СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

проф. Сава Гроздев, Ирина Шаркова

От 24 до 29 юни 2016 г. в гр. Слатина, Румъния се проведе юбилейната 20. младежка балканска олимпиада по математика за ученици до 15,5-годишна възраст. В нея взеха участие 21 отбора от 19 държави, между които официалните държави-участници Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Македония, Молдова, Румъния (с 2 отбора), Сърбия, Турция и Черна гора, както и държавите-гости Азербайджан, Индонезия, Казахстан, Саудитска Арабия, Таджикистан, Туркменистан, Филипини, Франция и отбор на Община Слатина. Отборът на България, съставен от шестима ученици, спечели общо 1 златен, 3 сребърин и 2 бронзови медала. Златен медалист е Евгени Кайряков (8. клас, СМГ „П. Хилендарски"), който се нареди второто в кайното индивидуално класиране след Озан Каймак, ученик от Турция. Сребърни медалисти са Виктор Балтин (8. клас, ПМГ „Н. Обрешков", Бургас), Иво Петров (8. клас, СМГ „П. Хилендарски) и До Виет Кьонг (7. клас, СМГ „П. Хилендарски"). Бронзови медали заслужиха Кристиан Минчев (8. клас, ПМГ „Н. Обрешков", Бургас) и Светлин Лалов (7. клас, СМГ „П. Хилендарски"). В отборното класиране по точки България е на четвърто място с 140 т. след Румъния (182 т.), Турция (180 т.) и Сърбия (154 г.) Ето класирането по медали:

№	държава	златни	сребърни	бронзови	точки
1	Турция	3	2	1	180
2	Румъния	2	4	0	182
3	Сърбия	1	5	0	154
4	Бъргария	1	3	2	140
5	Гърция	1	1	3	89
6	Молдова	0	1	2	55
7	Босна и Херцеговина	0	0	4	43
8	Македония	0	0	3	37
9	Кипър	0	0	3	35
10	Албания	0	0	3	30
11	Черна Гора	0	0	1	25

Научни ръководители на отбора са проф. Сава Гроздев от ВУЗФ (Висше училище по застраховане и финанси) и неговата докторантка Ирина Шаркова – учителка в ПЧМГ (Първа частна математическа гимназия). Шестимата състезатели бяха определени след две контролни по формата на балканиадата. Предлагаме задачите от контролните и кратки решения след тях.

ПЪРВО КОНТРОЛНО
София, 14 май 2016 г.

Задача 1. Четириъгълник $ABCD$, за който $\sphericalangle BAC < \sphericalangle DCB$, е вписан в окръжност с център O. Ако $\sphericalangle BOD = \sphericalangle ADC = \alpha$, намерете за кои стойности на α е изпълнено неравенството $AB < AD + CD$.

Задача 2. За числата $a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0$ е изпълненео равенството $a + b + c = k$.

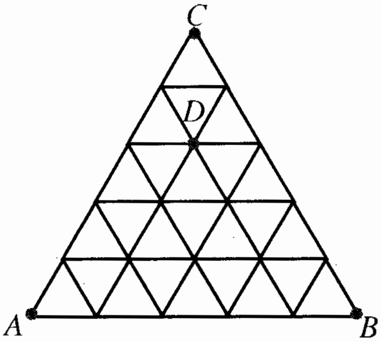
Намерете най-малката стойност на израза $M = \dfrac{b^2}{\sqrt{ka+bc}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{kc+ab}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{kb+ca}}$.

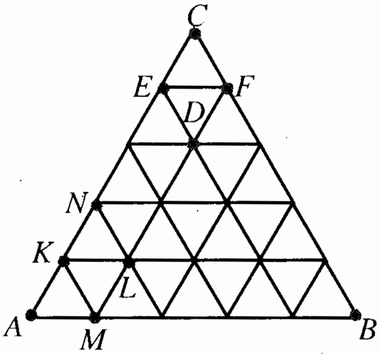
Задача 3. Даден е многочленът $M(x, y) = x^2 + xy - 2y$, където x и y естествени числа.

а) Да се реши уравнението $x^2 + xy - 2y = 64$.

б) Ако $M(x, y)$ е точен квадрат и $x > 2$, докажете, че числото $x + y + 2$ е съставно.

Задача 4. Равностранен триъгълник ABC със страна n $(n \geq 3)$ е разделен на n^2 равностранни триъгълника със страна 1 с помощта на прави, които са успоредни на страните на ΔABC. Във върховете на единичните триъгълници са поставени числа. За един ход се увеличават или намаляват с единица числата във върховете на ромб, образуван от два единични триъгълника с обща страна. Първоначално във върховете A, B, C и D са поставени единици, а във всички останали върхове – съответно нули. Възможно ли е с повтаряне на ходове числата във всички върхове на единичните триъгълници да станат нули?





Решение: Възможно е, ако n е нечетно число. Да намалим с единица числата във върховете на ромба *AMLK* (вж. чертежа). След това да увеличим с единица числата във върховете на ромба *KMLN*. По този начин единицата от A се премества в N и всички останали числа се запазват с първоначалните си стойности. Тъй като $n-1$ е четно число, след $\dfrac{n-1}{2}$ двойки ходове единицата от A ще се премести в E. След още толкова хода единицата от B ще се премести в F. Сега е достатъчно да намалим с единица числата във върховете на ромба *EDFC*. Ако n е четно число, не е възможно с повтаряне на ходове числата във всички върхове на единичните триъгълници да станат нули. За да докажем това, ще оцветим в четири цвята върховете на единичните триъгълници така, че върховете на всеки ромб от разглеждания вид да са разноцветни. Това може да стане по следния начин: оцветяваме върховете по страната AC последователно с червен и син цвят, тръгвайки с червен цвят от A; оцветяваме върховете по отсечката MF последователно със зелен и жълт цвят, тръгвайки със зелен цвят от M; за следващата вдясно успоредна отсечка оцветяваме върховете по нея отново последователно с червен и син цвят, тръгвайки с червен цвят от точката върху AB вдясно от M; и т. н., докато стигнем до върха B, който си сигурност ще бъде червен. Тъй като върховете A, B и C са червени, а върхът D е зелен, то първоначално сумата на числата в червените върхове на единичните триъгълници, намалена със сумата на числата в зелените върхове, е равна на 2. Очевидно при така направеното оцветяване тази разлика се запазва след всеки ход и следователно не можем да получим нули във всички върхове.

ВТОРО КОНТРОЛНО

София, 15 май 2016 г.

Задача 1. За реалните числа a, b, c, d, e и f е изпълнено $a+b+c+d+e+f=20$ и $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2+(e-2)^2+(f-2)^2=24$. Да се намери най-голямата стойност, която приема числото d.

Задача 2. Върховете на петоъгълник $ABCDE$ лежат на окръжност, а точките H_1, H_2, H_3 и H_4 са съответно ортоцентровете на ΔABC, ΔABE, ΔACD и ΔADE. Да се докаже, че четириъгълникът, образуван от ортоцентровете, е квадрат тогава и само тогава, когато $BE \parallel CD$ и разстоянието между тях е равно на $\dfrac{BE+CD}{2}$.

Задача 3. На дъската е записано числото 1. На всеки ход Поли изтрива последното записано число n и на негово място записва едно от числата n^2, $(n+1)^2$ или $(n+2)^2$. Възможно ли е с тези операции на дъската да се получи число, кратно на 2015?

Задача 4. Квадрат 4×4 е разделен на 16 единични квадратчета, във всяко от които е записана нула или единица. За един ход се избира ред или стълб на квадрата и се променят числата в него (нулите стават единици, а единиците стават нули). Квадратът се нарича *занулен*, ако броят на нулите в него не може да се намали. Броят на нулите в един занулен квадрат се нарича *степен на квадрата*. Намерете възможните стойности на степента.

Решение: Да забележим, че в кой да е ред или стълб на занулeния квадрат има не повече от две нули. В противен случай ще променим числата в такъв ред или стълб. Ще докажем, че броят на нулите в занулeния квадрат е не повече от 4. Ако допуснем противното, ще има ред с две нули. Да означим с A и B стълбовете, в които се намират тези две нули. Можем да считаме, че A и B съдържат по две нули. В противен случай ще променим числата в избрания ред и ще получим два стълба с по две нули. Петата нула не е в A или B. Но тогава ще сменим числата в A и B и ще получим ред с три нули, което е противоречие с факта, че квадратът е занулен. Степента на занулeния квадрат може да приема стойности 0, 1, 2, 3 или 4. Пример на занулен квадрат със степен i (i = 0, 1, 2, 3 или 4) е този, всичките нули в който са разположени по един от диагоналите му.

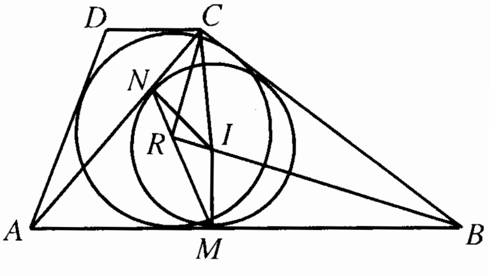
Че квадрат с нули само по диагонал е наистина занулен, следва от факта, че резултатът от многократно повтаряне на ходове зависи не от броя на ходовете, а от четността на този брой. Наистина, да номерираме редовете на произволен квадрат отгоре надолу и стълбовете отляво надясно последователно с числата 1, 2, 3 и 4. Да означим броя на ходовете за реда i, с които се получава занулен квадрат, с r_i, а броят на ходовете за стълба j, с които се получава занулен квадрат, съответно с s_j. Тогава числото в единичното квадратче (i, j), което се намира на i–ия ред и j–ия стълб, ще се смени $r_i + s_j$ пъти. Ако r_i е четно число, можем да вземем 0 вместо самото r_i и резултатът ще бъде същият. Ако r_i е нечетно число, можем да вземем 1 вместо самото r_i и резултатът ще бъде същият. Аналогично за s_j. Следователно, за получаване на занулен квадрат можем да считаме, че редовете и стълбовете на първоначалния квадрат се променят най-много по веднъж. Сега е ясно, че ако нулите са само по диагонал, техният брой не може да бъде намален.

Подготовката се проведе от 5 до 18 юни в Олимпийския център на МОН. Предлагаме ви задачите от състезателната тема на балканиадата, в която ще отбележим задача 1, която е българско предложение с автор Мирослав Маринов.

Задача 1. Трапец $ABCD$ ($AB \| CD$, $AB > CD$) е описан около окръжност. Вписаната окръжност в триъгълника ABC се допира до правите AB и AC съответно в точките M и N. Да се докаже, че центърът на вписаната окръжност в трапеца $ABCD$ лежи на правата MN.

(*предложена от България*)

Решение: Нека I е центърът на вписаната окръжност в ΔABC и правата BI пресича MN в точка R. Тъй като ΔAMN е равнобедрен ($AM = AN$ – допирателни през обща точка), то $\angle ANM = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, където $\angle MAN = \alpha$. От друга страна, CI е ъглополовяща на $\angle ACB$ и следователно $\angle BIC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$.



Заключаваме, че $\angle ANM + \angle BIC = 180^0$. Ъглите RNC и RIC допълват до 180^0 съответно ъглите $\angle ANM$ и $\angle BIC$, откъдето $\angle RNC + \angle RIC = 180^0$. Следователно четириъгълникът $NRIC$ е вписан в окръжност и тъй като $\angle INC = 90^0$ (AC се допира в N до окръжността с център I), то $\angle IRC = 90^0$. Това показва, че CR е ъглополовяща в трапеца $ABCD$ и тъй като BR е също ъглополовяща, то $R \equiv O$.

Задача 2. Нека a, b и c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2 \geq \frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

(*предложена от Босна и Херцеговина*)

Решение: От очевидното $2ab \leq a^2+b^2$ следват неравенствата

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \quad \text{и} \quad 4abc \leq 2c(a^2+b^2),$$

които са изпълнени са произволни положителни реални числа a, b и c. Събираме левите и ден.сните страни на тези две неравенства и получаваме:

$(a+b)^2+4abc \leq 2(a^2+b^2)(c+1)$, откъдето $\frac{8}{(a+b)^2+4abc} \geq \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}$. От друга страна, от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}.$$

Пак с помощта на неравенството между средното аритметично и средното геометрично намираме още, че $\frac{c+3}{8}=\frac{c+1}{8}+\frac{2}{8}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{2(c+1)}{64}}=\frac{\sqrt{2(c+1)}}{4}$, т.е. $\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}\geq\frac{8}{c+3}$.

Заключаваме, че $\frac{4}{\left(a^2+b^2\right)(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{8}{c+3}$. Сега лесно получаваме окончателния резултат:

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

Задача 3. Да се намерят всички тройки цели числа (a,b,c) така, че числото

$$N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$$

е степен на 2016.

(*Степен на* 2016 *е цяло число от вида* 2016^n, *където n неотрицателно цяло число.*)

(*предложена от Гърция*)

Решение: Нека a, b и c са такива цели числа и n е естествено така, че

$$(a-b)(b-c)(c-a)+4=2.2016^n.$$

Ако положим $a-b=-x$, $b-c=-y$, можем да запишем това равенство във вида $xy(x+y)+4=2.2016^n$. Да забележим, че дясната страна на последното се дели на 7 и значи $xy(x+y)+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$. Тогава $3xy(x+y)\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$ и следователно

$$(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 2(\mathrm{mod}\,7).$$

От малката теорема на Ферма следва, че точните кубове дават остатък -1, 0 или 1 при деление на 7, т.е. $k^3\equiv\sim -1,0,1(\mathrm{mod}\,7)$. Но тогава горното равенство е възможно само ако някое от събираемите вляво $(x+y)^3$, x^3 или y^3 се дели на 7. В такъв случай обаче и произведението $xy(x+y)$ се дели на 7. Стигаме до противоречие и заключаваме, че $xy(x+y)+4=2$, т.е. $xy(x+y)=-2$. Единствените решения на последното са $(x,y)=(-1,-1)$ и търсените тройки са $(a,b,c)=(k+2,k+1,k)$, $k\in\mathrm{Z}$, както и техните пермутации.

Забележка. Задачата може да се реши с аналогични разглеждания и по друг модул, например 9.

Задача 4. Една таблица 5×5 се нарича *правилна*, ако всяка нейна клетка съдържа едно от четири, две по две различни реални числа, така че всяко от тях се среща точно по веднъж във всяка подтаблица 2×2. Сумата на числата в една *правилна таблица* се нарича *тотална сума* на таблицата. С помощта на четири произволни числа се конструират всички възможни правилни таблици, пресмятат се техните тотални суми и се намира броят на различните суми. Да се определи възможно най-голямата стойност на този брой.

(*предложена от Гърция*)

Решение: Ще докажем, че максималният брой на тоталните суми е 60. Доказателството се основава на следното:

Твърдение. В една правилна таблица или всеки ред съдържа точно две от числата или всеки стълб съдържа точно две от числата.

Доказателство: Нека R е ред, който съдържа поне три от числата. Тогава тези три числа са в последователни позиции. Нека x, y и z са числата в последователни позиции. От условието, че във всяка подтаблица 2×2 четирите числа участват точно по веднъж, заключаваме, че в реда над R (ако има такъв) над числата x, y и z ще се намират числата z, t и x в този ред. А пък над тях ще се намират числата x, y и z в този ред. Същото се случва в редовете под R (виж фигурата).

•	x	y	z	•
•	z	t	x	•
•	x	y	z	•
•	z	t	x	•
•	x	y	z	•

Като попълним цялата таблица, лесно заключаваме, че всеки стълб съдържа точно две от числата и с това твърдението е доказано.

Завъртайки таблицата, можем да считаме, че всеки ред съдържа точно две от числата. Без първия ред и първия стълб таблицата се превръща в таблица 4×4, която може да се раздели на четири подтаблици 2×2. Заключаваме, че тази таблица 4×4 съдържа всяко от числата точно по четири пъти и тоталната й сума е $4(a+b+c+d)$. Сега е достатъчно да пресметнем по колко различни начина могат да се разположат числа в първия ред R_1 и първия стълб C_1.

Нека a_1, b_1, c_1 и d_1 са появяванията съответно на a, b, c и d в R_1 и C_1. Тогава тоталната сума на таблицата 5×5 е

$$S=4(a+b+c+d)+a_1\cdot a+b_1\cdot b+c_1\cdot c+d_1\cdot d\,.$$

Ако първият, третият и петият ред съдържат числата x и y, където с x сме означили числото в най-горното и най-лявото поле (1, 1) на таблицата, то вторият е четвъртият ред ще съдържат само числата z и t, където с z сме означили числото в полето (2, 1). Тогава $x_1+y_1=7$ и $x_1\ge3$, $y_1\ge2$, $z_1+t_1=2$ и $z_1\ge t_1$. Имаме, че $\{x_1,y_1\}=\{5,2\}$ или $\{x_1,y_1\}=\{4,3\}$ и съответно $\{z_1,t_1\}=\{2,0\}$ или $\{z_1,t_1\}=\{1,1\}$. По този начин (a_1,b_1,c_1,d_1) се получава чрез пермутация на една от следните четворки:

$$(5,2,2,0),\quad(5,2,1,1),\quad(4,3,2,0),\quad(4,3,1,1).$$

Общият брой пермутации на първата е $\frac{4!}{2!}=12$, на втората е също 12, на третата е 24, а на четвъртата е отново 12. Следователно различните тотални суми са най-много 60.

Всяка от тези 60 комбинации може да се реализира. Наистина, ако вземем три реда *ababa* и ги разместим с два реда *cdcdc*, можем да получим (5, 2, 2, 0); ако вземем три реда *ababa* и ги разместим с един ред *cdcdc* и един ред *dcdcd*, можем да получим (5, 2, 1, 1); ако вземем три реда *ababc* и ги разместим с два реда *cdcda*, можем да получим (4, 3, 2, 0); накрая, ако вземем три реда *abcda* и ги разместим с два реда *cdabc*, можем да получим (4, 3, 1, 1).

С избор например на $a=10^3$, $b=10^2$, $c=10$ и $d=1$ можем да направим всички суми различни. С това задачата е решена.

Ето представянето на българските ученици с получените от тях точки:

№	Име	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Общо точки	медал
1	Евгени Кайряков	10	10	10	8	38	златен
2	Виктор Балтин	7	1	10	8	26	сребърен
3	Иво Петров	10	0	10	4	24	сребърен
4	До Виет Кьонг	10	0	10	2	22	сребърен
5	Кристиан Минчев	1	0	10	5	16	бронзов
6	Светлин Лалов	1	2	4	7	14	бронзов
	ОБЩО	39	13	54	34	140	

Ръководителите на делегациите на представените 19 държави отчетоха факта, че математиката е за млади хора и че ако един ученик започне да се занимава сериозно с математика, след като навърши пълнолетие, това е твърде късно. Интересът към математическите състезания сред по-малките е значителен. Самият факт, че на Балканската олимпиада в Румъния, а и преди нея, се включват доста представители на държави извън Балканите, показва също интерес към състезания за ученици до 16-годишна възраст. В същото време световна олимпиада за тази възраст липсва. В световната олимпиада за по-големи ученици, която е с почти 60-годишна история, участващите държави тази година са повече от 100. Въз основа на това ръководителите на делегациите подписаха Меморандум и избраха Комитет, включващ двама представители на Европа и трима на Азия. Задача на Комитета съгласно Меморандума е да се регистрира световна олимпиада за ученици до 16-годишна възраст под името Младежка международна олимпиада по математика с превод на английски език „Junior International Mathematical Olympiad" и съкращение JIMO. За председател на Комитета единодушно беше избран ръководителят на българската делегация.

Домакин на следващата Балканска олимпиада през 2017 г. е България.