ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. “Гусла” № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, по пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+547. Да се определи съществуват ли n последователни цели числа, сборът от квадратите на които е квадрат на цяло число, ако $n=4^k(6m+1)$ за някои неотрицателни цели числа k и m.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+548. Положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са такива, че е изпълнено неравенството

$$\frac{a_1}{S-a_1+1}+\frac{a_2}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n+1}\le 1,$$

където $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Да се докаже, че е изпълнено неравенството $\frac{1}{S-a_1+1}+\frac{1}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{1}{S-a_n+1}\ge 1$.

(Draghia Denisa Iulia, Крайова, Румъния)

М+549. Да се докажат неравенствата:

а) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\ge 1$; б) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\ge 1$;

в) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x}\ge 1$; г) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}\ge 1$.

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

М+550. Даден е ΔABC, за който $\sphericalangle BAC=60^\circ$. Върху страната AC съществува такава точка K, че вписаните в ΔABK и ΔBCK окръжности се допират в точка L, за която $BL=6.KL$. Да се докаже, че вписаната в ΔABC окръжност минава през точката K и центърът ѝ лежи върху вписаната в ΔABK окръжност.

(Сава Гроздев, гр. София,
Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+551. Нека O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълен триъгълник ABC, в който $\sphericalangle ACB=\gamma$ е най-малкият му ъгъл. Ако Q е такава точка от страната BC, че $\sphericalangle HOQ=2\gamma$, да се определи $\sphericalangle OHQ$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+552. Дадени са тетраедър $ABCD$ с център на тежестта G и сфера k с център G. Ако M е произволна точка от k, да се докаже, че сумата $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ не зависи от положението на M върху k. **(Милен Найденов, гр. Варна)**

Краен срок за изпращане на решения: 15.10.2016 г.