СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

НСОМ' 2017

проф. Сава Гроздев, д-р Александър Ахегукян

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е състезание по математика между студенти по бакалавърски или магистърски програми. Тя се организира от 1974 г. от висшите училища. Целта е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи.

От 2010 г. НСОМ се провежда с любезното съдействие на Министерството на образованието и науката.

Право да участва в НСОМ като състезател има всеки студент по бакалавърска или магистърска програма на висше училище в Република България. Студентите се разпределят в три състезателни групи според професионалното направление, в което е специалността им:

Група А – математика, информатика и компютърни науки;

Група Б – природни и технически науки, сигурност и отбрана;

Група В – всички неизброени в групи А и Б.

Най-добре представилите се студенти получават медали съгласно традицията в международните олимпиади по математика – награждават се около 50% от участниците в приблизително съотношение 1:2:3 за златен, сребърен и бронзов медал.

Организацията на олимпиадата се осъществява от Национална комисия и висше училище – домакин.

НСОМ през 2017 г. беше организирана при домакинството на Пловдивски университет „П. Хилендарски". Олимпиадата се проведе от 19 до 21 май 2017 г. в Пампорово, хотелски комплекс „Камелия". В нея участваха повече от 100 студенти от 14 университета от България и 2 университета от чужбина.

Представянето на отбора на Висшето училище по застраховане и финанси е отлично. Бяха завоювани 1 златен медал – **Анна-Мария Арнаудова** (Финанси и международен мениджмънт), 1 сребърен медал – **Борислава Ирибозова** (Финанси) и 1 бронзов медал – **Виктория Върбанова** (Финанси). Отборът на ВУЗФ с научен ръководител д-р Александър Ахегукян се класира на трето място. ВУЗФ е на трето място и в класирането по висши училища в група В.

ВУЗФ участва ежегодно в НСОМ от 2007 година със свои отбори и традиционно печели медали и отборни купи. Завоювани са общо **23 медала**, от които **4 златни**, **9 сребърни** и **10 бронзови** в индивидуалното класиране в група В. В класирането по отбори и по висши училища ВУЗФ традиционно заема втори и трети места, а през 2012 г. завоюва първо място и в двете класирания. Ето накратко историята:

1 – 3 юни 2007 г., Созопол, домакин Университет по архитектура, строителство и геодезия със съдействието на Технически университет, София. ВУЗФ печели трето отборно място в група В.

Юни 2008 г., Благоевград, домакин Югозападен университет „Неофит Рилски“. ВУЗФ печели трето отборно място в група В.

Май 2009 г., к-с Слънчев бряг. ВУЗФ печели трето отборно място в група В.

14 – 16 май 2010 г., Велико Търново, домакин СУ „Климент Охридски“, съорганизатор Великотърновският университет „Св. Св. Кирил и Методий“. ВУЗФ печели 1 бронзов медал в индивидуалното класиране и трето място в отборното класиране в група В.

20 – 22 май 2011 г. , София, домакин Висше училище по застраховане и финанси (ВУЗФ), София. ВУЗФ печели 3 сребърни медала в индивидуалното класиране в група В, второ място в отборното класиране и второ място в класирането по висши училища група В.

18 – 20 май 2012 г. , Варна, домакин Икономически университет – Варна. ВУЗФ печели 2 златни и 2 бронзови медала в индивидуалното класиране в група В, първо място в отборното класиране и първо място в класирането по висши училища в група В.

16 – 20 май 2013 г., Шумен, домакин Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“. ВУЗФ печели 3 сребърни и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране в група В , трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група В.

30 май – 01 юни 2014 г., Созопол, домакин Технически университет, София. ВУЗФ печели 3 бронзови медала в индивидуалното класиране в група В, трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група В.

29 – 31 май 2015 г., Слънчев бряг, домакин Университет по архитектура, строителство и геодезия. ВУЗФ печели 1 златен, 1 сребърен и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране в група В, трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група В.

27 - 29 май 2016 г., Русе, домакин Русенски университет „Ангел Кънчев“. ВУЗФ печели 1 сребърен и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране, трето място в класирането по висши училища в група В.

19 – 21 май 2017 г., Пампорово, домакин Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“. ВУЗФ печели 1 златен, 1 сребърен и 1 бронзов медала в индивидуалното класиране в група В, трето място в отборното класиране и трето място в класирането по висши училища в група В.

В тази статия се обсъждат задачите от третата група В на тазгодишната олимпиада. В групата се състезаваха студенти от икономически висши училища, в които обучението по математика е с по-малък брой часове.

Задача 1. Дадени са матриците $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}x & -2y\\ y & x\end{pmatrix}$, където x и y са реални числа.

а) Да се намери детерминантата D на матрицата $A.B$.

б) Да се докаже, че точките $M(x,y)$, за които уравнението $3D.u^2+D.u+3=0$ няма реални корени, лежат във вътрешността на елипса. Да се определят дължините на осите на елипсата.

в) Ако $x^2+y^2\neq 0$ и $A^{2018}.B=B^{2018}.A$, да се докаже, че $A^{2017}=B^{2017}$.

Решение: а) За детерминантите на A и B имаме съответно $\det A=3$ и $\det B=x^2+2y^2$. Следователно $D=3.\left(x^2+2y^2\right)$.

б) Дискриминантата на уравнението $3D.u^2+D.u+3=0$ е

$$D_0=D^2-36.D=9\left(x^2+2y^2\right)\left(x^2+2y^2-12\right).$$

Разглежданото уравнение няма реални корени, когато $D_0 < 0$. След заместване с резултата от а) получаваме, че е изпълнено неравенството $x^2 + 2y^2 - 12 < 0$. Последното записваме във вида $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} < 1$. Следователно точките $M(x,y)$ лежат вътре в елипсата $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$, полуосите a и b на която имат дължини $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{6}$. Следователно дължините на осите са $2a = 4\sqrt{3}$ и $2b = 2\sqrt{6}$.

в) Равенството $A^{2018}.B = B^{2018}.A$ записваме във вида $A^{2017}.(A.B) = B^{2017}.(B.A)$. Тъй като $A.B = B.A = \begin{pmatrix} x+2y & 2(x-y) \\ -(x-y) & x+2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $D \neq 0$, то $A^{2017} = B^{2017}$.

Задача 2. Дадена е параболата $\pi: y^2 = 8.x$. Правата l минава през точката $M(-2,a)$ $(a \in \mathbb{R})$ и е успоредна на оста на π. Параболата π пресича l в точка C и точката A е симетрична на точката $F(2,0)$ спрямо C.

а) Да се намерят координатите на C.

б) Да се намерят координатите на A.

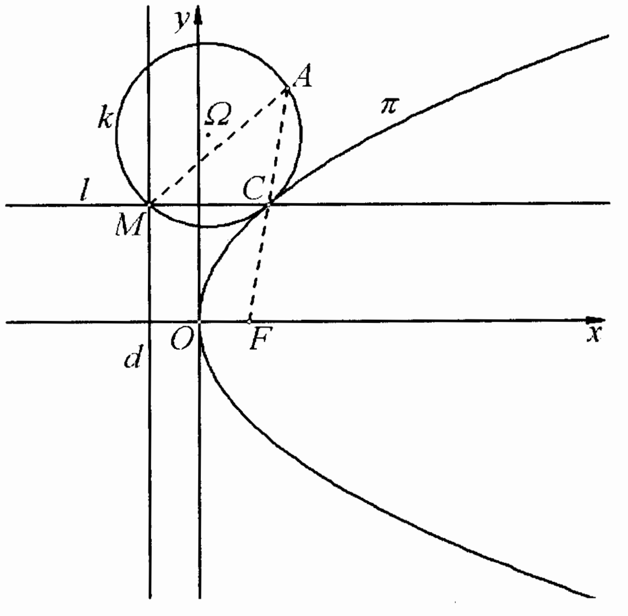
в) Да се намери броят на общите точки на описаната около ΔAMC окръжност и параболата π в зависимост от стойностите на a.

Решение: Тъй като параболата π има канонично уравнение $y^2 = 8.x$ спрямо координатната система Oxy, то оста на π съвпада с абсцисната ос Ox. Следователно уравнението на l е $y = a$. Системата, образувана от уравненията на l и π, има единствено решение $x = \frac{a^2}{8}$ и $y = a$. Затова $l \cap \pi = C\left(\frac{a^2}{8}, a\right)$. С това подточка а) е решена. За координатите на A са изпълнени равенствата $x_A = 2x_C - x_F$ и $y_A = 2y_C - y_F$. Оттук и от резултата, получен в а), следва, че $A\left(\frac{a^2-8}{4}, 2a\right)$. С това е решена подточка б). Симетралите s_{CM} и s_{AM} на отсечките CM и AM имат съответно следните уравнения $s_{CM}: x = \frac{a^2-16}{16}$ и $s_{AM}: 8ax + 32y - a(a^2+32) = 0$. Системата, образувана от тези уравнения, има следното решение $x_0 = \frac{a^2-16}{16}$, $y_0 = \frac{a(a^2+80)}{64}$. По този начин намерихме координатите (x_0, y_0) на центъра Ω на окръжността k, описана за ΔACM.

Разстоянието $M\Omega$ е равно на радиуса R на k. От координатите на Ω получаваме равенството $R^2 = \left(\frac{a^2+16}{16}\right)^3$. Оттук намираме уравнението на окръжността

$$k: 32x^2 + 32y^2 - 4(a^2-16)x - a(a^2+80)y + a^2(a^2+40) = 0.$$

От уравненията на k и π получаваме, че ординатите на общите за k и π точки удовлетворяват уравнението $(y-a)^2(y^2 + 2ay + 2a^2 + 80) = 0$. За втория множител в това уравнение имаме $y^2+2ay+2a^2+80=(y+a)^2+a^2+80>0$. Затова той няма реални корени. Следователно уравнението има един двоен корен $y=a$. Оттук и а) следва, че $C\left(\frac{a^2}{8},a\right)$ е единствената обща точка на k и π при произволно реално число a. Следователно k и π са допирателни за всички реални стойности на a. С това е решена и подточка в).



Задача 3. Графиките на функциите $f(x)=x^{2017}$ и $g(x)=a.\ln x \ (a\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ имат обща допирателна t в точка T.

а) Да се намерят a и координатите на T.

б) Да се намери уравнението на t.

в) Ако t пресича координатните оси в точките A и B, а O е началото на координатната система, да се намери лицето на ΔOAB.

Решение: Нека абсцисата на точката T е x_0. Тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ се допират в T, то $f(x_0)=g(x_0)$ и $f'(x_0)=g'(x_0)$. Затова са изпълнени равенствата $x_0^{2017}=a\ln x_0$ и $2017x_0^{2016}=\frac{a}{x_0}$. Оттук $2017.a\ln x_0=a$, т.е. $\ln x_0=\frac{1}{2017}$. Следователно $x_0=\sqrt[2017]{e}$ и $a=2017e$. Оттук $T\left(\sqrt[2017]{e},e\right)$. Допирателната t има уравнение

$$y-e=g'\left(\sqrt[2017]{e}\right)\left(x-\sqrt[2017]{e}\right).$$

Оттук следва, че $y=\frac{2017e}{\sqrt[2017]{e}}x-2016.e$.

Нека $t\cap Ox=A$ и $t\cap Oy=B$. От уравнението на t имаме $A\left(\frac{2016}{2017\sqrt[2017]{e}},0\right)$ и $B(0,-2016.e)$. Следователно $S_{OAB}=\frac{2016^2.e}{4034\sqrt[2017]{e}}$.