М + Р Е Ш Е Н И Я

М+556. В трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагоналите AC и BD се пресичат в точка O, а лицата на триъгълниците ABO, CDO и BCO са съответно a, b и c. Ако е изпълнено равенството $c = a - 6b$, да се намери отношението на голямата основа към малката.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Тъй като $c = \sqrt{ab}$, то $\sqrt{ab} = a - 6b$. Следователно $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} - 6$. Ако $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$, то $x^2 - x - 6 = 0$. Следователно търсеното отношение е $x = 3$, т.е. $3:1$.

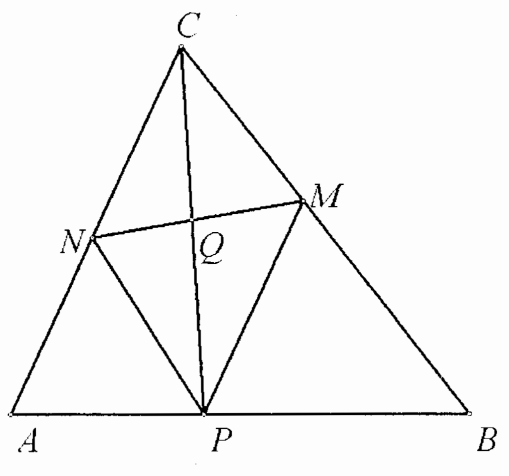
М+557. Точките M, N и P лежат съответно върху страните BC, CA и AB на ΔABC така, че $\sphericalangle ANP = \sphericalangle BMP = \sphericalangle MPN$.

а) Ако $CP \cap MN = Q$, да се намери геометричното място на точката Q, когато P описва страната AB.

б) Да се определи положението на точката P, при което $MN \perp CP$. Да се докаже, че при това положение на P периметърът на четириъгълника $CMPN$ е по-голям от удвоения диаметър на вписаната в ΔABC окръжност.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. От условието следва, че $AN \parallel PM$ и $BM \parallel PN$. Следователно четириъгълникът $CMPN$ е успоредник.



а) Диагоналите на успоредника $CMPN$ се разполовяват от точката Q. Затова, когато P се движи по страната AB, Q описва средната отсечка на ΔABC, която е успоредна на AB.

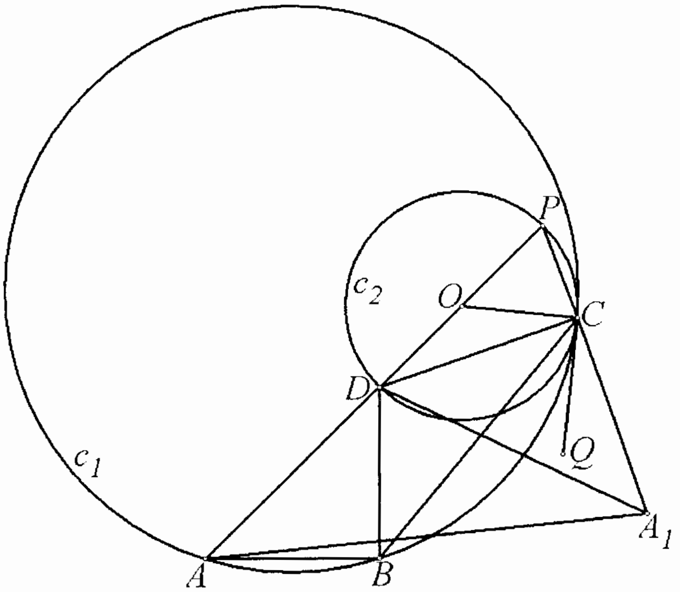
б) Ако $MN \perp CP$, успоредникът $CMPN$ е ромб, т.е. $CM = MP = PN = CN = x$ и диагоналът CP е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Тъй като $PN \parallel BC$ и $PM \parallel AC$, чрез теоремата на Талес изразяваме $\frac{PN}{BC} = \frac{AP}{AB}$ и $\frac{PM}{AC} = \frac{BP}{AB}$. След почленно събиране на тези равенства получаваме $\frac{x}{BC} + \frac{x}{AC} = 1$. Оттук $x = \frac{AC.BC}{AC + BC}$. За лицето S на ΔABC имаме $S = \frac{1}{2}.AC.BC.\sin\sphericalangle ACB$. Тъй като $0 < \sin\sphericalangle ACB \le 1$, то $S \le \frac{1}{2}.AC.BC$. Освен това $AC + BC < AC + BC + AB$. Затова $x > \frac{2S}{AC + BC + AB} = r$. Следователно за периметъра на ромба е изпълнено неравенството $4x > 4r$, което доказва твърдение б).

М+558. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABD = 90°$ и $AC.BD = AD.BC$. Точката P лежи върху правата AD така, че D е между A и P и

$\sphericalangle DCP = 90^\circ$. Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците ABC и DCP са допирателни.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. Достатъчно е да докажем, че описаните окръжности c_1 и c_2 съответно около ΔABC и ΔDCP имат обща допирателна в точката C. Нека O е средата на PD, а Q е точка в полуравнината, определена от правата CD, съдържаща $ABCD$ така, че $\sphericalangle QCO = 90^\circ$. Правата CQ е допирателна за c_2. Остава да се докаже, че тя се допира до c_1. От свойствата на периферните и вписаните ъгли следва, че е достатъчно да се докаже, че $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$. Тъй като $\sphericalangle DCO = \sphericalangle ODC = 180^\circ - \sphericalangle ADC$, получаваме последователно



$\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCD - \sphericalangle DCB = 90^\circ - (\sphericalangle DCO + \sphericalangle BCD) = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BCD - 90^\circ$,

т.е. $\sphericalangle BCQ = (180^\circ - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD) - \sphericalangle BCD - 90^\circ = 90^\circ - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD - \sphericalangle BCD$.

Тогава желаното равенство $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$ е равносилно с равенството $90^\circ - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD - \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC$, т.е (1) $90^\circ - \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. Остава да докажем това равенство. Нека A_1 е точка от продължението на PC така, че $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle ADB$. Понеже $\sphericalangle A_1CD = \sphericalangle ABD = 90^\circ$, то $\Delta ADB \sim \Delta A_1DC$. Оттук $\dfrac{AD}{A_1D} = \dfrac{DB}{DC}$.

От тази пропорция и равенството $\sphericalangle ADA_1 = \sphericalangle BDC$ следва, че $\Delta ADA_1 \sim \Delta BDC$. Затова $\dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$. Но по условие $BC.AD = AC.BD$, което е еквивалентно с $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC}{AD}$.

Следователно $\dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{AC}{AD}$, т.е. $AA_1 = AC$. Оттук (2) $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle AA_1C$. Имаме $\sphericalangle ACA_1 = 90^\circ - \sphericalangle ACD$. От друга страна $\Delta ADA_1 \sim \Delta BDC$ и $\Delta A_1DC \sim \Delta ADB$, $\sphericalangle AA_1D = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle DA_1C = \sphericalangle DAB$. Оттук $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle AA_1D + \sphericalangle DA_1C = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$.

От равенството (2) следва, че $90^\circ - \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. Последното доказва (1). С това задачата е решена.

M+559. Да се реши уравнението $5x^2 + 6y^2 + z^2 - 2zy - 6x + 12y + 9 = 0$, където $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. Преобразуваме лявата страна на уравнението, като отделяме точни квадрати.

Получаваме $(z-y)^2 + 5\left(x - \dfrac{3}{5}\right)^2 + 5\left(y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 0$. Следователно са изпълнени едновременно равенствата $z-y=0$, $x-\frac{3}{5}=0$ и $y+\frac{6}{5}=0$. Оттук получаваме, че уравнението има единствено решение $x=\frac{3}{5}$, $y=-\frac{6}{5}$, $z=-\frac{6}{5}$.

М+560. Нека $N=2000^{2000}+2001^{2001}+2002^{2002}+\cdots+2014^{2014}+2015^{2015}+2016^{2016}$. Редицата N, N_1, N_2, ..., N_k е образувана така, че всяко число след първото е получено като сума от цифрите на предишното. Ако k е най-малкото число, при което N_k е едноцифрено число, да се намерят k и N_k.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Първо ще определим стойността на N_k. Числото N_k е остатъкът, който се получава при делението на N с 9. Да отбележим, че ако a е цяло число, което не се дели на 3, то a^6 има остатък 1 при деление на 9. Наистина, тъй като $a^6-1=\left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right)$, то при $a=3n+1$ числото $a^3-1=9n\left(3n^2+3n+1\right)$ се дели на 9, а при $a=3n-1$ числото $a^3+1=9n\left(3n^2-3n+1\right)$ се дели на 9. Оттук следва, че при произволно естествено число u числото a^{6u} има остатък 1 при деление на 9. Освен това, ако $\overline{abcd}$ е произволно четирицифрено цяло число, то има остатък $a+b+c+d$ при деление на 9. Като използваме тези наблюдения получаваме:

$2001^{2001}\equiv 2004^{2004}\equiv 2007^{2007}\equiv 2010^{2010}\equiv 2013^{2013}\equiv 2016^{2016}\equiv 0(\operatorname{mod} 9)$,

$2000^{2000}\equiv 2^2\equiv 4(\operatorname{mod} 9)$, $2002^{2002}\equiv 4^4\equiv 4(\operatorname{mod} 9)$, $2003^{2003}\equiv 5^5\equiv 2(\operatorname{mod} 9)$,

$2005^{2005}\equiv 7^1\equiv -2(\operatorname{mod} 9)$, $2006^{2006}\equiv 8^2\equiv 1(\operatorname{mod} 9)$, $2008^{2008}\equiv 1^4\equiv 1(\operatorname{mod} 9)$,

$2009^{2009}\equiv 2^5\equiv 5\equiv -4(\operatorname{mod} 9)$, $2011^{2011}\equiv 4^1\equiv 4(\operatorname{mod} 9)$, $2012^{2012}\equiv 5^2\equiv 7\equiv -2(\operatorname{mod} 9)$,

$2014^{2014}\equiv 7^4\equiv 7\equiv -2(\operatorname{mod} 9)$, $2015^{2015}\equiv 8^5\equiv 8\equiv -1(\operatorname{mod} 9)$.

Следователно $N_k\equiv N\equiv 4+4+2-2+1+1-4+4-2-2-1\equiv 5(\operatorname{mod} 9)$, т.е. $N_k=5$.

Сега ще намерим стойността на k. Тъй като за всяко четирицифрено число $\overline{abcd}$ е изпълнено $\overline{abcd}<10000$, то $\overline{abcd}^{2016}<10000^{2016}$. Броят на цифрите на 10000^{2016} е равен на $1+4.2016=8065$. Следователно броят на цифрите на $\overline{abcd}^{2016}$ не надминава 8065. Ако две числа имат по 8065 цифри, то сумата им е число с най-много 8066 цифри. Следователно сумата на четири числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8067 цифри. Оттук следва, че сумата на осем числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8068 цифри. Следователно сумата на шестнадесет числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8069 цифри. Накрая получаваме, че сумата на седемнадесет числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8070 цифри. Следователно числото N има не повече от 8070 цифри. Най-голямото число, което има 8070 цифри, е числото X, състоящо се от 8070 деветки. Сумата от цифрите на X е $8070.9=72630$. Следователно $N_1<72630$. Числото, което е по-малко от 72630 и има най-голяма сума на цифрите си, е 69999. Затова за сумата N_2 от цифрите на N_1 е изпълнено неравенството $N_2<6+4.9=42$. Числото, което е по-малко от 42 и има най-голяма сума на цифрите си, е 39. Затова за сумата N_3 от цифрите на N_2 е изпълнено неравенството $N_3\le 3+9=12$. Тъй като $5=N_k\le N_3$ и сумата от цифрите на всяко от числата 10, 11 и 12 е по-малка от 5, то $N_3=5$. Оттук следва и предположението, че $k=3$. Не е изключена обаче и възможността да е изпълнено равенството $k=2$. Тази възможност се отхвърля по следния начин: Нека

$$A=2001^{2001}+2004^{2004}+2007^{2007}+2010^{2010}+2013^{2013}+2016^{2016} \text{ и } B=N-A.$$

Числото A се дели на 9 и затова е изпълнено равенството $A=9.C$, където $C\geq 1$. Следователно сумата от цифрите на A е поне 9. Ако сумата от цифрите на B е равна на m, то за сумата от цифрите на N получаваме $N_1\geq 9+m$. Тъй като $m\geq 1$, то N_2 е двуцифрено число (както беше показано по-горе, то е по-малко от 42). Следователно $k=3$. Така окончателно получаваме, че $k=3$ и $N_3=5$.

М+561. Ако α_1, α_2 и α_3 са ъглите на триъгълник $A_1A_2A_3$, да се докаже неравенството:

$$3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)\geq$$

$$\geq\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)^2+3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)^2.$$

В кои случаи се достига равенство?

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. Разглеждаме матрицата $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3\\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и нейната транспонирана $A^T=\begin{pmatrix}\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 1\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 1\\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 1\end{pmatrix}$. За произведението на тези матрици получаваме

$$A.A^T=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\\ \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\\ \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i & 3\end{pmatrix}.$$

Тъй като $\det\left(A.A^T\right)=\left(\det A\right)^2\geq 0$, то след пресмятане на детерминантата на $A.A^T$ се получава

$$3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)^2-3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)^2\geq 0,$$

което е еквивалентно с желаното неравенство. Равенство се получава тогава и само тогава, когато $\det(A)=0$, т.е.

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_1\sin\alpha_2-\cos\alpha_2\sin\alpha_3-\cos\alpha_3\sin\alpha_1=0.$$

Това равенство е еквивалентно с $\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}=0$, което означава, че $\alpha_1=\alpha_2$, $\alpha_2=\alpha_3$ или $\alpha_3=\alpha_1$. Следователно в неравенството се достига равенство тогава и само тогава, когато $A_1A_2A_3$ е равнобедрен триъгълник.

М+562. В окръжност с диаметър d са построени n успоредни хорди A_kB_k $(k=1,2,\ldots,n)$, които пресичат диаметър PQ съответно в точките M_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Ако диаметърът PQ е такъв, че са изпълнени равенствата $A_kM_k^2+B_kM_k^2=S$ $(k=1,2,\ldots,n)$, да се намерят всички цели стойности на n и d, при които $n.S=2016$.

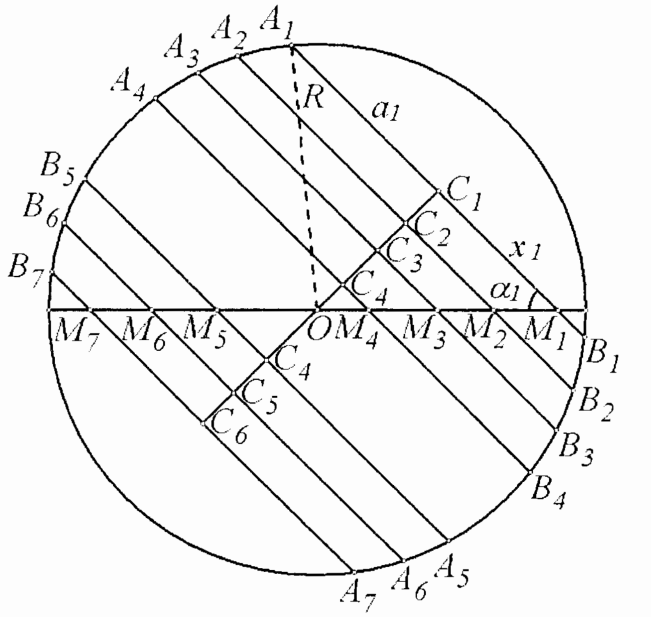
(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека дадената окръжност има център O и радиус R, а C_k е средата на A_kB_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Въвеждаме означенията $A_kC_k=a_k$, $OC_k=p_k$, $C_kM_k=x_k$ и $\sphericalangle A_kM_kO=\alpha_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Тогава

$$S=A_kM_k^2+B_kM_k^2=(a_k+x_k)^2+(a_k-x_k)^2=2(a_k^2+x_k^2).$$

Тъй като $a_k^2+p_k^2=R^2$ и $a_k=p_k ctg\alpha_k$, то $S=2\left[R^2+p_k^2\left(ctg^2\alpha_k-1\right)\right]$ $(k=1,2,\ldots,n)$. От последното равенство следва, че S е постоянна величина само когато $ctg^2\alpha_k-1=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Следователно $\alpha_k=45^\circ$ или $\alpha_k=135^\circ$. При такива ъгли имаме $S=2R^2=\frac{d^2}{2}$. Сега равенството $n.S=2016$ преминава в $n.d^2=4032$. Тъй като $4032=4032.1^2=1008.2^2=252.4^2=63.8^2=448.3^2=112.6^2=28.12^2=7.24^2$, то търсените целочислени решения са осем и те могат да се обобщят в следващата таблица:

d	1	2	3	4	6	8	12	24
n	4032	1008	448	252	112	63	28	7



М+563. Точката P лежи върху страната AB на остроъгълния триъгълник ABC, а M и N са петите на перпендикулярите, спуснати от P съответно към BC и AC. Да се определи положението на P, когато: а) MN има най-малка дължина; б) лицето на ΔMNP е най-голямо; в) сборът от квадратите на MP и NP е най-малък.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. а) От условието следва, че четириъгълникът $CMNP$ е вписан в окръжност с диаметър CP. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. От синусовата теорема за ΔCMN имаме $MN = CP.\sin\gamma$. Следователно MN има най-малка дължина, когато CP е с най-малка дължина. Това се случва, когато $CP \perp AB$, т.е. P е петата на височината през върха C върху страната AB.

б) Тъй като $\sphericalangle MPN = 180° - \gamma$, то $S_{MNP} = \frac{1}{2}MP.NP.\sin\gamma$. От друга страна $S_{BCP} + S_{ACP} = S_{ABC}$, т.е. $\frac{1}{2}BC.PM + \frac{1}{2}AC.PN = \frac{1}{2}BC.AC.\sin\gamma$. Сега от неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва

$$PM.PN = \frac{BC.PM.AC.PN}{BC.AC} \le \frac{1}{BC.AC}\left(\frac{BC.PM + AC.PN}{2}\right)^2 =$$

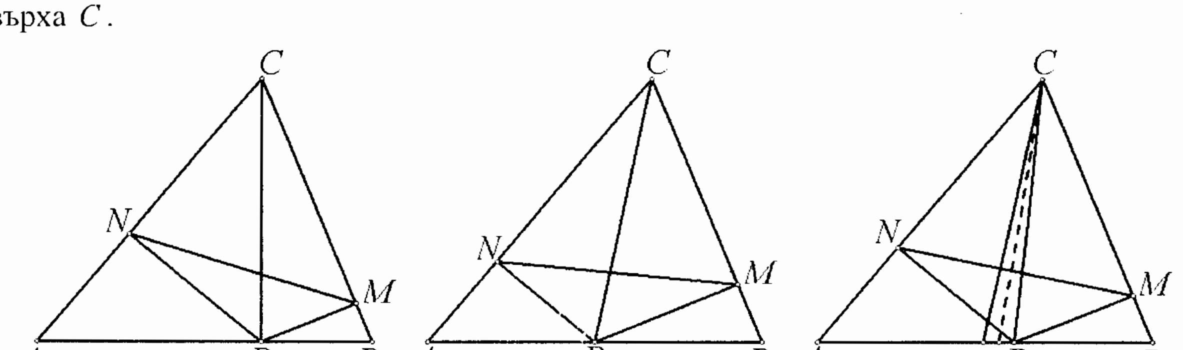
$$= \frac{1}{BC.AC}\left(\frac{1}{2}.BC.AC.\sin\gamma\right)^2 = \frac{1}{4}.BC.AC.\sin^2\gamma.$$

Оттук $S_{MNP} \le \frac{1}{8}MP.NP.\sin^3\gamma$. Следователно най-голямата стойност на S_{MNP} е равна на $MP.NP.\sin^3\gamma$ и се достига, когато $BC.PM = AC.PN$, т.е. $S_{BCP} = S_{ACP}$. Последното равенство показва, че най-голямата стойност на S_{MNP} се получава, когато P е средата на AB.

в) От неравенството но Коши-Буняковски-Шварц имаме

$$(BC^2 + AC^2)(MP^2 + NP^2) \ge (BC.MP + AC.NP)^2.$$

Оттук $MP^2 + NP^2 \ge \frac{4S_{ABC}^2}{BC^2 + AC^2}$. Следователно най-малката стойност на $MP^2 + NP^2$ се получава, когато $AC.MP = BC.NP$. Ако $CD \perp AB$ и $C \in AB$, то $S_{ACP} = \frac{1}{2}AC.MP = \frac{1}{2}AP.CD$ и $S_{BCP} = \frac{1}{2}BC.MP = \frac{1}{2}BP.CD$. От тези равенства намираме $PN = \frac{AP.CD}{AC}$ и $PM = \frac{BP.CD}{BC}$. Следователно $\frac{BP}{AP} = \frac{BC^2}{AC^2}$. Последното равенство означава, че сумата $MP^2 + NP^2$ е най-малка, когато CP е симедианата на ΔABC през върха C.



М+564. Точките O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник ABC. Ако M и N са точки съответно от страните AC и BC, така че $\sphericalangle MHN = \sphericalangle ACB$, да се докаже, че ортогоналните проекции на O и H върху правата MN лежат върху Ойлеровата окръжност на ΔABC и е изпълнено равенството $\sphericalangle MON = 180° - 2\sphericalangle ACB$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. В решението на задачата ще използваме следната:

Лема. Ако X е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник $ABCD$, а H_1, H_2, H_3 и H_4 са ортогоналните проекции на X съответно върху AB, BC, CD и DA, то четириъгълникът $H_1H_2H_3H_4$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180°$.

Доказателство. Тъй като четириъгълниците AH_1XH_4, H_4XH_3D, H_3XH_2C и H_2XH_1B са вписани, то $\sphericalangle H_4H_1X = \sphericalangle H_4AX$, $\sphericalangle H_2H_1X = \sphericalangle H_2BX$, $\sphericalangle H_4H_3X = \sphericalangle H_4DX$ и $\sphericalangle H_2H_3X = \sphericalangle H_2CX$. Оттук имаме

$$\sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 = \left(\sphericalangle H_4H_1X + \sphericalangle H_2H_1X\right) + \left(\sphericalangle H_4H_3X + \sphericalangle H_2H_3X\right) =$$

$$= \left(\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_2BX\right) + \left(\sphericalangle H_4DX + \sphericalangle H_2CX\right) = \left(\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_4DX\right) + \left(\sphericalangle H_2BX + \sphericalangle H_2CX\right) =$$

$$= (180° - \sphericalangle AXD) + (180° - \sphericalangle BXC) = \sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD.$$

Следователно условието $\sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 = 180°$ за вписаност на $H_1H_2H_3H_4$ е еквивалентно с $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180°$. С това лемата е доказана.

Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$, а P и Q са ортогоналните проекции съответно на M и N върху OH. От равенствата $\sphericalangle AHB = 180° - \gamma$ и $\sphericalangle MHN = \gamma$ следва, че $\sphericalangle AHB + \sphericalangle MHN = 180°$. Сега от лемата следва, че ортогоналните проекции на H върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на една окръжност k. Но тази окръжност минава през петите на височините на ΔABC. Следователно k е Ойлеровата окръжност на ΔABC. Оттук получаваме, че $Q \in k$. Нека O_1 е центърът на k, а K е ортогоналната проекция на O_1 върху OH. Тъй като O_1 е среда на OH, то O_1K е средна основа в правоъгълния трапец $HOPQ$. Затова $O_1P = O_1Q$. Но $Q \in k$ и следователно $P \in k$. Оттук следва, че ортогоналните проекции на O върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на k. Сега от лемата следва, че $\sphericalangle AOB + \sphericalangle MON = 180°$, т.е. $\sphericalangle MON = 180° - 2\gamma$. С това задачата е решена.