M+ РЕШЕНИЯ

M+547. Да се определи съществуват ли n последователни цели числа, сборът от квадратите на които е квадрат на цяло число, ако $n = 4^k(6m+1)$ за неотрицателни цели числа k и m.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. При $k=0$ и $m=0$ имаме $n=1$. Затова $1^2=1^2$ е решение на задачата. Ако $k \geq 1$ и $m \geq 0$, имаме $n \geq 4^k.1 \geq 4$. Нека x и y са цели числа, за които е изпълнено равенството $(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+n)^2=y^2$. То се преобразува във вида $n.x^2+2.(1+2+\cdots+n).x+\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)=y^2$. От известните тъждества $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и условието получаваме $2^{2k-1}.(6m+1)\left[2.x^2+2.(n+1).x+\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}\right]=y^2$, като $2k-1 \geq 1$. Оттук следва, че y е четно число, т.е. $y=2^p.z$ и $y^2=2^{2p}z^2$. Числата $6m+1$, $n+1$ и $\dfrac{2n+1}{3}=\dfrac{2.4^k(6m+1)+1}{3}=4^{k+1}.m+1+\dfrac{2\left(4^k-1\right)}{3}$ ($\dfrac{4^k-1}{3}=\dfrac{(3+1)^k-1}{3}$ е цяло число) са нечетни. Следователно числото $2.x^2+2.(n+1).x+\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}$ е нечетно и y^2 се дели на нечетната степен на двойката 2^{2k-1}, което невъзможно. Така, задачата има решение само при $n=1$.

M+548. Положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са такива, че е изпълнено неравенството $\dfrac{a_1}{S-a_1+1}+\dfrac{a_2}{S-a_2+1}+\cdots+\dfrac{a_n}{S-a_n+1} \leq 1$, където $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Да се докаже, че е изпълнено неравенството $\dfrac{1}{S-a_1+1}+\dfrac{1}{S-a_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{S-a_n+1} \geq 1$.

(Draghia Denisa Iulia, Крайова, Румъния)

Решение. От условието и „хубавото“ неравенство имаме

$$1 \geq \frac{a_1}{S-a_1+1}+\frac{a_2}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n+1}=\frac{a_1^2}{Sa_1-a_1^2+a_1}+\frac{a_2^2}{Sa_2-a_2^2+a_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{Sa_n-a_n^2+a_n} \geq$$

$\geq \dfrac{\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2}{S^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+n.S}$. Оттук и неравенството между средното аритметично и средното квадратично следва $S \geq \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 \geq \dfrac{S^2}{n}$. Следователно $S \leq n$. Сега от „хубавото“ неравенство намираме $\dfrac{1}{S-a_1+1}+\dfrac{1}{S-a_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{S-a_n+1} \geq \dfrac{n^2}{nS-S+n}=\dfrac{n^2}{(n-1)S+n} \geq \dfrac{n^2}{(n-1)n+n}=1$.

M+549. Да се докажат неравенствата: а) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x} \geq 1$;
б) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\cos x} \geq 1$; в) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x} \geq 1$; г) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x} \geq 1$.

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. Разглеждаме координатна система, спрямо която са дадени точките $A(-1,0)$, $B(0,-1)$ и $M(\cos x, \sin x)$. За точките A, B и M е изпълнено неравенството на триъгълника $MA+MB \geq AB$. Оттук следва неравенството

$$\sqrt{(-1-\cos x)^2+(0-\sin x)^2}+\sqrt{(0-\cos x)^2+(-1-\sin x)^2}\geq\sqrt{1^2+1^2}.$$

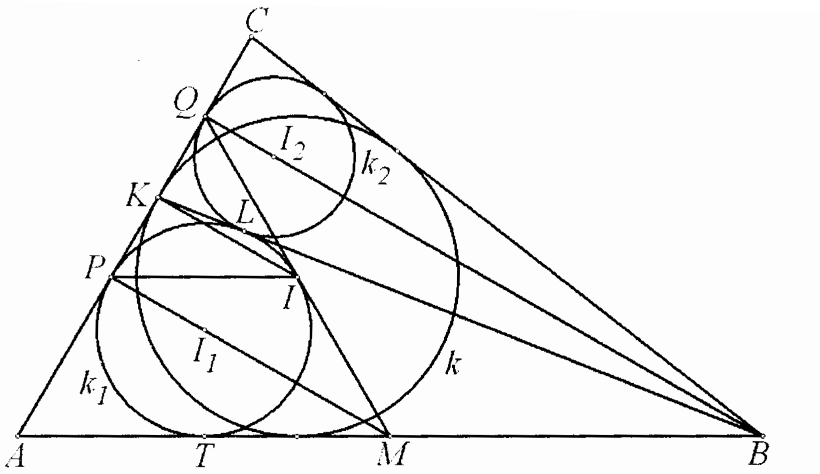
Лесно се вижда, че от това неравенство се получава неравенството а). Неравенствата б), в) и г) се получават по същия начин съответно при $M(\cos x,-\sin x)$, $M(-\cos x,\sin x)$ и $M(-\cos x,-\sin x)$.

М+550. Даден е ΔABC, за който $\measuredangle BAC=60°$. Върху страната AC съществува такава точка K, че вписаните в ΔABK и ΔBCK окръжности се допират в точка L, за която $BL=6.KL$. Да се докаже, че вписаната в ΔABC окръжност минава през точката K и центърът ѝ лежи върху вписаната в ΔABK окръжност.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Нека точката I_1 е центърът на вписаната в ΔABK окръжност k_1, T – допирната точка на k_1 с AB, и M е пресечната точка на правата PI_1 със страната AB. От условието следва, че в правоъгълния триъгълник APM е изпълнено равенството $\measuredangle AMP=30°$. Оттук $AP=\frac{1}{2}AM$. Тъй като $AT=AP$, то $AT=MT=AP=\frac{1}{2}AM$. Следователно точката T е средата на страната AM и петата на височината през върха I_1 на ΔAI_1M. Това означава, че ΔAI_1M е равнобедрен, като $AI_1=MI_1$. От условието имаме, че $\measuredangle I_1AP=30°$, поради което от ΔAI_1P се получава $I_1P=\frac{1}{2}I_1A$. От получените равенства намираме, че $MP=3.I_1P$ и $S_{AMC}=\frac{3.AC.I_1P}{2}$. Нека сега $AM=t.AB$ $(t<1)$. Оттук получаваме, че $S_{BMC}=(1-t)S_{ABC}$. Като вземем предвид, че $S_{ABK}=\frac{AB+BK+KA}{2}.I_1P$, от равенството $S_{ABK}=S_{AMK}+S_{BMK}$ получаваме $(3-t).KA=t.(AB+KB)$. От свойствата на допирателните намираме $AB=AT+BT=AT+BL=\frac{1}{2}AM+BL=\frac{t}{2}AB+BL$. Следователно $AB=\frac{2}{2-t}.BL$. Сега намираме $AK=AP+KP=\frac{1}{2}AM+KL=\frac{t}{2}.AB+KL=\frac{t}{2-t}.BL+KL$. От последните равенства получаваме $BL=\frac{2t^2-7t+6}{t}.KL$. Тъй като $BL=6.KL$, то $\frac{2t^2-7t+6}{t}=6$. Корените на последното уравнение са 6 и $\frac{1}{2}$. Но $t<1$, следователно $t=\frac{1}{2}$. Това означава, че M е средата на AB. Сега от намерените по-рано равенства следва, че $AB=8.KL$, $AK=3.KL$ и $KP=KQ=KL$.

Нека вписаната в ΔBCK окръжност k_2 се допира до CK в точката Q. Тогава $AQ=AK+KQ=4.KL$. Ако Q_1 е петата на перпендикуляра, спуснат от B върху AC, то $\measuredangle ABQ_1=30°$. Следователно $AQ_1=\frac{1}{2}.AB=4.KL$. Оттук следва, че $Q_1\equiv Q$, т.е. височината BQ на ΔCKB минава през допирната точка Q на k_2 с CK. Така получаваме, че ΔCKB е равнобедрен, като $CQ=KQ=KL$. Следователно $AC=AK+KQ+QC=5.KL$ и $BC=BK=7.KL$. Нека сега K_1 е допирната точка на вписаната в ΔABC окръжност k с AC.



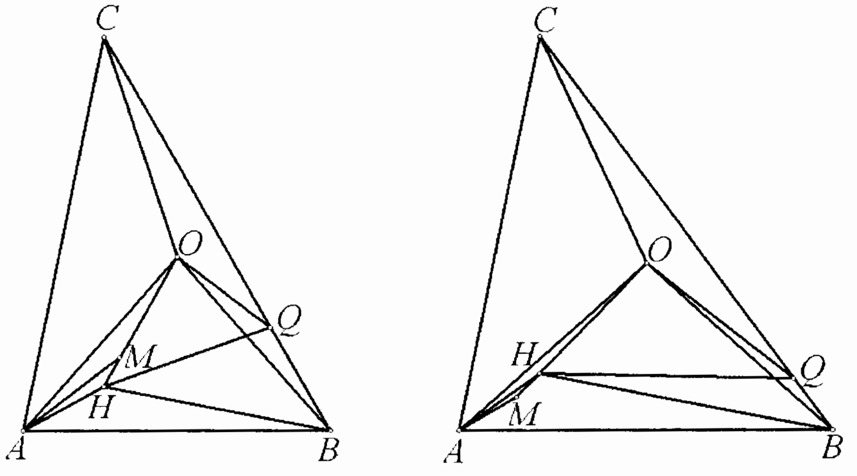
Тогава е изпълнено равенството $AK_1 = \dfrac{AB + AC - BC}{2} = 3.KL$. Следователно $K_1 \equiv K$, т.е. k се допира до AC в точката K. Тъй като $AM = \dfrac{1}{2}.AB = 4.KL = AQ$ и $\sphericalangle MAQ = 60^\circ$, то ΔAMQ е равностранен. Следователно $\sphericalangle AQM = 60^\circ$. Ако I е центърът на k, то $IK \perp PQ$. Тъй като K е средата на PQ, то ΔPQI е равнобедрен, за който $\sphericalangle PQI = 60^\circ$. Следователно ΔPQI е равностранен. Затова $\sphericalangle QPI = 60^\circ$ и $PI \parallel AM$. Следователно I лежи на правата QM. Освен това $PQ = PA = 2.KL$. Затова P и I са среди съответно на AQ и QM. Тъй като k_1 е вписаната окръжност на равностранния ΔAMQ, то k_1 минава през средата I на QM, т.е. I лежи върху k_1.

М+551. Нека O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълен триъгълник ABC, в който $\sphericalangle ACB = \gamma$ е най-малкият му ъгъл. Ако Q е такава точка от страната BC, че $\sphericalangle HOQ = 2\gamma$, да се определи $\sphericalangle OHQ$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. Нека $\sphericalangle OHQ = x$. От синусовата теорема за ΔOHQ имаме $\dfrac{\sin(2\gamma + x)}{\sin x} = \dfrac{OH}{OQ}$. Сега върху лъча $OH^{\rightarrow}$ построяваме точка M, за която $OM = OQ$. Нека φ е ротация с център O и ъгъл -2γ. Тъй като $OA = OB$ и $\sphericalangle MOQ = \sphericalangle AOB = 2\gamma$, то $\varphi(B) = A$ и $\varphi(Q) = M$. Затова $\varphi(\Delta OBQ) = \Delta OAM$. Следователно $\Delta OBQ \cong \Delta OAM$ и $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OBQ = 90^\circ - \alpha$. Същевременно $\sphericalangle OAH = \sphericalangle OAB - \sphericalangle HAB = (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta - \gamma$. Възможни са два случая а) $90^\circ - \alpha < \beta - \gamma$ и б) $90^\circ - \alpha \geq \beta - \gamma$. В случай а) $\sphericalangle OAM < \sphericalangle OAH$ и M е точка от отсечката OH. Тогава $\sphericalangle MAH = \sphericalangle OAH - \sphericalangle OAM = (\beta - \gamma) - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - 2\gamma$. Оттук следва, че $\dfrac{OM}{MH} = \dfrac{S_{AOM}}{S_{AHM}} = \dfrac{\frac{1}{2}.AO.AM.\sin\sphericalangle OAM}{\frac{1}{2}.AH.AM.\sin\sphericalangle MAH} = \dfrac{R\sin(90^\circ + \alpha)}{AH\sin(90^\circ - 2\gamma)} = \dfrac{R\cos\alpha}{AH\cos 2\gamma}$. От синусовата теорема за ΔAHB намираме $AH = \dfrac{AB.\sin\sphericalangle ABH}{\sin\sphericalangle AHB} = \dfrac{AB.\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \gamma)} = = 2R\cos\alpha$. Сега от предишното равенство следва, че $\dfrac{OM}{MH} = \dfrac{R\cos\alpha}{AH\cos 2\gamma} = \dfrac{1}{2\cos 2\gamma}$. Оттук

$\dfrac{OH}{OQ}=\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OM+MH}{OM}=1+\dfrac{MH}{OM}=1+2\cos 2\gamma$. Аналогично получаваме същия резултат и в случай б). Сега от равенството, получено в началото, намираме $\dfrac{\sin(2\gamma+x)}{\sin x}=1+2\cos 2\gamma$. От това уравнение получаваме последователно $\sin 2\gamma ctgx+\cos 2\gamma=1+2\cos 2\gamma$, $\sin 2\gamma ctgx=2\cos^2\gamma$, $ctgx=ctg\gamma$, $x=\gamma$. Така установихме, че търсеният ъгъл е равен на γ.



M+552. Дадени са тетраедър $ABCD$ с център на тежестта G и сфера k с център G. Ако M е произволна точка от k, да се докаже, че сумата $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ не зависи от положението на M върху k. **(Милен Найденов, гр. Варна)**

Решение. За дължините на ръбовете на $ABCD$ въвеждаме означенията $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$, $BC=a_0$, $CA=b_0$, $AB=c_0$. Нека още R е радиусът на k. В решението на задачата ще използваме барицентрични координати спрямо $ABCD$, като $A(1,0,0,0)$, $B(0,1,0,0)$, $C(0,0,1,0)$, $D(0,0,0,1)$. Разстоянието между две произволни точки $M_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2,t_2)$ се намира по формулата:

$$M_1M_2^2=-(x_1-x_2)(t_1-t_2)a^2-(y_1-y_2)(t_1-t_2)b^2-(z_1-z_2)(t_1-t_2)c^2-$$
$$-(y_1-y_2)(z_1-z_2)a_0^2-(z_1-z_2)(x_1-x_2)b_0^2-(x_1-x_2)(y_1-y_2)c_0^2.$$

Нека сега $M(x,y,z,t)$ $(x+y+z+t=1)$ е произволна точка от k. Тъй като $G\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$, от споменатата формула следват равенствата:

$$16R^2=16GM^2=-(4x-1)(4t-1)a^2-(4y-1)(4t-1)b^2-(4z-1)(4t-1)c^2-$$
$$-(4y-1)(4z-1)a_0^2-(4z-1)(4x-1)b_0^2-(4x-1)(4y-1)c_0^2,$$
$$AM^2=-(x-1)ta^2-ytb^2-ztc^2-yza_0^2-(x-1)zb_0^2-(x-1)yc_0^2,$$
$$BM^2=-xta^2-(y-1)tb^2-ztc^2-(y-1)za_0^2-xzb_0^2-x(y-1)c_0^2,$$
$$CM^2=-xta^2-ytb^2-(z-1)tc^2-y(z-1)a_0^2-x(z-1)b_0^2-xyc_0^2,$$
$$DM^2=-x(t-1)a^2-y(t-1)b^2-z(t-1)c^2-yza_0^2-xzb_0^2-xyc_0^2.$$

От тези равенства лесно се получава

$$AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=4R^2+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+a_0^2+b_0^2+c_0^2\right).$$

С това твърдението на задачата е доказано.