СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2017

Д-р М. Плюс

Поредната 58. международна олимпиада по математика се проведе в Рио де Жанейро, Бразилия от 12 до 23 юли 2017 г. В нея взеха участие 615 ученици (553 момчета и 62 момичета) от рекордните 111 държави (досегашният рекорд беше 109 държави през миналата година на олимпиадата в Хонг Конг). Както обикновено, регламентът предвиждаше приблизително половината състезатели да получат медали, като златните, сребърните и бронзовите да са (също приблизително) в отношение 1:2:3. Журито на олимпиадата в Бразилия разпредели общо 291 медала, от които 48 златни с долна граница 25 точки вкл., 90 сребърни с граници от 19 до 24 точки вкл. и 153 бронзови с граници от 16 до 18 точки вкл. Българският отбор заслужи 4 сребърни и 2 бронзови медала, което е в рамките на незадоволителните представяния през последните 10 години. Той беше в състав: Иван Ганев (от Американски коллеж с учител д-р Борислава Кирилова), Виолета Найденова (от СМГ "П. Хилендарски" с учител Стойчо Стоев), Константин Гаров (от ПМГ „Н. Обрешков", Бургас с учител Магдалена Янева), Кирил Бангачев (от СМГ "П. Хилендарски" с учител Румяна Караджова), Атанас Динев (от ПМГ „Н. Обрешков", Бургас с учител Динко Раднев) и Христо Папазов (от Американски колеж с учител Десислава Йорданова). В отборното класиране по точки делим 18–21. място (миналата година 22–26. място) с Италия, Холандия и Сърбия, а по медали делим 25–26. място със Сърбия. Спечелените общо 116 точки характеризират един от най-слабите точкови резултати на българския отбор за всички негови участия в международни олимпиади. Дъното е през 2015 г. – 100 точки и през 2013 г. – 101 точки при същото "научно" ръководство на лаборантите от Лабораторията на Пазарджишкия доносник.

Победители в тазгодишната олимпиада са трима ученици, постигнали по 35 точки от максималните 42 – по един от Иран, Япония и Виетнам (и тримата с 0 точки на трета задача). По-долу са резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.

IMO 2017

RIO DE JANEIRO - BRAZIL

58th International Mathematical Olympiad

58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2017 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

Име	Място по точки	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Общо точки	Медал
Иван Ганев	64–71	7	7	0	7	0	2	23	сребърен
Виолета Найденова	82–102	7	7	0	7	0	0	21	сребърен
Константин Гаров	115–138	5	7	0	7	0	0	19	сребърен
Кирил Бангачев	115–138	7	4	0	7	1	0	19	сребърен
Атанас Динев	188–264	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
Христо Папазов	188–264	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
ОБЩО	18–21	40	31	0	42	1	2	116	

58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2017 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Южна Корея	6	42	39	1	42	22	24	170	1	6	0	0
Китай	6	42	25	0	42	19	31	159	2	5	1	0
Виетнам	6	42	36	0	42	21	14	155	3	4	1	1
САЩ	6	42	29	0	42	23	12	148	4	3	3	0
Иран	6	42	32	0	42	17	9	142	5	2	3	1
Япония	6	41	21	0	42	23	7	134	6	2	2	2
Сингапур	6	42	26	0	37	22	4	131	7-8	2	1	2
Тайланд	6	41	30	0	42	17	1	131	7-8	3	0	2
Тайван	6	40	31	0	42	7	10	130	9-10	1	4	1
Великобритания	6	42	17	5	42	8	16	130	9-10	3	0	2
Русия	6	42	26	7	37	8	8	128	11	1	3	2
Грузия	6	42	22	0	42	18	3	127	12-13	1	2	3
Гърция	6	42	33	0	42	9	1	127	12-13	1	4	1
Беларус	6	40	23	1	42	16	0	122	14-16	1	1	4

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Чехия	6	42	26	4	34	16	0	122	14-16	1	2	2
Украйна	6	42	30	0	36	10	4	122	14-16	1	2	2
Филипини	6	42	25	0	42	11	0	120	17	0	3	3
България	**6**	**40**	**31**	**0**	**42**	**1**	**2**	**116**	**18-21**	**0**	**4**	**2**
Италия	6	42	22	0	34	18	0	116	18-21	2	1	1
Холандия	6	41	21	0	39	15	0	116	18-21	1	2	1
Сърбия	6	40	30	0	42	4	0	116	18-21	0	4	2
Унгария	6	40	22	0	34	16	3	115	22-24	2	1	1
Полша	6	39	23	0	42	9	2	115	22-24	1	0	5
Румъния	6	42	17	0	42	9	5	115	22-24	0	3	2
Казахстан	6	40	18	0	35	15	5	113	25	1	2	1
Аржентина	6	40	20	0	42	9	0	111	26-28	1	2	1
Бангладеш	6	42	17	0	42	10	0	111	26-28	0	2	2
Хонг Конг	6	42	20	0	23	26	0	111	26-28	1	1	3
Канада	6	42	22	0	37	1	8	110	29	1	2	2
Перу	6	38	27	0	42	1	1	109	30	0	2	3
Индонезия	6	40	22	0	42	4	0	108	31	0	2	3
Израел	6	40	33	0	30	1	3	107	32	0	3	2
Германия	6	41	16	0	34	15	0	106	33	0	1	3
Австралия	6	42	10	8	31	11	1	103	34	0	3	2
Хърватия	6	38	25	0	37	2	0	102	35-36	0	2	3
Турция	6	40	15	0	42	4	1	102	35-36	0	1	3
Бразилия	6	40	17	0	37	6	1	101	37-38	0	2	1
Малайзия	6	40	17	0	42	2	0	101	37-38	0	2	2
Франция	6	41	11	0	32	16	0	100	39-40	0	2	2
Саудитска Арабия	6	40	17	0	36	7	0	100	39-40	0	2	2
Армения	6	41	18	0	38	2	0	99	41	0	2	2
Азербайджан	6	37	19	0	42	0	0	98	42	0	0	4
Мексико	6	42	13	0	39	2	0	96	43	0	1	2
Босна и Херцеговина	6	41	15	0	39	0	0	95	44-45	0	0	4
Таджикистан	6	40	13	0	42	0	0	95	44-45	0	0	3

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Макао	6	39	10	0	36	9	0	94	46-47	1	0	0
Нова Зеландия	6	42	8	0	42	2	0	94	46-47	0	0	3
Кипър	6	42	15	0	36	0	0	93	48-50	0	0	5
Монголия	6	37	12	0	42	1	1	93	48-50	0	1	2
Туркменистан	6	40	11	0	42	0	0	93	48-50	0	0	2
Швеция	6	42	13	0	27	8	1	91	51	0	1	2
Индия	6	42	18	0	30	0	0	90	52-53	0	0	3
Словения	6	42	16	0	32	0	0	90	52-53	0	0	2
Португалия	6	39	19	0	28	3	0	89	54	0	0	2
Испания	6	41	20	0	25	0	0	86	55	0	0	3
Сирия	6	33	10	0	42	0	0	85	56	0	1	0
Латвия	6	39	8	0	24	13	0	84	57	0	0	3
Молдова	6	38	11	0	27	7	0	83	58-59	0	1	0
Швейцария	6	42	9	0	22	10	0	83	58-59	0	0	1
Колумбия	6	41	2	0	35	3	0	81	60-61	0	0	1
Южна Африка	6	41	7	0	27	6	0	81	60-61	0	0	2
Белгия	6	39	14	0	23	3	1	80	62-64	0	1	2
Ирландия	6	36	8	0	34	2	0	80	62-64	0	0	2
Шри Ланка	6	42	8	0	30	0	0	80	62-64	0	0	3
Дания	6	41	5	0	27	4	0	77	65-66	0	0	1
Македония	6	35	6	0	36	0	0	77	65-66	0	0	1
Киргизстан	6	34	4	0	35	2	0	75	67-69	0	0	2
Мароко	6	37	13	0	25	0	0	75	67-69	0	0	1
Словакия	6	40	4	0	26	5	0	75	67-69	0	0	1
Австрия	6	40	5	0	15	14	0	74	70	0	2	0
Естония	6	40	14	0	16	2	0	72	71	0	1	0
Норвегия	6	38	11	0	17	5	0	71	72	0	0	2
Алжир	6	28	11	0	31	0	0	70	73	0	0	1
Литва	6	41	7	0	20	1	0	69	74-75	0	0	2
Узбекистан	5	16	18	0	35	0	0	69	74-75	0	1	0
Албания	6	41	4	0	22	0	0	67	76-77	0	0	1

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	об що	място	зл.	ср.	бр.
Чили	6	36	5	0	26	0	0	67	76-77	0	0	1
Еквадор	6	38	6	0	20	2	0	66	78	0	0	1
Тунис	5	28	3	0	28	0	0	59	79-80	0	0	1
Венецуела	5	29	4	0	24	2	0	59	79-80	0	0	2
Коста Рика	6	34	1	0	23	0	0	58	81-82	0	0	0
Пакистан	6	23	6	0	29	0	0	58	81-82	0	0	1
Ел Салвадор	4	25	5	0	25	2	0	57	83	0	0	1
Финландия	6	40	4	0	10	1	1	56	84	0	0	0
Косово	5	29	1	0	22	2	1	55	85-86	0	0	1
Пуерто Рико	5	33	3	0	19	0	0	55	85-86	0	0	0
Нигерия	4	21	5	0	25	0	0	51	87	0	0	0
Парагвай	6	35	1	0	12	0	0	48	88	0	0	0
Исландия	6	31	5	0	9	0	0	45	89-90	0	0	0
Люксембург	6	27	1	0	15	2	0	45	89-90	0	0	1
Никарагуа	4	17	4	0	22	1	0	44	91	0	0	1
Уругвай	6	37	0	0	6	0	0	43	92	0	0	0
Черна Гора	4	21	4	0	10	7	0	42	93	0	0	1
Боливия	6	24	0	0	17	0	0	41	94	0	0	0
Лихтенщайн	3	19	0	0	3	0	0	22	95-96	0	0	0
Уганда	6	6	5	0	11	0	0	22	95-96	0	0	0
Гватемала	4	12	0	0	6	2	0	20	97	0	0	0
Боствана	6	8	1	0	10	0	0	19	98	0	0	0
Мианмар	6	2	2	0	11	0	0	15	99-101	0	0	0
Панама	1	7	3	0	5	0	0	15	99-101	0	0	0
Тринидад и Тобаго	1	7	1	0	7	0	0	15	99-101	0	0	0
Куба	1	5	1	0	7	0	0	13	102-103	0	0	0
Ирак	4	11	0	0	2	0	0	13	102-103	0	0	0
Хондурас	2	6	0	0	6	0	0	12	104	0	0	0
Камбоджа	6	1	0	0	10	0	0	11	105-106	0	0	0
Кот д'Ивоар	6	2	2	0	7	0	0	11	105-106	0	0	0
Кения	6	3	0	0	3	2	0	8	107	0	0	0

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Гана	1	5	0	0	1	0	0	6	108	0	0	0
Танзания	2	4	0	0	1	0	0	5	109	0	0	0
Египет	3	2	0	0	1	0	0	3	110-111	0	0	0
Непал	6	0	1	0	2	0	0	3	110-111	0	0	0

Ето задачите от 58-ата международна олимпиада по математика:

Вторник, 18 юли 2017 г.

Задача 1. За всяко естествено число $a_0 > 1$ е дефинирана редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ по следния начин:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, \text{ ако } \sqrt{a_n} \text{ е цяло число} \\ a_n + 3 \quad \text{в противен случай} \end{cases}, \text{ където } n \geq 0 \text{ е цяло число.}$$

Да се намерят всички стойности на a_0, за които съществува такова число A, че $a_n = A$ за безброй много стойности на n.

(*предложена от Стефан Вагнер, Южна Африка*)

Задача 2. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които $f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$ за всеки две реални числа x и y.

(*предложена от Дорлир Ахмети, Албания*)

Задача 3. Ловец и невидим заек играят следната игра в равнината. Началните точки A_0 и B_0, съответно на заека и ловеца, съвпадат. Нека след n хода на играта заекът и ловецът се намират съответно в точките A_n и B_n. По време на $(n+1)$-ия ход се изпълняват последователно следните три условия:

(i) Заекът, оставайки невидим, се придвижва до точка A_{n+1}, разстоянието от която до A_n е точно 1.

(ii) Проследяващо устройство докладва на ловеца някаква точка P_{n+1}, за която гарантира, че е на разстояние най-много 1 от A_{n+1}.

(iii) Оставайки видим, ловецът се придвижва до точка B_{n+1}, разстоянието от която до B_n е точно 1.

Винаги ли е възможно ловецът, независимо как се движи заекът и независимо какви точки докладва проследяващото устройство, да избере своите ходове така, че да е сигурен , че след 10^9 хода разстоянието между него и заека да е най-много 100?

(*предложена от Герхард Воегингер, Австрия*)

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

<u>Сряда, 19 юли 2017 г.</u>

Задача 4. Нека R и S са различни точки от окръжност Ω, като отсечката RS не е диаметър. Нека правата l се допира до Ω в точка R, а T е такава точка, че S е средата на отсечката TR. Точката J е избрана върху малката дъга $\overset{\frown}{RS}$ на Ω така, че описаната окръжност Γ около ΔJST пресича l в две различни точки, по-близката от които до R е означена с A. Ако K е втората обща точка на правата AJ и окръжността Ω, да се докаже, че правата KT се допира до Ω.

(*предложена от Чарлз Лейтем, Люксембург*)

Задача 5. Група от $N(N+1)$, $N \geq 2$, футболни играчи, никои двама от които не са еднакво високи, е подредена в редица. Сър Алекс иска да извади от редицата $N(N-1)$ играчи така, че за оставащите $2N$ играчи да са изпълнени следните N условия:

(1) няма играч между двамата най-високи;

(2) няма играч между третия и четвъртия по височина;

……..

(N) няма играч между двамата най-ниски.

Да се докаже, че това е винаги възможно.

(*предложена от Григорий Челноков, Русия*)

Задача 6. Наредената двойка от цели числа (x, y) е *примитивна*, ако най-големият общо делител на x и y е равен на 1. Дадено е крайно множество S от примитивни двойки. Да се докаже, че съществуват естествено число n и цели числа a_0, a_1, …, a_n така, че за всяка двойка (x, y) от S е изпълнено:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(*предложена от Джон Берман, САЩ*)

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Решение на задача 1.

<u>Случай 1</u>. $a_0 \equiv 0 (\bmod 3)$

Ще докажем, че ако k е произволно естественно число, то $a_0 = 3k$ е решение на задачата. Ще използваме индукция по k. Ако $k = 1$, то $a_0 = 3$ и следващите членове на редицата са 6, 9, 3, 6, 9, …т.е. редицата е периодична с период 3. Следователно $a_0 = 3$ е решение на задачата. Забелязваме, че ако $k = 1$, то всяко $a_0 \leq (3.1)^2 = 9$, което се дели на 3, е решение на задачата. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое k, т.е. всяко $a_0 \leq (3.k)^2$, което се дели на 3, е решение на задачата. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$, т.е. всяко $a_0 \leq (3.(k+1))^2$, което се дели на 3, е също решение на задачата. Нека a_0 се дели на 3 и $(3.k)^2 \leq a_0 \leq (3.(k+1))^2$. Ако $a_0 < (3.(k+1))^2$, прибавяме последователно тройки към a_0, докато стигнем до $(3.(k+1))^2$ и съгласно условието получаваме $3.(k+1)$ като член на редицата. Единственото, което трябва да проверим, е, че $3.(k+1) < (3.k)^2$, за да приложим индуктивното предположение. Последното е еквивалентно с $k+1<3k^2$, за което лесно се проверява, че е изпълнено при $k>1$.

Случай 2. $a_0 \equiv 2(\bmod 3)$

Този случай не води до решение, защото точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 3. Това означава, че всеки член на редицата се получава от предходния с прибавянене на 3 и следователно редицата е строго монотонно растяща.

Случай 3. $a_0 \equiv 1(\bmod 3)$

Ще докажем, че ако k е произволно естествено число, то $a_0 = 3k+1$ не е решение на задачата. Ще използваме индукция по k. Ако $k=1$, то $a_0 = 4$ и следващият член на редицата е 2, което води до случай 2. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое k, т.е. всяко $a_0 \le (3k+1)^2$, което дава остатък 1 при деление на 3, води до член на редицата a_n, който дава остатък 2 при деление на 3. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$, т.е. всяко $a_0 \le (3.(k+1)+1)^2 = (3k+4)^2$, което дава остатък 1 при деление на 3, води до член на редицата a_n, който дава остатък 2 при деление на 3. Нека a_0 дава остатък 1 при деление на 3 и $(3k+1)^2 \le a_0 \le (3k+4)^2$. Ако $a_0 < (3k+4)^2$, прибавяме последователно тройки към a_0, докато стигнем до $(3k+4)^2$ и съгласно условието получаваме $3k+4$ като член на редицата. Единственото, което трябва да проверим, е, че $3k+4<(3k+1)^2$, за да приложим индуктивното предположение. Последното е еквивалентно с $3k^2+k-1>0$, за което (както и в случай 1) лесно се проверява, че е изпълнено при $k>1$.

Окончателно, решенията на задачата са всички a_0, които се делят на 3.

Решение на задача 2.

Случай 1. $f(0)=0$

Като положим $y=0$, получаваме $f\left(f(x)f(0)\right)+f(x+0)=f(0)$ и следователно $f(0)+f(x)=f(0)$, т.е. $f(x)=0$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. Обратно, директно се проверява, че функцията $f(x)=0$ е решение на задачата.

Случай 2. $f(0)\neq 0$

Като положим $x=y=0$, получаваме $f\left(f(0)f(0)\right)+f(0)=f(0)$, откъдето $f(f^2(0))=0$. Сега ще намерим корените на уравнението $f(x)=0$. Ще покажем, че $f(1)=0$. Да допуснем противното, т.е. $f(1)\neq 0$ и нека $c\neq 1$ е корен, т.е. $f(c)=0$. Като положим $x=\dfrac{c}{c-1}$ и $y=c$, получаваме $f\left(f\left(\dfrac{c}{c-1}\right)f(c)\right)+f\left(\dfrac{c}{c-1}+c\right)=f\left(\dfrac{c}{c-1}\cdot c\right)$, откъдето $f\left(f\left(\dfrac{c}{c-1}\right).0\right)+f\left(\dfrac{c^2}{c-1}\right)=f\left(\dfrac{c^2}{c-1}\right)$ и следователно $f(0)=0$, което е противоречие с разглеждания случай 2. Заключаваме, че наистина $f(1)=0$. Нещо повече, от доказаното следва, че $x=1$ е единственият корен на уравнението $f(x)=0$. Но по-горе показахме, че $f(f^2(0))=0$. Заключаваме, че $f^2(0)=1$ и следователно $f(0)=-1$ или $f(0)=1$.

Вариант 1. $f(0)=-1$

Най-напред ще покажем, че ако $c\neq 0$, то $f(c)\neq -1$. Да допуснем противното, т.е. $f(c)=-1$. Като положим $x=c$ и $y=1$, получаваме $f(f(c)f(1))+f(c+1)=f(c)$, откъдето

$-1+f(c+1)=-1$, т.е. $f(c+1)=0$ и следователно $c+1=1$, т.е. $c=0$, което е противоречие. Заключаваме, че във вариант 1 уравнението $f(x)+1=0$ има единствено решение $x=0$.

По-нататък, като положим $y=1$, получаваме $f(f(x)f(1))+f(x+1)=f(x)$, откъдето $f(0)+f(x+1)=f(x)$ и следователно $f(x+1)=f(x)+1$. Сега по индукция лесно следва, че $f(x+n)=f(x)+n$ за $\forall x\in\mathbb{R}$ и всяко естествено число *n*. Изпълнено е също $f(x-n)=f(x)-n$ за $\forall x\in\mathbb{R}$ и всяко естествено число *n*. Наистина, $f(x)=f(x-n+n)=f(x-n)+n$, т.е. $f(x)=f(x-n)+n$, откъдето $f(x-n)=f(x)-n$.

Ще докажем, че ако $f(x)$ е решение на задачата, то $f(x)$ е инективна функция. Нека $f(a)=f(b)$. Тогава $f(a)+n=f(b)+n$ и от доказаното по-горе следва, че $f(a+n)=f(b+n)$ за всяко естествено число *n*. Да разгледаме квадратното уравнение $x^2-(a+n)x+(b+n-1)=0$. Неговата дискриминанта е $D=(a+n)^2-4(b+n-1)$ и тя е очевидно по-голяма от нула за достатъчно големи стойности на *n*. Следователно, за достатъчно големи стойности на *n* разглежданото квадратно уравнение има два различни реални корени *r* и *s*. От формулите на Виет имаме $r+s=a+n$ и $rs=b+n-1$. Сега, като положим $x=r$ и $y=s$, получаваме $f(f(r)f(s))+f(r+s)=f(rs)$, откъдето $f(f(r)f(s))+f(a+n)=f(b+n-1)$, т.е. $f(f(r)f(s))+f(a)+n=f(b)+n-1$. Следователно $f(f(r)f(s))=-1$ и заключаваме, че $f(r)f(s)=0$, защото сме във вариант 1. Тогава $f(r)=0$ или $f(s)=0$, т.е. $r=1$ или $s=1$. Нека без ограничение $r=1$. Сега формулите на Виет дават $1+s=a+n$ и $1.s=b+n-1$. От тези две равенства следва, че $1+b+n-1=a+n$ и следователно $a=b$, което показва, че наистина функцията е инективна.

Да положим $y=-x$. Получаваме $f(f(x)f(-x))+f(0)=f(-x^2)=f(-x^2+1-1)$, т.е. $f(f(x)f(-x))-1=f(-x^2+1)-1$. Следователно $f(f(x)f(-x))=f(-x^2+1)$ и с помощта на инективността заключаваме, че $f(x)f(-x)=-x^2+1$. Но като положим $y=1-x$, получаваме $f(f(x)f(1-x))+f(1)=f(x(1-x))$, откъдето $f(f(x)f(1-x))=f(x(1-x))$ и $f(x)f(1-x)=x(1-x)$, т.е. $f(x)(f(-x)+1)=x-x^2$ и $f(x)+f(x)f(-x)=x-x^2$. Последното заедно с полученото по-горе дава $f(x)-x^2+1=x-x^2$, т.е. $f(x)=x-1$ за $\forall x\in\mathbb{R}$. Лесно се проверява, че получената функция е решение на задачата.

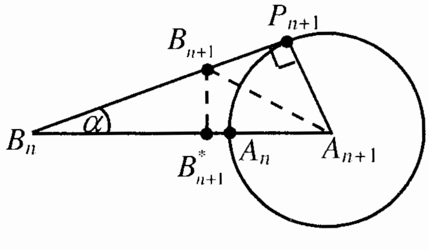
__Вариант 2__. $f(0)=1$

Този вариант може да се разгледа по аналогичен начин и той води до трето решение на задачата $f(x)=1-x$. До същия резултат достигаме и директно, като забележим, че ако $f(x)$ е решение на задачата, то и функцията $-f(x)$ е също решение.

Окончателно, задачата има 3 решения: $f(x)=0$, $f(x)=x-1$ и $f(x)=1-x$.

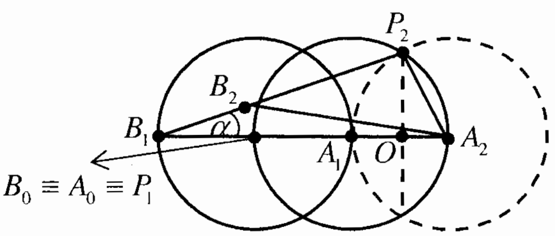
Решение на задача 3.

Да уточним, че при всеки ход най-напред се премества заекът, след това проследяващото устройство дава съответна информация и ходът завършва с преместване на ловеца. С P_n ще означаваме докладваната точка от проследяващото устройство при *n*-ия ход. Нека $d_n=B_nA_n$ е разстоянието между ловеца и заека след *n*-ия ход. Тъй като заекът се стреми да се отдалечава максимално от ловеца, той би следвало да се движи по правата между него и ловеца. В резултат на преместването на заека при $(n+1)$-ия ход до точка A_{n+1} ($A_nA_{n+1}=1$), проследяващото устройство посочва точка (съгласно условието на задачата) в затворен кръг с радиус 1 и център – местоположението A_{n+1} на заека. Ако стратегията на ловеца е да се движи по права линия по посока на посочената от проследяващото устройство точка P_{n+1}, то новото местоположение на ловеца е в точка $B_{n+1} \in B_nP_{n+1}$, за която $B_nB_{n+1} = 1$. Нека B_nP_{n+1} е допирателна към кръга с радиус 1 и център A_{n+1}, а α е ъгълът между B_nA_{n+1} и B_nP_{n+1}. От правоъгълния $\Delta B_nA_{n+1}P_{n+1}$ имаме $\sin\alpha = \frac{1}{d_n+1}$. Ако B^*_{n+1} е проекцията на B_{n+1} върху B_nA_{n+1}, то



$B_nB^*_{n+1} = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{(d_n+1)^2}}$. Тогава $B^*_{n+1}A_{n+1} = d_n + 1 - \sqrt{1-\frac{1}{(d_n+1)^2}}$. От правоъгълния $\Delta A_{n+1}B_{n+1}B^*_{n+1}$ (хипотенузата е по-голяма от катета) заключаваме, че за новото разстояние d_{n+1} между ловеца и заека е изпълнено $d_{n+1} = B_{n+1}A_{n+1} \geq d_n + 1 - \sqrt{1-\frac{1}{(d_n+1)^2}}$. Това е възможно най-голямото разстояние между ловеца и заека след $(n+1)$ -ия ход при положение, че заекът следва най-добрата своя стратегия, защото стойността на α е възможно най-голяма именно в случая, когато B_nP_{n+1} е допирателна към кръга. Тук отчитаме, че тогава стойността на $\cos\alpha$ е възможно най-малка, т.е. стойността на проекцията $B_nB^*_{n+1}$ е възможно най-малка и следователно $B^*_{n+1}A_{n+1}$, а оттук и стойността на d_{n+1} е възможно най-голяма.

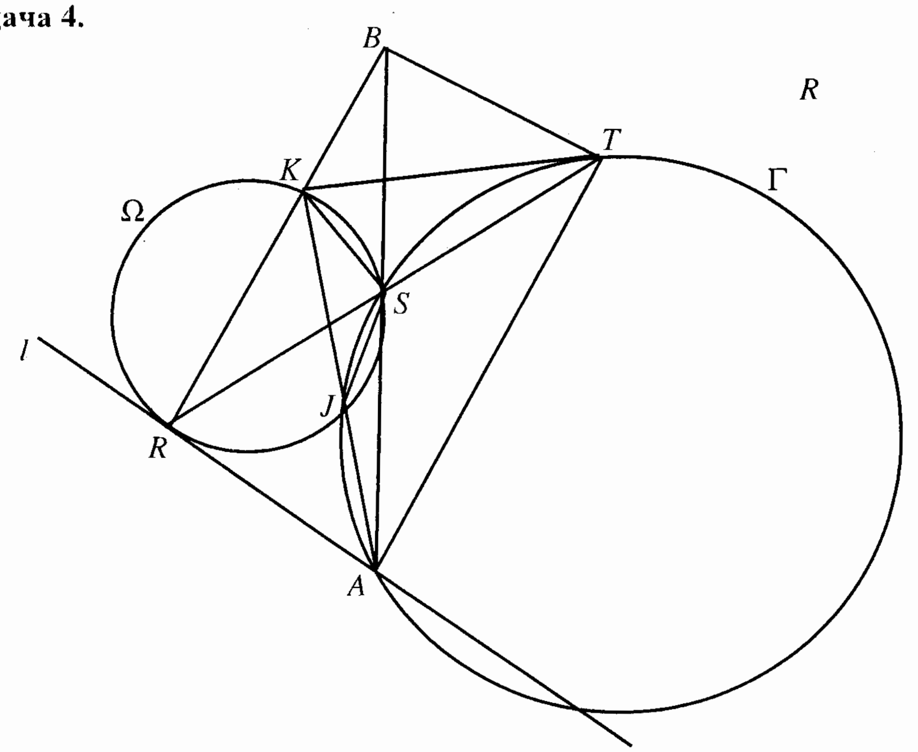
Интересно е да се съобрази какво би се случило при първия ход на заека и ловеца. В началния момент $A_0 \equiv B_0$. Най-неизгодно за ловеца е, ако той тръгне в посока, противна на посоката на заека. Тогава $d_1 = B_1A_1 = 2$ и можем да считаме, че играта започва оттук. По отношение на проследяващото устройство най-неизгоден за ловеца е случаят, когато проследяващото устройство докладва точката P_1 така, че тя да съвпада с $A_0 \equiv B_0$.



Тъй като търсим стратегия за ловеца независимо от ходовете на проследяващото устройство, можем да считаме, че P_2 е върху симетралата на отсечката $A_1A_2 = 1$. Ако O е средата на A_1A_2, то $A_1O = OA_2 = \frac{1}{2}$. От друга страна, P_2 трябва да лежи в кръг с радиус 1 и център A_2. Нека P_2 е пресечната точка на симетралата на A_1A_2 и окръжността с радиус 1 и център A_2. Пресечните точки са 2, но без ограничение разглеждаме отбелязаната точка P_2 на чертежа. Тогава $\Delta A_1A_2P_2$ е равностранен и следователно P_2 лежи и на окръжността с радиус 1 и център A_1. Запазваме означението α, както по-горе, за ъгъла между правата, определена от местоположението на ловеца и заека от една страна, както и правата, определена от местоположението на ловеца и точката P_2. Тъй като $OP_2 = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $B_1P_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(d_1 + \frac{1}{2}\right)^2}$, от правоъгълния ΔB_1OP_2 намираме $\cos\alpha = \dfrac{d_1 + \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(d_1 + \frac{1}{2}\right)^2}}$.

От косинусовата теорема за $\Delta B_1A_2B_2$ имаме $d_2 = B_2A_2 = \sqrt{1+(d_1+1)^2 - 2(d_1+1)\cos\alpha}$. Като използваме, че $d_1 = 2$, лесно стигаме, до $B_2A_2 \approx 2{,}081$. Ако на мястото на $d_1 = 2$ поставим $d_k = 100$, по аналогичен начин пресмятаме $d_k \approx 100{,}000037$, т.е. разстоянието между ловеца и заека нараства приблизително с 0,000037. Тогава $100:0{,}000037 \approx 2\ 700\ 000$, което е значително по-малко от 10^9. Заключаваме, че при повече от 2 700 000 хода разстоянието между ловеца и заека ще се увеличи още повече, което означава, че отговорът на задачата е отрицателен.

Решение на задача 4.



Ще докажем, че $RK \parallel AT$. Тъй като $\angle SJK = \angle STA$ (четириъгълникът $ATSJ$ е вписан в Γ) и $\angle SJK = \angle KRS$ (измерват се с една и съща дъга от Ω), то $\angle STA = \angle KRS$ и следователно наистина $RK \parallel AT$. Нека правата през T, която е успоредна на l, пресича RK в точка B. Тогава четириъгълникът $RATB$ е успоредник. Средата на диагонала AB е среда и на диагонала RT, откъдето следва, че точките A, S и B са колинеарни. Ще докажем, че около четириъгълника $KSTB$ може да се опише окръжност. Това следва от равенството на ъглите STB и RKS. Наистина, $\angle STB = \angle ARS$ (кръстни ъгли) и $\angle RKS = \angle ARS$ (измерват се с една и съща дъга от Ω). Имаме още, че $\angle ABK = \angle BAT$ (кръстни ъгли). Сега от факта, че четириъгълникът $KSTB$ е вписан, следва, че $\angle STK = \angle ABK$. Тогава $\angle STK = \angle BAT$ и получаваме, че дъгите от Γ, с които тези ъгли се измерват, са равни. Това е възможно само когато KT е допирателна към Γ, което трябваше да се докаже.

Решение на задача 5.

Да номерираме играчите с числата от 1 до N така, че на по-висок играч да съответства по-голям номер. Ще посочим индуктивен алгоритъм, който води до решение на задачата. Да разпределим играчите по произволен начин на N групи по $N+1$ играчи. От всяка група ще изберем по двама играчи така, че да са изпълнени исканите от сър Алекс условия:

1. Разглеждаме групата, която съдържа най-ниския играч и го отделяме от тази група заедно със следващия по височина играч в тази група. Това са двамата играчи от тази група. Изваждаме от редицата останалите в групата играчи и приключваме с тази група.
2. От всяка от останалите групи изваждаме най-ниския играч. По този начин получаваме $N-1$ групи с по N играчи и постъпваме по описания вече начин.

Ще проверим алгоритъма за конкретни стойности на N.

<u>Нека</u> $N=2$.

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5 и 6. По произволен начин разпределяме тези числа в 2 групи по трима, например така:

$\boxed{3 \quad 4 \quad 6}$ $\qquad$ $\boxed{1 \quad 2 \quad 5}$

Дясната група съдържа най-малкото число 1 (най-ниския играч) и затова отделяме от нея двете най-малки числа **<u>1 и 2</u>**, а изваждаме оставащото 5 от редицата. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 3 от първата група. Оставащите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 4, 6, 1 и 2. Лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

<u>Нека</u> $N=3$.

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. По произволен начин разпределяме тези числа в 3 групи по четирима, например така:

$\boxed{2 \quad 5 \quad 7 \quad 8}$ $\qquad$ $\boxed{1 \quad 6 \quad 9 \quad 12}$ $\qquad$ $\boxed{3 \quad 4 \quad 10 \quad 11}$

Средната група съдържа най-малкото число 1 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **<u>1 и 6</u>**, а изваждаме оставащите две числа 9 и 12 от редицата. С това приключваме с втората група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 2 от първата група и най-малкото число 3 от третата група. Получаваме 2 групи с по трима играчи и свеждаме задачата до случая $N=2$. Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 5, 7, 8, 4, 10 и 11.

5	7	8		

4	10	11

Втората група съдържа най-малкото число 4 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **4 и 10**, а изваждаме оставащото число 11 от редицата и приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 5 от първата група. Оставащите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 7, 8, 4 и 10. Тези числа, заедно с вече избраните 1 и 6, определят търсените числа 7, 8, 1, 6, 4 и 10, за които лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

Нека $N = 4$.

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20. Разпределяме тези числа в 4 групи по петима, например така:

1	4	5	16	19

3	7	10	17	18

2	9	12	13	14

6	8	11	15	20

Първата група съдържа най-малкото число 1 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **1 и 4**, а изваждаме оставащите 5, 16 и 19 от редицата, с което приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 3 от втората група, най-малкото число 2 от третата група и най-малкото число 6 от четвъртата група. Получаваме 3 групи с по четирима играчи и свеждаме задачата до случая $N = 3$. Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 7, 10, 17, 18; 9, 12, 13, 14; 8, 11, 15 и 20.

7	10	17	18

9	12	13	14

8	11	15	20

Първата група съдържа най-малкото число 7 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **7 и 10**, а изваждаме оставащите 17 и 18 от редицата. По този начин приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 9 от втората група и най-малкото число 8 от третата група. Получаваме 2 групи с по трима играчи и свеждаме задачата до случая $N = 2$. Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 12, 13, 14; 11, 15 и 20.

12	13	14

11	15	20

Втората група съдържа най-малкото число 11 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **11 и 15**, а изваждаме оставащото число 20 от редицата и приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 12 от първата група. Другите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 13, 14, 11 и 15. Тези числа, заедно с вече избраните 1, 4, 7 и 10 определят търсените числа 1, 4, 7, 10, 13, 14, 11 и 15, за които лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

Оставяме на читателя да обоснове алгоритъма при индуктивната стъпка в общия случай от N към $N-1$.

Решение на задача 6.

Да обърнем внимание, че търсеният полином е хомогенен, т.е. всеки едночлен в него е от степен n по отношение на променливите x и y. Най-напред ще разгледаме простия случай, когато множеството S съдържа само един елемент (x_1, y_1), за който $\text{НОД}(x_1, y_1) = 1$. От Лемата на Безу следва, че съществуват цели числа a_0 и a_1, за които $a_0x_1 + a_1y_1 = 1$. За хомогенен полином с цели коефициенти, който търсим, можем да вземем хомогенния полином от първа степен $g(x, y) = a_0x + a_1y$ и задачата е решена. За пълнота и за улеснение на читателя ще дадем общата формулировка на Лемата на Безу (Етиен Безу (1730–1783) е френски математик).

Лема на Безу. (известна още като *Тъждество на Безу*). Ако x и y са цели ненулеви числа, то съществуват цели числа a и b така, че $ax + by = \text{НОД}(x, y)$.

При това $\text{НОД}(x, y)$ е най-малкото естествено число, което може да се представи във вида $ax + by$. Освен това, всяко цяло число от вида $ax + by$ е кратно на $\text{НОД}(x, y)$. Важно е да се отбележи, че намирането на целите числа a и b (наричани *коефициенти на Безу*) може да стане с помощта на алгоритъма на Евклид за намиране на НОД, като в случая на коефициенти на Безу алгоритъмът е известен като *разширен алгоритъм на Евклид*. Например, да намерим най-напред НОД(17,12) с алгоритъма на Евклид:

Стъпка 1. Делим 17 (по-голямото число) на 12 (по-малкото) и получаваме $17 = 12.1 + 5$;

Стъпка 2. Делим делителя 12 от предната стъпка с остатъка 5 от предната стъпка и получаваме $12 = 5.2 + 2$;

Стъпка 3. Делим делителя 5 от предната стъпка с остатъка 2 от предната стъпка и получаваме $5 = 2.2 + 1$;

Стъпка 4. Делим делителя 2 от предната стъпка с остатъка 1 от предната стъпка и получаваме $2 = 2.1 + 0$.

Процесът спира до получаване на остатък 0, което в разглеждания пример се реализира в стъпка 4. Последният различен от нула остатък задава търсения НОД. В нашия случай НОД (17,12) = 1. Разширяването на алгоритъма на Евклид касае определянето на коефициентите на Безу, което става на ходове по следния начин:

Ход 1. Изразяваме последния различен от нула остатък от стъпка 3 и получаваме $1 = 5 - 2.2$;

Ход 2. Изразяваме остатъка 2 от предната стъпка 2 и го заместваме в предния ход. Получаваме $2 = 12 - 5.2$ и $1 = 5 - (12 - 5.2).2 = 5 - 12.2 + 5.4 = 5(1+4) - 12.2 = 2 = 5.5 - 12.2$.

Ход 3. Изразяваме остатъка 5 от предната стъпка 1 и го заместваме в предния ход. Получаваме $5 = 17 - 12.1$ и $1 = 5.5 - 12.2 = 5.(17 - 12.1) - 12.2 = 5.17 - 12.5 - 12.2 = 5.17 - 7.12$.

Окончателно тъждеството на Безу е $5.17 - 7.12 = 1$, а коефициентите на Безу са 5 и -7.

Приключваме с отклонението по Лемата на Безу и се връщаме към решението на задача 6. Ще използваме индукция по броя на елементите на S. Да допуснем, че за m двойки (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., m)$, за които $\text{НОД}(x_i, y_i) = 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$, съществува хомогенен полином $g(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$ от степен $n > 0$ така, че $g(x_i, y_i) = 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Ще докажем, че за всяко S с $m+1$ примитивни двойки съществува хомогенен полином $f(x, y)$, за който $f(x_i, y_i) = 1$ $(i = 1, 2, ..., m, m+1)$.

Нека $g(x,y)$ е хомогенният полином от степен $n>0$, който съществува съгласно индуктивното предположение за първите m примитивни двойки и нека

$$f(x,y)=\left(g(x,y)\right)^M - Cx^{Mn-m}\prod_{i=1}^{m}(y_i x - x_i y),$$

където M и C са подходящи константи. Да обърнем внимание, че $f(x,y)$ се състои от 2 части, всяка от които е хомогенен полином. Освен това, очевидно $f(x_i,y_i)=1$ ($i=1,\ 2,\ ...,\ m$), след като $g(x_i,y_i)=1$ ($i=1,\ 2,\ ...,\ m$).

Ще разгледаме два случая.

Случай 1. $(x_{m+1},y_{m+1})=(1,0)$, която е очевидно примитивна двойка.

Имаме $f(1,0)=\left(g(1,0)\right)^M - C\prod_{i=1}^{m}y_i$. Тъй като $g(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+...+a_ny^n$, то $f(1,0)=\left(a_0\right)^M - C\prod_{i=1}^{m}y_i$. Ако $a_0=1$, можем да вземем $M=1$, $C=0$ и очевидно $f(1,0)=1$, с което задачата е решена. Затова по-нататък в случай 1 ще считаме, че $a_0\neq 1$.

Да забележим, че $1=g(x_i,y_i)\equiv a_0x_i^n \pmod{y_i}$. Заключаваме, че съществува цяло число *k*, за което $a_0x_i^n=ky_i+1$. Оттук следва, че НОД $(a_0,y_i)=1$. Това дава възможност при търсене на константите M и C така,че $f(1,0)=\left(a_0\right)^M - C\prod_{i=1}^{m}y_i$, да използваме Ойлеровата функция φ, наричана още *тотиента*. Нека $M=\varphi\left(\prod_{i=1}^{m}y_i\right)$. От теоремата на Ойлер-Ферма следва, че $a_0^{\varphi\left(\prod_{i=1}^{m}y_i\right)}\equiv 1\left(\bmod \prod_{i=1}^{m}y_i\right)$, защото a_0 е взаимно просто с всички y_i, а следователно и с тяхното произведение. Сега за C е достатъчно да вземем $C=\dfrac{\left(a_0\right)^M-1}{\prod_{i=1}^{m}y_i}$. Тогава $f(1,0)=1$ и задачата е решена.

Разбира се, ако някоя от примитивните двойки (x_i,y_i) ($i=1,\ 2,\ ...,\ m,\ m+1$) е двойката $(1,0)$, можем да преномерираме двойките и да считаме, че $(x_{m+1},y_{m+1})=(1,0)$, така че задачата е решена. Остава да разгледаме случая, когато нито една от примитивните двойки не е двойката $(1,0)$, т.е.

Случай 2. $(x_i,y_i)\neq(1,0)$, ($i=1,\ 2,\ ...,\ m,\ m+1$).

За първите m примитивни двойки прилагаме отново индуктивното предположение и използваме споменатия по-горе хомогенен полином $g(x,y)$ от степен $n>0$. Тъй като НОД$(x_{m+1},y_{m+1})=1$, от Лемата на Безу следва, че съществуват цели числа t и s, за които $tx_{m+1}+sy_{m+1}=1$. Да разгледаме матрицата $\begin{pmatrix} t & s \\ -y_{m+1} & x_{m+1}\end{pmatrix}$. Нейната детерминанта е $tx_{m+1}+sy_{m+1}=1$ и е различна от 0, което означава, че матрицата е обратима, т.е. тя има обратна матрица. С помощта на горната матрица дефинираме трансформация T на точки от равнината (x, y) в точки от равнината (u,v). Обръщаме внимание, че T е изоморфизъм, т.е. T е взаимно еднозначно съответствие между двете равнини. Имаме

$$(u,v)=T(x,y)=\begin{pmatrix} t & s \\ -y_{m+1} & x_{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ където } u=tx+sy \text{ и } v=-y_{m+1}x+x_{m+1}y.$$

Образите се получават по правилото за умножаване на матрици. Трансформацията T преобразува хомогенния полином $g(x,y)$ в хомогенен полином $g^*(u,v)$ на променливите u и v. При това забелязваме, че $T(x_{m+1}, y_{m+1})=(1,0)$. Използвайки доказаното по-горе, можем да конструираме хомогенен полином $f^*(u,v)$, който с обратната трансформация T^{-1} се преобразува в хомогенен полином $f(x,y)$, изпълняващ исканите условия. С това задачата е решена и в този случай.

Предлагаме упражнение върху описания алгоритъм с два типични примера в случая $m=2$.

Пример 1. $(x_1, y_1)=(17,12)$, $(x_2, y_2)=(1,0)$

При обсъждането на Лемата на Безу намерихме коефициентите на Безу за примитивната двойка $(17,12)$. По-точно видяхме, че $5.17-7.12=1$ и следователно коефициентите на Безу са $(5,-7)$. Можем да използваме линейния хомогенен полином $g(x,y)=5x-7y$ и да конструираме $f(x,y)=(5x-7y)^M-Cx^{M.1-1}(12x-17y)$. Имаме $f(17,12)=1$ и $f(1,0)=5^M-C.12$. От друга страна $\varphi(12)=\varphi(2^2.3)$ и като използваме правилото за пресмятане стойностите на Ойлеровата функция с помощта на каноничното разлагане на съответния аргумент, намираме $\varphi(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4$. Тогава $M=\varphi\left(\prod_{i=1}^{m} y_i\right)=\varphi(12)=4$ и $C=\frac{5^4-1}{12}=\frac{624}{12}=52$. Окончателно

$$f(x,y)=(5x-7y)^4-52x^3(12x-17y).$$

Пример 2. $(x_1, y_1)=(3,2)$, $(x_2, y_2)=(2,5)$.

Коефициентите на Безу за примитивната двойка $(3,2)$ са $(1,-1)$. Наистина $1.3-1.2=1$. Тогава линейният хомогенен полином от алгоритъма е $g(x,y)=x-y$ и очевидно $g(3,2)=1$. Тъй като втората примитивна двойка е различна от двойката $(1,2)$, съгласно алгоритъма (общата схема) ще използваме изоморфизма $T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Имаме $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е. $T(2,5)=(1,0)$. Също така $u=-2x+y$ и $v=-5x+2y$. От друга страна $T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, защото $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, което е единичната матрица и следователно $T.T^{-1}$ е идентитет.

Така $x=2u-v$ и $y=5u-2v$. Тогава $g(x,y)=x-y=2u-v-(5u-2v)=-3u+v$, т.е. $g^*(u,v)=-3u+v$. По-нататък $u_1=-2x_1+y_1=-2.3+2=-4$, $v_1=-5x_1+2y_1=-5.3+2.2=-11$,

$u_2 = -2x_2 + y_2 = -2.2 + 5 = 1$ и $v_2 = -5x_2 + 2y_2 = -5.2 + 2.5 = 0$. По този начин задачата се пренася в равнината (u, v) за примитивните двойки $(-4, -11)$ и $(1, 0)$. Тъй като 11 е просто число, то $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$ и следователно $M = 10$, $C = \dfrac{(-3)^{10} - 1}{-11} = -5368$. Тогава $f^*(u, v) = (-3u + v)^{10} + 5368u^9(-11u + 4v)$ и окончателно

$$f(x, y) = Tf^* = (x - y)^{10} = 5368(-2x + y)^9(2x - 3y).$$

Лесно се проверява, че са изпълнени условията на задачата, т.е. $f(3,2) = f(2,5) = 1$.

Естеството на задачите и резултатите на българските ученици са повод за някои изводи. Най-лесната задача в темата е задача 4. Това е осмокласна задача и подобни на нея се появяват доста често на контролни в 8. клас в математическите гимназии. Полученият тук максимален резултат е заслуга на българските учители, които са обучили нашите ученици да решават такива задачи и то не само тези, които са в националния отбор. Втората по трудност е задача 1. Решението ѝ следва малко по-необичайна индукция и тази необичайност се е отразила на резултата, като отборът е загубил общо 2 точки. Третата по трудност е задача 2. Тук отборният резултат е 31 точки от възможните 42. Правилно е да се говори не за спечелени 31, а за загубени 11 точки предвид дългогодишните български традиции в областта на функционалните уравнения. Идва задача 5 по трудност, за която ще стане дума по-долу. Следващата е задача 3, която няма да коментираме, защото там всички участници в олимпиадата имат слаби резултати. Общо 615 ученици са получили 26 от възможните 4305 точки (българите са с 0 точки). Задачата е решена пълно само от двама участници – един от Австралия и един от Русия, един е с 5 точки, един с 4 и трима с по 1 точка. Основното затруднение идва от факта, че отговорът на задачата е отрицателен, а самото условие насочва по-скоро към търсене на положителен. Специално внимание заслужава най-трудната задача 6. По същество тя е обобщение на Лемата на Безу в случая на примитивни двойки, когато двойките са повече от една. Задачата има самостоятелно теоретично значение. Предизвикателство е да се намери пълно обобщение и за непримитивни двойки. Както се вижда от решението по-горе, задачата изисква сериозни познания по теория на числата (функция на Ойлер и теорема на Ойлер) и линейна алгебра (в двумерния случай). Жалко за българските ученици, между които има такива с доказани качества. Например Виолета Найденова и Кирил Бангачев са носители на златни и сребърни медали от балкански олимпиади за по-малки ученици, МВиолета е трикратен участник в международни олимпиади. Към това, на което са ги научили учителите в училище (то съвсем не е малко), „отговорните" фактори извън училище са проявили безотговорност и не са добавили почти нищо. Добри деца – слаби ръководители!

В заключение ще отбележим, че провалът на българските ученици е върху комбинаторната задача 5. А в „подготовката" са участвали професори и доктори на науките именно в областта на комбинаториката!!! Незадоволителен е резултатът на българите и върху функционалното уравнение, където за специалист се самоопределя друг професор и доктор на науките, участвал в подготовката. Оставяме читателят да съобрази що за професори и доктори на науките са лаборантите от Лабораторията на Пазарджишкия доносник. А някои от тях претендират и за по-високи звания в Българската академия на науките!!! Тежкò ни и горкò!

Следващата международна олимпиада ще се проведе в Клуж-Напока, Румъния от 3 до 14 юли 2018 г.