $3\frac{1}{3}, 4, 3\frac{1}{2}$

Г) $3\frac{2}{3}, 3, 4$

17. Даден е ΔABC с ъгли 15°, 45° и 120°, който е вписан в окръжност с радиус $R = 19\sqrt{3}$. Дължината на най-голямата страна на ΔABC е равна на:

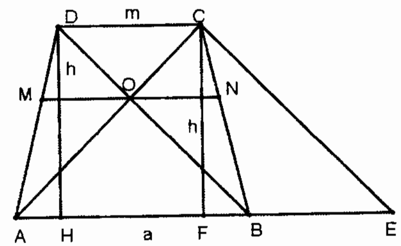
А) $19\sqrt{6}$ **Б)57** В) $38\sqrt{3}$ Г) $38\sqrt{2}$

18. Даден е ΔABC, за който страната $AB = 4$, медианата $AM = 3$ и $\angle AMB = 135^\circ$. Дължината на страната BC е равна на:

в) От формулите на Виет следва $x_1 + x_2 = 3$ и $x_1 x_2 = 1$. Тогава $B = 2^{x_1+x_2} - 1 + \lg(x_1 x_2) = 2^3 - 1 + \lg 1 = 7$.

Задача 7. а) Построяваме $CE \parallel BD$. Тогава $BECD$ е успоредник и $\angle ACE = 90^0$. Нека $DH = h$ и $CF = h$ са височини на трапеца, $AB = a$ и $BE = CD = m$. От правоъгълния равнобедрен ΔAEC намираме $h = \frac{AE}{2} = \frac{a+m}{2}$ и получаваме $S_{ABCD} = \frac{(a+m)h}{2} = h^2$

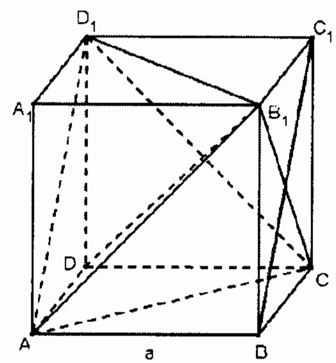
б) от $ABCD$ равнобдрен следва $AH = \frac{a-m}{2}$, а от питагорова теорема за ΔAHD получаваме $AD = \sqrt{2h^2 - 2mh + m^2}$.



в) Нека $AC \cap BD = O$. От $MN \parallel AB \parallel CD$ и теоремата на Талес намираме последователно $\frac{MO}{a} = \frac{DO}{DB}$, $\frac{DO}{OB} = \frac{m}{a}$, $\frac{OB+DO}{DO} = \frac{a+m}{m}$, $\frac{BD}{DO} = \frac{a+m}{m}$.

Следователно $\frac{MO}{a} = \frac{DO}{DB} = \frac{m}{a+m}$, т.е. $MO = \frac{am}{a+m}$. Използваме $a+m=h$ и намираме

$$MN = 2MO = \frac{2am}{a+m} = \frac{m(2h-m)}{h}.$$



Задача 8. а) от свойствата на куба и квадрата следва

б) От правоъгълния ΔMEO намираме $ME = \dfrac{r}{\cos\alpha} = \dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4\cos\alpha}$ и тогава $S_1 = S_{ABCD} + pME = \dfrac{a^2\sqrt{3}(\cos\alpha+1)}{4\cos\alpha}$.

в) използваме формулата $V = \dfrac{S_1 R}{3}$, където R е радиусът на вписаната в пирамидата сфера и намираме $R = \dfrac{3V}{S_1} = \dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)\cos\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
24 април 2016 г.

1	2	3	4	5
г	а	г	б	г

Задача 6. а) За да са отрицателни корените трябва да са изпълнени едновременно следните неравенства $D \geq 0$, $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 x_2 > 0$, т.е. $-3k^2 - 2k + 1 \geq 0$, $\dfrac{k-1}{k} < 0$ и 1>0. Решаваме и получаваме $k \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

б) От $|x_1 - x_2| \geq 0$ следва, че най-малката стойност на A ще е при $x_1 = x_2$, т.е. когато $D = 0$. Следователно $k_1 = -1$ или $k_2 = \dfrac{1}{3}$.

А) $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{23}-3\right)$ Б) $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(3+\sqrt{23}\right)$

В) $BC = \sqrt{2}\left(\sqrt{23}-3\right)$ Г) $BC = \sqrt{2}\left(3+\sqrt{23}\right)$

19. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), който е описан около окръжност k. Ако $AD = BC$, $\angle ABC = 30$ и $S_{ABCD} = 8$, то радиусът r на окръжността k е равен на:

А) $r = 1$ Б) $r = 2$ В) $r = 1,5$ Г) $r = \sqrt{2}$

20. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$ и диагонал $BD = 5$, в който може да се впише окръжност. Лицето S_{ABCD} и дължината на раиуса r на тази окръжност са съответно равни на:

А) $S_{ABCD} = 31,5$ или $r = 3,5$ Б) $S_{ABCD} = 27$ или $r = 3$ В) $S_{ABCD} = 22,5$ или $r = 2,5$ Г) $S_{ABCD} = 18$ или $r = 2$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

21. Стойността на израза $\dfrac{3^{\frac{3}{4}} + 5^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} - (3*5)^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{2}}} - \left(\dfrac{3^{0.25} - 5^{0.25}}{3^{\sqrt{0.25}} - 5^{\sqrt{0.25}}}\right)^{-1}$ е равна на:

22. Решенията на уравнението $x = \sqrt{16 - 6x - x^2} - 2$ са:

23. Финансова институция предлага годишни влогове при 10% годишна лихва с планове както за просто, така и за сложно олихвяване на внесената сума, което се извършва в края на всеки период. Съпрузи едновременно открили два влога – единият на името на жената за 1010 лв. при проста лихва, а другият на името на мъжа за 1000 лв. при сложна лихва. След колко години сумата на мъжа ще стане по-голяма от сумата на жената (по тези конкретни влогове) и с колко лева?

24. В школа по математика учат 14 деца, средната възраст на които е 12 години. След влизането на преподавателя, средната възраст на хората в стаята нарастнала с 3 години. На колко години е преподавателят?

25. Даден е ΔABC със страни $AB = 15$, $BC = 14$, $CA = 13$. Да се намери дължината на вписаната в триъгълника окръжност.

Пълните решения на задачите от 26. до 285. включително запишете в свитъка за решения!

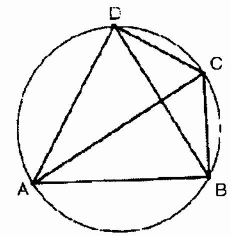
26. Да се реши системата $\begin{vmatrix}(x-y)xy^2 = 90 \\ (x+y)xy^2 = 360\end{vmatrix}$.

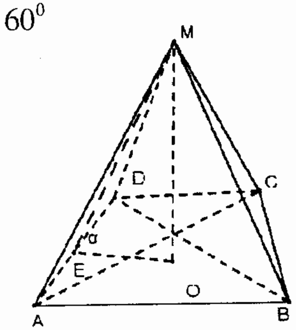
27. На щанд за сладолед с предлагат: ванилов, бананов, кокосов, шоколадов и сладолед с вкус на горски плодове, както и няколко вида сироп: ягодов, малинов, боровинков и карамелов. Колко възможности за избор има родител, който купува за детето си порция сладолед, включваща: по една топка от три различни вида сладолед, покрити с два различни вида сироп, поставени във вафлена фуния или в чашка с лъжичка? Каква е вероятността детето да получи бананов сладолед с карамелов сироп във вафлена фуния?

28. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$, със страни $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 3$, се пресичат в точка O. Да се намерят дължините на отсечките AO, BO, CO и DO.

$AB + CD = BC + AD$. От $\angle ABC = \angle ADC = 90$ следва, че около основата $ABCD$ може да се опише окръжност с диаметър AC. Тогава $\angle ABD = \angle ACD = 2\varphi$. От $AB = BD$ следва, че $\angle BAD = 90^0 - \varphi$. Така получаваме $\angle BAD = 90^0 - \varphi$. Следователно $AB = a\cos\varphi$, $BC = a\sin\varphi$, $CD = a\cos 2\varphi$ и $AD = a\sin 2\varphi$. Тогава $a\cos\varphi + a\cos 2\varphi = a\sin\varphi + a\sin 2\varphi$, $2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. И от $\cos\frac{\varphi}{2} \neq 0$ следва $tg\frac{3\varphi}{2} = 1$, т.е. $\varphi = 30^0$. Нека $ME \perp AD$ и $MO \perp (ABCD)$. Тогава $\angle MEO = \alpha$ и $MO = rtg\alpha$, където r е радиусът на вписаната в $ABCD$ окръжност. От $\angle BAD = \angle ABD = \angle ADB = \angle ACD = \angle ACB = 60^0$ намираме $AB = BD = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $BC = CD = \frac{a}{2}$. Тогава $S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. И от $S_{ABCD} = pr$ намираме $r = \frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$ и $MO = \frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)tg\alpha}{4}$. Следователно

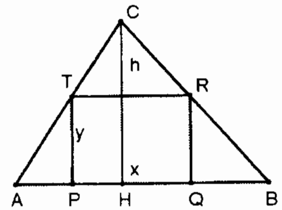
$$V_{ABCDM} = \frac{S_{ABCD}.MO}{3} = \frac{a^3\left(\sqrt{3}-1\right)tg\alpha}{16}.$$





, т.е. $\frac{k}{k+1}<0$ с решение $k\in(-1;0)$. Окончателно решение на задачата е $k\in[-1;0)\cup\left\{\frac{4}{5}\right\}$.

Задача 7. а) От условието и от синусова теорема получаваме $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$. Следователно $tg\alpha=tg\beta=tg\gamma$ и от $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ намираме $\alpha=\beta=\gamma=60^0$, т.е. ΔABC е равностранен. Тогава $AB=BC=AC=\frac{1}{2}$ и височината му $h=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



б) да означим $TP=RQ=y$ и от $\Delta TRS\sim\Delta ABC$ следва $\frac{x}{AB}=\frac{h-y}{h}$. След заместване намираме $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-2x)$. Следователно $S=xy=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-2x)x$.

в) От $S=-\frac{2\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x$ получаваме $x_0=\frac{1}{4}$, т.е. $\max S(x)=S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Задача 8. а) от условието, че всички околни стени на пирамидата сключват с равнината $ABCD$ на основата ъгъл α следва, че в $ABCD$ може да се впише окръжност, т.е.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 18 юни 2016 г.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайт в листа за отговори!

1. Нека $a=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b=\left(\sqrt[3]{27}:\sqrt[4]{16}\right)^{-1}$ и $c=20\%$ от 2.

Посочете вярното твърдение:

А) $c<a<b$ **Б)** $b<c<a$ **В)** $c<b<a$ **Г)** $a<b<c$

2. Ако $a=\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{2}$, то стойността на израза $\frac{3a^3-3b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{2a^3+2b^3}{a^2-ab+b^2}$ е равна на:

А) $5\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **Б)** $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ **В)** $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ **Г)** $\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt[3]{2-x^2}}{\sqrt[4]{x^2-2}}$ са:

А) $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\infty\right)$ **Б)** $x\in\varnothing$

В) $x\in\left(\sqrt{2};\infty\right)$ **Г)** $x=\pm\sqrt{2}$

4. Решенията на неравенството $\frac{8-x^3}{x^2-x-2}\le 0$ са:

А) $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;1]$ **Б)** $x\in(-\infty;-1]$

В) $x\in(-1;2)\cup(2;\infty)$ **Г)** $x\in(-1;\infty)$

5. Ако $a=lg3$ и $b=\lg 5$, то $\log_3 5$ е равен на:

А) $\frac{b}{a}$ **Б)** $b-a$ **В)** $\frac{a}{b}$ **Г)** $a-b$

6. Решенията на системата $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x + y = 7 \end{cases}$ са:

А)(-4;-3) Б)(3;4), (4;3) В)(-3;-4), (-4;-3) Г)(4;3)

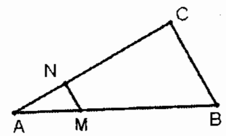
7. Ако α и β са корени на уравнението $x^2 + 5x - 3 = 0$, то числата $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$ са корени на уравнението:

А) $3t^2 + 5t - 1 = 0$ Б) $3t^2 - 5t - 1 = 0$ В) $t^2 + 5t - 3 = 0$ Г) $t^2 - 5t - 3 = 0$

8. Ако $\alpha = \frac{\pi}{12}$, то стойността на израза $\frac{tg\alpha + tg2\alpha}{tg\alpha . tg2\alpha - 1}$ е равна на:

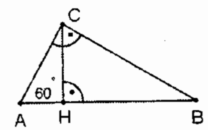
А) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б)1 В)-1 Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. Върху страните AB и AC на ΔABC, с лице $S_{ABC} = 36$, са избрани съответно точки M и N, така че $AM : MB = 1:2$ и $MN \parallel BC$. Лицето на ΔAMN е равно на:



А) $S_{AMN} = 9$ Б) $S_{AMN} = 4$ В) $S_{AMN} = 12$ Г) $S_{AMN} = 18$

10. Даден е ΔABC, за който $AC = 5$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ и CH е височина. Дължината на отсечката BH е равна на:



А) $5\sqrt{3}$ Б)2,5 В) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ Г)7,5

11. Графиката на квадратната функция $y = f(x)$ пресича координатните оси в точките $A(-2;0)$, $B(3;0)$ и $C(0;4)$, а графиката на линейната функция $y = g(x)$ пресича графиката на функцията $y = f(x)$ в точки $A(-2;0)$ и $D(4;-4)$. Кое твърдение е вярно:

Университет по архитектура, строителство и геодезия
3 април 2016 г.

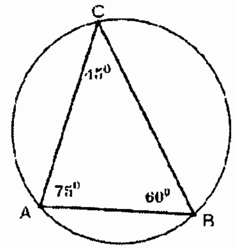
1	2	3	4	5
г	г	б	г	в

Задача 6. а) полагаме $\lg x = u$ и получаваме квадратното уравнение $2u^2 - 3u = 1 = 0$ с корени $u_1 = 1$ и $u_2 = \frac{1}{2}$. От $\lg x = 1$ следва $x_1 = 10$, а от $\lg x = \frac{1}{2}$ следва $x_2 = \sqrt{10}$.

б) От а) и $(k+1)u^2 - 3ku + k = 0$ следва $x_1 = 10^{u_1}$ и $x_2 = 10^{u_2}$. От формулите на Виет намираме $u_1 + u_2 = \frac{3k}{k+1}$. Тогава условието $10x_1x_2 = 10^{4k}$ е еквивалентно на $10^{u_1+u_2+1} = 10^{4k}$. Следователно $\frac{3k}{k+1} + 1 = 4k$. Намираме $k = \pm\frac{1}{2}$. Решение е $k = \frac{1}{2}$, защото при $k = -\frac{1}{2}$, $D < 0$, т.е. корените не са реални.

в) От $x > 1$ следва $u = \lg x > \lg 1 = 0$. Тогава разглеждаме $(k+1)u^2 - 3ku + k = 0$ за $u > 0$. Разглеждаме следните случаи: 1) $k = -1$ - получаваме $u = \frac{1}{3}$. 2) За $k \neq -1$ следват два случая 2.1) $D = 5k^2 - 4k > 0$ и $\frac{3k}{2(k+1)} > 0$ с решение $k = \frac{4}{5}$, и 2.2) $u_1 \le 0 < u_2$

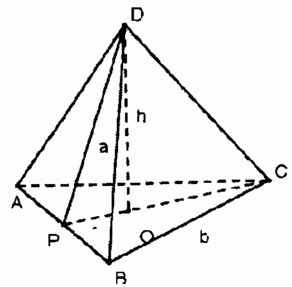
$x_1x_2=\frac{m}{2}$ заместваме в $\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{2(x_1+x_2)}<0$ и получаваме $\frac{-1}{2(2m+1)}<0$. Следователно решение е $m\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.



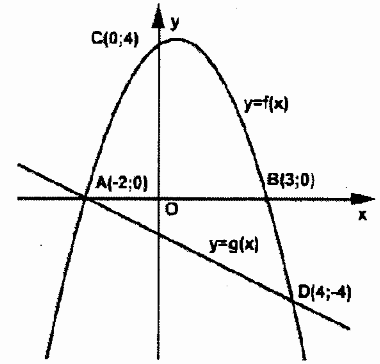
Задача 19. Използваме стандартните означения за триъгълник и намираме $\gamma=45^0$. От синусова теорема следва $a=2R\sin 75^0$ и $c=2R\sin 45^0$.

Използваме $S=\frac{ac\sin 60^0}{2}$, заместваме и получаваме

$$S=\frac{4\sqrt{3}R^2\sin 75^0\sin 45^0}{2.2}=\frac{R^2\sqrt{3}\left(\cos 30^0-\cos 120^0\right)}{2}=\frac{R^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}.$$



Задача 20. Нека пирамидата е $ABCD$, като $AB=BC=AC=b$, $DO=h$ е височината на пирамидата и $CO\cap AB=P$. Тогава $DP=a$ и от правоъгълния ΔDPO по Питагорова теорема намираме $h=\sqrt{a^2-r^2}$. От $r=\frac{1}{3}.\frac{b\sqrt{3}}{2}$ следва $b=\frac{6r}{\sqrt{3}}$. Тогава $S_{ABC}=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}$ и $V_{ABCD}=\frac{3r^2\sqrt{3\left(a^2-r^2\right)}}{3}$. Следователно $S_1=\frac{3ab}{2}+S_{ABC}=3r\sqrt{3}(a+r)$.



А)Най-голямата стойност на квадратната функция $y=f(x)$ е по-голяма от 4.

Б) Линейната функция $y=g(x)$ е растяща в интервала $(-\infty;\infty)$.

В)Решенията на неравенството $f(x)<g(x)$ са $x\in(-2;4)$.

Г) Решенията на уравнението $f(x)=g(x)$ са $x=-2$, $x=3$

12. С коя от формулите се задача числова редица a_n, $n\in N$, всички членове на която са естетсвени числа?

А) $a_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ **Б)** $a_n=\frac{(n-1)n}{4}$

В) $a_n=\frac{n(n+1)}{4}$ **Г)** $a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

13. Дадена е аритметична прогресия $a_1,a_2,..a_n$, за която $a_1=1$, $a_3=13$ и $S_n=280$. Броят n на членовете на прогресията и последният и член a_n са:

А) $n=10$, $a_{10}=56$ **Б)** $n=10$, $a_{10}=55$ **В)** $n=11$, $a_{11}=55$ **Г)** $n=11$, $a_{11}=56$

14. Ако $tg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, то $\sin x$ и $\cos x$ са:

А) $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$ **Б)** $\sin x=\frac{2}{5}$, $\cos x=\frac{3}{5}$ **В)** $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x=\frac{3}{5}$ **Г)** $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x=\frac{2}{5}$

15. Дадени са 48 еднакви карти с формата на квадрат. Броят на различните фигури с формата на правоъгълник, които могат да се съставят от всички карти е:

А)6 **Б)5** **В)4** **Г)3**

16. Даден е статистически ред: 1; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 9. Кое от твърденията НЕ е вярно?

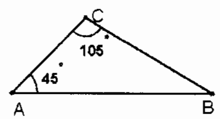
А)Медианата и среното аритметично на реда са равни.

Б)Ако прибавим нов елемент 4 към реда, то модата на новия ред ще бъде по-малка от медианата му.

В)Ако премахнем един елемент 4 към реда, то модата на новия ред ще бъде по-малка от медианата му.

Г)Ако прибавим нов елемент 4 към реда, то медианата на нвия ред ще бъде равна на 4,5.

17. Даден е ΔABC, за който $BC = 7$, $\angle ACB = 105$, $\angle BAC = 45$. Дължината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност и страната AC са равни на:



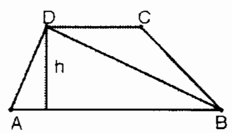
А) $R = 7\sqrt{2}$, $AC = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ **Б)** $R = 7\sqrt{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$

В) $R = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$ **Г)** $R = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AC = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

18. Даден е ΔABC, за който $AB = 2{,}5$, $BC = 3{,}5$, $\angle BAC = 120$. Полупериметърът p на ΔABC е равен на:

А) $p = 7{,}5$ **Б)** $p = 8$ **В)** $p = 3{,}75$ **Г)** $p = 4$

19. Даден е трапец $ABCD$, за който $AB = 13$, $AD = 5$, $BD = 12$ и $S_{ABCD} = 45$. Дължината на основата CD, височината h и $S_{\Delta CDB}$ са съответно равни на:



А) $CD = 6{,}5$, $h = 4{,}62$, **Б)** $CD = \frac{13}{2}, h = \frac{60}{13}, S_{\Delta CDB} = 15$

$b = 6$. От $S_{ок} = (a+b)k = 300$ намираме $k = 10$. От правоъгълния ΔBCH по Питагоровата теорема следва $h_1 = 12$. Тогава $OQ = r = \frac{1}{2}h_1 = 6$ и от правоъгълния ΔEOQ намираме $h = 8$.

Следователно $V_{ABCDE} = \frac{(a+b)h_1.h}{2.3} = 480$.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика – 11 юни 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
А	Б	Г	В	Г	В	В	Г	А	А	А	А

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
$(3;\pm 2)$, $(4;\pm\sqrt{3})$	-31	18	12	54

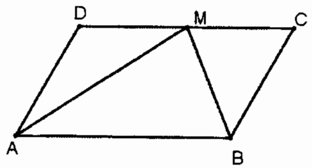
ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. От $D = (2m-1)^2 > 0$ следва, че корените на урвнението са реални. От формулите на Виет $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{2}$ и

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. От условието следва, че ако геометричната прогресия е a, aq, aq^2, то аритметичната е a, aq, aq^2-2. Съставяме системата $\begin{vmatrix} a+aq+aq^2=14 \\ a-2aq+aq^2=2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a(1+q+q^2)=14 \\ a(1-2q+q^2)=2 \end{vmatrix}$, разделяме почленно, преобразуваме и получаваме квадратното уравнение $2q^2-5q+2=0$ с корени $q_1=2$ и $q_2=\frac{1}{2}$. Във всеки един от случаите получаваме търсение числа 2, 4, 6 или 8, 4, 0.

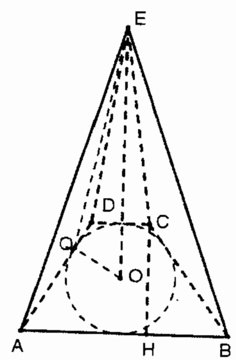
Задача 19. Да означим $AB=CD=2a$ и $AD=BC=b$. От свойствата на успоредника следва $\angle BAD=\angle BCD=60$ и $\angle ABC=\angle ADC=120$. Прилагаме



косинусова теорема за ΔAMD и ΔBMC и получаваме $a^2+b^2-ab=16$ и $a^2+b^2+ab=36$. От второто равенство изваждаме първото и намираме $2ab=20$.

Следователно $S_{ABCD}=2ab\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$.

Задача 20. Да означим $AB=a$, $CD=b$, $AD=BC=c$, апотемата на пирамидата $EQ=k$, височината на пирамидата $MO=h$ и височината на основата $CH=h_1$. От $ABCD$ описан около окръжност следва $a+b=2c$, т.е.



$S_{\Delta CDB}=25$

В) $CD=\frac{60}{13}$, $h=\frac{13}{2}$, $S_{\Delta CDB}=15$ **Г)** $CD=4,62$, $h=6,5$, $S_{\Delta CDB}=25$

20. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който AC разполовява $\angle BAD$, $AD=4$, $\angle ACD=30$, $\angle ACB=75$ и $BO=DO$, където O е пресечната точка на диагоналите AC и BD. Лицето на четириъгълника е равно на:

А) $S_{ABCD}=8$ **Б)** $S_{ABCD}=16$ **В)** $S_{ABCD}=8\sqrt{3}$ **Г)** $S_{ABCD}=16\sqrt{3}$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запищете в листа за отговори!

21. Най-голямата стойност на израза $sim\,2x-\sin^2 3x+\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ е равна на:

22. Решенията на уравнението $\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}=1$ са:

23. През първия месец от съществуването си новоучредената фирма «Възход 2016» имала 4100 лв. разходи, а приходите и били 2450 лв. От всеки следващ месец приходите на фирмата се увеличавали с по 600 лв., а разходите, т.е. фирмата е «излязла на печалба»?

24. Средният ръст на двамата треньори на детски баскетболен отбор е 205 см. В залата тренират 10 деца със среден ръст от 169 см. С колко сантиметра ще се повиши средният ръст на хората в залата при влизането на двамата треньори?

25. Даден е ΔABC със страни със страни $AB=24$, $BC=21$, $CA=15$. Дължината на ъглополовящата CL на $\angle ACB$ е равна на:

Пълните решения на задачите от 26. до 285. включително запишете в свитъка за решения!

26. Да се реши уравнението $\left(x^2+2x\right)^2-2\left|x^2+2x\right|-3=0$.

27. С помощта на цифрите {0, 1, 2, 3, 4} е съставено четирицифрено число с неповтарящи се цифри. Колко такива числа могат да се образуват? Каква е вероятността съставеното число да е четно?

28. Даден е квадрат $ABCD$ с лице $S_{ABCD}=16$, за който с M е означена средата на страната AB, а O, N и P са съответно пресечните точки на AC и BD, BD и CM и AC и DM. Да се намери лицето на четириъгълника $MNOP$.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2016 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Числата $x_1=3$ и $x_2=-17$ са корени на уравнението:

А) $x^2-14x-51=0$ Б) $x^2+14x-51=0$
В) $x^2-14x+51=0$ Г) $x^2+51x-14=0$

2. Числото със стойност $\frac{1}{2}$ е:

А) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$ Б) $\log_{\sqrt{3}}3$ В) $\log_3\sqrt{3}$ Г) $\log_{\frac{1}{3}}9$

3. След преработката на израза $\frac{|a-3|}{3-a}+\frac{a-2}{|a-2|}$ при $a<2$ се получава:

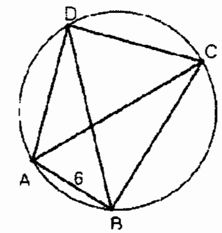
А) 2 Б) -2 В) -1 Г) 0

Задача 19. Уравнението има два различни положителни корена когато

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k^2-9k+4>0 \\ \frac{2(k-2)}{k}>0 \\ \frac{5-k}{k}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(4;\infty) \\ k\in(-\infty;0)\cup(2;\infty) \\ k\in(0;5) \end{cases}.$$

Решение е $k\in(4;5)$.

Задача 20. От $\angle ADC=\angle ABC$ и от $ABCD$ вписан в окръжност следва, че $\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$. Прилагаме Питагоровата теорема за правоъгълните ΔACD и ΔABC и намираме $2AD^2=100$, т.е. $AD=CD=5\sqrt{2}$ и $BC=\sqrt{10^2-6^2}=8$. От теоремата на Птоломей следва $BD.AC=AB.CD+BC.AD$. Заместваме и намираме $BD=7\sqrt{2}$.



Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 16 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Г	В	Б	А	В	Б	Б	В	Г	А	Г	Б

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
$x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$	32	$\frac{\pi}{6}$	12	6

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
8 юли 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Г	А	В	Б	Б	А	Г	В	Б	Г	В

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
14	1	$\frac{17}{2}$	$12\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. За $x\in\left[-\frac{7}{3};7\right]$ преобразуваме даденото уравнение до уравнението $\sqrt{3x+7}=\sqrt{7-x}+2$, повдигаме на втора степен, преобразуваме и получаваме $\sqrt{7-x}=x-1$. При условие $x\geq 1$ повдигаме на втора степен и получаваме квадратното уравнение $x^2-x-6=0$ с корени $x_1=-2$ и $x_2=3$. Решение на даденото уравнение е $x=3$.

4. Ако x е корен на уравнението $4x-8=0$, то числената стойност на израза $\frac{3^x.27^{-x}.81}{9^x}$ е:

А) $\frac{1}{81}$ Б) $\frac{1}{9}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{27}$

5. Най-малкото цяло число от дефиниционната област на функцията $f(x)=\frac{x+10}{x-5}+\log_7(3x-12)$ е:

А)3 **Б)5** **В)6** **Г)4**

6. Стойностите на реалния параметър m, за които отношението на корените на уравнението $x^2+mx-16=0$ е -4 са:

А)-8 и **2** **Б)**само 6 **В)**само **-6** **Г)-6** и **6**

7. Решенията на системата $\begin{vmatrix} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{vmatrix}$ са:

А) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)$ **Б)** $\left(\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$ **В)** $\left(\sqrt{2};\frac{1}{2}\right)$ **Г)** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)$

8. Биквадратното уравнение, което притежава само един реален корен е:

А) $x^4+5x^2-14=0$ **Б)** $x^4+3x^2=0$

В) $x^4-2x^2+32=0$ **Г)** $x^4-8x^2+15=0$

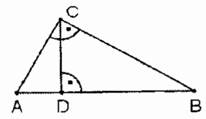
9. Изразът $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)$ е равен на:

А)2 **Б)-2** **В)0** **Г)-1**

10. Равнобедрен и равностранен триъгълник имат обща основа. Периметърът на равностранния триъгълник е 36, а на равнобедрения – 40. Дължината на бедрото му е:

А)14 **Б)26** **В)8** **Г)16**

11. За правоъгълния ΔABC от чертежа е построена височината CD. Ако $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB = 8$, то дължината на AD е:



А)1 **Б)3** **В)2** **Г)**не може да се намери

12. Равнобедреният трапец $ABCD$ с бедро $BC = 15$ *см* е описан около окръжност. Средната основа на трапеца е равна на:

А)30 *см* **Б)10 *см*** **В)5 *см*** **Г)15 *см***

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Решенията на неравенството $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} > 42$ са:....

14. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25}$ е равна на:.....

15. Корените на уравнението $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$ са:...

16. В триъгълник със страни a, b, c е вписан полукръг с център лежащ върху страната c. Големината на диаметъра на този полукръг е:...

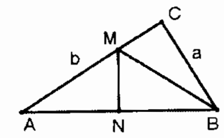
17. Височината на ромб разделя страната, към която е построена, в отношение 3:2 считано от връх на острия ъгъл. Синусът на този ъгъл е:....

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Решете уравнението $\dfrac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x} = 1$.

19. За правоъгълния ΔABC с катети $BC = a$ и $AC = b$ е построена права, която разделя ΔABC на ΔANM и

Задача 19. Нека $S = \dfrac{ab}{2}$. От условието имаме $S_{ANM} = \dfrac{AN.NM}{2} = \dfrac{ab}{4}$. От $\Delta ANM \sim \Delta ACB$ получаваме



$$\frac{S_{ANM}}{S} = \frac{1}{2} = \left(\frac{MN}{a}\right)^2 = \left(\frac{AN}{b}\right)^2 = \left(\frac{AM}{c}\right)^2.$$

Следователно $MN^2 = \dfrac{a^2}{2}$, $AN^2 = \dfrac{b^2}{2}$,

$BN = c - AN = \sqrt{a^2 + b^2} - \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. От Питагорова теорема за ΔBMN следва $BM^2 = MN^2 + BN^2$. Заместваме и намираме

$$BM^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 - 2b\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2}.$$

Тогава

$$S_{кръга} = \frac{\pi\left(3a^2 + 3b^2 - 2b\sqrt{2(a^2 + b^2)}\right)}{8}.$$

Задача 20. От $D = k^2 + 2k + 13 = (k+1)^2 + 12 > 0$ следва, че корените винаги са реални. Използваме формулите на Виет $x_1 + x_2 = k + 5$ и $x_1 x_2 = 2k + 3$, преобразуваме даденото неравенство до $(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 - 12 \geq 0$, заместваме и получаваме $(k+1)^2 \geq 0$. Следователно решение е всяко k.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	В	Г	А	В	Г	А	Б	В	А	В	Г

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15
$x\in(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$	$\frac{1}{60}$	1; -5
16	**17**	
$\frac{4\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{a+b}$	$\frac{4}{5}$	

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. За $x\neq 3$ и $2^x<9$ даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$. От свойства на логаритмите следва $2^{3-x}=9-2^x$. Преобразуваме до $\frac{2^3}{2^x}-9+2^x=0$, полагаме $2^x=u$, $u\in(0;9)$ и получаваме квадратното уравнение $u^2-9u+8=0$ с корени $u_1=1$ и $u_2=8$. От $2^x=3$ следва $x=\log_2 9$, а от $2^x=8$ следва $x=3$. Решение на задачата е $x=\log_2 9$.

четириъгълник $NBCM$. Ако $S_{ANM}=S_{NBCM}$, то намерете лицето на описания около четириъгълника $NBCM$ кръг.

20. Намерете стойностите на реалния параметър k от уравнението $x^2-(k+5)x+2k+3=0$, ако е изпълнено неравенството $\left(x_1-x_2\right)^2\geq 12$, където x_1 и x_2 са корените на даденото уравнение.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
8 юли 2016 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Стойността на израза $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\sqrt{15}$ е:

А) $\sqrt{15}$ **Б)**15 **В)**4 **Г)** $4-\sqrt{15}$

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $4x^2-8x-5=0$, то стойността на израза $x_1+4x_1x_2+x_2$ е:

А)3 **Б)-7** **В)-13** **Г)-3**

3. Корените на уравнението $2^{4-x^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$ са:

А)-4 и 2 **Б)**-2 и 4 **В)**-2 **Г)**-2 и 2

4. Стойностите на x, за които е дефиниран изразът $\frac{\log_2\left(16-x^2\right)}{\sqrt{x-1}}$, са:

А) $x\in(-4;4)$ **Б)** $x\in(0;4)$ **В)** $x\in(1;4)$ **Г)** $x\in(0;1)\cup(1;4)$

5. Корените на уравнението $\frac{x-3}{x-2}-\frac{2}{x(2-x)}=0$ са:

А) 1 и 2 Б) 1 В)0 и 1 Г) -1

6. Най-малкото естествено число, решение на неравенството $\sqrt{x^2+2} > \sqrt{6}$, е:

А)2 **Б)3** **В)4** **Г)5**

7. Броят на реалните решения на системата $\begin{vmatrix} x^2+y^2=19-3xy \\ xy=3 \end{vmatrix}$ е:

А)четири Б) нула В) две Г) три

8. Ако $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, то стойността на израза $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ е:

А) $\frac{16}{9}$ Б) $\frac{9}{4}$ В)4 Г)9

9. В правоъгълния ΔABC ($\angle ACB = 90^\circ$) са построени височината CH и медианата CM ($H, M \in AB$). Ако $\angle MCH = 30^\circ$ и $MH = 3$, то дължината на хипотенузата на ΔABC е:

А)18 **Б)6** **В)12** **Г)9**

10. За ΔABC е известно, че $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $AC = 3\sqrt{6}$. Дължината на BC е:

А)12 Б) 6 В) $6\sqrt{3}$ Г) $6\sqrt{2}$

11. В квадрат е вписана окръжнист с радиус 8. Радиусът на описаната около квадрата окръжност е:

А) $12\sqrt{2}$ Б) $16\sqrt{2}$ В)16 Г) $8\sqrt{2}$

12. Продълженията на бедрата на равнобедрен трапец се пресичат под прав ъгъл. Ако основите на трапеца имат дължини 13 и 5, то лицето на трапеца е:

А)64 **Б)72** **В)36** **Г)18**

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

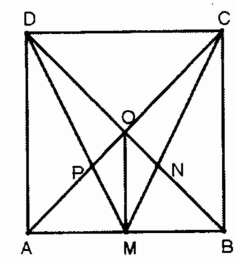
Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 18 юни 2016 г.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
А	Г	А	В	А	Г	Б	В	Б	Г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
А	Г	Б	В	Б	В	Г	В	Б	А

21	**22**	**23**	**24**	**25**
$\frac{3}{4}$	$x=2$, $x=6$	5 месеца	6 см	$CL=5\sqrt{7}$

26. Полагаме $|x^2+2x| = u \geq 0$ и получаваме квадратното уравнение $u^2-2u-3=0$ с корени $u_1=-1<0$ и $u_2=3$. От $|x^2+2x|=3$ следва $x^2+2x=3$ и $x^2+2x=-3$; второто уравнение няма реални корени, а корени на първото са $x_1=-3$ и $x_2=1$.

27. Броят на всички четирицифрени числа с различни цифри е $V_5^4 - V_4^3 = 96$ (извадени са започващите с 0). Броят на четните е $3V_4^3 - 2V_3^2 = 60$. Тогава търсената вероятност е $P = \frac{\textit{благоприятни}}{\textit{всички}} = \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$.



28. От DM и AO медиани следва, че P е медицентър на ΔABD. Използваме свойството на медианите и медицентъра и получаваме последователно

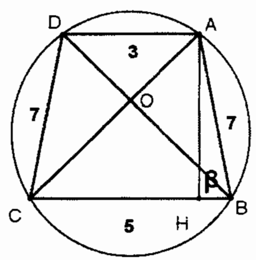
$S_{AOM} = \frac{1}{2}S_{ABO} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}S_{ABCD} = 252$, $S_{APM} = S_{MNB} = \frac{2}{3}S_{AOM} = 168$.

Следователно $S_{OPMN} = S_{AOB} - 2S_{APM} = 168$.

уравнение, опростяваме и намираме $x^4 = 5^4$, т.е. $x = \pm 5$. Тогава $y = \pm 3$. Т.е. решения са (5;3) и (-5;-3).

27. Сладолед може да се избере по $C_5^3 = 10$ начина, опаковката на сладоледа по $C_2^1 = 2$ начина и сироп по $C_4^2 = 6$ начина. Т.е. общият брой възможни търсени комбинации е $C_5^3.C_2^1.C_4^2 = 120$. При фиксирана вафлена фуния, бананов сладолед и карамелов сироп възможностите са $C_4^2.C_3^1 = 6.3 = 18$. Следователно търсената вероятност е $P = \dfrac{благоприятни}{всички} = \dfrac{18}{120} = \dfrac{3}{20}$.

28. От $DC = AB$ следва $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AB}$. Тогава $\angle ACB = \angle CAD$, т.е. $BC \parallel AD$ и $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи $CB > DA$. Нека AH е височината към основата CB и нека $\angle CBA = \beta$. От свойство на равнобедрен трапец намираме $BH = \dfrac{CB - DA}{2} = 1$ и от правоъгълния ΔABH получаваме $\cos\beta = \dfrac{1}{7}$. От ΔABC и косинусова теорема следва $AC^2 = 49 + 25 - 2.5.7.\dfrac{1}{7} = 64$, т.е. $AC = 8$. Но $\Delta CBO \sim \Delta ADO$. Следователно $\dfrac{CO}{AO} = \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{CB}{DA} = \dfrac{5}{3}$. Тогава $CO = BO = 5$ и $DO = AO = 3$.



13. Три числа са последователни членове на аритметична прогресия. Ако сумата им е 24, а произведението им е 224, то най-голямото от тези числа е ...

14. Корените на уравнението $4^{x+1} - 7.2^x - 2 = 0$ са ...

15. Дължините на основата на равнобедрен триъгълник и на височината към нея се отнасят както 5:4. Ако лицето на триъгълника е 40, то дължината на медианата към бедрото е ...

16. Лицето на трапец с дължини на основите 6 и 3 и дължини на диагоналите 7 и 8 е ...

17. Ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ на ΔABC се пресичат под ъгъл 120°. Ако $AC = 5$ и $BC = 8$, то радиусът на вписаната в ΔABC окръжност е ...

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Намерете корените на уравнението $\sqrt{3x+7} - \sqrt{7-x} = 2$.

19. Намерете стойностите на реалния параметър $\boldsymbol{k}$, за които уравнението $kx^2 - 2(k-2)x + 5 - k = 0$ има два различни положителни корена.

20. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус 5. Ако $AB = 6$, $AD = CD$ и $\angle ABC = \angle ADC$, то намерете дължините на диагоналите AC и BD.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 16април 2016 г.

1. Стойността на израза $A = \sqrt{\left(5 - 6\sqrt{3}\right)^2} + \left(\sqrt{3} - 3\right)^2$ е равна на:

А) $17 - 12\sqrt{3}$ **Б)** $17 - 2\sqrt{3}$ **В)** $17 + 12\sqrt{3}$ **Г)** 7

2. Изразът $\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2-5x+3}$ при $x \neq 1$ и $x \neq \dfrac{3}{2}$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{x-6}{2x-3}$ Б) $\dfrac{x+6}{2x+3}$ В) $\dfrac{x+6}{2x-3}$ Г) $\dfrac{x-6}{2x+3}$

3. Числата $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$ са корени на уравнението:

А) $x^2-4x+2=0$ Б) $x^2-2x-2=0$ В) $x^2+4x-2=0$ Г) $x^2-3x+2=0$

4. Корените на уравнението $5^{2x+1}=5^{(x+1)^2}$ са:

А) $x=0$ Б) $x_1=-1$ и $x_2=0$ В) $x=2$ Г) $x_1=2$ и $x_2=6$

5. Броят на реалните корени на уравнението $x^3+7x^2+12x=0$ е:

А)1 **Б)2** В)3 Г)4

6. Кое от посочените числа НЕ е решение на неравенството $x^2-2x-3\geq 0$?

А) $-\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{2}$ В)3 Г) π

7. По колко различни начина могат да се подредят 5 учебни предмета в програмата за един учебен ден при 5 часа за деня?

А)45 **Б)120** **В)1000** **Г)15120**

8. В ΔABC са дадени $BC=9\ cm$ и $AC=3\ cm$. Построена е вътрешната ъглополовяща CL ($L\in AB$) и $AL=2\ cm$. Дължината на страната AB равна на:

А) $9\ cm$ **Б)** $6\ cm$ **В)** $8\ cm$ **Г)** $7\ cm$

9. В равнобедрен триъгълник дължините на основите и на бедрата са равни съответно на 6 cm и 9 cm. Лицето на триъгълника е равно на:

А) $12\sqrt{2}\ cm^2$ Б) $12\sqrt{3}\ cm^2$ В) $18\sqrt{3}\ cm^2$ Г) $18\sqrt{2}\ cm^2$

ΔDHP намираме $\sin\varphi=\dfrac{DH}{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\varphi=60^\circ$.

Задача 8. Даденото уравнение има смисъл при $x<2a-1$ и е еквивалентно на $x^2-(a+1)x+3(a-2)=0$ и $\lg(2a-x-1)=0$. Първото уравнение има корени $x_1=a-2$ и $x_2=3$. Второто уравнение има корен $x_3=2a-2$. Ако x_3 е корен на даденото уравнение получаваме, че $x_3\in[-1;2]$ за $a\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. От $x_2=3\notin[-1;2]$ следва, че $3\geq 2a-1$, т.е. $a\leq 2$. Ако $a-2\geq 2$, то $a\leq -1$, което е невъзможно. Следователно $a-2\leq 2$ и $a-2\geq -1$, т.е. $a\in[1;4]$. Решение на задачата е $a\in[1;2]$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 27 март 2016 г.

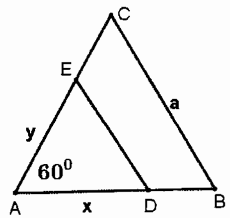
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Г	В	Г	Б	Г	В	А	Б	А	В
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Г	В	Б	А	Б	А	Б	В	А	Г

21	**22**	**23**	**24**	**25**
0	$x=1$	3 години; 18,00 лв	57 години	8π

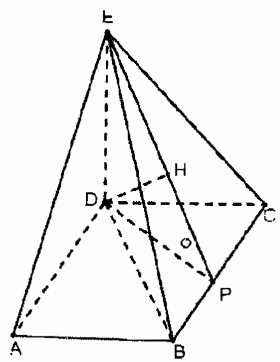
26. Ясно е, че $x\neq 0, y\neq 0, x\neq \pm y$. Разделяме двете уравнения и получаваме $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{4}$. Изразяваме $y=\dfrac{3}{5}x$, заместваме в първото

$x\in[-10;2]\cup x\in(2;8)$. Следователно решение на задачата е $x\in[-10;8)$.

Задача 6. Нека отсечката DE е търсената, като $D\in AB$, $E\in AC$. Да означим $AD=x$ и $AE=y$. Тогава $S_{ADE}=\frac{xy}{2}=\frac{1}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, т.е. $xy=\frac{a^2}{2}$. Прилагаме косинусова теорема за ΔADE и получаваме $DE^2=x^2+y^2-\frac{a^2}{2}$. От неравенството между средно аритметично и средно геометрично следва $x^2+y^2\geq 2xy$. Тогава $DE^2\geq 2xy-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$, като равенство се достига при $x=y=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. От $\angle DAE=60^\circ$ следва, че най-късата отсечка е $DE=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Задача 7. Нека $EP\perp BC$ и от $ED\perp(ABCD)$ следва, че EP се проектира ортогонално върху DP. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $DP\perp BC$. Тогава $\angle((BCE);(ABCD))=\angle EPD=\varphi$ и $BC\perp(DPE)$. Нека $DH\perp EP$. И от $BC\perp DH$ получаваме $DH\perp(BCE)$, т.е. $DH=3$. От ΔBCD равностранен следва, че $DP=2\sqrt{3}$. От правоъгълния



10. Дължината на хипотенузата на правоъгълен триъгълник с височина към нея 12 cm и катет 15 cm е равна на:

А)25 *cm* **Б)20 *cm*** **В)27 *cm*** **Г)30 *cm***

11. Ако $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin 2\alpha$ е равна на:

А) $\frac{6}{5}$ **Б)** $\frac{5}{6}$ **В)** $-\frac{24}{25}$ **Г)** $\frac{24}{25}$

12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб $a=6\ cm$ и височина $H=2\ cm$. Обемът на пирамидата е равен на:

А) $6\sqrt{2}\ cm^3$ **Б)** $6\sqrt{3}\ cm^3$ **В)** $6\,cm^3$ **Г)** $36\,cm^3$

ВТОРА ЧАСТ

Запишетесамо отговор.

13. Решете неравенството $(4x^2-4x+1)(x^2-x-6)>0$.

14. За геометрична прогресия е дадено, че $a_3.a_4.a_5=2^9$. Намерете четвъртия член на прогресията.

15. Намерете решенията на уравнението $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha=1$, които принадлежат на интервала $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

16. Даден е ΔABC със страни $a=13\ cm$, $b=15\ cm$ и $c=14\ cm$. Намерете височината h_c.

17. Правоъгълен паралелепипед с измерения 12 cm, 9 cm и 2 cm и куб са равнообемни. Намерете дължината на ръба на куба.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

18. . Сборът на три числа x, y, z, които в посочения ред образуват аритметична прогресия, е 12. Ако към третото число се прибави 2, то получените три числа образуват геометрична прогресия. Намерете числата x, y и z.

19. Точката M е средата на страната CD на успоредника $ABCD$. Намерете лицето на успоредника, ако $\angle BAD = 60^\circ$, $MA = 6\ cm$ и $MB = 4\ cm$.

20. Пирамидата $ABCDE$ е с основа равнобедрен трапец $ABCD$, в който може да се впише окръжност. Височината на пирамидата минава през центъра на тази окръжност. Голямата основа на трапеца е $AB = 24\ cm$, а бедрото му е $BC = 15\ cm$. Намерете обема на пирамидата, ако лицето на околната и повърхнина е $300\ cm^2$.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий" тест математика – 11юни 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е с най-голям модул?

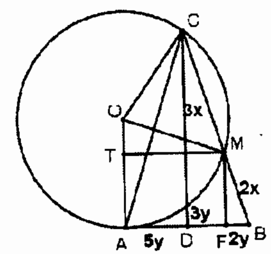
А) -5 Б) $\sqrt[3]{8}$ В) 2^2 Г) 2,5

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_x \sqrt{10-x}$

А) $x \in [0;1) \cup (1;\infty)$ Б) $x \in (0;1) \cup (1;10)$

В) $x \in (-\infty;1) \cup (1;8]$ Г) $x \in (0;10]$

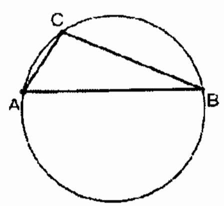
$BM = 2x$ и $CM = 3x$. От свойство на допирателната следва, че $BA^2 = BM.BC$, т.е. $c^2 = 10x^2$. От правоъгълния ΔBDC по Питагоровата теорема следва, че $h^2 = 25x^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{90x^2}{4}$, т.е. $h = \frac{3x\sqrt{10}}{2}$. Нека $MF \perp AB$ и $MT \perp OA$. От теоремата на Талес намираме $\frac{MF}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{BF}{BD}$, т.е. $MF = \frac{2}{5}h = \frac{3x\sqrt{10}}{5}$. Нека $BF = 2y$, $FD = 3y$ и $AD = BD = 5y$. Но $AMFT$ е правоъгълник. Тогава $TM = AF = 8y = \frac{4}{5}c$. Прилагаме Питагоровата теорема за ΔOTM, т.е. $OT^2 + TM^2 = OM^2$, използваме изразяването



$$OT = OA - TM = R - \frac{3x\sqrt{10}}{5} = 10\sqrt{10} - \frac{3x\sqrt{10}}{5},$$ заместваме и намираме $x = 12$. Тогава $c = x\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$ и $h = 18\sqrt{10}$. Следователно $S_{ABC} = \frac{ch}{2} = 1080$.

Задача 5. Даденото неравенство е еквивалентно на $\begin{vmatrix} x-2 \le 0 \\ 100-x^2 > 0 \end{vmatrix}$ $\cup \begin{vmatrix} x-2 > 0 \\ 100-x^2 > x^2-4x+4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x \le 2 \\ x \in [-10;10] \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} x > 2 \\ x^2-2x-48 < 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

ΔABC получаваме $\angle ACB = 135^{\circ}$, $\angle BAC = 30^{\circ}$ и $\angle ABC = 15^{\circ}$. От синусова теорема за ΔABC следва $\frac{BC}{\sin 30} = \frac{AC}{\sin 15} = 2R = 2$. Тогава $BC = 1$ и $AC = 2\sin 15$. Използваме формулата $S_{ABC} = \frac{AC.BC\sin 135^{\circ}}{2}$. Получаваме



$$\sin 15^{\circ} = \sin\left(45^{\circ} - 30^{\circ}\right) = \sin 45^{\circ}\cos 30^{\circ} - \cos 45^{\circ}\sin 30^{\circ} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

, и след заместване получаваме $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Задача 3. Да означим геометричната прогресия с a, aq, aq^2 и нека d е разликата на аритметичната прогресия. Тогава от условието получаваме $\begin{cases} aq = a + 6d \\ aq^2 = a + 16d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(q-1) = 6d \\ a(q-1)(q+1) = 16d \end{cases}$.

Разделяме двете уравнения и намираме $\frac{1}{q+1} = \frac{3}{8}$, т.е. $q = \frac{5}{3}$. От $a^2 = 9$ следва $a = \pm 3$. За $a = 3$ получаваме $d = \frac{1}{3}$, а за $a = -3$ следва $d = -\frac{1}{3}$. Но по условие аритметичната прогресия е растяща, следователно решение на задачата са $q = \frac{5}{3}$ и $d = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Нека $CD = h$ е височина към основата и O е център на окръжността. Да означим $OA = OM = OC = R$, $AB = c$,

3. Единият корен на квадратното уравнение $kx^2 + x + k + 1 = 0$ е $x_1 = -\frac{1}{3}$. Другият корен е равен на:

А)0 **Б)1** **В)-1** **Г)2**

4. Решенията на неравенството $\frac{2-x}{x+1} \geq 0$ са:

А) $x \in [-2;1]$ Б) $x \in (-4;2]$ В) $x \in (-1;2]$ Г) $x \in (-1;2)$

5. За аритметична прогресия е дадено, че $d = 2$ и $S_{40} = 500$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А)18 **Б)-10** **В)26,5** **Г)-26,5**

6. Ако 8% от числото a е $\frac{24}{5}$, то числото a е равно на:

А)24 **Б)40** **В)60** **Г)84**

7. В ΔABC е дадено, че $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ и $AC = 2$. Мярката на $\angle BAC$ е равна на:

А) 45° Б) 30° В) 60° Г) 90°

8. Периметърът и лицето на правоъгълник се изразяват с едно и също число. Едната страна на правоъгълника е 4 пъти по-голяма от другата. Дължината на тази страна е равна на:

А)2,5 **Б)2** **В)3** **Г)10**

9. Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни като $AC = 8$, $BD = 15$. Лицето на четириъгълника е равно на:

А)60 **Б)70** **В)100** **Г)120**

10. Изразът $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ е равен на:

А) $tg^2\frac{\alpha}{2}$ Б) $tg\frac{\alpha}{2}$ В) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ Г) $\sin^2\frac{\alpha}{2}$

11. Лицата на три стени на правоъгълен паралелепипед са 4 m^2, 3 m^2 и 12 m^2. Дължините на ръбовете (измеренията) на паралелепипеда са:

А)4 m ,3 m ,1 m Б)4 m ,3 m ,3 m В)2 m ,3 m ,1 m Г)1 m ,4 m ,6 m

12. Основата на пирамида е триъгълник с една страна 12 cm и срещулежащ ъгъл 30° .Всички околни ръбове на пирамидата са равни на 15 cm . Височината на пирамидата е равна на:

А)9 cm Б)22 cm В)13 cm Г)$3\sqrt{6}$ cm

ВТОРА ЧАСТ

Запишетесамо отговор.

13. Да се реши системата уравнения: $\begin{vmatrix} x+y^2=7 \\ xy^2=12 \end{vmatrix}$.

14. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-16x+4=0$, да се намери стойността на израза $A=\log_2 x_1x_2-2^{1+\log_2(x_1+x_2)}$.

15. Даден е равнобедрен ΔABC , за който $AC=BC=25\ cm$. Височината CD ($D\in AB$) е с дължина 20 cm , а AM ($M\in BC$) е височината към бедрото BC . Да се намери дължината на отсечката BM .

16. В равнобедрения трапец $ABCD$ може да се впише окръжност. Основите AB и CD на трапеца са съответно равни на 16 cm и 9 cm . Да се намери височината на трапеца.

17. Околният ръб на правилна четириъгълна пирамида е 6 cm и определя с основата на пирамидата ъгъл 30° . Да сенамери обемът на пирамидата.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

т.е. $x_{1,2}=-1$, $x_3=5$ и $x_4=1$. Следователно $a=2$ е решение. 2) за да има второто уравнение едно решение, трябва $a=0$. Тогава $D<0$, т.е. първото уравнение няма решение. Следователно $a=0$ не е решение. 3) нека $a>2$. Тогава $x_1=-1-\sqrt{a-2}$ и $x_2=-1+\sqrt{a-2}$. От $a>2$ следва $a+3>0$ и $-1-\sqrt{a-2}\neq a+3$. Разглеждаме три случая 3.1) $-1-\sqrt{a-2}=3-a$. За $a\geq 4$, повдигаме $\sqrt{a-2}=a-4$ на втора степен и достигаме до квадратното уравнение $a^2-9a+18=0$ с корени $a=3<4$ и $a=6$, което е и решение. 3.2) $-1+\sqrt{a-2}=a+3\Rightarrow\sqrt{a-2}=a+4$. Достигаме до $a^2+7a+18=0$, което няма реални корени. 3.3) $-1+\sqrt{a-2}=3-a\Rightarrow\sqrt{a-2}=4-a$. За $a\leq 4$ получаваме квадратното уравнение $a^2-9a+18=0$ с корени $a=6>4$ и $a=3$. Решение е $a=3$. Окончателно решение на задачата са $a=2$, $a=3$ и $a=6$

Софийски университет „Св. Климент Охридски" Математика второ равнище 19 юни 2016 г.

Задача 1. За $x\neq 0$, от $|x|>0$ следва, че даденото неравенство е еквивлентно на неравенството $x^{2016}-1<0$. Следователно решения на задачата са $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Задача 2. От условието следва, че ако най-малката дъга е x, то другите са $2x$ и $9x$. Тогава $12x=360^\circ$, т.е. $x=30^\circ$. Нека $\overset{\frown}{AC}=30^\circ$, $\overset{\frown}{BC}=60^\circ$ и $\overset{\frown}{AB}=270^\circ$. Следователно за ъглите на

$V_1=\frac{4(2+y)}{6}-\frac{x^2y}{6}$. Заместваме и след опростяване получаваме $V_1=\frac{4(3y^2+6y+4)}{3(y+2)^2}$. От $V_2=8-V_1$ и $\frac{V_2}{V_1}=\frac{17}{7}$ следва $V_1=\frac{7}{3}$.

Тогава опростяваме $\frac{4(3y^2+6y+4)}{3(y+2)^2}=\frac{7}{3}$ и получаваме квадратното уравнение $5y^2-4y-12=0$ с положителен корен $y=2$. Намираме $x=1$, т.е. точката M е среда на BC, а F е среда на CC_1. Сечението $AMFD_1$ е равнобедрен трапец с основи $AD=2\sqrt{2}$ и $MF=\sqrt{2}$. За бедрата е изпълнено $AM=D_1F=\sqrt{5}$. Нека MH е височина в равнобедрения трапец. Тогава $AH=\frac{AD_1-MF}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и от правоъгълния ΔAHM намираме $HM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Следователно лицето на сечението е $S_{AMFD_1}=\frac{(AD_1+MF).MH}{2}=\frac{9}{2}$.

Задача 8. За следните две уравнения $x^2+2x+3-a=0$ и $|x-3|=a$ ще разгледаме три случая : 1) първото има 1 решение, а второто 2 решения; 2) първото уравнение има 2 решения, второто -1 решение; 3) двете уравнения имат по две решения, но едното им е общо. За $a\geq 0$ второто уравнение има два корена $x_3=a+3$ и $x_4=3-a$. Дискриминантата на първото уравнение е $D=a-2$. 1) ако първото уравнение има едно решение, то $a=2$,

18. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението $2x^2-(2m+1)x+m=0$ има реални корени x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенството $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}<\frac{1}{2}$.

19. В окръжност с радиус R е вписан триъгълник, на който два от ъглите са с мерки 75 и 60. Да се намери лицето на триъгълника.

20. В правилна триъгълна пирамида дължината на радиуса на вписаната в основата окръжност е r, а дължината на апотемата е a. Да се намери лицето на пълната повърхнина и обемът на пирамидата.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
3 април 2016 г.

Задача 1. Ако $\log_2 5=a$ и $\log_4 3=b$, то $\log_3 5$ е равен на:

а) ab **б)** $\frac{2a}{b}$ **в)** $\frac{b}{a}$ **г)** $\frac{a}{2b}$

Задача 2. Ъгъл α е от втори квадрант и $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Стойността на $\cot g\alpha$ е равна на:

а) 3 **б)** $-\frac{1}{3}$ **в)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **г)** $-2\sqrt{2}$

Задача 3. В триъгълник две от страните са 3 и 5, а ъглополовящата между тях е $\frac{15}{8}$. Третат страна на триъгълника е равна на:

а) 8 **б) 7** **в) 4** **г) 6**

Задача 4. Дадени са три окръжности, k_A, k_B и k_C с центрове A, B и C и с радиуси $r_A = 1$, $r_B = 2$ и $r_C = 3$, всеки две от които се допират външно. Лицето на ΔABC е равно на:

а) 3 **б)** 4 **в)** 5 **г)** 6

Задача 5. Основата на призма с обем 36 е успоредник със страни 3 и 4 и ъгъл 60. Околният и ръб е 4. Ъгълът между околния ръб и основата е:

а) 30 **б)** 45 **в)** 60 **г)** 90

Задача 6. Дадено е уравнението $(k+1)\lg^2 x - 3k\lg x + k = 0$, където k е реален параметър.

а) Да се реши за $k = 1$.

б) За кои стойности на k уравнението имаа реални корени x_1 и x_2, за които $10x_1x_2 = 10^{4k}$

в) За кои стойности на k уравненението има точно едно решение, по-голямо от 1?

Задача 7. Даден е ΔABC, в който $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и $BC = \cos\alpha$, $CA = \cos\beta$, $AB = \cos\gamma$.

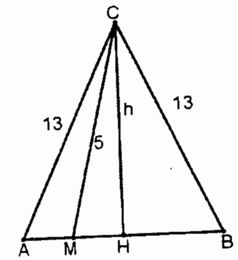
а) Докажете, че ΔABC е равностранен и височината му е равна на $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

б) Нека $PQRT$ е правоъгълник, на който върховете P и Q лежат на отсечката AB, R е точка от BC и T лежи на отсечката AC. Ако $PQ = x$, пресметнете лицето S на $PQRT$ като фунция на x

в) Пресметнете най-голямата стойност на S.

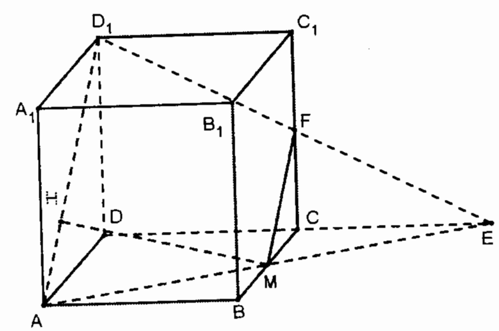
Задача 8. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$, такава че $AB = BD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90$, $\angle ACD = 2\varphi$ и $AC = a$. Всички околни стени на пирамидата сключват с равнината $ABCD$ на основата ъгъл α.

$x \in (-17;1)$. Следователно $x \in (-3;1)$. От обединението на двата случая получаваме решението на задачата $x \in (-3;1) \cup (3;4)$.



Задача 6. Нека $CH = h$ е височина към основата на ΔABC. Тогава $AH = BH$ и $h = CH \le CM = 5$. От Питагорова теорема за ΔAHC следва $AH = \sqrt{169 - h^2}$, т.е. $AB = 2\sqrt{169 - h^2}$. Тогава за лицето $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = h\sqrt{169 - h^2}$ при $h \in [0;5]$. Намираме получаваме $S'(h) = \frac{169 - 2h^2}{\sqrt{169 - h^2}} > 0$ за всяко $h \in [0;5]$. Следователно $S(h)$ расте за $h \in [0;5]$. Т.е. най-голяма стойност $S(h)$ достига при $h = 5$. Следователно $AB = 24$.

Задача 7. Нека $AM \cap DC = E$ и $D_1E \cap CC_1 = F$. Сечението е $AMFD_1$. Нека обема на тялото „зад“ сечението е V_1, а „пред“ сечението е V_2. Тогава $V_1 = V_{AEDD_1} - V_{MCEF}$, $V_2 = V - V_1$, където $V = 8$ е обемът на куба. Да означим $MC = CF = x$ и



$CE = y$. От $\Delta MCE \sim \Delta ADE$ следва $\frac{x}{2} = \frac{y}{y+2}$, т.е. $x = \frac{2y}{y+2}$. Но равенства и намираме $x=\frac{3\sqrt{39}}{2}$. Следователно $h=\frac{3\sqrt{13}}{2}$ и $S_{ABCD}=39\sqrt{3}$. Нека $EH \perp AB$. Тогава $S_{ABE}=\frac{AB.EH}{2}=\frac{1}{2}.39\sqrt{3}$ и получаваме $EH=\sqrt{13}$. От правоъгълния ΔAHE намираме $AH=EH\cot g30\ \sqrt{39}$. Тогава $BH=2\sqrt{39}$. Прилагаме Питагорова теорема за ΔBHE и получаваме $BE^2=BH^2+EH^2=169$, т.е. $BE=13$.

Задача 5. За да има смисъл неравенството трябва $\frac{25-x^2}{16}>0$ и $\frac{25-x^2}{16}\neq 1$ и $\frac{24-2x-x^2}{14}>0$. Получаваме $x\in(-5;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4)$. Тогава даденото неравенство е еквивалентно на $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{25-x^2}{16}\right)$.

Разглеждаме два случая: 1) $\frac{25-x^2}{16}\in(0;1)$, т.е. $x\in(-5;-3)\cup(3;4)$. Тогава $\frac{24-2x-x^2}{14}<\frac{25-x^2}{16}$ с решение $x\in(-\infty;-17)\cup(1;+\infty)$. Следователно $x\in(3;4)$. 2) $\frac{25-x^2}{16}>1$, т.е. $x\in(-3;3)$. Тогава $\frac{24-2x-x^2}{14}>\frac{25-x^2}{16}$. Получаваме

а) Пресметнете обема на пирамидата.
б) Пресметнете пълната повърхнина на пирамидата.
в) Пресметнете радиуса на вписаната сфера.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
24 април 2016 г.

Задача 1. Прав кръгов конус има височина 4 и радиус на основата 3. Развивката на околната му повърхнина като сектор има ъгъл:

а) $\frac{3\pi}{5}$ **б)** $\frac{4\pi}{5}$ **в)** π **г)** $\frac{6\pi}{5}$

Задача 2. Най-голямото цяло число, удовлетворяващо неравенството $\log_{\frac{1}{7}}(\log_3 x)\geq 0$ е:

а) 3 **б) 1** **в) 7** **г) 0**

Задача 3.Решенията на уравнението $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ са числата от интервала:

а) $[3;+\infty)$ **б)** $[3;3]$ **в)** $(-\infty;+\infty)$ **г)** $(-\infty;3]$

Задача 4. В ΔABC медианата CM е перпендикулярна на страната AC. Ако $AC=b$ и $\angle ACB=135$, то страната BC е равна на:

а) $b\sqrt{3}$ **б)** $b\sqrt{2}$ **в)** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ **г)** $2b$

Задача 5. Ако α е остър ъгл, за който $4\sin^2\alpha+5\cos\alpha-5=0$, то α е от интервала:

а) $(0^\circ;15^\circ)$ **б)** $(45^\circ;60^\circ)$ **в)** $(60^\circ;75^\circ)$ **г)** $(75^\circ;90^\circ)$

Задача 6. Квадратното уравнение $kx^2+(1-k)x+k=0$ има реални корени x_1 и x_2.

а) За кои стойности на k корените са отрицателни числа?

б) Намерете минималната стойност на израза $A = 2^{|x_1 - x_2|}$ и при кои стойности на k тя се достига.

в) Ако $k = -\frac{1}{2}$, пресметнете стойността на израза $B = 2^{x_1}\left(2^{x_2} - 2^{-x_1}\right) + \lg x_1 + \lg x_2$.

Задача 7. Диагоналите на равнобедрен трапец $ABCD$ са взаимно перпендикулярни, а височината му е h.

а) Пресметнете лицето на трапеца.

б) Ако $CD = m$ (и височината е h), намерете AB и AD.

в) При условието на т. б). През пресечната точка на диагоналите е прекарана права успоредна на основите, отсичаща от бедрата отсечка MN. Намерете дължината на MN.

Задача 8. Кубът $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има дължина на страната a.

а) Пресметнете разстоянието от точка C до равнината (AB_1D_1).

б) Пресметнете косинуса на ъгъла между равнините (AB_1D_1) и (BCC_1B_1).

Университет по архитектура, строителство и геодезия 13юли 2016 г.

Задача 1. ΔABC има височина $CH = 4$. На какво разстояние от връх C трябва да се прекара права, успоредна на AB, която разделя лицето на ΔABP на две равни части?

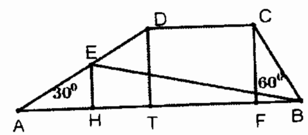
а) $2\sqrt{2}$ б) 2 в) $\sqrt{3}$ г) $\frac{5}{2}$

Задача 2. Дефиниционното множество на функцията $y = \log_2\left(2 - \sqrt{x}\right)$ е:

$AC = 6 + x$ и $BC = 45 - x$. Прилагаме Питагоровата теорема за ΔABC и получаваме $(x+6)^2 + (45-x)^2 = 39^2$. Опростяваме и стигаме до квадратното уравнение $x^2 - 39x + 270 = 0$ с корени $x_1 = 30$ и $x_2 = 9$. От $AC < BC$ следва $x = 9$. Следователно $AC = 15$ и $BC = 36$.

Задача 3. Нека $tg\frac{\alpha}{2} = x$. От $tg\alpha < 0$ следва $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $x > 0$. Използваме формулата $tg\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$ и от $-\frac{7}{24} = \frac{2x}{1-x^2}$ получаваме квадратното уравнение $7x^2 - 48x - 7 = 0$ с корени $x_1 = -\frac{1}{7} < 0$ и $x_2 = 7$. Решение е $tg\frac{\alpha}{2} = x = 7$.

Задача 4. Нека $DT \perp AB$ и $CF \perp AB$. Тогава $DTFC$ е правоъгълник и $TF = DC = \sqrt{39}$ и $DT = CF = h$. Да означим $AT = x$. Получаваме $FB = 2\sqrt{39} - x$. От правоъгълните ΔATD и ΔBFC следва $h = xtg30 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $h = \left(2\sqrt{39} - x\right)tg60^\circ = \left(2\sqrt{39} - x\right)\sqrt{3}$. Приравняваме последните



28. Да се реши тригонометричното уравнение $4(1+\cos x)\sin^2\frac{x}{2}=3\sin x+2$.

29. В правоъгълния ΔABC ($\angle ACB=90^\circ$) са дадени $BC=a$ и $\angle CAB=60^\circ$. Точките M и N лежат съответно на BC и AB, така че около четириъгълника $ANMC$ може да се опише окръжност. Да се намери периметърът на ΔNMB, ако лицето му е 4 пъти по-малко от това на ΔABC.

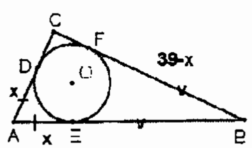
30. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x)=\dfrac{1}{ax^2-\sqrt{8}x+3a+1}$ е дефинирана за всяко реално число x.

РЕШЕНИЯ

Софийски университет „Св. Климент Охридски" Математика второ равнище 20 март 2016 г.

Задача 1. При $\frac{x-4}{x-5}\geq 0$, $x\neq 5$, т.е. $x\in(-\infty;4]\cup(5;+\infty)$ даденото неравенство е еквивалентно на $(x-3)(x-7)\leq 0$ с решение $x\in[3;7]$. Решение на задачата е $x\in[3;4]\cup(5;7]$.

Задача 2. От $R=\frac{39}{2}$ следва $AB=39$. Нека допирните точки на вписаната окръжност със страните на ΔABC са $E\in AB$, $F\in BC$, $D\in AC$. Тогава $CD=CF=r=6$. Да означим $AE=AD=x$, $x<39$. Следователно $BE=BF=39-x$,



а) $[0;4)$ б) $(0;\infty)$ в) $[0;2]$ г) $(4;\infty)$

Задача 3. Даден е правилен тетраедър с обем V. Центровете на стените му са върхове на друг тетредър с обем V_1. Тогава отношението $\frac{V}{V_1}$ е равно на:

а) 27 **б)**8 **в)** 18 **г)** никое от посочените

Задача 4. Броят на решенията на уравненеито $|x+1|=|x|$ в интервала $[-1;0]$ е:

а) 0 **б) 1** **в) 2** **г) 3**

Задача 5. Коренитена уравнението $x^3-kx^2-x=0$ образуват аритметична прогресия. Тогава k е равно на:

а) -1 **б)**1 **в) 0** **г) 2**

Задача 6.Дадена е функцията $f(x)=\sqrt{2}\sin 2x-\sin x-\cos x+a+\sqrt{2}$, където a е параметър.

а) Нека $\sin x+\cos x=t$. Изразеете f като функция на t.

б) Да се реши уравнението $f(x)=0$ за $a=-\sqrt{2}$.

в) За кои стойности на a неравенството $f(x)<0$ е изпълнено за всяко $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$?

Задача 7. Основите на трапеца $ABCD$ са $AB=a$ и $CD=b$ ($a>b$). Диагоналите на $ABCD$ се пресичат в точка O. Права успоредна на AB пресича отсечките AD, AO, BO и BC съответно в точките M, N, P и Q. Дадено е, че $\frac{AM}{MD}=k$.

а) Пресметнете дължините на отсечките MN, NP и PQ.

б) Пресметнете отношението $\frac{AN}{NO}$.

в) Пресметнете отношението на лицата на ΔNOP и трапеца $ABCD$.

Задача 8. Основата на пирамида $ABCDM$ е трапец с голяма основа $AB = 2m$ и остър ъгъл φ. Всички околни ръбове сключват с равнината на основата ъгъл α, а върхът M се проектира в средата на страната AB.

а) Пресметнете обема на пирамидата.

б) При фиксирани m и α покажете, че максималната стойност на обема на пирамидата се достига при $\varphi = 60^\circ$.

в) Пресметнете разстоянието от върха B до околната стена ADM.

Технически университет - София
2 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\sqrt[3]{\left(5-\sqrt{17}\right)\left(5+\sqrt{17}\right)}+\dfrac{3^4.3^{11}}{3^6.3^7}$ е:

а) 8 б) 9 в) 10 г) 11 д) **12**

2. Стойността на израза $(6,25)^{0.5}.\left(\dfrac{1}{16}\right)^{0.25}$ е:

а) $\dfrac{1}{8}$ б) $\dfrac{3}{8}$ в) $\dfrac{3}{4}$ г) $\dfrac{5}{4}$ д) $\dfrac{5}{2}$

3. След намалението на цената на една стока с 20%, новата цена е 100 лв. Първоначалната цена на тзи стока е:

а) 100 лв б) 110 лв в) 115 лв г) 120 лв д) 125 лв

4. Най-големият корен на уравнението $\left|x^2-2x+1\right|=2(x+1)$ е:

а) $2-\sqrt{7}$ б) 2 в) $2+\sqrt{3}$ г) $2+\sqrt{5}$ д) $3+\sqrt{5}$

а) $3\sqrt{3}tg\alpha$ б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}tg\alpha$ в) $3\sqrt{3}\sin\alpha$ г) $9\sqrt{3}tg\alpha$ д) $9tg\alpha$

20. Корените на квадратното уравнение $kx^2+2kx-2k+1=0$ са отрицателни за стойностите на реалния параметър k в интервала:

а) $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ б) $\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$ в) $\left[\dfrac{1}{3};\infty\right)$ г) $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ д) $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\dfrac{3^{2x}-21}{3^x-3}=10$.

22. Да се реши уравнението $\lg(x-4)+\lg(x-8)=\lg 8$.

23. Да се реши неравенството $\dfrac{4}{|x-1|}-\dfrac{1}{|x-2|}\le 0$.

24. Да се намерят целите решения на неравенството $\dfrac{x-2}{x^2-9x+14}\le -\dfrac{2}{13}$.

25. Да се реши системата $\begin{vmatrix}(x-y)\left(x^2-y^2\right)=45\\ x+y=5\end{vmatrix}$.

26. Библиотекар подрежда по случаен начин 10 книги в редица. Ако точно три са с червена подвързия, каква е вероятността те да са подредени една до друга?

27. Върху графиката на функцията $f(x)=x^3+x^2+4$ е избрана т. A с абсциса $x=-1$. Да се намери ординатата на т. A и големината на ъгъла, който сключва допирателната на $f(x)$ в т. A с положителната посока на оста Ox.

13. Стойността на израза $\frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ\right)\sin 10^\circ$ е:

а) $\frac{1}{4}$ **б)** $\frac{1}{8}$ **в)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **г)** $\frac{1}{8}+\sin 10^\circ$ **д)** $\frac{1}{2}\sin 10^\circ$

14. Ако $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, то числото $\cot g\frac{\alpha}{2}$ е равно на:

а) $\frac{1}{3}$ **б)** $-\frac{1}{3}$ **в)** $\frac{1}{2}$ **г)** $-\frac{1}{2}$ **д)** $\frac{3}{2}$

15. Стойността на производната на функцията $f(x) = 2\cos 2x + \pi$ в $x = \frac{\pi}{6}$ е:

а) $-2\sqrt{3}$ **б)** $2\sqrt{3}$ **в)** $-\sqrt{3}$ **г)** $\sqrt{3}$ **д)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. основата на равнобдрен триъгълник е 6 cm, а медианите към бедрата са взаимно перпендикулярни. Дължината на третата медиана в сантиметри е:

а) 3 **б)** 6 **в)** 9 **г)** 12 **д)** 15

17. Дължината на страната на ромб е 5 cm, а сборът от диагоналите му е 14 cm. Лицето на ромба е:

а) 96 cm^2 **б)** $12\sqrt{2}$ **в)** 12 cm^2 **г)** 20 cm^2 **д)** 24 cm^2

18. В сфера с радиус 15 cm е вписан прав кръгов конус с ъгъл γ между двете образувателни на осното му сечение. Ако $\cos\gamma = -\frac{4}{5}$, то радиусът на основата на конуса е:

а) 20 cm **б)** 7,5 cm **в)** 9 cm **г)** 10 cm **д)** 5 cm

19. Около основата на правилна триъгълна пирамида е описана окръжност с радиус $2\sqrt{3}$ cm. Околните стени сключват с основата ъгъл с големина α. Обемът на пирамидата в cm^3 е:

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 + 6x + 1 = 0$, то стойността на израза $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$ е:

а) 2 **б)** 3 **в)** 4 **г)** 5 **д)** 6

6. Функцията $f(x) = 3x^2 - 5|x| + 2$ за $x \in (-\infty;\infty)$ е:

а) ограничена **б)** четна **в)** нечетна
г) линейна **д)** периодична

7. Стойността на най-малкото и най-голямото цяло число, които са решение на неравенството $\frac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)} \geq 0$, е равен на:

а) 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4

8. Стойността на израза $4^{\log_2 5} + \left(\log_5 7\right)\left(\log_{49}(-5)(-25)\right)$ е:

а) 26,5 **б)** 27 **в)** 27,5 **г)** 28 **д)** 28,5

9. За разликата d на аритметична прогресия с общ член a_n, за която $a_7 + a_9 = 30$ и $a_6 a_{10} = 209$, е вярно, че:

а) $d = 2$ **б)** $d^2 = 4$ **в)** $d^2 = 2$ **г)** $d = 3$ **д)** $d^2 = 9$

10. Най-малката стойност на функцията $f(x) = 3\cos x - 4\sin x + 1$ в затворения интервал $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ е:

а) -4 **б)** -3 **в)** -2 **г)** -1 **д)** 0

11. Ако $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, то числото $tg\alpha$ е равно на:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **в)** $-\sqrt{3}$ **г)** $\sqrt{3}$ **д)** 2

12. В една ваза има 9 червени и 6 бели рози. Броят на различните начини, по които може да се образува букет от 1 червена и 2 бели рози, е:

а) 125 **б)** 125 **в)** 108 **г)** 95 **д)** 54

13. Стойностите на параметъра a, за които медианата на данните $12,5,3,7,11,6,a$ е равна на 6, са:

а) $a=7$ б) $a=\{7;8\}$ в) $a=9$ г) $a=\{9;12\}$ д) $a\in(-\infty;6]$

14. В правоъгълен ΔABC с катет $AC=20\ cm$ и височина $CD=12\ cm$ длжината на катета BC е:

а) 9 cm б) 10cm в) 15 cm г) 16 cm д) 17cm

15. Градусната мярка на острия ъгъл на ромб с периметър 32 cm и височина 4 cm е:

а) 75° б) 60° в) 45° г) 30° д) 15°

16. Хордата AB разделя окръжността на две дъги, дължините на които се отнасят, както 5:4. Градусната мярка на най-малкия вписан в окръжността $\angle ACB$ е:

а) 80° б) 70° в) 65° г) 60° д) 45°

17. Страните на успоредник имат дължини 6 cm и 2 cm, а големината на острия му ъгъл е $\frac{\pi}{3}$. По-големият диагонал има дължина:

а) 6 cm б) **6,5** cm в) $2\sqrt{11}\ cm$ г) 7 cm д) $2\sqrt{13}\ cm$

18. В правилна триъгълна пирамида $ABCM$ точка O е медицентър на основата ABC. Обемът на пирамидата е 72 cm^3, а лицето на основата е 12 cm^2. Дължината на MO е:

а) 18 cm б) 20 cm в) 21 cm г) 22 cm д) 25 cm

19. В правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ точка O е пресечна точка на диагоналите AC и BD на основата $ABCD$, като $AC=22\ cm$ и $MC=61\ cm$. Дължината на отсечката MO е:

а) 58 cm б) 60 cm в) 61 cm г) 62 cm д) 65 cm

6. Сборът на първите десет члена на аритметична прогресия е 20. Ако разликата на прогресията е $d=-4$, то първият член на тази прогресия е:

а) 20 б) 28 в) 91 г) 92 д) -80

7. Ако редицата с общ член a_n е геометрична прогресия с частно $q=0,2$, то стойността на израза $\left(\frac{a_8}{a_6}+\frac{a_{12}}{a_9}\right)^{\frac{1}{3}}$ е равна на:

а) 0,48 б) 0,048 в) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ г) $2\sqrt[3]{6}$ д) $\frac{\sqrt[3]{6}}{5}$

8. Статистически ред се състои от 10 данни. Ако разликата между средните два члена е 2, а медианата на тези данни е 5, то произведението на средните два члена е:

а) 5,25 б) 15,75 в) 48 г) 24 д) 12

9. Различните начини, по които могат да седнат 6 човека около кръгла маса са на брой:

а) 820 б) 120 в) 36 г) 12 д) 6

10. В кутия има3 зелени, 2 червени, 5 сини и 8 черни химикалки. По случаен начин от кутията се изважда една от тях. Вероятността тя да не е черна или червена е:

а) $\frac{5}{9}$ б) $\frac{1}{3}$ в) $\frac{5}{18}$ г) $\frac{4}{9}$ д) $\frac{8}{9}$

11. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\log_x\left(4-x^2\right)$ е:

а) $(-2;2)$ б) $(0;1)\cup(1;2)$ в) $(1;2]$ г) $(2;\infty)$ д) $\varnothing$

12. Границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2-x+7}}{3x+8}$ е равна на:

а) $-\frac{1}{3}$ б) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ в) $\frac{9}{8}$ г) $-\frac{1}{8}$ д) 1 лежат, сключва с основата ъгъл с големина α. Да се намери височината на дадената пирамида.

30. Да се намерят корените на уравнението $2+\cos^2 8x+\cos^2 2x=2\cos 8x\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos x$, които принадлежат на затворения инатервал $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Технически университет - София
4 юли 2016 г.

***ПЪРВА ЧАСТ**: За всеки верен отговор по 1 точка*

1. Стойността на израза $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}+\left(-3^3\right)^{-\frac{1}{3}}$ е:

а) $\frac{7}{3}$ **б)** $\frac{5}{3}$ **в)** -1 **г)** $\frac{1}{6}$ **д)** $\frac{17}{9}$

2. Средното аритметично на 30 числа е 50. Ако всяко от числата се намали с 10, то средното им аритметично ще е равно на:

а) 45 **б)** 40 **в)** 35 **г)** 30 **д)** 20

3. Броят на корените на уравнението $\sqrt{3x^2-11x}=2$, които са корени и на уравнението $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=3$ е:

а) нито един **б)** един **в)** два **г)** три **д)** четири

4. Стойността на израза $\log_2 1024+\lg 0,1+3^{\log_3 5}$ е:

а) 16 **б)** 15 **в)** 14 **г)** 12 **д)** 11

5. Ако числата x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2+6x+4=0$, то стойността на израза $3\sqrt{x_1x_2}-x_1^2-x_2^2$ е:

а) -22 **б)** -38 **в)** 12 **г)** 34 **д)** 0

20. Сфера с радиус 2 cm е вписана в правоъгълен парарлелепипед така, че се допира до всички негови стени. Обемът на паралелепипеда е:

а) 8 cm^3 **б)** 64 cm^3 **в)** 65 cm^3 **г)** 81 cm^3 **д)** 100 cm^3

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по** 2 **точки.

21. Да се реши уравнението: $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$.

22. Да се реши неравенството $\sqrt{2x-1}<x-2$.

23. Да се намери произведението на най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x)=-2x^2+12x-16$ при $x\in[1;4]$.

24. Числата a, b, c и d в този ред образуват геометрична прогресия. Да се намери стойността на израза $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$.

25. Да се намерят всички числа x от затворения интервал $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, за които $\sin^2 2x-\sin^2 x=\frac{1}{2}$.

26. В кутия има 10 червени, 5 зелени и 5 бели топки. По случаен начин от кутията се изважда една топка. Да се намери вероятността извадената топка да е червена или зелена.

27. Да се намери радиусът на вписаната в равнобедрен триъгълник окръжност с основа 16 cm и височина към основата 6 cm.

28. Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) се пресичат в точка O, така че $BO:OD=5:3$. Ако $DC=15$ cm, да се намери дължината на отсечката AB.

29. Основата на пирамида е равнобедрен триъгълник с основа 6 cm и височина към нея 9 cm. Всички околни ръбове на пирамидата имат дължина 13 cm. Да се намери обемът на пирамидата.

30. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $x^2-(k+1)x+k^2+k-8=0$ има два корена x_1 и x_2, за които $x_1<2<x_2$.

Технически университет - София
16 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Ако $A=\left(\frac{7}{5}+3,5\right):\left(-\frac{25}{6}+3,25\right)+\frac{26}{11}$ тостойността на израза $\sqrt{-A}$ е:

а) 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4

2. Стойността на израза $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)$ е:

а) 2 **б)** 1 **в)** -3 **г)** -5 **д) -7**

3. Корените на уравнението $\frac{5x+4}{x+2}-\frac{2x-5}{x+5}=3$ са измежду числата:

а) 3; 4; 5 **б)** 2; 3; 4 **в)** 0; 1; 2 **г)** -2; -1; 3 **д)** $\frac{1}{2};\frac{9}{4};\frac{1}{5}$

4. Най-голямото цяло число a, за което неравенството $\frac{x-3a}{x-a+3}<0$ е изпълнено за всяко число x от затворения интервал [1;3] е:

а) 1 **б)** 2 **в)** 3 **г)** 4 **д) 5**

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2+3x-5=0$, то числата x_1+x_2 и x_1x_2 са корените на уравнението:

а) $[0;1)$ **б)** $(0;1)$ **в)** $(-\infty;0)$ **г)** $(1;\infty)$ **д)** $[1;\infty)$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $25^x-3.5^x-10=0$.

22. Да се реши неравенството $\lg 2x+\log_{\frac{1}{10}} x-\lg(x+1)\ge 0$.

23. Да се намери най-малкото цяло число x, за което е изпълнено неравенството $\frac{|2x-3|-1}{6x^2-5x+2}\le 0$.

24. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=-x^2+2x-4$ в затворения интервал $[-1;0]$.

25. Иван внесъл на срочен депозит в банка 1000 лв. при сложна годишна лихва 5%. Да се намери колко ще бъдат вложените пари след две години, ако сложната годишна лихва не се променя.

26. Колко различни набирания най-много може д анаправи човек, който иска да се свърже със седемцифрен телефонен номер, ако номеърт започва с 6582, всичките му цифри са различни и последната не е 0?

27. Да се намери вероятността първото изтеглено число в тото играта „6 от 42“ да е четно или да е число, което се дели без остатък на 5.

28. Правата t и окръжността k се допират в точка B. Хордата BC ($C\in k$) има дължина $4\sqrt{6}$ cm. Точка $A\in t$, $A\notin k$ и $\angle CBA=60$. Да се намери лицето на кръга, определен от k.

29. Пирамида има за основа равностранен триъгълник със страна a. Два от околните ръбове сключват с равнината на основата равни ъгли с големина φ, а равнината, в която те

14. Ако квадратната функция $f(x)$ има най-голяма стойност 4 при $x=0$ и $f(-2)=0$, то стойността и при $x=3$ е равна на:

а) -1 б) -13 в) 13 г) 5 д) -5

15. В правоъгълния ΔABC отсечката CH е височина към хипотенузата AB. Ако $AH=16\ cm$, $BH=20\ cm$, то дължината на AC в сантиметри е:

а) $8\sqrt{5}$ б) $12\sqrt{5}$ в) $4\sqrt{5}$ г) 26 д) 24

16. Остроъгълен ΔABC е вписан в окръжност с център точка O. Страната $AB=2\sqrt{3}\ cm$ и е на разстояние 1 cm от точка O. Градусната мярка на $\angle ACB$ е:

а) 30 б) 60 в) 45 г) 90 д) 15

17. Страната на ромба $ABCD$ е 10 cm. Ако $\angle BAD=2\alpha$ и $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, то лицето на ромба е:

а) 60 cm^2 б) $32\sqrt{5}\ cm^2$ в) 48 cm^2 г) 96 cm^2 д) 80 cm^2

18. Голямата основа AB и бедрото на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) са съответно равни на $10cm$ и 7 cm. Ако дължината на диагонала е $\sqrt{89}\ cm$, то косинусът на $\angle ADC$ е равен на:

а) $\frac{3}{7}$ б) $-\frac{3}{7}$ в) $-\frac{3\sqrt{19}}{38}$ г) $\frac{3\sqrt{19}}{38}$ д) $\frac{7}{10}$

19. В правилна четириъгълна пирамида височината към основата е 6 cm, а околен ръб сключва с основата ъгъл с големина 45 . Обемът на пирамидата е:

а) 24 cm^3 б) 72 cm^3 в) 120 cm^3 г) 144 cm^3 д) 432 cm^3

20. Стойностите на реалния параметър k, за които функцията $f(x)=\lg\left(kx^2+2kx+1\right)$ е дефинирана за всяко реално число x, принадлежат на интервала:

а) $x^2+8x+15=0$ б) $x^2-8x+15=0$ в) $x^2-8x-15=0$
г) $x^2+8x-15=0$ д) $x^2-8x+8=0$

6. Най-малкото число a, за което най-малката стойност на функцията $f(x)=x^2-2ax+43$ при $x\in(-\infty;\infty)$ е равна на 7, е:

а) -12 б) -6 в) 1 г) 6 д) 12

7. Най-голямото число, което е решение на неравенството $\frac{\left(x^3+8\right)\left(x^2-6x-7\right)}{x^2-4}\leq 0$, е:

а) 3 б) 4 в) 5 г) 7 д) 9

8. Числото a е избрано така, че модата на данните $13;5;2;7;10;9;a$ е 7. Тогава медианата на тези данни е равна на:

а) 5 б) 7 в) 8 г) 9 д) 10

9. Ако системата $\begin{cases}3x-\left(p^2-6\right)y=p\\ x-y=1\end{cases}$ няма решение, то стойността на параметъра p е:

а) -5 б) -3 в) 1 г) 3 д) 5

10. За аритметична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_2+a_6=54$ и $a_3+a_8=69$. Разликата на прогресията е:

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6

11. За геометрична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_4=64a_1$ и $a_2+a_3=10$. Стойността на a_1 е:

а) 2 б) $\frac{3}{2}$ в) $\frac{3}{4}$ г) $\frac{1}{2}$ д) 4

12. Сборът на корените на уравнението $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$ е:

а) 18 б) 25 в) 30 г) 34 д) 36

13. Решението на уравнението $4^x.5^{x+1}=100.20^{1-x}$ е измежду числата:

а) 1; 3 б) 2; 4 в) 3; 5 г) 4; 6 д) 5; 7

14. Най-големият корен на уравнението $\log_5 x - \log_x 5 = \frac{3}{2}$ е:

а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ б) $\sqrt{5}$ в) 5 г) 25 д) 125

15. Стойността на израза $\sin^2 265^\circ + \cos^2 95^\circ$ е:

а) 3 б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ г) $\frac{3}{2}$ д) 1

16. Даден е ΔABC, като $AB = 5$ ***cm***, $BC = 8$ ***cm*** и $\cos\angle BAC = \frac{7}{8}$. Дължината на страната AC е:

а) 12 ***cm*** б) 11 ***cm*** в) 10 ***cm*** г) 9 ***cm*** д) 8 ***cm***

17. Даден е равнобедрен триъгълник с бедро 20 ***cm*** и диаметър на описаната около триъгълника окръжност 25 ***cm***. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:

а) 5 ***cm*** б) 6 ***cm*** в) 7 ***cm*** г) 8 ***cm*** д) 9 ***cm***

18. Дължината на единия катет на правоъгълен триъгълник е с 10 ***cm*** по-голяма от дължината на другия катет и е с 10 ***cm*** по-малка от дължината на хипотенузата. Дължината на хипотенуата е:

а) 50 ***cm*** б) 45 ***cm*** в) 40 ***cm*** г) 35 ***cm*** д) 30 ***cm***

19. Телесен диагонал на куб е $3\sqrt{3}$ ***cm***. Лицето на пълната повърхнина на куба е:

а) 56 cm^2 б) 54 cm^2 в) 48 cm^2 г) 45 cm^2 д) 32 cm^2

20. Основата на триъгълна пирамида $ABCM$ е равностранен ΔABC със страна 6 ***cm***. Градусната мярка на ъгъла между равнините (ABC) и (BCM) е 30°. Ако околният ръб MA е перпендикулярен на основата, то обемът на пирамидата е:

а) $\frac{25}{4}$ cm^3 б) в) г) $9\sqrt{3}$ cm^3 д) $27\sqrt{3}$ cm^3

6. Броят на членовете на крайната аритметична прогресия 7; 11; 15;...,399 е:

а) 96 б) 97 в) 98 г) 99 д) 100

7. Стойността на израза $\lg 2 + \lg 5 + 3^{\log_3 2} + \log_{1.5}\frac{2}{3} + 4\log_2\sqrt{8}$ е:

а) 9 б) 8 в) 10 г) -1 д) 5

8. Кое от числата не може да бъде вероятност на случайно събитие?

а) $tg\frac{\pi}{4}$ б) $\sqrt{\frac{1}{1764}}$ в) 123^{-2} г) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ д) $\lg\frac{1}{2}$

9. От клас с 15 момчета и 10 момичета се избират по случаен начин трима ученици за участие в ученическа конференция. Различните начини, по които може да бъдат иззбрани, така че да има точно две момчета, са:

а) 1050 б) 600 в) 290 г) 35 д) 29

10. Произведението на модата и медианата на данните 14; 11; 2; 7; 1; 3; 2; 10 е равно на:

а) 8 б) 2 в) 6 г) 10 д) 5

11. Стойността на израза $\frac{\sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ + 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ}{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$ е:

а) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{3}{2}$ в) $\sqrt{3}$ г) $2+\sqrt{3}$ д) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

12. Броят на целите числа a, за които $\left(\frac{27-3a^2}{a^2-4a+3}\right)^{-1} \geq 0$, е равен на:

а) 5 б) 2 в) 3 г) 4 д) ∞

13. Границата $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+11x+10}{x^3+1}$ е равна на:

а) 9 б) 3 в) -3 г) -11 д) -9

$\frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^3$ $\qquad$ $\frac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^3$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

22. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2-4x+1=0$, да се намери стойността на израза $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

23. Да се намерят всички цели положителни числа, които са решение на неравенството $\left(x^2-x\right)\left(x^2+3x+2\right)\le 0$.

24. Да се реши уравнението $\sqrt{x+12}+x=8$.

25. В кутия има 9 червени и повече от две бели рози. Броят на различните начини, по които от розите в кутията може да се образува букет от 1 червена и 2 бели рози е равен на 135. Да се намери броят на белите рози.

26. Да се намерят корените на уравнението $\frac{\cos x}{|\cos x|}=2\sin x-1$, които принадлежат на затворния интервал $[0;\pi]$.

27. В трапец разстоянието нежду средите на двете основи е 2 cm, а градусните мерки на ъглите при едната основа са 20° и 70°. Ако средната отсечка на трапеца е 4 cm, да се намери дължината на по-малката основа.

28. Основите на трапец са 10 cm и 2 cm. В трапеца може да се впише окръжност и около него може да се опише окръжност. Да се намери радиусът на вписаната в трапеца окръжност.

29. Основата на пирмида е равнобедрен триъгълник с бедро 3 cm и ъгъл между бедрата с големина α. Всички околни ръбове на пирамидата сключючват с основата равни ъгли с градусна мярка 45°. Да се намери височината на пирамидата.

30. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ има четири различни корена.

Технически университет - София
23 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$ е:

а) 0 $\qquad$ **б)** 2 $\qquad$ **в)** $2\left(\sqrt{3}-2\right)$ $\qquad$ **г)** $2\left(2-\sqrt{3}\right)$ $\qquad$ **д)** $\sqrt{3}-3$

2. Числото $\sqrt{22+\sqrt{84}}$ е равно на:

а) $\sqrt{106}$ $\qquad$ **б)** $\sqrt{21}-1$ $\qquad$ **в)** $\sqrt{21}+1$ $\qquad$ **г)** $\sqrt{22}+\sqrt[4]{84}$ $\qquad$ **д)** $\sqrt[4]{568}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2+3x-6=0$, то стойността на израза $x_1^3+x_2^3$ е:

а) -81 $\qquad$ **б)** 81 $\qquad$ **в)** 54 $\qquad$ **г)** -27 $\qquad$ **д)** 27

4. Корените на уравнението $(x+1)\left(x-\sqrt{7}\right)=0$ са:

а) -1 и 49 $\qquad$ **б)** -1 и $\sqrt{7}$ $\qquad$ **в)** -1 $\qquad$ **г)** $\sqrt{7}$ $\qquad$ **д)** 49

5. За геометрична прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_4-a_2=30$ и $a_2+a_5=90$. Частното на прогресията е:

а) $2+\sqrt{8}$ $\qquad$ **б)** $2-\sqrt{8}$ $\qquad$ **в)** 2 $\qquad$ **г)** -2 $\qquad$ **д)** **5**

15 години

ВУЗФ

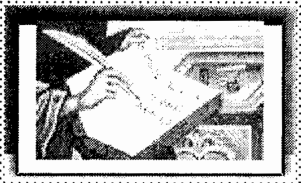
Университет по финанси, бизнес и предприемачество

PER ASPERA AD ASTRA

2002

PhD
програми

vuzf.bg



M+ СЕМИНАР

ЦЕНООБРАЗУВАНЕ. МЕТОДИ НА ПЪЛНИТЕ И СРЕДНИ РАЗХОДИ

д-р Асен Велчев, УНСС – София

1. Основни понятия и означения: приходи, разходи, рентабилност. Видове.

Класификацията на разходите е важна за тяхното ефективно управление, тъй като по този начин може да се обхване и систематизира огромното им многообразие, с цел да може да се въздейства върху тях, чрез различни механизми. Според видовете им има различни методи за ценообразуване, които ще разгледаме в серия статии тук.

Да преминем към посочения предмет и свързаните с него основни понятия. Ще започнем с пример: пекар желае да произвежда хляб и закуски. За целта трябва първо, да построи, закупи или наеме пекарна. Нека е закупил парцел, построил е в него и оборудвал такава, като всичко това му е коствало 800 000 лв. Тези разходи **не** зависят от обема на по-нататъшното производство и се наричат **постоянни разходи** (**fixed costs** - *FC*). При това положение, *FC* са и брутни такива (за целия обем продукция се отнасят, а не за отделни произведени бройки). Затова те са и **total fixed costs** – *TFC*. Постоянните разходи се разпределят пропорционално върху бройките произведена продукция. Постоянен разход за единица продукт се наричат средни/усреднени постоянни разходи (**average fixed costs** - *AFC*). Обемът на производството (брой изделия) се означава с *Q* (от quantity - количество).

Променливи разходи (**variable costs** - *VC*) са тези, свързани с обема и структурата на производство. Такива, при пекаря например, са средствата за брашно, захар, масло, сирене, ток, вода и подобни. Разходите за вложените хранителни материали се увеличават заедно с обема производство или право пропорционално, *или по друг закон*. Самите количества хранителни продукти нарастват пропорционално: нужните продукти за 100 банички са двойно повече от тези, нужни за 50 броя, но от друга страна, при големи закупени количества продукти пекарят евентуално може да ползва отстъпки в доставяните им цени. По този начин, примерно двойно повече суровини няма да имат два пъти стойността на настоящите, а 1,9 поне. Изобщо, променливите разходи, според зависимостта им от обема производство, могат да бъдат **пропорционални**, **прогресивни** и **дегресивни** (намаляващи), но в задачите в тази статия ще считаме, за улеснение, че те нарастват пропорционално. Променливите разходи също се подразделят на брутни (**total variable costs** – *TVC*), отнасящи се за целия произведен обем и средни (за бройка - **average variable costs** – *AVC*).

По друг признак разходите могат да се разделят на преки и косвени. **Преки разходи** (direct costs – *DC*) са тези, които могат да бъдат директно отнесени към конкретни единици продукция. Такива са, например разходите за вложените в тестените изделия био-суровини: яйца, мляко, мая, брашно и пр. Те именно са досега разглежданите *VC*.

Косвени разходи (indirect costs) са тези, които **не** могат да бъдат отнесени към точно определени продукти. Такива са например разходите при подпомагащи производствения процес дейности: ремонт на производствени съоръжения, застраховане, амортизации, данъци върху тях и пр. Те са досега разглежданите *FC*.

Брутната сума от всички разходи, постоянни и променливи, направени *за целия обем* производство, се нарича **пълни разходи (total costs** – *TC*) и $TC = TFC + TVC$.

Брутният приход от продажби на цялата продукция бележим с *TR* (от англ. **total revenue**). **Печалба** наричаме разликата между *TR* и *TC* (надценката над *TC*). Означаваме я с *Pr* (от англ. **profit**). Т.е. $Pr = TR - TC$.

Рентабилност *R* – мярка/показател за ефективност на дадено производство, направени вложения на капитал, труд, време и др., изразяващ степента на доходност от произвеждан продукт. Пресмята се така:

Рентабилност от приходи: $R_{приходи} = R_{TR} = \dfrac{нетна\ печалба}{брутни\ приходи} = \dfrac{Pr}{TR}$;

Рентабилност на вложени ресурси: $R_{рес.} = R_{TC} = \dfrac{нетна\ печалба}{стойност\ на\ ресурсите} = \dfrac{Pr}{TC}$;

Рентабилност на произволен фактор *X*: $R_X = \dfrac{нетна\ печалба}{X} = \dfrac{Pr}{X}$.

Същите величини в проценти са: $R_{TR} = \dfrac{Pr}{TR} \cdot 100$, $R_{TC} = \dfrac{Pr}{TC} \cdot 100$ и $R_X = \dfrac{Re}{X} \cdot 100$.

Например, ако вложение от 1000 лв носи чиста печалба от 180 лв, то $R_{TC} = \dfrac{Pr}{TC} \cdot 100 = \dfrac{180}{1000} \cdot 100 = 18\%$.

Офертна цена на продукт (**Offer Price** – *OP* или само *P* - от **Price**) наричаме тази, на която фирмата предлага една бройка/единица от дадения продукт.

Повечето от въведените съкращения и означения се дублират с такива за други икономически понятия, поради което контекстът подсказва в кой смисъл да бъдат тълкувани. Например, *AVC* може да означава Additional Voluntary Contribution (допълнителни пенсионни вноски по желание), а *VC* – Venture Capital и т.н. В цялата статия обаче, ще считаме, че всички означения трябва да се тълкуват именно в смисъла, с който са въведени тук.

2. Ценообразуване. Метод на пълните разходи.

За да бъде изготвена офертна цена, фирмата трябва да калкулира разходите си, да заложи минимална устройваща я ставка на печалбата и да проучи пазара. Желателно е брутният приход от продажбите – TR, да бъде равен най-малко на сбора от пълните разходи TC и нетната желана минимална печалба Pr (от целия обем производство), изчислена като предварително зададена част/процент от TC. **Единичната** (на едно изделие) **минимална офертна цена** тогава е $P_{\min} = \dfrac{TR}{Q} = \dfrac{TC + Pr}{Q}$.

Алгоритъм за ценообразуване: ако променливите разходи за бройка изделие са общо AVC лв, обемът производство Q бр, брутните постоянни разходи за цялото производство TFC лв, а нормата на **печалбата** (надценката) Prе 20% от TC, то:

$TC = TFC + TVC = TFC + AVC.Q$,

$Pr = \dfrac{20}{100}TC = 0{,}2(TFC + AVC.Q)$, а

$TR = TC + Pr = TC + 0{,}2TC = 1{,}2(TFC + AVC.Q)$, т.е.

$TR = 1{,}2(TFC + AVC.Q)$, единичната цена е

$P = \dfrac{TR}{Q} = \dfrac{1{,}2(TFC + AVC.Q)}{Q}$, където P идва от **price** – цена.

В задачите ще доизясним същността на метода, негови детайли и особености.

Задача 1. Фирма произвежда ново изделие с преки производствени разходи 22 лв/бр,обем производство за стандартно натоварване на производствените мощности 6000 бр, сумарни постоянни разходи 18 000 лв при икономически необходима рентабилност 20% от сумарния вложен ресурс. Намерете:

А) Офертната цена на производителя;

Б) Фактически реализираната печалба и равнището на рентабилност, ако фирмата пласира 4800 бр. изделия на цената от **А**).

Решение 1. А) Постоянните разходи (**не**зависещи от обема производство) тук са $TFC = 18\,000$ лв. Преките единични разходи са c = 22 лв/бр, а при $Q = 6\,000$ изделия общо преките разходи биха били $VC = cQ = 22.6\,000 = 132\,000$ лв. Пълни (брутни) разходи: $TC = FC + VC = 18\,000 + 132\,000 = 150\,000$ лв. Рентабилността е 20% от TC, а брутните приходи, тогава от продукцията ще бъдат

$$TR = (1 + R_c)TC = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot 150\,000 = \frac{6}{5} \cdot 150\,000 = 180\,000 \text{ лв.}$$

На едно от тези 6000 изделия, тогава, ще се пада цена $P = \dfrac{TR}{Q} = \dfrac{180\,000}{6000} = 30$ лв;

Решение 1. Б) При 4800 продадени изделия: пълен приход $\text{TR} = 30 * 4\,800 = 144\,000$ лв, пълни разходи $TC = 18\,000 + 22 * 4\,800 = 123\,600$ лв, печалба $Pr = TR - TC = 144\,000 - 123\,600 = 20\,400$ лв. и рентабилност

$$R = \frac{\text{печалба}}{\text{брутни разходи}} \cdot 100 = \frac{Pr}{TC} \cdot 100 = \frac{20400}{123600} \cdot 100 = 16{,}5\% .$$

Вариант 2: $\text{TR} = 30 * 4\,800 = 144\,000$ лв, $TC = 18\,000 + 22 * 6\,000 = 150\,000$ лв,

$$Pr = TR - TC = 144\,000 - 150\,000 = -6\,000 \text{ лв и } R = \frac{\text{печалба}}{\text{разходи}} \cdot 100 = \frac{-6\,\theta\theta\theta}{15\theta\,\theta\theta\theta} \cdot 10\theta = -4\% .$$

Отворени въпроси: И двата варианта ли са допустими, имат ли приложения и ако да, къде? Какви предимства и недостатъци имат един спрямо друг?

Отговори изпращайте и четете в следващия брой.

Задача 2. Фирма произвежда изделие с преки производствени разходи 10 лв/бр. Обемът производство за стандартно натоварване на мощностите е 10 000 бр, сумата от постоянни разходи – 30 000 лв., а необходимата рентабилност: 25%. Намерете:

А) Офертната цена на производителя;

Б) Фактически постигнатите печалба и рентабилност при реализирани 9000 бр.

Решение 2. изготви и по двата метода, изпрати и виж в следващ брой.

3. Метод на средните разходи.

При този метод изчисляваме усреднен разход за една единица изделие, добавяме към него процент печалба, съответен на икономически необходимата рентабилност и така получаваме направо единичната цена. Това на пръв поглед изглежда дори по-естествено от метода на пълните разходи, но ще видим в какво се състоят предимствата на другия метод. Изчисляваме частта от постоянния разход TFC, падаща се на единица продукт, така: $AFC = \dfrac{TFC}{Q}$, събираме полученото с AVC и получаваме общия усреднен разход (**average cost** – AC) за единица изделие: $AC = AFC + AVC$.

Решение 1. Б) (по метода на средните разходи) Постоянни разходи: $AFC = \dfrac{TFC}{Q} = \dfrac{18\,000}{4\,800} = 3{,}75$ лв/бр; $AC = AFC + AVC = 22 + 3{,}75 = 25{,}75$ лв/бр.

Фактическата печалба *за едно изделие* тогава би била $\text{Pr} = P - AC = 30 - 25{,}75 = 4{,}25$ лв, рентабилността $R = \dfrac{\text{печалба}}{\text{разходи}} \cdot 100 = \dfrac{4{,}25}{25{,}75} \cdot 100 = \dfrac{42\,500}{2575} = 16{,}5\%$, а брутната печалба: $\text{Pr} = 4{,}25 * 4\,800 = 20\,400$ лв.

Ако стоката е малотрайна и се изхвърлят останалите 1 200 изделия, *ситуацията е* друга. Да означим $Q = 6000$ и $Q_1 = 4800$. Тогава $\text{TR} = \text{PQ}_1 = 30 * 4\,800 = 144\,000$ лв,

$TC = 18\,000 + 22 * 6\,000 = 150\,000$ лв, $AC = AFC + AVC = \dfrac{TFC}{Q_1} + \dfrac{TVC}{Q_1} = \dfrac{TC}{Q_1} =$

$= \dfrac{150\,000}{4800} = 31{,}25$ лв/бр, печалба за изделие $Pr = P - AC = 30 - 31{,}25 = -1{,}25$ лв, брутна печалба $Pr = Pr_1 . Q_1 = -1{,}25.4800 = -6\,000$ лв, а за рентабилността има два начина: $R = \dfrac{\textit{печалба}}{\textit{разходи}} \cdot 100 = \dfrac{\Pr}{TC} \cdot 100 = \dfrac{-6\,000}{150\,000} \cdot 100 = -4\%$ и $R = \dfrac{Pr_1}{AC} \cdot 100 = \dfrac{-1{,}25}{31{,}25} \cdot 100 = -4\%$.

При малотрайна продукция ни трябваше „цялата картина”, а не анализи и смятане „на парче”, т.е., изделие по изделие. Виждането на цялата картина е полезно и в много други случаи, особено при стратегическо планиране, поради което методът на пълните разходи е за предпочитане и там.

Задача 3. Фирма произвежда изделия с преки производствени разходи 18 лв/бр, обем производство за стандартно натоварване на мощностите – 5 000 бр, сума на постоянните разходи - 3 000 лв. и необходима рентабилност – 20%. Определете равнището на офертната цена на производителя за**:**

А) основния обем производство;

Б) допълнителния обем производство, покриваща само преките разходи;

В) допълнителния обем производство, осигуряваща печалба за единица изделие, постигната при основния обем производство;

Г)допълнителния обем производство, осигуряваща печалба, съответстваща на рентабилността при базовия обем производство.

Решение 3. **А**) Ще решим задачата по метода на средните разходи, за да го доупражним. Решението ще е принципно същото, като това на **Задача 1 Б**), но поместено на един ред. При предходното решение за яснота беше акцентирано на всеки детайл, а тук целим систематизация на подхода и максимална рационалност на действията ни. Същевременно тази задача е подготвителна за други методи за ценообразуване, които ще разгледаме в следваща статия.

Да преминем към самото решение на задачата, а за домашно *запишете и решението на* **Задача 1 Б**) *в същия кратък вид*:

Офертната единична цена трябва да покрие 100% от пълните разходи и да донесе печалба 20%, т.е. тя трябва да е 120% *(преки + постоянни разходи), т.е.

$$P = \frac{120}{100} \cdot \left(18 + \frac{3\,000}{5\,000}\right) = \frac{6.20}{5.20} \cdot \left(\frac{18.5}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{90+3}{5} = \frac{558}{25} = 22{,}32 \text{ лв/бр;}$$

Б) Преките разходи са 18 лв/бр. Резонно е допълнителният обем продукция да покрива само тях, понеже чрез основния обем постоянните разходи са вече покрити. Щом няма изискване за печалба, то единичната цена е P = 18 лв/бр. Ако изделията са **не**дефицитни на пазара, а фирмата се нуждае от средства за реинвестиции, приемлив вариант за нея е да продаде изделията и на цена, при която няма загуба. В следващите подточки разглеждаме случаи на печалба от допълнителната продукция;

В) Печалбата при основния обем е $Pr = \frac{20}{100} \cdot \left(18 + \frac{3000}{5000}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{93}{5} = 3{,}72$ лв/бр.

Същата *абсолютна печалба* би се получила при допълнителния обем, при единична цена $P = 18 + 3{,}72 = 21{,}72$ лв, т.к. брутните разходите в този случай са само преките такива: 18 лв/бр, плюс печалбата от 3,72 лв/бр;

Г) При разходи за допълнителния обем 18 лв/бр и рентабилност 20% (както при основния обем продукця), цената би следвало да е размерът разходи + тези 20% от него, т.е., бруто тя да е 120% от разходите: $P = \frac{120}{100} \cdot 18 = 1{,}2.18 = 21{,}60$ лв/бр.

Задача 4. Фирма произвежда столове при сумарни постоянни разходи за производство 12 000 лв, преки разходи 13 лв/бр, обем производство за стандартно натоварване на мощностите 8 000 бр. и необходима рентабилност 18%. Определете равнище на офертна цена на производителя за:

А) основния обем производство;

Б) основния обем производство, покриваща *само* пълните разходи;

В) допълнителен обем производство, осигуряваща същата печалба за единица продукция, както при основния обем производство.

Решение 4. Изгответе, изпратете и очаквайте най-добрите в следващия брой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Владимирова Й., Б. Атанасов, Н. Игнатова, Цени и ценообразуване, издателски комплекс- УНСС, София, 2016, ISBN 978-954-644-919-1.

[2] Гроздев, С. Математика за икономисти, София, Издателство на ВУЗФ, 2010, ISBN 978-954-8590-06-8.

[3] Класова Своб., Й. Владимирова, Приложно ценообразуване, Университетско издателство „Стопанство" към УНСС, София, 2004.

[4] http://www.economicshelp.org

[5] http://www.investopedia.com/terms

[6] https://bg.wikipedia.org

[7] електронна версия на Английско-български учебен речник по икономика, Доналд Ръдърфорд, ИК Прозорец, 1997, към сайта http://econ.bg/

PRICING. METHODS OT THE TOTAL AND AVERAGE COSTS

Dr. Asen Velchev, UNWE– Sofia

Abstract. This is the first part of an article series. Here are considered different economic concepts and problems: types of costs, rentability, revenue and the strengths and the weaknesses of two methods for calculative pricing. Four tasks for solving are included: two with solutions and two for solving at home by the reader, sending the solutions to the journal and waiting the best one to appear in its next issue.

М + ХРОНИКА

НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ „ПРОБЛЕМИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА СЪВРЕМЕННАТА ИКОНОМИКА"

Тазгодишната научна конференция „Проблеми и предизвикателства на съвременната икономика" беше посветена на 15-годишнината на Висшето училище по застраховане и финанси. В програмата бяха включени 22 студентски и 10 докторантски доклада с участието на 29 студенти и 10 докторанти от ВУЗФ, УНСС и Икономическия университет във Варна. Със заповед на Ректора на ВУЗФ за членове на научното жури на конференцията бяха определени:

1. проф. дпн Сава Гроздев – председател
2. гл. ас. д-р Станимир Андонов – научен секретар
3. проф. д-р Радослав Габровски
4. проф. д-р Боян Дуранкев
5. доц. д-р Виржиния Желязкова
6. доц. д-р Юлия Добрева
7. доц. д-р Али Вейсел
8. гл. ас. д-р Бисер Райнов

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

Преди изслушването на докладите се проведе Кръгла маса „Влиянието на обществено-политическите събития върху туризма и икономиката".

В хода на конференцията в оценяването на някои от разработките участваха още проф. д-р Огняна Стоичкова, проф. д-р Снежана Башева, доц. д-р Десислава Йосифова, доц. д-р Яким Китанов и доц. д-р Жельо Христозов. Всяка разработка беше рецензирана предварително и оценката от нея (от 0 до 40 точки) се прибавяше към общата оценка на всеки от оценителите, която включваше мнение за **научни приноси** (0–10 точки), **самостоятелност** (0–10 точки), **използван инструментариум, IT технологии и**

литературни източници (0–10 точки), **презентиране** (0–10 точки), **обща подготвеност и отговори на поставени въпроси** (0–10 точки), **техническо оформление на презентацията и спазване на определеното време** (0–10 точки). По този начин всеки доклад получи оценка между 0 и 100 точки, а крайната оценка беше определена като средно аритметично на оценките на участвалите в съответното оценяване преподаватели.

<u>Студентски доклади</u>

1. Предизвикателствата пред икономиките на Европейските държави след мигрантската вълна от Близкия Изток, Африка и Южна Азия – *Леонардо Стоев, ВУЗФ*

2. Предизвикателствата пред пенсионно осигурителните системи в Европа – *Борислава Ирибозова, ВУЗФ*

3. Зелените работни места – двигател на устойчивото икономическо развитие в България? – *Рая Цветкова и Савина Езекиева, ВУЗФ*

4. Globalization – a Threat in Disguise – *Велина Миндизова, Икономически университет, Варна*

5. Икономика на обещанията – *Исидор Карадимов, ВУЗФ*

6. Държавен дълг на България – *Полина Толева, ВУЗФ*

7. Влияние на обхвата върху състоянието и риска при застраховка „Гражданска отговорност“ на автомобилистите в Република България – *Ивайло Мартинов, ВУЗФ*

8. Проблеми и предизвикателства при вземане на управленско решение в условията на конкуренция на общозастрахователния пазар – *Мартина Маркова, УНСС*

9. Анализ на веригата на стойността на „Pfizer“ – *Ивайло Генев, ВУЗФ*

10. Българският туризъм – възможности за развитие в съвременните икономически условия – *Борислав Димитров, УНСС*

11. Верига на стойността на автомобилната индустрия – PEUGEOT – *Александър Николов, ВУЗФ*

12. Характеристика на икономичекия растеж в България за периода 2011-2016 г. – *Вяра Гергинова, ВУЗФ*

13. Стимули за повишаване на конкурентоспособността на България – иновации и предприемачество – *Цветомира Цонева, ВУЗФ*

14. Влиянието на корпоративната социална отговорност (КСО) върху финансовите резултати на компаниите – *Георги Заков, ВУЗФ*

15. Интернет на нещата като пазарен потенциал и нови бизнес модели – *Камелия Будакова, ВУЗФ*

16. Развитието на изкуствения интелект и предизвикателствата пред бизнес процесите – *Магдалена Спасова, ВУЗФ*

17. Визуализацията, като възможност за подобряване на разбираемостта и повишаване на полезността на информацията – *Павлина Тасева, ВУЗФ*

18. Особености на счетоводното отчитане на приходите в търговските банки – *Виктор Ценов, Виктор Бакалов и Александър Костадинов, ВУЗФ*

19. Характеристика на дейността и счетоводството на банките – *Ивета Шопова и Бетина Славчева, ВУЗФ*

20. Организация на националната сетълмент система – системи RINGS и спомагателни системи (БИСЕРА, БОРИКА и др.) – *Силвия Чавалинова и Калина Симова, ВУЗФ*

21. Счетоводни аспекти при отразяването на Привлечения капитал в търговските банки – *Лазарина Балабанова и Кръстина Таскова, ВУЗФ*

22. Наредба 13 на БНБ, смисъл и значение на IBAN – *Борислава Чорбаджийска и Алесандро Вела, ВУЗФ*

Докторантски доклади

1. Финансово-икономически и социални промени в България в условията на глобализация – *Момчил Григоров, ВУЗФ*

2. Методи за определяне на стойността на дружества за небанково кредитиране – *Ирена Вачева, ВУЗФ*

3. Мрежовият маркетинг като иновационен бизнес подход – *Никола Димитров, ВУЗФ*

4. Финансово-икономически и социални аспекти на развитието на малките и средните предприятия в Европейския съюз – *Найден Тодоров, ВУЗФ*

5. Основни тенденции и предизвикателства в развитието на капиталовия пазар в България – *Снежана Йотинска, ВУЗФ*

6. Извличане на комуникационни послания от когнитивното безсъзнателно – *Саша Давидова, УНСС*

7. Финансиране на селското стопанство в България по първи стълб на ОСП – *Валентин Бошкилов, ВУЗФ*

8. Изграждане на успешни стратегически партньорства: практическо изследване на проект MYNNOVA – *Росалия Касамска, ВУЗФ*

9. Теоретични модели на кредитирането – *Кирил Димитров, ВУЗФ*

10. Предизвикателства за постигане на либерализиран пазар на електрическа енергия – *Северин Въртигов, ВУЗФ*

11. Верига на стойността на автомобилната индустрия - PEUGEOT *Александър Николов, ВУЗФ*

След закрито заседание на научното жури бяха определени следните лауреати:

1. Специална награда (300 лева) – **Борислава Ирибозова, ВУЗФ**
2. Първа награда (200 лева) – **Виктор Бакалов, Виктор Ценов и Александър Костадинов, ВУЗФ**
3. Първа награда (200 лева) – **Леонардо Стоев, ВУЗФ**
4. Втора награда (150 лева) – **Цветомира Цонева, ВУЗФ**

5. Втора награда (150 лева) – **Александър Николов, ВУЗФ**
6. Трета награда (100 лева) – **Ивета Шопова и Бетина Славчева, ВУЗФ**
7. Трета награда (100 лева) – **Георги Заков, ВУЗФ**

Научното жури оцени високо качеството на всички представени разработки и връчи грамоти за много добро представяне на техните автори.

ЧЕСТИТО НА НАГРАДЕНИТЕ!

СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

НСОМ' 2017

проф. Сава Гроздев, д-р Александър Ахегукян

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е състезание по математика между студенти по бакалавърски или магистърски програми. Тя се организира от 1974 г. от висшите училища. Целта е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи.

От 2010 г. НСОМ се провежда с любезното съдействие на Министерството на образованието и науката.

Право да участва в НСОМ като състезател има всеки студент по бакалавърска или магистърска програма на висше училище в Република България. Студентите се разпределят в три състезателни групи според професионалното направление, в което е специалността им:

Група А – математика, информатика и компютърни науки;

Група Б – природни и технически науки, сигурност и отбрана;

Група В – всички неизброени в групи А и Б.

Най-добре представилите се студенти получават медали съгласно традицията в международните олимпиади по математика – награждават се около 50% от участниците в приблизително съотношение 1:2:3 за златен, сребърен и бронзов медал.

Организацията на олимпиадата се осъществява от Национална комисия и висше училище – домакин.

НСОМ през 2017 г. беше организирана при домакинството на Пловдивски университет „П. Хилендарски". Олимпиадата се проведе от 19 до 21 май 2017 г. в Пампорово, хотелски комплекс „Камелия". В нея участваха повече от 100 студенти от 14 университета от България и 2 университета от чужбина.

Представянето на отбора на Висшето училище по застраховане и финанси е отлично. Бяха завоювани 1 златен медал – **Анна-Мария Арнаудова** (Финанси и международен мениджмънт), 1 сребърен медал – **Борислава Ирибозова** (Финанси) и 1 бронзов медал – **Виктория Върбанова** (Финанси). Отборът на ВУЗФ с научен ръководител д-р Александър Ахегукян се класира на трето място. ВУЗФ е на трето място и в класирането по висши училища в група В.

ВУЗФ участва ежегодно в НСОМ от 2007 година със свои отбори и традиционно печели медали и отборни купи. Завоювани са общо **23 медала**, от които **4 златни**, **9 сребърни** и **10 бронзови** в индивидуалното класиране в група В. В класирането по отбори и по висши училища ВУЗФ традиционно заема втори и трети места, а през 2012 г. завоюва първо място и в двете класирания. Ето накратко историята:

1 – 3 юни 2007 г., Созопол, домакин Университет по архитектура, строителство и геодезия със съдействието на Технически университет, София. ВУЗФ печели трето отборно място в група В.

Юни 2008 г., Благоевград, домакин Югозападен университет „Неофит Рилски“. ВУЗФ печели трето отборно място в група B.

Май 2009 г., к-с Слънчев бряг. ВУЗФ печели трето отборно място в група B.

14 – 16 май 2010 г., Велико Търново, домакин СУ „Климент Охридски“, съорганизатор Великотърновският университет „Св. Св. Кирил и Методий“. ВУЗФ печели 1 бронзов медал в индивидуалното класиране и трето място в отборното класиране в група B.

20 – 22 май 2011 г. , София, домакин Висше училище по застраховане и финанси (ВУЗФ), София. ВУЗФ печели 3 сребърни медала в индивидуалното класиране в група B, второ място в отборното класиране и второ място в класирането по висши училища група B.

18 – 20 май 2012 г. , Варна, домакин Икономически университет – Варна. ВУЗФ печели 2 златни и 2 бронзови медала в индивидуалното класиране в група B, първо място в отборното класиране и първо място в класирането по висши училища в група B.

16 – 20 май 2013 г., Шумен, домакин Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“. ВУЗФ печели 3 сребърни и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране в група B , трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група B.

30 май – 01 юни 2014 г., Созопол, домакин Технически университет, София. ВУЗФ печели 3 бронзови медала в индивидуалното класиране в група B, трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група B.

29 – 31 май 2015 г., Слънчев бряг, домакин Университет по архитектура, строителство и геодезия. ВУЗФ печели 1 златен, 1 сребърен и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране в група B, трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група B.

27 - 29 май 2016 г., Русе, домакин Русенски университет „Ангел Кънчев“. ВУЗФ печели 1 сребърен и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране, трето място в класирането по висши училища в група B.

19 – 21 май 2017 г., Пампорово, домакин Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“. ВУЗФ печели 1 златен, 1 сребърен и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране в група B, трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група B.

В тази статия се обсъждат задачите от третата група B на тазгодишната олимпиада. В групата се състезаваха студенти от икономически висши училища, в които обучението по математика е с по-малък брой часове.

Задача 1. Дадени са матриците $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}x & -2y\\ y & x\end{pmatrix}$, където x и y са реални числа.

а) Да се намери детерминантата D на матрицата $A.B$.

б) Да се докаже, че точките $M(x,y)$, за които уравнението $3D.u^2+D.u+3=0$ няма реални корени, лежат във вътрешността на елипса. Да се определят дължините на осите на елипсата.

в) Ако $x^2+y^2\neq 0$ и $A^{2018}.B=B^{2018}.A$, да се докаже, че $A^{2017}=B^{2017}$.

Решение: а) За детерминантите на A и B имаме съответно $\det A=3$ и $\det B=x^2+2y^2$. Следователно $D=3.\left(x^2+2y^2\right)$.

б) Дискриминантата на уравнението $3D.u^2+D.u+3=0$ е

$$D_0=D^2-36.D=9\left(x^2+2y^2\right)\left(x^2+2y^2-12\right).$$

Разглежданото уравнение няма реални корени, когато $D_0 < 0$. След заместване с резултата от а) получаваме, че е изпълнено неравенството $x^2 + 2y^2 - 12 < 0$. Последното записваме във вида $\frac{x^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} < 1$. Следователно точките $M(x, y)$ лежат вътре в елипсата $\frac{x^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = 1$, полуосите a и b на която имат дължини $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{6}$. Следователно дължините на осите са $2a = 4\sqrt{3}$ и $2b = 2\sqrt{6}$.

в) Равенството $A^{2018}.B = B^{2018}.A$ записваме във вида $A^{2017}.(A.B) = B^{2017}.(B.A)$. Тъй като $A.B = B.A = \begin{pmatrix} x+2y & 2(x-y) \\ -(x-y) & x+2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $D \neq 0$, то $A^{2017} = B^{2017}$.

Задача 2. Дадена е параболата $\pi : y^2 = 8.x$. Правата l минава през точката $M(-2, a)$ $(a \in \mathbb{R})$ и е успоредна на оста на π. Параболата π пресича l в точка C и точката A е симетрична на точката $F(2,0)$ спрямо C.

а) Да се намерят координатите на C.

б) Да се намерят координатите на A.

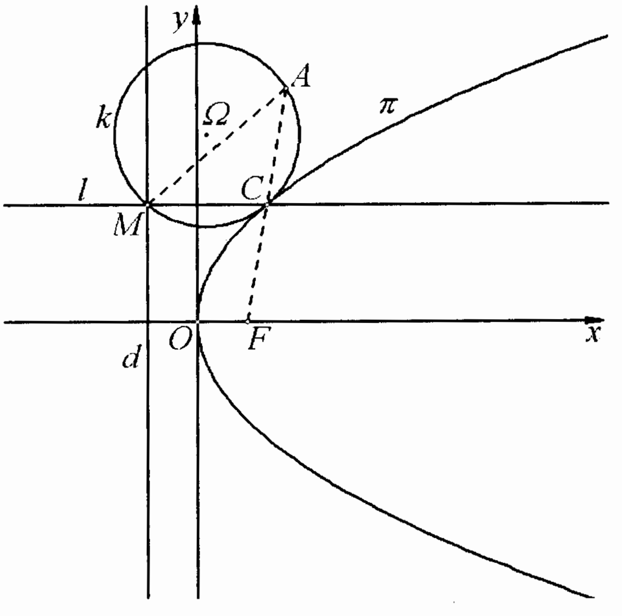
в) Да се намери броят на общите точки на описаната около ΔAMC окръжност и параболата π в зависимост от стойностите на a.

Решение: Тъй като параболата π има канонично уравнение $y^2 = 8.x$ спрямо координатната система Oxy, то оста на π съвпада с абсцисната ос Ox. Следователно уравнението на l е $y = a$. Системата, образувана от уравненията на l и π, има единствено решение $x = \frac{a^2}{8}$ и $y = a$. Затова $l \cap \pi = C\left(\frac{a^2}{8}, a\right)$. С това подточка а) е решена. За координатите на A са изпълнени равенствата $x_A = 2x_C - x_F$ и $y_A = 2y_C - y_F$. Оттук и от резултата, получен в а), следва, че $A\left(\frac{a^2 - 8}{4}, 2a\right)$. С това е решена подточка б). Симетралите s_{CM} и s_{AM} на отсечките CM и AM имат съответно следните уравнения $s_{CM} : x = \frac{a^2 - 16}{16}$ и $s_{AM} : 8ax + 32y - a(a^2 + 32) = 0$. Системата, образувана от тези уравнения, има следното решение $x_0 = \frac{a^2 - 16}{16}$, $y_0 = \frac{a(a^2 + 80)}{64}$. По този начин намерихме координатите (x_0, y_0) на центъра Ω на окръжността k, описана за ΔACM.

Разстоянието $M\Omega$ е равно на радиуса R на k. От координатите на Ω получаваме равенството $R^2 = \left(\frac{a^2 + 16}{16}\right)^3$. Оттук намираме уравнението на окръжността

$$k : 32x^2 + 32y^2 - 4(a^2 - 16)x - a(a^2 + 80)y + a^2(a^2 + 40) = 0.$$

От уравненията на k и π получаваме, че ординатите на общите за k и π точки удовлетворяват уравнението $(y - a)^2(y^2 + 2ay + 2a^2 + 80) = 0$. За втория множител в това уравнение имаме $y^2+2ay+2a^2+80=(y+a)^2+a^2+80>0$. Затова той няма реални корени. Следователно уравнението има един двоен корен $y=a$. Оттук и а) следва, че $C\left(\frac{a^2}{8},a\right)$ е единствената обща точка на k и π при произволно реално число a. Следователно k и π са допирателни за всички реални стойности на a. С това е решена и подточка в).



Задача 3. Графиките на функциите $f(x)=x^{2017}$ и $g(x)=a.\ln x\ (a\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ имат обща допирателна t в точка T.

а) Да се намерят a и координатите на T.

б) Да се намери уравнението на t.

в) Ако t пресича координатните оси в точките A и B, а O е началото на координатната система, да се намери лицето на ΔOAB.

Решение: Нека абсцисата на точката T е x_0. Тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ се допират в T, то $f(x_0)=g(x_0)$ и $f'(x_0)=g'(x_0)$. Затова са изпълнени равенствата $x_0^{2017}=a\ln x_0$ и $2017x_0^{2016}=\frac{a}{x_0}$. Оттук $2017.a\ln x_0=a$, т.е. $\ln x_0=\frac{1}{2017}$. Следователно $x_0=\sqrt[2017]{e}$ и $a=2017e$. Оттук $T\left(\sqrt[2017]{e},e\right)$. Допирателната t има уравнение

$$y-e=g'\left(\sqrt[2017]{e}\right)\left(x-\sqrt[2017]{e}\right).$$

Оттук следва, че $y=\frac{2017e}{\sqrt[2017]{e}}x-2016.e$.

Нека $t\cap Ox=A$ и $t\cap Oy=B$. От уравнението на t имаме $A\left(\frac{2016}{2017\sqrt[2017]{e}},0\right)$ и $B(0,-2016.e)$. Следователно $S_{OAB}=\frac{2016^2.e}{4034\sqrt[2017]{e}}$.

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+571. Да се намерят последните три цифри на числото 2017^{2017}. **(Танка Милкова, гр. Варна)**

М+572. Да се покаже, че за всички естествени числа n и k стойността на израза $2017^n + 5^k$ може да се представи като сбор от квадратите на две, три или четири естествени числа. **(Христо Лесов, гр. Казанлък)**

М+573. Да се определят стойностите на реалния параметър a, при които уравнението

$$ax^5 - 5(a-1)x + a = 0$$

има точно един реален корен.

(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

М+574. Върховете A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 на начупената линия $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ са подредени в равнината в посока, обратна на часовниковата стрелка, така че

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle A_3A_4A_5 = \sphericalangle A_4A_5A_6 = 120^\circ.$$

Ако $A_1A_2 = \frac{47}{2}$, а дължините на отсечките A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_6 в някакъв ред са равни на 4, 5, 6 и 7, да се докаже, че $13,3 < A_1A_6 < 21,2$.

(Тодор Митев, гр. Русе,
Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+575. Точката C_1 от равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е такава, че $\sphericalangle AC_1B = 180^\circ - \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle AC_1D = 180^\circ - \sphericalangle ACD$. Аналогично са определени точките A_1, B_1 и D_1. Да се докаже, че съществува точка, относно която четириъгълниците са симетрични.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+576. В кълбо с обем V е вписана конична повърхнина с връх, който съвпада с центъра на кълбото. Коничната повърхнина пресича повърхнината на кълбото в две еднакви окръжности, които лежат в две успоредни равнини и отсичат от коничната повърхнина тяло с обем V_K. Да се намери най-малката стойност на отношението $V : V_K$. **(Милен Найденов, гр. Варна)**

Краен срок за изпращане на решения: 15.09.2017 г.

М + Р Е Ш Е Н И Я

М+553. Да се определят всички цели числа x, при които изразът $\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Тъй като $\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ е цяло, то $7^3.\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ също е цяло число. Оттук $7^3.\dfrac{x^3-1}{7x-1}=49x^2+7x+1-\dfrac{342}{7x-1}$. Следователно $7x-1$ дели 342, т.е. $7x-1\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18,\pm19,\pm38,\pm57,\pm114,\pm171,\pm342\}$. Оттук намираме, че $x\in\{-8,0,1,49\}$.

М+554. Нека $y=\cos^4 x-\cos 2x+\sin x-2\sin^3 x-2$. За кои стойности на реалните числа a и b е изпълнено $y\in[a,b]$ за всички реални стойности на x?

(Росен Николаев, гр. Варна)

Решение на Катя Чалъкова. След преобразувания, за y получаваме $y=\left(\cos^2 x+\sin x\right)^2-\left(\cos^2 x+\sin x\right)-2$. Тъй като $\cos^2 x+\sin x=-\sin^2 x+\sin x+1$, то $y=\left(-\sin^2 x+\sin x+1\right)^2-\left(-\sin^2 x+\sin x+1\right)-2$. Полагаме $\sin x=t$, $t\in[-1,1]$ и разглеждаме функцията $g(t)=-t^2+t+1$. От свойствата на квадратната функция и равенствата $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$, $g(-1)=-1$ и $g(1)=1$ следва, че при $t\in[-1,1]$ е изпълнено $g\in\left[-1;\dfrac{5}{4}\right]$. Следователно $y\in\left[-\dfrac{9}{4};0\right]$. Затова $a\in\left(-\infty;-\dfrac{9}{4}\right]$ и $b\in[0;+\infty)$.

М+555. Ако p е естествено число, да се пресметне границата

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{pn}\sqrt{1+k^2}\,\sin\left(arctgk-arctgn\right).$$

(Теодора Радулеску, Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. От формулите $\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ и $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ следва

равенството $\sin\left(arctgk-arctgn\right)=\sin\left(arctgk\right)\cos\left(arctgn\right)-\sin\left(arctgn\right)\cos\left(arctgk\right)=$

$=\dfrac{k-n}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{n^2+1}}$. Оттук имаме $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{pn}\sqrt{1+k^2}\,\sin\left(arctgk-arctgn\right)=$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{pn}\dfrac{k-n}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{n^2\left(p^2-2p\right)+pn}{\sqrt{n^2+1}}$. Последното равенство води до окончателните

резултати: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}-\infty,\ p=1,\\ \dfrac{1}{2},\ p=2,\\ +\infty,\ p\ge 3.\end{cases}$

Продължението е в следващия брой.

ТАЛОН

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Виж www.vuzf.bg

Притежателят на този талон има правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса

Имена ....

Адрес ...., e-mail..........

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ....



Национална студентска олимпиада по математика 2017 г. На снимките отляво надясно: златната медалистка Анна-Мария Арнаудова и г-жа Славка Чакърова – кмет на община Чепеларе, сребърната медалистка Борислава Ирибозова и доц. д-р Боян Златанов – председател на Журито, бронзовата медалистка Виктория Върбанова и гл. ас. д-р Петър Копанов – председател на Организационния комитет

М+ е одобрено от МОН
за класна и извънкласна работа
по математика и информатика

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
гр. София, 1618, кв. "Овча купел"
ул."Гусла" №1
тел: +359 2 401 58 12, факс: +359 2 401 58 21
e-mail: office@vuzf.bg
www.vuzf.bg

ISSN 0861-8321

Цена 7 лв.