М + Р Е Ш Е Н И Я

М+553. Да се определят всички цели числа x, при които изразът $\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Тъй като $\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ е цяло, то $7^3.\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ също е цяло число. Оттук $7^3.\dfrac{x^3-1}{7x-1}=49x^2+7x+1-\dfrac{342}{7x-1}$. Следователно $7x-1$ дели 342, т.е. $7x-1\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18,\pm19,\pm38,\pm57,\pm114,\pm171,\pm342\}$. Оттук намираме, че $x\in\{-8,0,1,49\}$.

М+554. Нека $y=\cos^4 x-\cos 2x+\sin x-2\sin^3 x-2$. За кои стойности на реалните числа a и b е изпълнено $y\in[a,b]$ за всички реални стойности на x?

(Росен Николаев, гр. Варна)

Решение на Катя Чалъкова. След преобразувания, за y получаваме $y=\left(\cos^2 x+\sin x\right)^2-\left(\cos^2 x+\sin x\right)-2$. Тъй като $\cos^2 x+\sin x=-\sin^2 x+\sin x+1$, то $y=(-\sin^2 x+\sin x+1)^2-(-\sin^2 x+\sin x+1)-2$. Полагаме $\sin x=t$, $t\in[-1,1]$ и разглеждаме функцията $g(t)=-t^2+t+1$. От свойствата на квадратната функция и равенствата $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$, $g(-1)=-1$ и $g(1)=1$ следва, че при $t\in[-1,1]$ е изпълнено $g\in\left[-1;\dfrac{5}{4}\right]$. Следователно $y\in\left[-\dfrac{9}{4};0\right]$. Затова $a\in\left(-\infty;-\dfrac{9}{4}\right]$ и $b\in[0;+\infty)$.

М+555. Ако p е естествено число, да се пресметне границата

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{pn}\sqrt{1+k^2}\sin\left(arctgk-arctgn\right).$$

(Теодора Радулеску, Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. От формулите $\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ и $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ следва

равенството $\sin\left(arctgk-arctgn\right)=\sin\left(arctgk\right)\cos\left(arctgn\right)-\sin\left(arctgn\right)\cos\left(arctgk\right)=$

$=\dfrac{k-n}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{n^2+1}}$. Оттук имаме $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{pn}\sqrt{1+k^2}\sin\left(arctgk-arctgn\right)=$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{pn}\frac{k-n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n^2\left(p^2-2p\right)+pn}{\sqrt{n^2+1}}$. Последното равенство води до окончателните

резултати: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}-\infty, p=1,\\ \dfrac{1}{2}, p=2,\\ +\infty, p\geq 3.\end{cases}$

Продължението е в следващия брой.