СПОМЕН ЗА ПЛАМЕН
ИЛИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ТВОРЧЕСТВО

Емил Карлов, гр. Ямбол

На 5 март 2016 г. след кратко боледуване почина преподавателят в Софийски университет „Св. Климент Охридски“ – доцент д-р Пламен Сидеров. В тази малка сбирка от негови задачи предлагам да си спомним за блестящия математик и незабравим приятел.

„В ранната есен на 1967 година“ – разказваше Роман Хайнацки – „влязох в книжарницата в центъра на града и там пред етажерката със сборниците ровеше в книгите едно красиво момче с очила. Момчето беше облечено скромно, в късо палто, на палтото – големи, привличащи погледа, копчета. Попитах го в кой клас е и в кое училище се е записал за следващата учебна година. Момчето се изчерви и посочи сградата на гимназия „Васил Левски“, която стърчеше до прозореца на книжарницата. Веднага го изпратих да си изтегли документите и го записах в нашата гимназия, в моя клас. Така Пламен Сидеров стана мой ученик. Три години по-късно същото момче спечели трета награда на Международната олимпиада по математика в Унгария.“

Пламен е направил много задачи за много математически състезания и кандидат-студентски конкурси, но аз ще се спра само на задачи от конкурса „Роман Хайнацки“, защото ги обсъждахме заедно, понякога с дни и това бяха най-хубавите дни от годината. Общото в следващите няколко задачи е изключителната им математическа хубост. Твърденията са приказно невероятни и красиви. Пламен имаше вкус и с лекота се справяше с доказателствата. Аз му се радвах, а той престорено сърдито казваше: „Търся човек, който да ме критикува, не тебе.“

Първата задача, за която ще стане дума, се е появила през 1949 г. на Московската олимпиада, а по-късно през 1973 г. – на американския конкурс „Пътнам“ във вида:

Нека $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}\}$ *е множество от такива цели числа, че ако премахнем едно от числата, останалите можем да разделим на две множества от n елемента с равни суми. Да се докаже, че*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}.$$

Пламен не обичаше несъществените обобщения и реши задачата за *реални* числа x_1, x_2, …, x_{2n+1} (което не е лесно решение). За първото състезание „Роман Хайнацки“ през 2007 г. той предложи следната:

Задача 1. Дадени са 11 цели числа, които притежават следното свойство: което и от тях да премахнем, останалите 10 числа могат да се разделят на две групи по 5 числа с равни суми. Да се докаже, че всичките 11 числа са равни помежду си.

Решение: Нека дадените числа са $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Като извадим a_1 от всички тях, получаваме числата $b_1 = a_1 - a_1 = 0$, $b_2 = a_2 - a_1, \ldots$, $b_{11} = a_{11} - a_1$. Лесно се съобразява, че получените числа също изпълняват условието на задачата. Сега, ако $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{11}$, от условието следва, че числата $S - b_1$, $S - b_2, \ldots, S - b_{11}$ са четни. Тогава всички числа $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ са с еднаква четност (четността на S). Но $b_1 = 0$ е четно число и значи всички тези числа са четни. Като ги разделим на 2, получените числа отново изпълняват условието на задачата и отново първото от тях е равно на 0. Следователно и тези числа са четни. Отново ги делим на 2 и т.н. Този процес може да бъде безкраен само ако $b_1 = b_2 = \cdots = b_{11} = 0$. Тогава $a_1 = a_2 = \cdots = a_{11}$, което и трябваше да се докаже.

Втората задача, която предлагам да спомена, е предлагана някога през годините (не зная точно кога и къде) на международна олимпиада по математика. Обърнете внимание на елегантното решение на тази задача.

Задача 2. Всяко от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е равно на 1 или на -1, като при това $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Да се докаже, че n се дели на 4.

Решение: Сумата $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ има n на брой събираеми и всяко едно от тях е равно на 1 или на -1. Тъй като тази сума е равна на 0, то броят на единиците е равен на броя на минус единиците, така че $n = 2k$ е (засега) четно число. Очевидно $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = a_1^2a_2^2\ldots a_{n-1}^2a_n^2 = +1$. От друга страна, тъй като k на брой от тези множители са равни на -1 (а останалите са равни на 1), то $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = (-1)^k$. Така получаваме $(-1)^k = +1$ и следователно $k = 2l$ е четно число. Следователно $n = 2k = 4l$ се дели на 4.

За шести клас в състезанието „Роман Хайнацки“ същата задача имаше вида:

Задача 3. Всяко едно от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ е равно на 1 или на -1. Възможно ли е да се изпълнява равенството $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 = 0$?

През 1971 г. на Общоруската олимпиада проф. Алексей Ширшов предлага прочулата се по-късно задача ***за трите гърнета***.

Имаме три гърнета и във всяко гърне – цяло число литри мляко. Всяко от гърнетата може да побере всичкото мляко, разлято по трите гърнетата. Имаме право от гърне А с не повече литри мляко от друго гърне В да прелеем от В в А точно толкова литри, колкото има в гърнето А. Да се докаже, че след няколко подходящи преливания можем да изпразним едно от гърнетата.

През 1993 г. същата задача се появява в американския конкурс „Пътнам“ като задача В-6 т.е. задача с висока трудност.

Дадени три положителни цели числа. Можем да изберем две от тях x и y, и ако се окаже, че $x \leq y$, да ги заменим съответно с $2x$ и $y - x$. Да се докаже, че след няколко (краен брой) подходящи замени можем да получим нула.

През 1989 г. Пламен Сидеров предложи за „Зимните математически състезания“ в град Варна следното твърдение, което е обратната задача на задачата за трите гърнета.

В една държава са пуснати в обръщение N монети. Позволена е следната операция: ако А и В са произволни жители и А притежава не повече монети от В, то А може да вземе от В толкова монети, колкото е притежавал до момента. Известно е, че както и да са *разпределени първоначално монетите между жителите на държавата, всички монети могат да преминат в един човек след краен брой пъти подходящи прилагания на операцията. Да се докаже, че N е степен на числото 2.* [1]

Така се стигна до задача 6 в конкурса „Роман Хайнацки“ през 2011 г.:

Задача 4. В няколко кутии са поставени по произволен начин 16 топки. Позволена е следната операция: вземаме две кутии и от тази, в която има повече топки, пресипваме в другата още толкова топки, колкото е имало в нея. Ако в двете кутии е имало равен брой топки, просто пресипваме всички топки от едната кутия в другата. Да се докаже, че след краен брой такива операции можем да пресипем всички топки в една кутия.

Решение: Първо да вземем тези кутии, които съдържат *нечетен* брой топки (да наречем тези кутии *нечетни*). Броят на нечетните кутии със сигурност е четно число. В противен случай сумарният брой на всички топки ще се окаже нечетно число, а ние знаем, че общият им брой е 16. Разделяме нечетните кутии по двойки и с всяка двойка извършваме позволената операция. Сега вече всяка кутия съдържа четен брой топки. Да приемем, че всяка от топките е направена от пластилин и от всеки две топки в една кутия правим една по-голяма топка. Така получаваме следната по-лесна задача:

В няколко кутии са поставени по произволен начин 8 топки. Позволена е следната операция: вземаме две кутии и от тази, в която има повече топки, пресипваме в другата още толкова топки, колкото е имало в нея. Ако в двете кутии е имало равен брой топки, просто пресипваме всички топки от едната кутия в другата. Да се докаже, че след краен брой такива операции можем да пресипем всички топки в една кутия.

Да вземем само нечетните кутии. Броят на нечетните кутии е четен, защото сумата на всички топки е четното число 8. Разделяме нечетните кутии по двойки и с всяка двойка извършваме позволената операция. Сега вече всяка кутия съдържа четен брой топки. Да приемем, че всяка от топките е направена от пластилин и от всеки две топки в една кутия правим една по-голяма топка. Общият брой на топките е 4. Но тогава за непразните кутии са възможни следните четири случая:

Първи случай: 1, 1, 1, 1; *Втори случай*: 1, 1, 2; *Трети случай*: 4, 4; *Четвърти случай*: 8.
За всеки от тези случаи вече е очевидно как ще пресипем всички топки в една кутия.

Тук е мястото да отбележим, че през 1982 г. Пламен Сидеров се запознава с проф. Алексей Ершов, който по покана на сектор „Алгебра“ на Института по математика и информатика към БАН гостува в София.

В книгата на проф. Иван Проданов „Принцип на Дирихле“ има една изключително красива задача, за която се говори, че е от проф. Сендов и тя е:

В равнината са дадени 5 точки с координати цели числа. Да се докаже, че между триъгълниците с върхове тези пет точки има поне един триъгълник с лице цяло число.

Тази задача беше предложена от Пламен през 2013 г. на състезанието „Роман Хайнацки“ във вида:

Задача 5. В равнината е дадена правоъгълна координатна система и пет точки A, B, C, D и E в първи квадрант, чиито координати са цели числа. Да означим с $\boldsymbol{M}$ множеството от всички триъгълници, чиито върхове са някои три от точките A, B, C, D и E. Да се докаже, че:

а) лицето на всеки триъгълник от множеството $\boldsymbol{M}$ е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число;

б) лицето на поне един триъгълник от множеството $\boldsymbol{M}$ е цяло число;

в) лицата на поне три триъгълника от множеството $\boldsymbol{M}$ са цели числа.

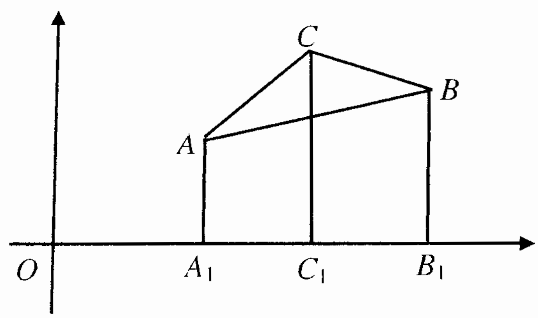
Решение: Ако $X(x_1;x_2)$ е произволна точка с координати x_1 и x_2, с X_1 ще означим петата на перпендикуляра, спуснат от X към абсцисата, т.е. това е точката $X_1(x_1;0)$. Ако $X(x_1;x_2)$ и $Y(y_1;y_2)$ са точки от първи квадрант с целочислени координати, то четириъгълникът XX_1Y_1Y е правоъгълен трапец с основи XX_1 и YY_1 и височина X_1Y_1. Лицето на този трапец е равно на

$$S = \frac{XX_1 + YY_1}{2} \cdot X_1Y_1 = \frac{x_2 + y_2}{2}(y_1 - x_1).$$

Ясно е, че лицето S е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число.

Ще отбележим, че ако абсцисите x_1 и y_1 на точките X и Y са с еднаква четност, то S е цяло число. Също така, ако ординатите x_2 и y_2 са с еднаква четност, лицето S е цяло число. Така числото S не е цяло единствено в случая, когато и абсцисите, и ординатите на X и Y са с различна четност. В този случай S е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е нечетно число.

а) Да разгледаме произволни три точки A, B и C от първи квадрант.



(*) $$S_{ABC} = S_{A_1C_1CA} + S_{C_1B_1BC} - S_{A_1B_1BA}$$

(Ако точките A, B и C са разположени по друг начин, разсъжденията са аналогични)

Очевидно S_{ABC} е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число.

б) Тъй като точките A, B, C, D и E са пет на брой, поне три от тях, например A, B и C, имат абсциси с еднаква четност и тогава лицето S_{ABC} е цяло число.

в) Нека абсцисите на точките A, B и C са с еднаква четност. Тъй като тези точки са три на брой, ясно е, че ординатите на поне две от тях, например A и B, са с еднаква четност.

Да разгледаме лицата на триъгълниците ABC, ABD и ABE.

За удобство знакът (н;ч) ще означава – нечетна абсциса и четна координата.

Нека координатите на точките A и B са от вида (н;ч) за точката С имаме четири случая: (н;н); (н;ч); (ч;ч) и (ч;н).

Трябва до проверим в тези четири случая в равенството (*) какви числа са участващите в лицата на трапеците. Числото $S_{A_1B_1BA}$ е винаги цяло, а другите две числа $S_{A_1C_1CA}$ и $S_{C_1B_1BC}$ не са и двете цели, но сумата им е цяло число. Аналогично се разсъждава в останалите два случая за триъгълниците ABD и ABE.

Задача 6. Намерете целите координати на пет точки в равнината така, че точно три от триъгълниците с върхове в три от дадените пет точки да са с лице цяло число.

Да си припомним една от теоремите на Дирихле:

Нека x е произволно реално число, а n е произволно естествено число. Да се докаже, че съществуват цели числа p и q, такива че $1 \le q \le n$ и $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \le \dfrac{1}{nq}$. [2]

От теоремата на Дирихле се появиха задачите за състезанието „Роман Хайнацки" през 2015 г.

Задача 7. Ще казваме, че числото x върху числовата ос (с единична отсечка от 1 см) е *почти цяло,* ако разстоянието от x до най-близкото цяло число е не повече от 1 милиметър. Да се докаже, че както и да изберем 11 числа върху числовата ос, разстоянието между някои две от ще бъде почти цяло число.

Решение: Ако x е произволно число, да означим с $[x]$ най-голямото цяло число, ненадминаващо x. Нека $[x] = x - \{x\}$. Числото $[x]$ се нарича цяла част на x, а числото $\{x\}$ – дробна част на x. Дробната част на x е число от интервала $[0;1]$.

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ са числата от условието на задачата. Разделяме интервала $[0,1]$ на 10 интервала с дължина от 1 мм и след това нанасяме дробните части на дадените числа $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, ..., $\{x_{11}\}$. Тъй като те са 11 на брой числа, поне две от тях, например x_1 и x_2, ще попаднат в едно и също малко интервалче. Това означава, че дробните части на x_1 и x_2 се различават с не повече от 1 милиметър т.е. разстоянието между x_1 и x_2 е почти цяло число. С това задачата е решена.

Задача 8. Окръжност с диаметър 1 сантиметър е нарязана по произволен начин на няколко дъги и всяка дъга е оцветена в един от трите цвята: син, жълт и зелен. После тези дъги са „изправени" така, че да се превърнат в отсечки и получените отсечки са разхвърляни без припокриване върху числовата ос (с единична отсечка 1 сантиметър). Да се докаже, че можем да намерим две (различни) едноцветни точки, разстоянието между които е цяло число сантиметри.

Решение: Сумата от дължините на всички оцветени отсечки е равна на π сантиметра, т.е. повече от 3 см. Разделяме цялата абсциса на интервали от по 1 см от вида $[n, n + 1)$ и транслираме (преместваме) всички интервали в интервала $[0; 1)$. Така всяка точка от абсцисата се премества с цяло число сантиметри. Нека сините отсечки да покриват общо отсечка с дължина, повече от 1 см (ако допуснем, че и трите цвята покриват по-къс от 1 см интервал, общата им дължина не би могла да надхвърли 3 см). След преместването ще има точка от интервала $[0; 1)$, която ще се покрива от две сини „парченца" от два различни интервала Δ_1 и Δ_2. Нека сините точка X от Δ_1 и точка Y от Δ_2 се препокриват в интервала $[0; 1)$. Тогава разстоянието между X и Y е цяло число. С това задачата е решена.

От Донка (съпругата на Пламен Сидеров) разбрах, че Пламен е приготвил задачите за следващия конкурс „Роман Хайнацки", който ще се проведе през януари 2017 година. Това може да го направи само Пламен и никой друг.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Гроздев, С., Хр. Лесов. Зимни математически състезания (енциклопедия), София: ВУЗФ, 2012, задача № 90.

[2]. Сидеров, Пл. Теория на числата, София, 2015, задача № 1.25.