притурка притурка

МАТЕМАТИКА плюс

КАНДИДАТ-СТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ ПО МАТЕМАТИКА 2015 г.

Сава Гроздев Цеца Байчева

Математика плюс бр. 4, 2015 г.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 22 март 2015 г.

Задача 1. Нека положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ (в този ред) образуват геометрична прогресия с частно $q \neq 1$. Да се намери q, ако е известно, че сумата на първите 10 члена на прогресията е 5 пъти по-малка от сумата на всичките двадесет члена на прогресията.

Задача 2. В окръжност с радиус 2 е вписан трапец $ABCD$ с основа $AB = 4$. Да се намери лицето на трапеца, ако $\angle ABC = 2\angle BAC$.

Задача 3. Да се реши уравнението $\sqrt{25 - x|x-10|} = -\dfrac{x^2 - 9x + 20}{2}$.

Задача 4. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) точка D, лежаща на хипотенузата AB, е такава, че $AD : DB = 18 : 7$. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако е известно, че периметърът му е равен на 12 и $CA = CD$.

Задача 5. Да се реши неравенството $3^x + 3^{|x|} \geq 2\sqrt{3}$.

Задача 6. В правилна четириъгълна пирамида ъгълът между околна стена и основата е равен на 45°. Да се намери мярката на ъгъла между две съседни околни стени.

Задача 7. Нека корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 + ax + b = 0$ са реални числа. Да се намерят a и b, ако числата $\dfrac{1}{1+x_1}$ и $\dfrac{1}{1+x_2}$ са корени на същото уравнение.

Задача 8. В $\triangle ABC$ ($AC < BC$) вътрешните ъглополовящи AD и BE ($D \in BC, E \in AC$) удовлетворяват неравенствата $AD < AC$ и $BE < BC$. Върху страните AC и BC са избрани съответно точки A_1 и B_1, такива че $AA_1 = AD$ и $BB_1 = BE$. Да се намери мярката на $\angle ACB$, ако A_1B_1 е успоредна на AB.

26. $x = 6$, $y = 11$	**27.** $\sqrt{37}cm$	**28.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$	**29.** $\dfrac{\sqrt{6}}{12}cm$	**30.** $a_1 = -\dfrac{2}{5}$, $a_2 = -2$

Технически университет - София
6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	в	д	а	г	г	б	б	д	а
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
б	б	д	в	в	а	г	г	д	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x = 3$	**22.** $x = 4$	**23.** $x \in [-1; 2)$	**24.** $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$	**25.** $\dfrac{1}{9}$
26. 45°	**27.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}cm$	**28.** $\sin\varphi = \sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}$	**29.** $k = -1$	**30.** $a = 6$; $b = 12$

Технически университет – Варна
25 юни 2015 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	В	Г	В	Б	А	В	А	В	Г
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	А	В	Б	Г	Г	В	В	Б	Б
21	22	23	24	25					
В	Б	Г	А	В					

26.	27.	28.	29.	30.
8	$\frac{1}{4}$	$a\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$	$DB=\frac{a\sqrt{6}}{3}$	$64b^3\sqrt{\cot g^2\varphi-1}$

Технически университет - София
18 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	г	г	г	б	б	д	д	в	а
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
а	б	а	г	д	д	д	в	в	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=-4$	**22.** 10	**23.** 40 лв.	**24.** $\frac{8}{15}$	**25.** $x\in(-\infty;3]\backslash\{7\}$
26. 2	**27.** 6, 30, 150	**28.** $24\ cm^2$	**29.** $4\ cm$, $8\ cm$	**30.** $\frac{h}{3}$

Технически университет - София
25 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	в	д	а	а	г	в	д	б	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
а	б	б	в	г	в	д	д	г	а

ВТОРА ЧАСТ

21.	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**
$x\in\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$	$x_1=0$; $x_2=1$	$x=2\frac{1}{9}$	$\frac{1}{720}$	960

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 29 март 2015 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $\frac{x-4}{5x-x^2-4}\geq -1$.

Задача 2. В ΔABC са дадени $\angle ACB=30$ и височините $AA_1=5\sqrt{3}$ и $BB_1=8$. Да се намерят страните на ΔABC.

Задача 3. Да се реши уравнението $\sqrt{-3x-2}=3x+4$.

Задача 4. Пет числа образуват растяща аритметична прогресия. Намерете числата, ако сумата им е 25, а сумата от квадратите им е 285.

Задача 5. Колко нечетни трицифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 1, 4, 5, 7 и 9, като цифрите в десетичния запис на числата не се повтарят?

Задача 6. Ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича описаната около триъгълника ΔABC окръжност в точка S. Ако $AB=3$, $AS=7$ и $CS=5$, намерете страната BC.

Задача 7. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB=19$, $CD=5$ и бедра $BC=13$, $AD=15$. Да се намерят лицето и диагоналите AC и BD на трапеца.

Задача 8. За кои стойности на реалния параметър k уравнението $(k-2)x^4+2(2k-3)x^2+5k-6=0$ няма реални корени.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 20 юни 2015 г.

Задача 1. Пресметнете израза:

$$A=\left(\log_{\sqrt[3]{5}}\sqrt{5}\right)^2-\log_{\sqrt[3]{5}}5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{3}+1}(4+2\sqrt{3}).$$

Задача 2. Около окръжност с диаметър 15 е описан равнобедрен трапец с дължина на бедрото 17. Намерете дължините на основите на трапеца.

Задача 3. Да се реши системата: $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ x^2y+xy^2=84 \end{cases}$.

Задача 4. Върху продължението на хипотенузата AB на правоъгълния ΔABC е взета точка D, така че $BD = BC$ и B е между A и D. Намерете дължината на CD, ако $AC = 24$ и $BC = 7$.

Задача 5. Разполагаме с три разноцветни зарчета. Каква е вероятността сборът от точките върху трите зарчета при произволно хвърляне да е 7?

Задача 6. Нека a и b са положителни числа, такива че a^2 е средно аритметично на b^2 и $(a+b)^2$. Да се намери стойността на $\frac{a}{b}$.

Задача 7. Дължините на отсечките, съединяващи петите на височините в остроъгълен триъгълник, са 8, 15 и 17. Намерете радиуса на описаната около дадения триъгълник окръжност.

Задача 8. Уравнението $x^2 + 2ax + 4a = 0$ има реални корени x_1 и x_2. Намерете най-голямата стойност на израза $S = |x_1| + |x_2|$, при условие, че параметърът a принадлежи на множеството от решения на неравенството $|a| \leq 2$

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 21 юни 2015 г.

Задача 1. Да се реши уравнението $(x^2 - 10x + 24)\sqrt{5-x} = 0$.

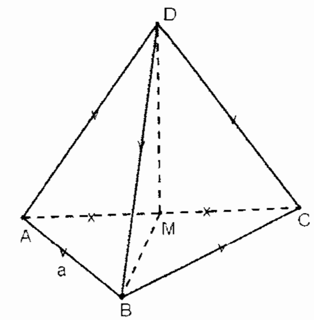
Задача 2. В правоъгълен триъгълник отношението между радиусите на вписаната и описаната окръжности е 2:5. Да се намери лицето на триъгълника, ако е известно, че периметърът му е равне на 12.

Задача 3. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 7x + 12) - \log_{\frac{1}{5}}(x-1) - \log_{\frac{1}{5}}(x+1) \geq 0.$$

Задача 4. В успоредника $ABCD$ точките M и N лежат съответно на страните AB и CD. Да се намери лицето на успоредника, ако е известно, че $AC + BD = 10 + 2\sqrt{5}$, а четириъгълникът $MBND$ е квадрат с лице, равно на 10.

Задача 4. а) От условието следва, че $DM \perp (ABC)$, т.е. $DM \perp BM$ и $DM \perp AC$. Тогава $AD = DC$. От $AD = BD$ следва, че $AM = BM$ и така получаваме $\angle ABC = 90^\circ$. Но $\Delta ACB \cong \Delta ACD$, т.е. $\angle ADC = 90^\circ$. Следователно $DM = BM$. Така намираме $\angle(BD;(ABC)) = \angle DBM = 45^\circ$.



б) От правоъгълния ΔABC намираме $AC = a\sqrt{2}$ и $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следователно $V_{ABCD} = \frac{AB.BC.DM}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{12}$. Използваме формулата $V_{ABCD} = \frac{S_1.r}{3}$, където r е радиусът на вписаната в пирамидта сфера и от $S_1 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2a^2}{2} = \frac{a^2(\sqrt{3}+2)}{2}$ получаваме $r = \frac{a(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$.

Технически университет - София
4 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
г	а	б	в	д	д	в	д	б	б
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
б	г	г	а	в	г	д	в	а	д

ВТОРА ЧАСТ

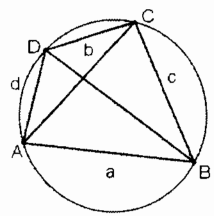
21.	22.	23.	24.	25.
$x = 2$	$x \in \left(\frac{1}{3};1\right]$	$x \in \left\{-\frac{\pi}{4};0\right\}$	$x = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$	$f_{\min}(-1) = -1$. $f_{\max}(-3) = \frac{1}{3}$

Задача 2. а) За $x \geq 0$ даденото уравнение е еквивалентно на уравненията $x-3=2x$ или $x-3=-2x$ с решения $x=-3<0$ и $x=1$. Решение на даденото уравнение е $x=1$.

б) Нека $f(x)=x^2+mx+m-1$. Уравнението $f(x)=0$ има реални корени по-малки от 1, когато $\left|\begin{array}{l} D \geq 0 \\ 1.f(1)>0 \\ -\dfrac{m}{2}<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m^2-4m+4 \geq 0 \\ 2m>0 \\ m>-2 \end{array}\right.$. Решение е $m \in (0;+\infty)$.

в) Преобразуваме даденото уравнение до уравнението $4\sin x+1-1+2\sin^2 x=0$. Тогава $\sin x(\sin x+2)=0$. Следователно $\sin x=0$ или $\sin x+2=0$. Второто уравнение няма решение. Решение на първото, а и на даденото уравнение е $x=k\pi$, където k е цяло число.

Задача 3. а) б) От $ABCD$ вписан в окръжност следва, че $\angle ADC=120^\circ$. Нека $AB=a$, $BC=c$, $CD=b$ и $DA=d$. От $ABCD$ описан около окръжност получаваме $a+b=c+d$. От $\angle ABD=\angle DBC$ намираме $b=d$. Тогава и $a=c$. От косинусова теорема за ΔACD и ΔACB получаваме съответно $b^2=\dfrac{16}{3}$, т.е. $b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ и $a^2=16$, т.е. $a=4$. Получаваме



$S_{ABCD}=S_{ACB}+S_{ACD}$. Заместваме и намираме

$$S_{ABCD}=\frac{a^2\sin 60^\circ}{2}+\frac{b^2\sin 120^\circ}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Но ΔABC е равностранен, т.е. $\angle ACD=60^\circ$. Тогава $\angle BCD=90^\circ$ и $BD=2b$. Следователно $R_{ABCD}=\dfrac{BD}{2}=b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5. Правилна триъгълна пресечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ има основни ръбове $AB=24$ и $A_1B_1=6$, а мярата на двустенния ъгъл при основата ABC е 45. Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 6. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)=\cos x\sin 2x-\cos 2x-2\sin x-1$.

Задача 7. В равнобедрения ΔABC ($AC=BC$) окръжността, имаща за диаметър вътрешната ъглополовяща AL ($L \in BC$), минава през средата на бедрото AC. Точките O и O_1 са съответно центровете на описаните около триъгълниците ALC и ABL окръжности. Да се намери дължината на отсечката OO_1, ако радиусът на описаната около ΔABC окръжност има дължина 7.

Задача 8. Дадена е функцията $f(x)=x^2+ax+1$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, за които за всеки три числа x, y и z от интервала $[0;1]$ числата $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$ са дължини на страни на някакъв триъгълник.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2015 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Стойността на израза $\left|\left|2\sqrt{7}-3\right|+\left|2-\sqrt{7}\right|-4\right|$ е:

А) $\sqrt{7}-5$ Б) $9-3\sqrt{7}$ В) $1-3\sqrt{7}$ Г) $-3-\sqrt{7}$

2. Най-малкото от числата $\log_{0.5}3$, 0, 1, 2^{-1} е:

А) $\log_{0.5}3$ Б) 0 В) 1 Г) 2^{-1}

3. Стойностите на x, за които изразът $\dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{\lg(x-2)}$ има смисъл, са:

А) $x \neq 2$ Б) $x \in (2,+\infty)$ В) $x \in (2,3) \cup (3,+\infty)$ Г) $x \in (2,3)$

4. Ако корените на квадратното уравнение $x^2 - 30x + 11 = 0$ са x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 - 2x_1x_2$ е равно на:

А) -8 Б) 8 В) 52 Г) $\sqrt{151}$

5. Ако $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ и $\alpha \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi)$, то $tg\alpha$ е равен на:

А) $\dfrac{8}{15}$ Б) $\dfrac{17}{8}$ В) $-\dfrac{15}{8}$ Г) $-\dfrac{8}{15}$

6. Решенията на неравенството $9^{x+2} \geq \sqrt{3^x}$ са:

А) $x \in \left(-\infty, -\dfrac{8}{3}\right]$ Б) $x \in \left(\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$

В) $x \in \left[-\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$ Г) $x \in (2,+\infty)$

7. За аритметична прогресия е дадено, че $a_2 + a_6 = 4$. Сумата $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ е равна на:

А) 12 Б) 14 В) 16 Г) 15

8. Решенията на уравнението $\sqrt{x+3} = x - 9$ са:

А) 6 и 13 Б) 6 В) няма решение Г) 13

9. Числената стойност на израза $A = \log_2 3.\log_3 64$ е:

А) 6 Б) $3\log_2 3$ В) 8 Г) 32

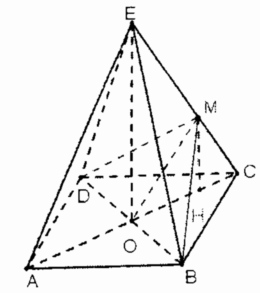
10. Сумата от квадратите на дължините на диагоналите на ромб е 400. Страната на ромба е:

А) 30 Б) 20 В) 10 Г) 40

11. Лицето на трапец $ABCD$ с основи $AB = 11$, $CD = 4$ и диагонали $AC = 14$, $BD = 13$ е:

А) $16\sqrt{2}$ Б) 42 В) 84 Г) $36\sqrt{3}$

Задача 4. а) Нека $AC \cap BD = O$. Тъй като пирамидата е правилна следва, че EO е височина на пирамидата. От ΔBDM равнобедрен следва $\angle((ABCD;(BMD)) = \angle MOC = 45^\circ$. Нека $MH \perp OC$, $H \in OC$. От правоъгълния ΔEOC намираме $CE = 5$. От равнобедрения правоъгълен ΔOMH следва $2MH^2 = OM^2$, а от OM ъглополовяща следва $OM^2 = OC.OE - CM.ME$.



От свойство на ъглополовящата $\dfrac{CM}{5 - CM} = \dfrac{3}{4}$ след пресмятане намираме $CM = \dfrac{15}{7}$ и $EM = \dfrac{20}{7}$. Тогава $MH = \dfrac{12}{7}$. Следователно $V_{DBCM} = \dfrac{S_{DBC}.MH}{3} = \dfrac{36}{7}$.

б) От $V_{DBCM} = \dfrac{S_{DBM}.h_C}{3}$ получаваме $h_C = \dfrac{3V_{DBCM}}{S_{DBM}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 юли 2015 г.

Задача 1. а) От първото уравнение изразяваме $y = x - 2$, заместваме във второто и получаваме квадратното уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$ с корени $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$. Решение на ситемата са (-5;-7) и (2;0).

б) За $x \neq -3$ от $(x+2)^2 \geq 0$ за всяко x следва, че даденото неравенство е еквивалентно на $\dfrac{x-1}{x+3} \leq 0$. Решение на задачата е $x \in (-3;1]$.

в) Преобразуваме и получаваме

$A = \lg 10^{-3} - \log_7 7^2 + \log_{4^{-1}} 4^3 - \log_{\sqrt{5}} 1 =$

$-3\lg 10 - 2\log_7 7 - 3\log_4 4 - 0 = -8$.

б) В $2^{2x}+4.2^x-32=0$ полагаме $2^x=u>0$ и получаваме квадратното уравнение $u^2+4u-32=0$ с корени $u_1=-8<0$ и $u_2=4$. От $2^x=4$ намираме $x=2$.

в) За $x>0$ получаваме последователно $\log_3(x+2)=\log_3 x^2+\log_3 3$. Оттук следва $\log_3(x+2)=\log_3 3x^2$. Т.е. получаваме квадратното уравнение $3x^2-x-2=0$ с корени $x_1=-\frac{2}{3}<0$ и $x_2=1$. Решение на даденото уравнение е $x=1$.

Задача 2. а) Даденото уравнение е еквивалентно на уравненията $6x-3=6$ или $6x-3=-6$. Следователно $x=1,5$ или $x=-0,5$.

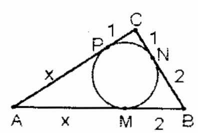
б) Намираме $\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{2}$, заместваме и получаваме

$$A=\frac{4}{5+6.\left(-\frac{1}{2}\right)}=2.$$

в) За да има корени с различни знаци трябва $x_1x_2=\frac{3(m-1)}{m}<0$.

Следователно $m\in(0;1)$.

Задача 3. а) Нека вписаната в триъгълниа окръжност се допира до страните AB, BC и AC съответно в точките M, N и P. От свойствата на правоъгълен триъгълник и вписана окръжност следва $CN=CP=r=1$ и $BN=BM=2$. Означаваме $AM=AP=x$ и от Питагорова теорема за ΔABC следва $(x+1)^2+9=(x+2)^2$. Намираме $x=3$ и следователно $AC=4$, $AB=5$ и $S_{ABC}=6$.



б) Намираме $R=\frac{AB}{2}=\frac{5}{2}$.

12. В равнобедрения ΔABC, с бедра $AC=BC=10$, центърът на вписаната окръжност дели височината към основата в отношение $5:2$. Основата на триъгълника е:

А) 8 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** $3\sqrt{5}$

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Триъгълникът ABC има страни $AC=6$, $BC=5$ и височина $CH=4$. Страната AB и радиусът на описаната около триъгълника окръжност са:.....

14. Основата на равнобедрен триъгълник има дължина 8 cm и медианите към бедрата му са взаимно перпендикулярни. Да се намери дължината на третата медиана и лицето на триъгълника.

15. Решенията на уравнението $\log_2(x-5)+\log_2(x-4)=1$ са:

16. Най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=3-2\sin x$ са:....

17. Решенията на неравенството $\frac{x^2-x}{x+2}\geq 0$ са:....

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Намерете стойностите на параметъра k, за които уравнението $(k+1)x^2-(2k+5)x+k=0$ има два различни положителни корена.

19. Да се реши системата $\begin{cases} x^2+y^2-xy=7 \\ 2xy-x-y=2 \end{cases}$.

20. Даден е равнобедрен ΔABC с основа AB=6 см. и бедро AC=5 см. Окръжност с диаметър AC пресича AB в точка E и CB в точка F. Да се намери лицето на четириъгълника AEFC.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
10 юли 2015 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Кой от дадените изрази НЕ е равен на $4\sqrt[6]{27}$?

А) $\sqrt{48}$ Б) $4\sqrt{3}$ В) $\frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{16}}$ Г) $8\sqrt{3}$

2. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 + ax + b = 0$, където a и b са реални числа, то стойността на израза $x_1^{-2} + x_2^{-2}$ е:

А) 1 Б) $\frac{a^2-2b}{b^2}$ В) $\frac{a^2-2}{b}$ Г) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2b$

3. Решенията на уравнението $|2x + 4| = 6$ са:

А) -5 и 1 Б) -1 и 5 В) 5 и 1 Г) -5 и -1

4. Изразът $\frac{x+5}{x-2} : \frac{x^2-25}{x+5}$ е дефиниран при:

А) $x \neq 2, x \neq 5$ Б) $x \neq 2, x \neq -5$ В) $x \neq 2$ Г) $x \neq \pm 5, x \neq 2$

5. Корените на уравнението $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x(3-x)}$ са:

А) 3 и 4 Б) 3 В) 4 Г) 1 и 4

6. Корените на уравнението $\sqrt{x-2} = x - 4$ са:

А) 3 и 6 Б) 6 В) 3 Г) -3

7. Решенията на неравенството $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \geq 0$ са:

А) $x \in (-\infty; +\infty)$ Б) $x \in [-1; 3]$

В) $x \in [-1; 2]$ Г) $x \in [-1; 2] \cup [3; +\infty]$

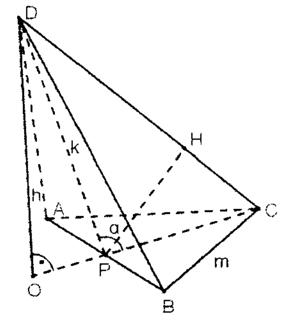
8. Сумата на три числа, образуващи аритметична прогресия, е равна на 2, а сумата от квадратите на тези числа е $\frac{14}{9}$. Трите числа са:

А) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ Б) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1$ В) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ Г) $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}$

9. Допирната точка M на вписаната в правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) окръжност разделя катета BC на части с дължини $BM = 3$ и $CM = 2$. Дължината на хипотенузата е:

А) 10 Б) 8 В) 13 Г) 11

Задача 8. а) Нека $DO = h$ е височина на пирамидата, а $DP = k$ е апотема, като P е среда на AB. Тогава $\angle((ABC);(ABD)) = \angle DPC = \alpha$. От равностранния ΔABD намираме $k = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, а от правоъгълния ΔPDO следва $h = \frac{m\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$. Тогава



$$V_{ABCD} = \frac{S_{ABC}.DO}{3} = \frac{m^3 \sin\alpha}{8}.$$

б) Пълната повърхнина на пирамидата е максимална, когато $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$. Тогава $CD = m\sqrt{2}$ и от равнобедрения ΔCDM намираме $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Следователно $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

в) От $AB \perp CP$ и $AB \perp DP$ следва $AB \perp (CDP)$ и $AB \perp CD$. Тогава $\angle(AB;CD) = 90^\circ$. Ако $PH \perp CD$ в ΔPCD, то PH е търсеното разстояние. От $PC = PD$ следва $\angle CPH = \frac{\alpha}{2}$. Следователно

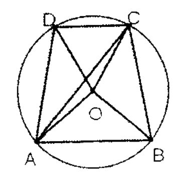
$$PH = \frac{m\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 април 2015 г.

Задача 1. а) За $x \neq \{0;1\}$ получаваме $\frac{x}{x-1} - \frac{x+2}{x} \leq 0$ и след преобразуване следва $\frac{-(x-2)}{x(x-1)} \leq 0$. Следователно $x \in (0;1) \cup [2;+\infty)$.

$g(x)=\frac{2}{3}(m+5)x^3-2(m+5)x+2m+6$. За да има $g(x)=0$ три различни реални решения трябва уравнението $g'(x)=0$ да има два различни реални корена x_1 и x_2, за които $g(x_1).g(x_2)<0$. Пресмятаме $g'(x)=2(m+5)x^2-2(m+5)$. За $m\neq -5$ уравнението $g'(x)=0$ има корени $x_1=-1$ и $x_2=1$. Тогава заместваме и след опростяване получаваме неравенството $(m-1)(5m+19)<0$. Следователно решение е $m\in\left(-\frac{19}{5};1\right)$.

Задача 7. а) $S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BCO}+S_{CDO}+S_{ADO}=\frac{2R^2}{2}+\frac{2R^2\sin\varphi}{2}+\frac{R^2\sin(180^\circ-\varphi)}{2}=R^2(1+\sin\varphi)$.



б) От косинусова теорема за ΔABO намираме $AB=\sqrt{2R^2-2R^2\cos\varphi}=2R\sin\frac{\varphi}{2}$. От $2R\sin\frac{\varphi}{2}=R\sqrt{3}$ следва $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\varphi=120^\circ$ и $\angle COD=60^\circ$. Тогава

$$S_{ACD}=S_{AOD}+S_{DOC}-S_{AOC}=\frac{R^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

в) От косинусова теорема за ΔCDO намираме $CD=\sqrt{2R^2+2R^2\cos\varphi}=2R\cos\frac{\varphi}{2}$. Следователно

$$AB+CD=2R\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)=2R\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-45^\circ\right)\leq R\sqrt{8}.$$

Равенство се получава при $\cos\left(\frac{\varphi}{2}-45^\circ\right)=1$, т.е. $\varphi=90^\circ$. Т.е. $ABCD$ е квадрат.

10. Даден е равнобедреният триъгълник $\Delta ABC\ (AC=BC)$, за който $AC=3\sqrt{3}$ и $\sphericalangle ABC=30^\circ$. Дължината на страната AB е:

А) $3\sqrt{3}$ Б) 9 В) 81 Г) $\sqrt{54.25}$

11. Даден е ромб със страна $8\sqrt{3}$ и остър ъгъл 60°. Дължината на радиуса на вписаната в ромба окръжност е:

А) 6 Б) 12 В) $6\sqrt{3}$ Г) 4

12. Основите на трапец имат дължини 6 и 8, а ъглите при голямата му основа имат големини 45° и 30°. Лицето на трапеца е:

А) $\frac{7}{\sqrt{3}-1}$ Б) $7(\sqrt{3}-1)$ В) $14(\sqrt{3}-1)$ Г) $\frac{14}{\sqrt{3}-1}$

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Ако $tg\alpha+\cot g\alpha=k$, то стойността на израза $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{cotg}^2\alpha$ е:....

14. Решенията на системата $\begin{cases}x+y=5\\x^2=y+1\end{cases}$ са:...

15. Едната страна на правоъгълник е с 2 cm по-дълга от другата. Ако увеличим всяка от страните му с по 10 cm, се получава правоъгълник с лице 1224 cm^2. Страните на дадения правоъгълник са:...

16. Две от страните на триъгълник имат дължини 4 и 6, а медианата към третата му страна има дължина $\sqrt{10}$. Лицето на триъгълника е:...

17. Около окръжност с радиус 4 е описан равнобедрен трапец с бедро 10. Дължините на основите на трапеца са:...

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Намерете корените на уравнението $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$.

19. Намерете стойностите на реалния параметър k, за които неравенството $kx^2-4x+3k+1>0$ е изпълнено за всяко реално число x.

20. В равнобедрен триъгълник с ъгъл 120° е вписана окръжност с радиус 1. Намерете дължините на страните на този триъгълник.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
19 април 2015 г.

Задача 1. а) Да се намерят първият член и разликата на аритметична прогресия, за която $\begin{cases} a_2 + a_8 = 10 \\ a_3 + a_{14} = 31 \end{cases}$;

б) Да се реши уравнението $\dfrac{1}{x^2-5x+6} + \dfrac{5-2x}{x-2} = 1 + \dfrac{2}{x-3}$;

в) Да се реши уравнението $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x$.

Задача 2. а) Да се намери най-малката стойност на реалния параметър a, за която уравнението $a^2(x-3)+4(a+3-x)=a^3$ има единствен цял положителен корен, който удовлетворява неравенството $\dfrac{x+9}{6} - \dfrac{x-2}{3} > 1$;

б) За така намерената стойност на a да се реши уравнението $(a+2)9^x + (a-3)3^x + 2a + 5 = 0$.

Задача 3. В ΔABC са построени височината CH и медианата CM. Ако $MB = BC$, $CM = 8$ и $MH = 4$, да се намерят:

а) Страните и лицето на ΔABC;

б) Радиусът на вписаната в ΔABC окръжност.

Задача 4. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$, $AB \perp AD$, в който е вписана окръжност. Известно е, че $AD = 4$ и $AB = 6$.

а) Намерете страните и лицето на трапеца;

б) Трапецът $ABCD$ служи за основа на пирамидата $MABCD$, всички околни стени на която са наклонени към равнината на основата под един и същ ъгъл с големина α. Намерете обема на пирамидата.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 26 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е най-малко?

$DH_1 = H_1H$. Следователно $HH_1 = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$. Но ΔABC е със страни $AC = BC = 2\sqrt{5}$, $AB = 2\sqrt{2}$. Тогава $S_{ABC} = 6$ и $HH_1 = \dfrac{4}{3}$.

б) От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $C_1D \perp (ABB_1A_1)$, т.е. търсеното разстояние е 2.

в) равнините, които се пресичат в BB_1 са перпендикулярни, защото са стени на прав тристенен ъгъл. Следователно търсения косинус е равен на нула.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
13 юли 2015

1	2	3	4	5
в	в	б	г	г

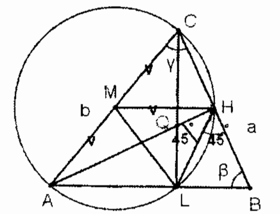
Задача 6. а) За $m > 0$ от $f(1) = 0$ получаваме $(\lg m + 1)\left(2^m - 1\right) = 0$. Тогава $\lg m + 1 = 0$ или $2^m - 1 = 0$, т.е. $m = \dfrac{1}{10}$ или $m = 0$. Следователно решение е $m = \dfrac{1}{10}$.

б) От а) следва, че $x_1 = 1$ е корен на $f(x) = 0$ за всяко m. От $1 + x_2 = \dfrac{2m+6}{m+5}$ намираме $x_2 = \dfrac{m+1}{m+5}$. Следователно $\dfrac{m+1}{m+5} + \dfrac{m+5}{m+1} < 2$. Преобразуваме и получаваме $\dfrac{m+1}{m+5} < 0$, т.е. $m \in (-5; -1)$.

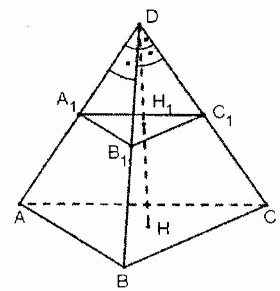
в) Намираме $f'(x) = 2(m+5)x - (2m+6)$ и $f''(x) = 2(m+5)$. Даденото уравнение представяме във вида $\dfrac{2}{3}(m+5)x^3 - 2(m+5)x + 2m + 6 = 0$. Да означим

$\angle LQH = 180^\circ - \beta$ и $\angle AQL = \beta = 135^\circ - \gamma$. Следователно $S_{ALHC} = \dfrac{AH.CL\sin\angle AQL}{2} = \dfrac{b^2\sqrt{2}}{4}\sin\gamma\sin\left(135^\circ - \gamma\right)$.

б) От $\sin\gamma\sin\left(135^\circ - \gamma\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right) - \cos 135^\circ\right)$ следва, че максималната стойност се достига, когато $\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right)$ е максимално, т.е. при $\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right) = 1$. Следователно $2\gamma - 135^\circ = 0$, т.е. $\gamma = 67^\circ 30'$.



в) От правоъгълните ΔAHC и ΔALC с обща хипотенуза $AC = b$ намираме $LM = HM = AM = MC = \dfrac{b}{2}$ и $\angle AHM = \angle HAC = 90^\circ - \gamma$. Така получаваме, че $\angle LHM = \angle LHA + \angle AHM = 45 + ^\circ 90^\circ - \gamma = \beta$. Прилагаме синусова теорема и намираме $R_{ABC} = 2R_{LHM}$.



Задача 8. а) Нека пресечената пирамида е получена от пирамидата $ABCD$ с прав тристенен ъгъл при върха D. От условието получаваме, че A_1, B_1 и C_1 са среди на AD, BD и CD. Тогава $DA = DB = 2$ и $DC = 4$. Следователно $V_{ABCD} = \dfrac{S_{ABD}.DC}{3} = \dfrac{8}{3}$,

$V_{A_1B_1C_1D} = \dfrac{S_{A_1B_1D}.DC_1}{3} = \dfrac{1}{3}$ и $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{ABCD} - V_{A_1B_1C_1D} = \dfrac{7}{3}$. Ако DH и DH_1 са височините на двете пирамиди $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ следва, че

А) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-1}$ Б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ В) $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{2}$ Г) $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$

2. Стойността на израза $\dfrac{x+2}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{x-2015}{x+3}$ за $x = 2015$ е равна на:

А) 3 Б) 0 В) 2 Г) -2015

3. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\log_4 x}$ е:

А) $x \in [-3;1) \cup (1;+\infty)$ Б) $x \in (0;+\infty)$

В) $x \in (-\infty;-3]$ Г) $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

4. Броят на реалните корени на уравнението $x^3 + 7x^2 + 12x = 0$ е:

А) 1 Б) 0 В) 3 Г) 4

5. Единият корен на квадратното уравнение $kx^2 + x + k - 1 = 0$ е $x_1 = 0$. Другият корен е равен на:

А) -1 Б) 0 В) 1 Г) 2

6. Вероятността случайно избрано естествено число от 1 до 20 да бъде делител на числото 15 е:

А) $\dfrac{1}{5}$ Б) $\dfrac{4}{15}$ В) $\dfrac{2}{15}$ Г) $\dfrac{1}{2}$

7. Уравнението $x^2 - 5x + 3 = 0$ има корени x_1 и x_2. Стойността на израза $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ е равна на:

А) $\dfrac{18}{3}$ Б) $\dfrac{31}{3}$ В) $\dfrac{19}{3}$ Г) $-\dfrac{1}{3}$

8. Решенията на неравенството $3^{x+2} \le 9^{x-2}$ са:

А) $x \in (4;+\infty)$ Б) $x \in (5;+\infty)$ В) $x \in (0;6]$ Г) $x \in [6;+\infty)$

9. Дадена е аритметична прогресия, за която $a_3 = 4$ и $a_6 = 5{,}5$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5

10. Ако $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то стойността на $tg\alpha$ е равна на:

А) $\frac{3}{4}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $-\frac{3}{4}$ Г) $\frac{1}{3}$

11. Даден е ΔABC, за който $AB = 10$ cm и AL ($L \in BC$) е вътрешната ъглополовяща на ъгъла при върха A. Ако $CL : LB = 1:2$, то дължината на страната AC е равна на:

А) 7 cm Б) 6 cm В) 5 cm Г) 4 cm

12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб $a = 6$ cm и обем $V = 6\sqrt{3}$ cm^3. Дължината на височината на пирамидата е равна на:

А) 2 cm Б) 4 cm В) 7 cm Г) 5 cm

ВТОРА ЧАСТ

Запишете само отговор.

13. Да се реши системата уравнения $\begin{vmatrix} x^2 + xy - y = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{vmatrix}$.

14. Частното q на геометрична прогресия е равно на 2, а сумата от първите и четири члена е 30. Да се намери шестият член на прогресията.

15. В равнобедрения ΔABC ($AC = BC$) е дадено, че $BC = 25$ и височината CM ($M \in AB$) е равна на 15. Да се намери дължината на височината AH ($H \in BC$) към бедрото BC.

16. Две от страните на разностранен триъгълник са с дължини 3 cm и 4 cm, а мерките на ъглите срещу тях се отнасят съответно както 1:2. Да се намери дължината на третата страна на триъгълника.

17. Трапец с основи 21 cm и 7 cm и бедра 13 cm и 15 cm е основа на призма с обем 1680 cm^3. Да се намери височината на призмата.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

18. Да се реши уравнението $3\left(6x^2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(6x^2 + \frac{1}{3}\right) - 4 = 0$.

Следователно $S_{ABC_1D_1} = \frac{(AB + C_1D_1)D_1M}{2} = 18\sqrt{5}$.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
26 април 2015

1	2	3	4	5
а	г	б	а	б

Задача 6. а) В $f(x) = 2^{2x} - 2.2^x + a$ полагаме $2^x = u > 0$ и получаваме $g(u) = u^2 + 2u + a$ с корени $u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$. За $a < 1$ намираме $x_2 = \log_2\left(1 + \sqrt{1-a}\right) > \log_2\left(1 - \sqrt{1-a}\right) = x_1$. От $x_2 - x_1 = 1$ получаваме $1 = \log_2\left(1 + \sqrt{1-a}\right) - \log_2\left(1 - \sqrt{1-a}\right) = \log_2 \frac{1 + \sqrt{1-a}}{1 - \sqrt{1-a}}$, т.е. $\frac{1 + \sqrt{1-a}}{1 - \sqrt{1-a}} = 2$. Следователно $\sqrt{1-a} = \frac{1}{3}$, т.е. $a = \frac{8}{9}$.

б) От $f(x) = 2^{2x} - 2.2^x + 1 + a - 1 = \left(2^x - 1\right)^2 + a - 1$ следва, че при $x = 0$ $HMCf(x) = a - 1$.

в) От формулите на Виет следва $u_1 + u_2 = 2$ и $u_1u_2 = a$. Тогава $A = 8^{x_1} + 8^{x_2} = u_1^3 + u_2^3 = (u_1 + u_2)^3 - 3u_1u_2(u_1 + u_2) = 8 - 6a$.

Задача 7. а) От $\angle ACH + \angle ALH = \gamma + 180^\circ - \gamma = 180^\circ$ следва, че около четириъгълника $ALHC$ може да се опише окръжност. От $\angle AHC = 90$ следва, че AC е диаметър. От $\Delta BHL \approx \Delta BAC$ получаваме $\angle BAC = 45$. От правоъгълните ΔAHC и ΔALC намираме $AH = b\sin\gamma$ и $CL = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Нека $AH \cap CL = H$. Тогава

Следователно за $u=\frac{2}{3}$ функцията получава най-голяма стойност.

Пресмятаме и намираме $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$. Т.е. най-голямата стойност на лицето е $\frac{4}{27}$ при $\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

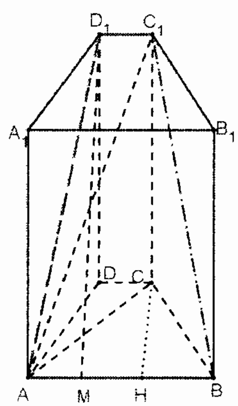
в) Пресмятаме последователно и получаваме

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma(\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\alpha)\sin^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\sin^2\frac{\pi}{2}.\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=$$

$$1.\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}}{4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

Задача 8. В трапеца може да се впише окръжност. Следователно $2AD=12$, т.е. $AD=BC=6$. Нека CH е височината на трапеца. От правоъгълния ΔBHC намираме $CH=3\sqrt{3}$, от ΔACH следва $AC=\sqrt{63}$, а от ΔACC_1 получаваме $CC_1=3\sqrt{2}$.

а) $V=S_{ABCD}.CC_1=\frac{9+3}{2}.3\sqrt{3}.3\sqrt{2}=54\sqrt{6}$.



б) По условие $AC_1=9$, $C_1D_1=CD=9$, а от правоъгълния ΔADD_1 получаваме $AD_1=3\sqrt{6}$.

в) Търсеното сечение е равнобедрения трапец ABC_1D_1. Ако D_1M е височината му, то от правоъгълния ΔAD_1M намираме $D_1M=3\sqrt{5}$.

19. В остроъгълния ΔABC са дадени $AB=4\sqrt{2}$, $AC=7$ и $\angle BAC=\angle OBC$, където точката O е центърът на описаната около ΔABC окръжност. Да се намери дължината на страната BC.

20. В правилна триъгълна пирамида дължината на радиуса на вписаната в основата окръжност е r, а дължината на апотемата е k. Да се намерят обемът и лицето на пълната повърхнина на пирамидата.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е с най-голям модул?

А) $-\sqrt{8}$ **Б)** $\sqrt[3]{7}$ **В)** $\sqrt{7}$ **Г)** $\sqrt{3,5}$

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\log_x\sqrt{3-x}$ е:

А) $x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$ **Б)** $x\in[0;8)$

В) $x\in(0;1)\cup(1;3)$ **Г)** $x\in(-\infty;8]$

3. Единият корен на квадратното уравнение $kx^2+x+k+2=0$ е $x_1=0$. Другият корен е равен на:

А) 0 **Б)** 0,5 **В)** -1 **Г)** -6

4. Решенията на неравенството $\frac{3-x}{x+1}\geq 0$ са:

А) $x\in(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$ **Б)** $x\in(-1;3)$ **В)** $x\in(-1;3]$ **Г)** $x\in[-1;3)$

5. За аритметична прогресия е дадено, че $d=2$ и $S_{40}=400$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) -29 **Б)** 29 **В)** 31 **Г)** 60

6. В банка са внесени на влог 10000 лева при сложна лихва 6%. След две години влогът ще бъде:

А) 12449 лева **Б)** 11236 лева **В)** 15000 лева **Г)** 9000 лева

7. В ΔABC е дадено, че $AB=2,5$, $BC=2$ и $AC=1,5$. Мярката на $\angle ACB$ е равна на:

А) 45 **Б)** 75 **В)** 120 **Г)** 90

8. Периметърът и лицето на правоъгълник се изразяват с едно и също число. Едната страна на правоъгълника е 4 пъти по-голяма от другата. Дължината на тази страна е равна на:

А) 5 Б) 10 В) 7 Г) 12

9. Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни като $AC=15$, $BD=18$. Лицето на четириъгълника е равно на:

А) 135 Б) 270 В) 100 Г) 150

10. Ако $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то стойността на $\cos 3\alpha$ е равна на:

А) 0,5 Б) 2 В) -1 Г) 0,125

11. Лицата на три стени на правоъгълен паралелепипед са 6 m^2, 12 m^2 и 8 m^2. Дължините на ръбовете (измеренията) на паралелепипеда са:

А)12 m ,1 m , 1 m Б)12 m ,4 m , 4 m В)2 m ,3 m ,4 m Г)4 m ,6 m , 6 m

12. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $a=8$ cm и обем $V=64$ cm^3. Дължината на апотемата на пирамидата е равна на:

А) 5 cm Б) 3 cm В) 6 cm Г) 4 cm

ВТОРА ЧАСТ

Запишете само отговор.

13. Ако n е естествено число и $1+2+3+\ldots+n=55$, да се намери стойността на n.

14. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-8x+2=0$, да се намери стойността на израза $A=\log_2 x_1x_2-2^{2+\log_2(x_1+x_2)}$.

15. Даден е равнобедрен ΔABC с основа $AB=8$ cm и $AC=BC=5$ cm. Да се намери дължината на радиуса на описаната около ΔABC окръжност.

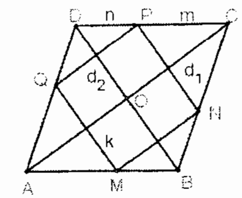
16. Основата на призма е квадрат. Височината на призмата е 3 cm, а диагоналът е 5 cm. Да се намери лицето на основата на призмата.

17. Основата на пирамида е триъгълник с една страна $8\sqrt{3}$ cm и срещулежащ на нея ъгъл 60. Всички околни ръбове на пирамидата са равни на 10 cm. Да се намери височината на пирамидата.

в) Намираме $x_1x_2=10^{-1-\sqrt{1-a}}.10^{-1+\sqrt{1-a}}=\frac{1}{100}$ и следователно получаваме

$x_1+x_2\geq 2\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{5}$.

Задача 7. а) Нека квадрата е $MNPQ$. $CP=m$ и $DP=n$. От



$\Delta QPD\approx\Delta ACD$ следва $\frac{k}{d_1}=\frac{n}{n+m}$, а от $\Delta PNC\approx\Delta DBC$ следва $\frac{k}{d_2}=\frac{m}{n+m}$. Събираме двете равенства и получаваме $\frac{k}{d_1}+\frac{k}{d_2}=\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1$, т.е. $\frac{1}{k}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$.

б) Нека $\cos\alpha=a$. От правоъгълния ΔAOB следва $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{d_2}{2a}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{d_1}{2a}$, т.е. $d_2=2a\sin\frac{\alpha}{2}$ и $d_1=2a\cos\frac{\alpha}{2}$. От а) използваме $k=\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}$ и получаваме последователно $\sigma(\alpha)=k^2=$

$$\frac{16a^4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4a^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{4a^2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$\frac{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{1+\sin\alpha}=\frac{(1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}=$$

$\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\sin^2\alpha-\sin^3\alpha$. Да означим $\sin\alpha=u$, $u\in[0;1]$. Тогава $g(u)=-u^3+u^2$. Намираме $g'(u)=-3u^2+2u$.

$ABCD$ следва, че точката O е център на вписаната в основата окръжност. Тогава $DH = 2r$ и от $ME \perp BC$ следва, че $\angle((ABCD);(BCM)) = \angle OME = \alpha$. Нека $AB = a$ и $DE = k$. От правоъгълните ΔADH и ΔMOE използваме равенствата $h_1 = 2r = a\sin\beta$, $tg\alpha = \frac{h}{r}$, $\cos\alpha = \frac{r}{k}$ и намираме $k = \frac{a\sin\beta}{2\cos\alpha}$, $h = rtg\alpha = \frac{a\sin\beta tg\alpha}{2}$. Следователно $V_{ABCDM} = \frac{a^3\sin^2\beta tg\alpha}{6}$ и

$$S_1 = a^2\sin\beta + 2ak = \frac{a^2\sin\beta(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2a^2\sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Университет по архитектура, строителство и геодезия
5 април 2015 г.

1	2	3	4	5
в	б	в	г	а

Задача 6. а) За $x > 0$ получаваме $f(x) = \lg^2 x + 2\lg x + a$. Ако x_1 и x_2 са корените на $f(x) = 0$ и $x_2 \geq x_1$ намираме $x_1 = 10^{-1-\sqrt{1-a}}$ и $x_2 = 10^{-1+\sqrt{1-a}}$. От $x_2 - x_1 = \frac{1}{5}$ следва $10^{-1+\sqrt{1-a}} - 10^{-1-\sqrt{1-a}} = \frac{1}{5}$. Преобразуваме и получаваме $10^{\sqrt{1-a}} - \frac{1}{10^{\sqrt{1-a}}} - 2 = 0$. Полагаме $10^{\sqrt{1-a}} = u > 0$ и стигаме до квадратното уравнение $u^2 - 2u - 1 = 0$ с корени $u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Следователно $u = 1 + \sqrt{2}$ и $a = 1 - \lg^2(1+\sqrt{2})$.

б) От $f(x) = (\lg x + 1)^2 + a - 1$ следва, че $HMCf(x) = a - 1$.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

18. Да се реши системата уравнения $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 11 \end{cases}$.

19. Да се намерят решенията на уравнението $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$, които принадлежат на интервала $[0;\pi]$.

20. Основата на пирамида е ромб със страна a и остър ъгъл β. Всички околни стени на пирамидата сключват с основата и ъгъл α. Да се намерят лицето на пълната повърхнина и обемът на пирамидата.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
5 април 2015 г.

Задача 1. Числата $a, 5, b, c, 14$ образуват в този ред аритметична прогресия. Тогава a е равно на:
а) 1 б) $\frac{3}{2}$ в) 2 г) $\frac{5}{2}$

Задача 2. В правоъгълен трапец с ъгъл 150° е вписан кръг с лице 1. Тогава лицето на трапеца е:
а) 4 б) $\frac{6}{\pi}$ в) π^2 г) $\sqrt{3}$

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = x^3 + x - 2$. Точка M е от графиката и и лежи в I квадрант. Точка P е проекция на M върху оста Ox. Дадено е, че $\angle MOP = 45^\circ$. Тогава ординатата на точка M е равна на:
а) 1 б) 2 в) $\sqrt[3]{2}$ г) $\frac{5}{2}$

Задача 4. Околните ръбове на триъгълна пирамида са равни на 1, 2 и 3 и са два по два взаимно перпендикулярни. Тогава обемът на пирамидата е:
а) 6 б) 3 в) 2 г) 1

Задача 5. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$ се достига при x равно на:

а) 2π б) π в) $\frac{\pi}{2}$ г) $\cos 1$

Задача 6. Дадена е функцията $f(x)=\lg^2 x+\lg x^2+a$.

а) За кои стойности на параметъра a графиката на $f(x)$ отсича от абсцисата Ox отсечка с дължина $\frac{1}{5}$.

б) Пресметнете най-малката стойност на функцията $f(x)$.

в) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$, пресметнете стойността на израза x_1x_2 и докажете, че $x_1+x_2\geq\frac{1}{5}$.

Задача 7. В ромба $ABCD$ с дължини на диагоналите d_1 и d_2 е разположен квадрат, страните на който са успоредни на диагоналите му. Върховете на квадрата лежат на страните на ромба.

а) Докажете, че ако дължината на страната на квадрата е равна на k, то $\frac{1}{k}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$.

б) Нека острият ъгъл на ромба е равен на α, а дължината на страната му е равна на $\cos\alpha$. Изразете лицето σ на квадрата като функция на α: $\sigma=\sigma(\alpha)$. При коя стойност на $\sin\alpha$ лицето $\sigma(\alpha)$ е най-голямо?

в) Пресметнете $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma(\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}$.

Задача 8. Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB=9$ и $CD=3$. В трапеца може да се впише окръжност. Дължината на телесния диагонал AC_1 е равна на 9.

а) Пресметнете обемът на призмата.

б) Пресметнете дължините на страните на AC_1D_1.

в) Пресметнете лицето на сечението, на равнината (AC_1D_1) с призмата.

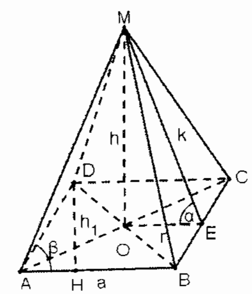
ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
10	-31	$\frac{25}{6}$	8	6

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. Представяме дадената система във вида $\begin{cases}xy+x+y=5\\(x+y)^2+xy=11\end{cases}$, полагаме $\begin{cases}x+y=u\\xy=v\end{cases}$ и получаваме $\begin{cases}u+v=5\\u^2+v=11\end{cases}$. Умножаваме първото уравнение с -1, прибавяме към второто и получаваме квадратното уравнение $u^2-u-6=0$ с корени $u_1=3$ и $u_2=-2$. Тогава $v_1=2$ и $v_2=7$. Следователно $\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=-2\\xy=7\end{cases}$. Първата система има решения (1;2) и (2;1), а втората няма реални решения.

Задача 19. Преобразуваме и получаваме последователно $\frac{1-\cos 2x}{2}+1-\cos^2 2x=1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$. Полагаме $\cos 2x=u$, $-1\leq u\leq 1$ и стигаме до квадратното уравнение $2u^2+u-1=0$ с корени $u_1=-1$ и $u_2=\frac{1}{2}$. От $\cos 2x=-1$ и $\cos 2x=\frac{1}{2}$ намираме $x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$ и $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, където k е цяло число.

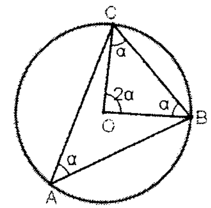


Задача 20. Нека пирамидата е $ABCDM$ с основа ромба $ABCD$. Да означим с $MO=k$ височината на пирамидата, с $DH=h_1$ височината на ромба и $OE\perp BC$. От равните двустенни ъгли при основата

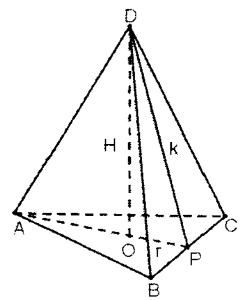
ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. Полагаме $6x^2+\frac{1}{3}=u>0$ и получаваме квадратното уравнение $3u^2+u-4=0$ с корени $u_1=-\frac{4}{3}<0$ и $u_2=1$. От $6x^2+\frac{1}{3}=1$ получаваме $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$.

Задача 19. Използваме стандартните означения и от условието следва $\angle BAC=\angle OBC=\angle OCB=\alpha$. От свойство на вписан и централен ъгъл следва $\angle BOC=2\alpha$. От ΔBOC намираме $\alpha=45$. От косинусова теорема за ΔABC получаваме $BC=5$.



Задача 20. Нека пирамидата е $ABCD$ с основа равностранния ΔABC, $DO=H$ е височината на пирамидата и P е среда на BC. Тогава $OP=r$ и $DP=k$. От свойства на равностранния триъгълник следва, че $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, т.е. $a=2r\sqrt{3}$ и $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}$. От правоъгълния ΔDOP намираме $H=\sqrt{k^2-r^2}$. Така получаваме $S_1=3r\sqrt{3}(k+r)$ и $V_{ABCD}=r^2\sqrt{3(k^2-r^2)}$.



Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий" тест математика - 6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
А	В	Б	В	А	Б	Г	Б	А	В	В	А

Университет по архитектура, строителство и геодезия 26 април 2015

Задача 1. Графиките на функциите $f(x)=x^3+x-a$ и $g(x)=x^3+ax^2-x$ имат единствена пресечна точка $M(x_0;y_0)$ със строго положителни координати. Координатите на т. M са:

а) $(1;1)$ б) $(2;1)$ в) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ г) $\left(\frac{3}{2};2\right)$

Задача 2. Височината на конус е 2 пъти по-голяма от височината на цилиндър, а диаметърът на основата му е 2 пъти по-малък от диаметъра на основата на цилиндъра. Тогава отношението на обема на цилиндъра към обема на конуса е:

а) 1 б) 2 в) $\frac{8}{3}$ г) 6

Задача 3. Ако a_n и b_n са числови редици и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$ е равно на:

а) 0 б) -1 в) 1 г) ∞

Задача 4. Основата на пирамида е правоъгълен триъгълник, а всички околни ръбове образуват равни ъгли с основата. Тогава върхът на пирамидата се проектира в:

а) средата на хипотенузата на триъгълника
б) върха на правия ъгъл на триъгълника
в) центъра на вписаната окръжност в триъгълника
г) ортоцентъра на триъгълника

Задача 5. Най-голямата стойност на функцията $\cos x-\sin x$ е равна на:

а) 2 б) $\sqrt{2}$ в) 1 г) -1

Задача 6. Дадена е функцията $f(x)=4^x-2^{x+1}+a$.

а) За кои стойности на параметъра a графиката на $f(x)$ отсича от абсцисата Ox отсечка с дължина 1.

б) Пресметнете най-малката стойност на функцията $f(x)$.

в) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$, пресметнете стойността на израза $A=8^{x_1}+8^{x_2}$.

Задача 7. В остроъгълния ΔABC AH е височина, HL е ъглополовяща в ΔAHB. Известно е, че $AC=b$ и $\angle ACB=\angle BLH=\gamma$.

а) Пресметнете лицето на четириъгълника $ACHL$.

б) За коя стойност на γ лицето на $ACHL$ е най-голямо?

в) Нека M е среда на AC. Докажете, че дължината на диаметъра на описаната около ΔLMH окръжност е равна на дължината на радиуса на описаната около ΔABC окръжност.

Задача 8. Дадена е пресечена триъгълна пирамида $ABCA_1B_1C_1$, такава, че околните ръбове AA_1, BB_1, CC_1 са два по два взаимно перпендикулярни и $AA_1=BB_1=1$, $CC_1=2$. Дадено е, че лицата на двете основи се отнасят както 4:1.

а) Докажете, че обемът на пирамидата е равен на $\frac{7}{3}$, а височината на пирамидата е $\frac{2}{3}$.

б) Пресметнете разстоянието от върха C_1 до равнината ABA_1B_1.

в) Пресметнете косинуса на ъгъла между околните стени, съдържащи околния ръб BB_1.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
13 юли 2015

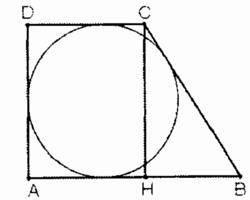
Задача 1. Решение на неравенството $\sin\varphi\cos\varphi<0$ е:

а) $\varphi\in(0^\circ;180^\circ)$ б) $\varphi\in(90^\circ;270^\circ)$

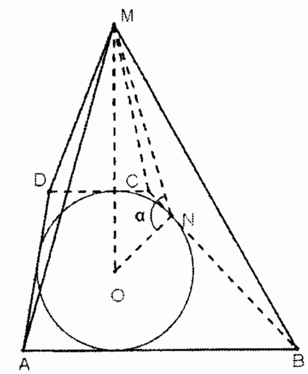
в) $\varphi\in(90^\circ;180^\circ)\cup(270^\circ;360^\circ)$ г) $\varphi\in(0^\circ;90^\circ)\cup(180^\circ;270^\circ)$

Задача 2. Ако отношението на лицата на основите на пресечена пирамида е 1:2, то отношението на периметрите е:

б) От зависимостта за правоъгълен триъгълник $r=\frac{a+b-c}{2}$ получаваме $r=4\sqrt{3}-4$.



Задача 4. а) Нека $AB=a$, $BC=c$ и $CD=b$ и да построим $CH\perp AB$, $H\in AB$. От $ABCD$ описан около окръжност следва $6+b=c+4$, т.е. $c=2+b$. От правоъгълния ΔBHC и $BH=6-b$ следва $16+(6-b)^2=(2+b)^2$. Така намираме $b=3$ и следователно $S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)AD}{2}=18$.



б) Нека $MO\perp(ABCD)$. От условието, че двустенните ъгли при основата са равни следва, че O е център на вписаната в основата окръжност. Нека $ON\perp BC$, $N\in BC$ следва, че $MN\perp BC$ и $\angle ONM=\alpha$. Но $ON=r=\frac{AD}{2}=2$. От правоъгълния ΔONM получаваме $tg\alpha=\frac{OM}{ON}$, т.е. $OM=2tg\alpha$. Следователно $V_{ABCDM}=\frac{S.OM}{3}=12tg\alpha$.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 26 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Б	Г	В	А	А	В	Г	Б	А	В	А

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
(2;-4), (3;-4,5)	64	24	$\frac{7}{3}$	10

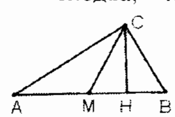
б) Даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{5-2x}{x-2}=1+\frac{2}{x-3}$. За $x\neq\{2;3\}$ опростяваме и получаваме квадратното уравнение $3x^2-14x+16=0$ с корени $x_1=2$ и $x_2=\frac{8}{3}$. Решение е $x=\frac{8}{3}$.

в) За $x\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, k цяло число преобразуваме и получаваме $\sin 2x=-2\cos x-2\sin x.\cos x \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos x(2\sin x+1)=0 \quad\Leftrightarrow$ $\cos x=0\cup\sin x=-\frac{1}{2}$. Решения на даденото уравнение са $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi$ и $x=\frac{11\pi}{6}+2l\pi$, където k,l са цели числа.

Задача 2. а) Преобразуваме даденото уравнение във вида $(a-2)(a+2)x=(a-2)(a+2)(a+3)$. *1)* За $a=\pm2$ следва $0.x=0$ и уравнението има безброй решения. *2)* За $a\neq\pm2$ уравнението има единствено решение $x=a+3$. От условието $x>0$ следва $a>-3$ цяло число. Следователно $\frac{a+3+9}{6}-\frac{a+3-2}{3}>1$. Опростяваме и намираме $a<4$. Решение е $a=-1$.

б) За $a=-1$ получаваме $9^x-4.3^x+3=0$. Полагаме $3^x=u>0$ и следва квадратното уравнение $u^2-4u+3=0$ с корени $u_1=1$ и $u_2=3$. От $3^x=1$ и $3^x=3$ намираме $x=0$ и $x=1$.

Задача 3. а) От правоъгълния ΔMHC и $CM=2MH$ следва, че $\angle MCH=30$. Тогава $\angle CMH=60$ и ΔCMB е равностранен, т.е. $CM=MB=BC=8$. Следователно $AB=16$. От $AM=BM=CM$ следва, че $\angle ACB=90$. Тогава $AC=8\sqrt{3}$ и $S_{ABC}=32\sqrt{3}$.



а) 1:4 б) 1:1 в) $1:\sqrt{2}$ г) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

Задача 3. Страните на ΔABC са $AB=2$, $BC=3$ и $CA=4$. Центърът на описаната окръжност лежи:

а) вътре в ΔABC б) извън ΔABC
в) на страната AB г) на страната AC

Задача 4. Първите четири члена на редицата $a_n=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$, $n=1,2,3,\ldots$ са:

а) $\frac{1}{2},2,2,0$ б) $\frac{1}{2},\sqrt{2},2,0$ в) $1,\sqrt{2},2,\frac{1}{2}$ г)друг отговор

Задача 5. Разстоянието между върха на параболата с уравнение $y=2x^2-4x+7$ и оста Ox е рвно на:

а) 3 б) -4 в) 4 г) 5

Задача 6. Дадена е функцията, $f(x)=(m+5)x^2-(2m+6)x+m+1$, където $m\neq-5$ е реален параметър.

а) За кои стойности на m уравнението $f(x)=(\lg m+x)(2^m-x)$ има корен $x=1$?

б) За кои стойности на m за корените на уравнението $f(x)=0$ е изпълнено неравенството $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<2$?

в) За кои стойности на m уравнението $\frac{1}{3}x^3f''(x)-f'(x)=0$ има три различни реални корена?

Задача 7. В четириъгълника $ABCD$ страните AB и CD са успоредни. Около $ABCD$ е описана окръжност с център O и радиус R. Дадено е, че $\angle AOB=\varphi$, $\angle BOC=90$.

а) Пресметнете лицето на четириъгълника.

б) За коя стойност на φ е изпълнено $AB=\sqrt{3}R$? За тази стойност на φ пресметнете лицето на ΔACD.

в) Докажете, че $AB+CD \le R\sqrt{8}$. За коя стойност на φ се достига равенство? Определете вида на четириъгълника в този случай.

Задача 8. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$. Стените ABC и ABD са равностранни триъгълници със страна m, като двустенният ъгъл между тях е α.

а) Пресметнете обема на пирамидата.

б) При $m=1$ пресметнете косинуса на α, за който пълната повърхнина на пирамидата е максимална.

в) Пресметнете ъгъла и разстоянието между правите AB и CD.

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 април 2015 г.

Задача 1. а) Да се реши неравенството $\dfrac{x}{x-1} \le \dfrac{x+2}{x}$.

б) Да се реши уравнението $4^x + 4.2^x - 32 = 0$.

в) Да се реши уравнението $\log_3(x+2) = 2\log_3 x + 1$.

Задача 2. а) Да се реши уравнението $|6x-3| = 6$.

б) Да се намери стойността на израза $A = \dfrac{4}{5+6\cos 2\alpha}$, ако $tg\alpha = -\sqrt{3}$.

в) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които корените на уравнението $mx^2 + 2x + 3(m-1) = 0$ са с различни знаци.

Задача 3. В правоъгълен ΔABC с хипотенуза AB и катет $BC=3$ радиусът на вписаната окръжност е $r=1$. Да се намери:

а) лицето на триъгълника;

б) дължината на радиуса на описаната окръжност.

Задача 4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDE$ с основен ръб с дължина $3\sqrt{2}$ и височина 4. През диагонала BD е построена равнина λ, която пресича околния ръб CE в точка M и сключва с основата $ABCD$ ъгъл 45°. Да се намери:

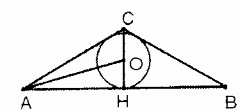
а) обемът на тетраедъра $BCDM$.

б) разстоянието от върха C до равнината λ.

18. За $x \ne \pm 2$ преобразуваме даденото уравнение в уравнението $\left(x^2+6\right)^2 - (5x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2+6-5x)(x^2+6+5x) = 0$. От $x^2-5x+6=0$ намираме $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$, а от $x^2+5x+6=0$ получаваме $x_3 = -3$ и $x_4 = -2$. Окончателно $x = \pm 3$.

19. За $k = 0$ получаваме $x < \frac{1}{4}$, т.е. $k=0$ не е решение. Нека $k \ne 0$. Тогава трябва $k > 0$ и $D < 0$. От $D = -3k^2 - k + 4 < 0$ намираме $k \in \left(-\infty; -\dfrac{4}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. Окончателно $k \in (1; +\infty)$.

20. Нека е даден ΔABC с $\angle ACB = 120^\circ$. Тогава $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$. Нека $CH = x$ е височината към основата. Следователно $AC = BC = 2x$ и $AH = BH = x\sqrt{3}$. Ако O е центърът на вписаната окръжност, то O е пресечна точка на ъглополовящите и AO е ъглополовяща и в ΔAHC, като $HO = r = 1$ и $OC = x-1$. От свойство на ъглополовящата следва $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{OH}{HC}$.



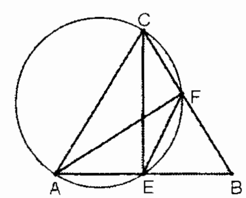
Заместваме и намираме $x = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$. Следователно $AB = 4+2\sqrt{3}$ и $AC = BC = \dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
19 април 2015 г.

Задача 1. а) Използваме формулата за общия член на аритметична прогресия $a_n = a_1 + (n-1)d$ и получаваме $\begin{vmatrix} 2a_1 + 8d = 10 \\ 2a_1 + 15d = 31 \end{vmatrix}$ с решение $\begin{vmatrix} a_1 = -7 \\ d = 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{cases} u_2 = -\dfrac{5}{2} \\ v_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$. От $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ намираме решенията $(1;3)$ и $(3;1)$, а от

$\begin{cases} x+y=-\dfrac{5}{2} \\ xy=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ получаваме $\left(\dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{4};\dfrac{-5\mp\sqrt{29}}{4}\right)$.



20. От AC диаметър следва, че $CE \perp AB$ и $AF \perp BC$. От ΔABC равнобедрен следва, че $AE = BE = 3$. От правоъгълния ΔAEC намираме $CE = 4$. Така получаваме $S_{ABC} = 12$. Но $\Delta EBF \approx \Delta CAB$. Следователно $\dfrac{S_{EFB}}{S_{CAB}} = \left(\dfrac{EB}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$. Тогава $S_{EFB} = \dfrac{108}{25}$ и

$S_{AEFC} = S_{ABC} - S_{EFB} = \dfrac{192}{25}$.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
10 юли 2015 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Г	Б	А	Г	В	Б	Б	В	В	Б	А	Б

13	14	15	16	17
k^2-2	(-3;8) и (2;3)	24 cm, 26 cm	$3\sqrt{15}$	4 и 16

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 юли 2015 г.

Задача 1. а) Да се реши системата $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+3y=4 \end{cases}$.

б) Да се намери областта на решение на неравенството $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{x+3} \le 0$.

в) Да се намери стойността на израза $A = \lg\dfrac{1}{1000} - \log_7 49 + \log_{\frac{1}{4}} 64 - \log_{\sqrt{5}} 1$.

Задача 2. а) Да се реши уравнението $|x-3| = 2x$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението $x^2+mx+m-1=0$ има реални корени по-малки от 1.

в) Да се реши уравнението $4\sin x + 1 - \cos 2x = 0$.

Задача 3. Даден е четириъгълник $ABCD$ с диагонал $AC = 4$, $\angle DAC = \angle DBA = 30^\circ$, в който може да се впише окръжност и около който може да се опише окръжност. Да се намери:

а) лицето на четириъгълника $ABCD$;

б) радиусът на описаната около $ABCD$ окръжност.

Задача 4. Даден е тетраедър $ABCD$ с основа ABC, за който $AB = BD = AD = BC$ и ортогоналната проекция на върха D е средата M на AC. Да се намери:

а) големината на ъгъла между ръба BD и основата ABC;

б) радиусът на вписаната в тетраедъра сфера, ако дължината на ръба AB е a.

Технически университет - София
4 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\frac{1}{3}\sqrt{12\frac{1}{4}-\left(\frac{9.5^{-2}}{0,5.2^{-1}}\right)^{-0.5}}$ е:

а) 1,1 б) 2 в) $\frac{4\sqrt{3}-5}{2}$ г) $\frac{1}{3}$ д) $-\frac{1}{2}$

2. Ако $a=3b+1$ и $ab=30$, то стойността на израза a^2+9b^2 е равна на:

а) 181 б) 161 в) 121 г) 81 д) 31

3. Сборът на корените на уравнението $x^2+5x+2-\frac{x^2+x-2}{x+2}=0$ е равен на:

а) 4 б) -4 в) 0 г) -1 д) 3

4. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $2x^2-7x+4=0$, то стойността на израза $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2$ е равна на:

а) $\frac{7}{4}$ б) $\frac{7+\sqrt{2}}{2}$ в) $\frac{7+4\sqrt{2}}{4}$ г) $\frac{7+2\sqrt{2}}{2}$ д) $\frac{2+\sqrt{7}}{4}$

5. Решенията на уравнението $\sqrt{(2x+3)^2}=x$ са:

а) -1 б) -3 в) -1 и -3 г) $\frac{3}{2}$ д) няма решение

6. Броят на целите числа n, за които $\left(\frac{n+7}{2n+7}\right)^{-1}<1$, е равен на:

а) 0 б) 2 в) 4 г) 5 д) 6

7. Редицата $\{a_n\}$ е аритметична прогресия с разлика $d=2$. Стойността на израза $a_6+a_2-a_3-a_4$ е:

а) 22 б) -2 в) 2 г) -22 д) 10

8. За геометричната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_1+a_5=57$ и $a_2+a_6=171$. Частното на прогресията е равно на:

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2015 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	А	В	Б	Г	В	Б	Г	А	В	В	А

13	14	15	16	17
$AB=3+2\sqrt{5}$ $R=\frac{15}{4}$	$CC_1=12\ cm$ $S=48\ cm^2$	$x=6$	$f_{нмс}=1$ и $f_{нгс}=5$;	$x\in(-2,0]\cup[1,+\infty)$

18. За $k\neq-1$ трябва да са изпълнени едновременно $D=16k+25>0$ и $x_1+x_2=\frac{2k+5}{k+1}>0$ и $x_1x_2=\frac{k}{k+1}>0$. От $D=(2k+5)^2-4k(k+1)>0$ следва $k\in(-\frac{25}{16},+\infty)$, от $x_1+x_2=\frac{2k+5}{k+1}>0$ получаваме $k\in(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(-1,+\infty)$, а от $x_1x_2=\frac{k}{k+1}>0$ намираме $k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. Окончателно $k\in(0,+\infty)$.

19. Преобразуваме и получаваме $\left|\begin{array}{l}(x+y)^2-3xy=7\\ 2xy-(x+y)=2\end{array}\right.$. Полагаме $\left|\begin{array}{l}u=x+y\\ v=xy\end{array}\right.$ и следва системата $\left|\begin{array}{l}u^2-3v=7\\ 2v-u=2\end{array}\right.$ с решения $\left|\begin{array}{l}u_1=4\\ v_1=3\end{array}\right.$ и

че AO_1LC е вписан в оръжност. Но точките A, L, C лежат на окръжност с център O и следователно и точката O_1 лежи на същата окръжност. Т.е дължината на OO_1 е равна на дължината на радиуса на описаната около ΔALC окръжност. Прилагаме синусова теорема за ΔALC и намираме $OO_1 = R_{ALC} = \dfrac{AC}{2\sin 108^\circ} = \dfrac{AC}{2\sin 72^\circ}$, а от ΔABC следва $\dfrac{AC}{2\sin 72^\circ} = 7$. Тогава $OO_1 = 7$.

Задача 8. Да означим за $x \in [0;1]$ $\boldsymbol{НГСf(x) = M}$ и $\boldsymbol{НМСf(x) = m}$. Тогава за да бъдат $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$ дължини на страни на триъгълник за всяко $x, y, z \in [0;1]$ трябва $2m > M$. Ще разгледаме три случая: *1)* $-\dfrac{a}{2} < 0$, т.е. $a > 0$. Тогава $m = f(0)$, $M = f(1)$ и от $2m > M$ следва $a < 0$, което означава, че в тоя случай няма решение. *2)* $-\dfrac{a}{2} < 1$, т.е. $a < -2$. Тогава $M = f(0)$, $m = f(1)$ и от $2m > M$ следва $a > -\dfrac{3}{2}$, което означава, че в тоя случай няма решение. *3)* $-\dfrac{a}{2} \in [0;1]$, т.е. $a \in [-2;0]$. Тогава $m = f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ и $M = \max\{f(0); f(1)\}$.

Следователно от $2m > M$ получаваме $2 - \dfrac{a^2}{2} > 1$ и $2 - \dfrac{a^2}{2} > 2 + a$. Т.е.

намираме, че търсените стойности са $a \in \left(-\sqrt{2}; 0\right)$.

а) $\dfrac{57}{29}$ б) $\dfrac{29}{57}$ в) 1 г) $\dfrac{1}{3}$ д) 3

9. Ако $a = \log_3 2$, то стойността на израза $\log_9 8 + 3^a - \log_3 6$ е равна на:

а) 1 б) $\dfrac{a+2}{2}$ в) $\dfrac{a-2}{2}$ г) $\dfrac{5a+6}{2}$ д) $a+2$

10. Вероятността на случайно събитие е числото:

а) $\lg 13$ б) $(0,4)^5$ в) $\sin 181$ г) $tg47^\circ$ д) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

11. От 20 члена на студентски съвет трябва да се изберат председател и секретар. Броят на различните възможности за избора им е равен на:

а) 190 б) 380 в) 100 г) 40 д) 10

12. Стойността на числения израз $\sqrt{3}tg13\ tg47\ + tg13\ + tg47$ е:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ г) $\sqrt{3}$ д) $\dfrac{1}{2}$

13. Ако $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, то:

а) $a = 1$ б) $a = \dfrac{1}{2}$ в) $a = \dfrac{2}{5}$ г) $a = 0$ д) $a = -1$

14. Ако $2^{3x-4} = 2.2^x$, то стойността на x е:

а) $\dfrac{5}{2}$ б) $\dfrac{5}{4}$ в) -1 г) $\dfrac{3}{2}$ д) 5

15. Множеството от допустимите стойности на x за функцията $f(x) = \log_x(3 - 2x - x^2)$ е:

а) $(-3;1)$ б) $(-3;0)$ в) $(0;1)$ г) $(1;\infty)$ д) $(0;\infty)$

16. Даден е ΔABC, в който с M е означен медицентърът му, а с P е означена средата на страната AB. Отношението на лицата на ΔBMP и ΔABC е:

а) $\dfrac{1}{9}$ б) $\dfrac{1}{8}$ в) $\dfrac{1}{7}$ г) $\dfrac{1}{6}$ д) $\dfrac{1}{5}$

17. В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AD \perp AB$) основите AB и CD имат дължини съответно 4 cm и 3 cm. Върху бедрото AD е построена т. M, която е равноотдалечена от върховете B и C. Ако $MC \perp MB$, то дължината на отсечката AD е равна на:

а) 3 cm б) 4 cm в) 5 cm г) 6 cm д) 7 cm

18. Осните сечения на прав кръгов конус имат прав ъгъл при върха му, а раиусът на основата му е 3 cm. Отношението на радиусите на описаната и вписаната спрямо конуса сфери е равно на:

а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ в) $1+\sqrt{2}$ г) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ д) $\sqrt{2}-1$

19. Около основата на правилна четириъгълна пирамида е описана окръжност с диаметър $6\sqrt{2}$. Околните стени сключват с основата ъгли с големина α. Обемът на пирамидата е:

а) $36tg\alpha$ б) $108tg\alpha$ в) $36cotg\alpha$ г) $36\cos\alpha$ д) $72tg\alpha$

20. Разликата на най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=-2x^2-x-1$ в затворения интервал [-1;2] е равна на:

а) 9 б) -9 в) $-\frac{79}{8}$ г) $-\frac{97}{8}$ д) $\frac{81}{8}$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се намери най-малкото цяло число, което удовлетворява неравенството $4^x+3.2^{x+1}-16>0$.

22. Да се реши неравенството $\log_2(x+1)+\log_2(3x-1)\le 2$.

23. Да се намерят всички решения на уравнението $4\cos 2x-2\sin 2x=4\cos^2 x$, които принадлежат на затворения интервал $\left[-\frac{3\pi}{4};0\right]$.

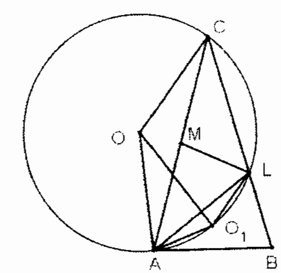
24. Да се реши уравнението $\sqrt{2x^2-x-6}=x-1$.

равностранните ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. Тогава $AP\perp BC$, $A_1P_1\perp B_1C_1$, $AO:OP=2:1$, $A_1O_1:O_1P_1=2:1$, OO_1 е височина на пирамидата и $\angle((ABCD);(BCC_1B_1))=\angle OPP_1=45^\circ$. Нека $P_1H\perp AP$, $H\in AP$. От свойствата на равностранен триъгълник намираме $OP=4\sqrt{3}$ и $O_1P_1=\sqrt{3}=OH$. От равнобедрения правоъгълен ΔHPP_1 получаваме $HP=HP_1=3\sqrt{3}$. Следователно $OO_1=3\sqrt{3}$. Така за обема на пирамидата намираме $V=\frac{3\sqrt{3}}{3}\left(144\sqrt{3}+9\sqrt{3}+36\sqrt{3}\right)=567$.

Задача 6. Преобразуваме дадената функция и получаваме $f(x)=2\cos^2 x.\sin x-2\cos^2 x-2\sin x=2\left(-\sin^3 x+\sin^2 x-1\right)$.

Полагаме $\sin x=u\in[-1;1]$ и разглеждаме $g(u)=-u^3+u^2-1$. От $g'(u)=-3u^2+2u$ и $g'(u)=0$ намираме $u_1=0$ и $u_2=\frac{2}{3}$. Но $g(0)=-1$ и $g(1)=-1$. Следователно най-малката стойност на $g(u)$ в интервала [-1;1] е $g(0)=g(1)=-1$. Тогава най-малката стойност на $f(x)$ е -2 и тя се достига за $x=k\pi$ и $x=\frac{\pi}{2}+2l\pi$, където k и l са цели числа.

Задача 7. Нека $M\in AC$ и $AM=MC$. От условието следва, че $LM\perp AC$. Тогава ΔALC е равнобедрен с $AL=LC$ и $\angle ACL=\angle CAL=\frac{1}{2}\angle BAC$. От $\angle BAC=\angle ABC$ следва $\angle BAC=\angle ABC=72^\circ$ и $\angle ACB=36^\circ$. От ΔABL получаваме $\angle AO_1L=2\angle ABL=144^\circ$. Тогава $\angle ACL+\angle AO_1L=180^\circ$, което означава,

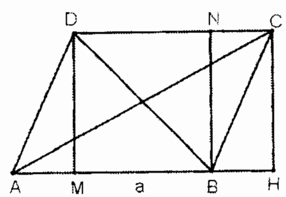


Задача 2. Използваме стандартните означения за триъгълник и получаваме $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, $R=\dfrac{c}{2}$. От $a+b+c=12$ и $r:R=2:5$ намираме $c=5$ и $a+b=7$. От Питагоровата теорема следва $a^2+b^2=25$. Тогава $(a+b)^2-2ab=25$ и намираме $ab=12$. Следователно $S=\dfrac{ab}{2}=6$.

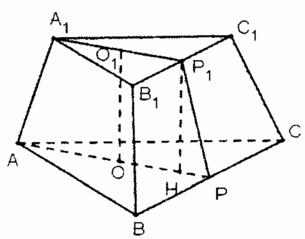
Задача 3. От $x^2-7x>0$ и $x-1>0$ и $x+1>0$ следва $x\in(1;3)\cup(4;+\infty)$. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-7x+12)\geq\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)$. От $\dfrac{1}{5}<1$ следва $x^2-7x+12\leq x^2-1$ с решение $x\geq\dfrac{13}{7}$. Решение на задачата е $x\in\left[\dfrac{13}{7};3\right)\cup(4;+\infty)$.

Задача 4. Да означим $MB=a$, $AC=x$, $BD=y$ и $AM=z$. От условието следва, че $x+y=10+2\sqrt{5}$ и $a^2=10$. Нека $CH\perp AB$, $H\in AB$. Следователно $MD=DN=NB=MB=CH=a$. От правоъгълния ΔMBD намираме $y=a\sqrt{2}=2\sqrt{5}$. Следователно $x=10$. От $\Delta AMD\cong BHC$ следва, че $BH=AM=z$. От правоъгълния ΔACH получаваме $x^2=(a+2z)^2+a^2$. Преобразуваме и намираме $a+2z=3\sqrt{10}$. Следователно $z=\sqrt{10}$ и $AB=2\sqrt{10}$. Така получаваме

$$S_{ABCD}=AB.DM=20.$$



Задача 5. Нека P и P_1 са среди съответно на BC и B_1C_1, а O и O_1 са центровете на



25. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x+\dfrac{1}{3}$ и да се установи видът им.

26. Колко служители има в даден отдел, ако начините за случаен избор на двама от тях са равни на медианата на данните 41, 29, 20, 20, 27, 60?

27. Осемте букви на думата УЧИТЕЛКИ са написани на отделни картончета и са поставени в кутия. По случаен начин се вади едно картонче. Каква е вероятността върху него да е написана буква от думата ФРИЗЬОР?

28. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4ax+a}$ е дефинирана за всяко реално число x.

29. В ромб $ABCD$ със страна a диагоналът AC пресича височината DM на ромба в т. P така, че $DP:PM=3:2$. Да се намери дължината на BD.

30. Височината на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има дължина $4b$. Основата и $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи $AB=6b$ и $CD=2b$. Ъгълът между диагонала AC_1 и равнината на основата и има големина φ. Да се намери обемът на призмата.

Технически университет - София
18 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Най-малкото от посочените числа е:

а) $4^{-2}.2^{-4}$ б) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ в) $\left(1600^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$ г) $\sqrt[3]{169}$ д) $15^2.2^{-3}$

2. Стойността на израза $\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-4\right)^2}$ е:

а) -2 б) $-\sqrt{2}$ в) 1 г) $\sqrt{2}$ д) $2\sqrt{2}$

3. Сборът на корените на уравнението $2x^2+10x-1=0$ е равен на:
а) -10 б) 6 в) 5 г) -5 д) -6

4. Решенията на неравенството $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+3}<0$ принадлежат на интервала:
а) $(-\infty;-4]$ б) $(-\infty;-2)$ в) $[-4;-3)$ г) $(2;3)$ д) $(3;4)$

5. Неравенството $\log_a \frac{1}{9} > \log_a \frac{1}{7}$ е вярно точно тогава, когато:
а) $a<0$ б) $0<a<1$ в) $1<a<2$ г) $a=2$ д) $a>2$

6. Ако $a=\log_2 3$ и $b=\log_2 10$, то изразът $\log_5 6$ е равен на:
а) $\frac{1+a}{1+b}$ б) $\frac{1+a}{b-1}$ в) $\frac{a-1}{b+1}$ г) $\frac{a-1}{b-1}$ д) $\frac{1+a}{1-b}$

7. Стойността на израза $\frac{2tg15^\circ}{1+tg^2 15^\circ}+\frac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$ е равна на:
а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ б) $1+\sqrt{3}$ в) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ г) $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ д) $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$

8. Ако $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то стойността на израза $\sin\alpha+\sin^2 2\alpha$ е равна на:
а) 1 б) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ в) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ г) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ д) $\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$

9. Общият член на числовата редица е $a_n=\sqrt{n^2-6n+9}+12$. Номерът n, за който a_n приема най-малка стойност, е равен на:
а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

10. Стойността на параметъра m, при която графиката на функцията $f(x)=x^3+x-3m$ минава през точката $A(-1;7)$ е:
а) -3 б) -2 в) -1 г) 0 д) 1

11. Ученик има три различни химикалки, два модела калкулатори и четири различни сборника по математика. Броят на различните комплекти от две

CC_1. Използваме стандатните означения за ъглите и получаваме за $\Delta A_1B_1C_1$, че $\angle C_1A_1B_1=180^\circ-2\alpha$, $\angle A_1B_1C_1=180^\circ-2\beta$ и $\angle A_1C_1B_1=180^\circ-2\gamma$. За $\Delta A_1B_1C_1$ получаваме $A_1B_1^2=B_1C_1^2+A_1C_1^2$. От обратната на Питагоровата теорема следва, че $\angle B_1C_1A_1=90^\circ$, т.е. $180^\circ-2\gamma=90^\circ$. Следователно $\gamma=45^\circ$. От $\Delta ABC\approx\Delta A_1B_1C$ получаваме $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{CA_1}{AC}=\cos\gamma=\cos 45^\circ$, т.е. $AB=\frac{A_1B_1}{\cos 45^\circ}$. От синусова теорема за ΔABC следва $\frac{AB}{\sin 45^\circ}=2R$. Така получаваме

$$R=\frac{A_1B_1}{2\sin 45^\circ\cos 45^\circ}=\frac{A_1B_1}{\sin 90^\circ}=A_1B_1=17.$$

Задача 8. Решение на неравенството $|a|\le 2$ е $a\in[-2;2]$. За да са реални корените на уравнението $x^2+2ax+4a=0$ трябва $D=4a^2-16a\ge 0$, т.е $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. От $S=|x_1|+|x_2|\ge 0$ следва, че S и S^2 достигат своите най-големи стойности за една и съща стойност на a. Разглеждаме $S^2=|x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1x_2|$ и след преобразуване получаваме $S^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+8|a|=4(a^2-2a+2|a|)$. От $a\in[-2;0]$ следва $|a|=-a$. Тогава $S^2=4(a^2-4a)$. Следователно за $a\in[-2;0]$ S^2 е строго намаляваща. Тогава достига най-голяма стойност при $a=-2$ и тя е $S=4\sqrt{3}$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 21 юни 2015 г.

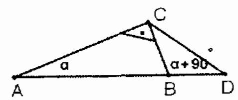
Задача 1. За $x\le 5$ от $(x-6)(x-4)\sqrt{5-x}=0$ следва, че решения на задачата са $x_1=4$ и $x_2=5$.

$a-b=16$. Следователно $AB=a=25$ и $CD=b=9$.

Задача 3. В $\begin{vmatrix} xy+x+y=19 \\ xy(x+y)=84 \end{vmatrix}$ полагаме $\begin{vmatrix} x+y=u \\ xy=v \end{vmatrix}$ и получаваме $\begin{vmatrix} u+v=19 \\ uv=84 \end{vmatrix}$. От $\begin{vmatrix} u=7 \\ v=12 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} u=12 \\ v=7 \end{vmatrix}$ следва $\begin{vmatrix} x+y=7 \\ xy=12 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} x+y=12 \\ xy=7 \end{vmatrix}$.

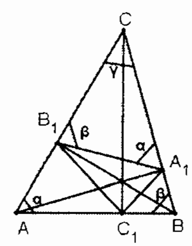
Решение на дадената система са $(3;4)$, $(4;3)$, $\left(6+\sqrt{29};6-\sqrt{29}\right)$, $\left(6-\sqrt{29};6+\sqrt{29}\right)$.

Задача 4. От правоъгълния ΔABC намираме $AB=25$ и $\sin\alpha=\frac{7}{25}$. Но $\angle DBC=90^\circ+\alpha$ като външен за ΔABC. Използваме $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$, прилагаме косинусова теорема за ΔBDC, заместваме и получаваме $CD^2=49+49+2.7.7.\frac{7}{25}=\frac{49.64}{25}$, т.е. $CD=\frac{56}{5}$.



Задача 5. Броят на всички възможни изходи при произволно хвърляне на трите зарчета е 6.6.6=216. От представянето 7=1+1+5=1+2+4=1+3+3=2+2+3 следва, че благоприятните изходи са 3+3!+3+3=15. Следователно търсената вероятност е $P=\frac{15}{6.6.6}=\frac{5}{72}$.

Задача 6. От условието следва $a>0$, $b>0$ и $2a^2=b^2+(a+b)^2$. Преобразуваме и получаваме $a^2-2ab-2b^2=0$. Разделяме на $b^2>0$, полагаме $\frac{a}{b}=x>0$ и получаваме квадратното уравнение $x^2-2x-2=0$ с корени $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. Следователно $\frac{a}{b}=1+\sqrt{3}$.



Задача 7. Нека е даден ΔABC с височини AA_1, BB_1 и

химикалки, един калкулатор и един сборник по математика, които той може да образува, е равен на:
а) 24 б) 18 в) 12 г) 8 д) 6

12. Кое от числата не може да бъде вероятност на случайно събитие?
а) $\frac{3!+4!}{12!}$ б) $\cos 120$ в) $\sin 390$ г) $\lg 10$ д) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

13. В равностранен триъгълник със страна $2\sqrt{3}$ cm е вписана окръжност, чийто радиус е:
а) 1 cm б) $\sqrt{3}$ cm в) 2 cm г) $2\sqrt{3}$ cm д) $3\sqrt{3}$ cm

14. Даден е правоъгълен ΔABC с катет $AC=b$ и $\angle ABC=\beta$. Радиусът на описаната около този триъгълник окръжност е равен на:
а) $b\cos\beta$ б) $b\sin\beta$ в) $\frac{b\sin\beta}{2}$ г) $\frac{b}{2\sin\beta}$ д) $btg\beta$

15. Даден е равнобедрен трапец с височина 4 cm и основи 6 cm и 12 cm. Дължината на бедрото на трапеца е равна на:
а) 3 cm б) 4 cm в) $2\sqrt{3}$ cm г) $3\sqrt{3}$ cm д) 5 cm

16. През пресечната точка O на диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ е построена права, успоредна на основите, която пресича бедрата AD и BC съответно в точки P и Q. Дължините на отсечките PO и QO се отнасят така, както:
а) 3:2 б) 2:3 в) 2:1 г) 1:2 д) 1:1

17. Дадени са два куба. Ръб на първия куб е диагонал на стена на втория куб. Обемът на първия куб се отнася към обема на втория куб така, както:
а) 3:1 б) 2:1 в) $3\sqrt{3}:1$ г) **4:1** д) $2\sqrt{2}:1$

18. Лицето на основата на пирамида е 1 cm^2, а обемът и е повече от 10 cm^3. Възможната дължина на височина на пирамидата е:
а) 17 cm б) 29 cm в) 31 cm г) 15 cm д) 13 cm

19. В правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ всички ръбове имат дължина 1 cm. Лицето на сечението на призмата с равнината (AB_1C) е равно на:

а) $\dfrac{3}{2}\ cm^2$ б) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ cm^2$ в) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}\ cm^2$ г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ cm^2$ д) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ cm^2$

20. Най-голямата стойност на функцията $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ е равна на:

а) 1 б) 2 в) $\sqrt{3}$ г) 4 д) $\sqrt{5}$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$.

22. Да се намери сборът на най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x)=-2x^2+8x+1$ в затворения интервал [0;3].

23. Два пъти цената на един принтер е намалявана с по 10%. След второто намаление цената на този принтер е 275,40 лв. Да се намери първоначалната цена на принтера.

24. В кутия има 10 различни химикалки, 15 различни моливи с твърдост Н, 20 различни моливи с твърдост В и 30 различни моливи с твърдост НВ. Да се намери вероятността случайно избран предмет от кутията да е химикалка или молив с твърдост НВ.

25. Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко реално число x и приема положителни стойности за всяко $x\neq 7$. Ако $f(7)=0$, да се реши неравенството $(x-3)f(x)\leq 0$.

26. Да се намери броят на различните корени на уравнението $\dfrac{tgx+\sqrt{3}}{\sqrt{3}tgx-1}=1$, които принадлежат на отворения интервал $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

27. Сборът на три числа, които са последователни членове на растяща геометрична прогресия е равен на 186. Ако първите две числа се запазят, а от третото число се извади 96, то в този ред те образуват аритметична прогресия. Да се намерят трите числа.

28. Да се намери лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 10 cm и сбор от дължините на катетите 14 cm.

корени или да има само отрицателни корени. *2.1)* ако $D<0 \Leftrightarrow 4(1-k)(k-3)<0 \Leftrightarrow (k-1)(k-3)>0$. Т.е. $k\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. *2.2)* Ако $u_1\leq u_2<0$. Тогава $\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ -\dfrac{b}{a}<0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 4(1-k)(k-3)\geq 0 \\ -\dfrac{2(2k-3)}{k-2}<0 \\ \dfrac{5k-6}{k-2}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} k\in[1;3] \\ k\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)\cup(2;+\infty) \\ k\in\left(-\infty;\dfrac{6}{5}\right)\cup(2;+\infty) \end{array}\right.$$ с решение

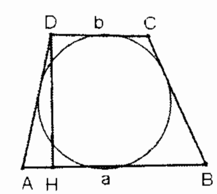
$k\in\left[1;\dfrac{6}{5}\right)\cup(2;3]$. Решение на задачата е $k\in\left(-\infty;\dfrac{6}{5}\right)\cup[2;+\infty)$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 20 юни 2015 г.

Задача 1. Преобразуваме и получаваме последователно

$$A=\left(\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{3}{2}}+\log_{\sqrt{3}+1}\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+2=\frac{15}{4}.$$

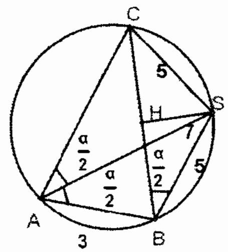
Задача 2. Нека трапецът е $ABCD$ с основи $AB=a$ и $CD=b$ и DH е височината на трапеца. От $ABCD$ равнобедрен, описан около окръжност с диаметър 15 следва, че $a+b=34$, $AH=\dfrac{a-b}{2}$ и $DH=15$. От правоъгълния ΔAHD намираме $AH=8$, т.е.



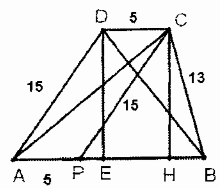
Следователно $a=5$ и $d^2=16$, т.е. $d=\pm 4$. Но прогресията е растяща, т.е. търсените числа са *-3, 1, 5, 9, 13.*

Задача 5. Цифрата на единиците може да е $\{1;5;7\}$, т.е. три възможности. Но цифрите са различни. Следователно броят на числата с исканите свойства е *4.4.4=64.*

Задача 6. От $\angle BAS=\angle CAS$ следва $BS=CS=5$. Прилагаме косинусова теорема за ΔABS и намираме $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{11}{14}$. Нека $SH\perp BC$, $H\in BC$. Тогава $BH=HC$. Използваме, че $\angle CBS=\angle CAS=\frac{\alpha}{2}$ и от правоъгълния ΔBHS и $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{BH}{BS}$ намираме, след заместване $BH=\frac{55}{14}$. Следователно $BC=\frac{55}{7}$.



Задача 7. Построяваме $CP\parallel AD$, $CH\perp AB$, $DE\perp AB$, където $P,H,E\in AB$. Тогава $APCD$ е успоредник и $AP=5$ и $PC=15$. Тогава $PB=14$. Намираме лицето на ΔPBC по Хероновата формула и получаваме $S_{PBC}=84$. От $S_{PBC}=\frac{PB.CH}{2}$ следва $CH=12$. Следователно $S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.CH=144$. От правоъгълния ΔBHC намираме $BH=5$. Тогава $AH=14$ и от правоъгълния ΔACH получаваме $AC=2\sqrt{85}$. Аналогично от правоъгълните ΔAED и ΔACH намираме $AE=9$, $BE=10$ и $BD=2\sqrt{61}$.



Задача 8. *1)* Ако $k=2$ уравнението е $2x^2+4=0$ и следователно $k=2$ е решение на задачата. *2)* Ако $k\neq 2$ полагаме $x^2=u$ и следва квадратното уравнение $(k-2)u^2+2(2k-3)u+5k-6=0$. За да няма даденото уравнение реални корени трябва квадратното уравнение да няма реални

29. Даден е ΔABC с височина CH ($H\notin AB$) с дължина $\sqrt{15}$ cm и ъглополовяща CL ($L\in AB$), като отсечките AL и BL имат съответно дължини 2 cm и 4 cm. Да се намерят дължините на страните AC и BC, ако те са цели числа.

30. Височината на правилна четириъгълна пирамида е равна на h, а големината на ъгъла между две несъседни околни стени е 60. Да се намери радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

Технически университет - София
25 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\frac{2^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{4-\sqrt{15}}$ е:

а) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ б) $\sqrt{2}$ в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ г) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ д) $\sqrt{15}$

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-8x+10=0$, то стойността на израза $\frac{x_1^2x_2+x_2^2x_1}{\sqrt{x_1+x_2}}$ е:

а) $16\sqrt{10}$ б) 10 в) $20\sqrt{2}$ г) $40\sqrt{2}$ д) $4+\sqrt{6}$

3. Ако (x,y) е решение на системата $\left|\begin{array}{l}2x^2+2y^2=1\\4xy+1=0\end{array}\right.$, то частното $\frac{x}{y}$ е равно на:

а) 1 б) $\frac{1}{4}$ в) $-\frac{1}{4}$ г) $\frac{1}{2}$ д) -1

4. Ако $a=\log_3 4$, то изразът $4^{\frac{1}{a}}\log_{27}4$ е равен на:

а) a б) $3a$ в) $6a$ г) $9a$ д) 1

5. Петият член на аритметична прогресия с общ член a_n, за която $a_1 + a_9 = 12$, е:

а) 6 б) 12 в) 3 г) 2 д) 9

6. Най-голямото цяло решение на неравенството $|5-x|+3 > 2|5-x|$ е:

а) 2 б) 4 в) 5 г) 7 д) 8

7. Корени на уравнението $2+\sqrt{100-x^2} = x$ са:

а) -6 б) -6 и 8 в) 8 г) 10 д) -8

8. Ако $a = \dfrac{\sqrt{3}\left(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ\right)}{\sin 25^\circ}$, то:

а) $a=3$ б) $a=\sqrt{2}$ в) $a=3\sqrt{2}$ г) $a=3\sqrt{6}$ д) $a=\sqrt{6}$

9. Ако $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то изразът $5\cos\dfrac{\alpha}{2}$ е равен на:

а) $-\sqrt{5}$ б) $\sqrt{5}$ в) $\sqrt{2}$ г) $2\sqrt{5}$ д) $-2\sqrt{5}$

10. Не е вероятност на случайно събитие числото:

а) $tg 27^\circ$ б) $\lg\dfrac{7}{5}$ в) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ г) $\cos 138^\circ$ д) $\dfrac{3!+2!}{4!}$

11. Стойността на границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{2+x-3x^3}$ е:

а) $-\dfrac{1}{3}$ б) $\dfrac{1}{2}$ в) $-\dfrac{4}{3}$ г) 2 д) $\dfrac{1}{3}$

12. Стойността на реалния параметър p, при която графиката на функцията $f(x) = 5x^2 - 3x + 2p$ минава през точката $M(2;6)$ е:

а) 4 б) -4 в) 10 г) 40 д) -40

13. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ в затворения интервал [-3;0] е:

а) -4 б) -5 в) -8 г) -13 д) -20

14. Произведението на модата и медианата на данните 0, 2, 0, 1, 5, 2, 7, 2 е:

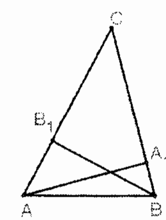
а) 6 б) 5 в) 4 г) 3 д) 2

$\dfrac{l_a}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$ и $\dfrac{l_b}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)}$. Следователно $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma\right) = \sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)$. Тогава $\dfrac{\alpha}{2}+\gamma = \dfrac{\beta}{2}+\gamma$, което е невъзможно, или $\dfrac{\alpha}{2}+\gamma = 180^\circ - \left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)$, откъдето намираме $\gamma = 60^\circ$, т.е. $\angle ACB = 60^\circ$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 29 март 2015 г.

Задача 1. За $x \neq \{1;4\}$ даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $\dfrac{x-4}{-(x-4)(x-1)} + 1 \geq 0$. Преобразуваме и намираме $\dfrac{x-2}{x-1} \geq 0$. Следователно решение е

$$x \in (-\infty;1) \cup [2;4) \cup (4;+\infty).$$



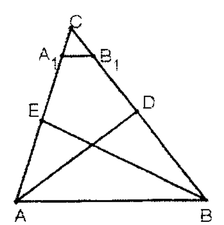
Задача 2. От правоъгълните ΔAA_1C и ΔBB_1C с $\angle ACB = 30^\circ$ намираме съответно $AC = 10\sqrt{3}$ и $BC = 16$. Прилагаме косинусова теорема за ΔBAC и получаваме $AB = 2\sqrt{19}$.

Задача 3. За $x \geq -\dfrac{4}{3}$ повдигаме двете страни на даденото уравнение на втора степен, преобразуваме и получаваме квадратното уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$ с корени $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$. Решение на даденото уравнение е $x = -1$.

Задача 4. Ако търсените числа са $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$, то $5a = 25$ и $(a-2d)^2 + (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 285$.

$MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а от правоъгълния ΔMPC следва $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Изразяваме лицето на ΔBCM по два начина и получаваме $BC.MP = CM.BH$. Заместваме и намираме $BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. От косинусова теорема за ΔDBH получаваме $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$. Следователно $\varphi = 120^\circ$.

Задача 7. От условието следва, че a и b са реални, $a^2 - 4b \geq 0$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq -1$. *1)* нека $x_1 = x_2 = u$. Тогава $u = \frac{1}{1+u}$, т.е. $u^2 + u - 1 = 0$ с корени $u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \neq -1$. Използваме формулите на Виет и при $x_1 = x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ намираме $a = 1+\sqrt{5}$ и $b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. При $x_1 = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ следва $a = 1-\sqrt{5}$ и $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. *2)* Нека $x_1 \neq x_2$. Тогава $x_1 = \frac{1}{1+x_1}$ и $x_2 = \frac{1}{1+x_2}$. Следователно $x_1^2 + x_1 - 1 = 0$ и $x_2^2 + x_2 - 1 = 0$. От $x_1 \neq x_2$ следва, че x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + x - 1 = 0$. Т.е. $x^2 + x - 1 = x^2 + ax + b$, което означава, че $a = 1$ и $b = -1$. Ако $x_1 = \frac{1}{1+x_2}$ и $x_2 = \frac{1}{1+x_1}$, то следва, че $x_1 = x_2$.



Задача 8. Ще използваме стандартните означения. От $A_1B_1 \parallel AB$ и теоремата на Талес следва, че $\frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB}$. Тогава $\frac{b-l_a}{b} = \frac{a-l_b}{a}$, т.е. $\frac{l_a}{b} = \frac{l_b}{a}$. Прилагаме синусова теорема за ΔADC и ΔBCE и получаваме съответно

15. Медицентърът на равнобедрен ΔABC ($AC = BC$) лежи върху вписаната в триъгълника окръжност. Ако $AB = 2\ cm$, то периметърът на триъгълника е равен на:

а) 24 cm б) 22 cm в) 20 cm г) 12 cm д) 6 cm

16. Ъгъл α срещу страната a на триъгълник със страни $a = 7$, $b = 5$ и $c = 8$ има големина:

а) 120° б) 90° в) 60° г) 45° д) 30°

17. Върху страните AB, BC, CD и DA на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AD = BC$) са взети съответно точки M, N, P и Q така, че $MNPQ$ е квадрат. За отсечката AQ е вярно, че:

а) $AQ = AM$ б) $AQ = PC$ в) $AQ = QM$ г) $AQ = QN$ д) $AQ = CN$

18. Изготвят се документи с различни серии от 3 различни букви от гръцката азбука, която има 24 букви. Броят на възможните документи, които могат да бъдат изготвени, е:

а) 80 б) 720 в) 2160 г) 2024 д) 12144

19. Стойностите на реалния параметър k, за които корените на квадратното уравнение $x^2 - (3k-2)x + k^2 = 0$ са положителни числа, принадлежат на интервала:

а) $\left(\frac{2}{3};\infty\right)$ б) $\left[\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right)$ в) $(0;2]$ г) $[2;\infty)$ д) $\left(\frac{2}{3};2\right]$

20. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDF$ е квадрат със страна 3 cm. Околният ръб DF е перпендикулярен на основата, а най-големият и околен ръб сключва с основата ъгъл 30°. Радиусът на описаната около пирамидата сфера е:

а) $\sqrt{6}\ cm$ б) $2\sqrt{6}\ cm$ в) $\frac{\sqrt{6}}{2}\ cm$ г) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm$ д) $\frac{3\sqrt{6}}{4}\ cm$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши неравенството $\sqrt{x} + 1 < x$.

22. Да се реши уравнението $3.4^x + 2.9^x - 5.6^x = 0$.

23. Да се намери най-малкият корен на уравнението $\log_{x-2} 9 - \log_3(x-2) - 1 = 0$.

24. При набиране на телефонен номер Иван установява, че е забравил последните три цифри на номера, но помни, че те са различни и ги набира по случаен начин. Каква е вероятността желаният номер да бъде набран от първи опит?

25. В партида има 18 изделия, от които 10 са първо качество и 8 са второ качество. По колко начина могат случайно да се вземат четири изделия така, че три да са първо качество и едно да е второ?

26. Числата $2, x-2, y-3$, взети в този ред образуват геометрична прогресия, а числата $1, x, y$, взети в посочения ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят числата x и y.

27. Даден е равностранен триъгълник със страна 11 cm. През точка $N \in AB$, успоредно на страните AC и BC са прекарани прави, пресичащи тези страни съответно в точки P и Q. Ако лицето на ΔPQN е $7\sqrt{3}\ cm^2$, да се намери дължината на отсечката PQ.

28. Да се намерят корените на уравнението $\cos 2x = 5\sin x - 3 = 0$, които принадлежат на затворения интервал $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

29. В триъгълна пирамида всички ръбове имат дължина 1 cm. Да се намери радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

30. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - (3a+2)x + a^2$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, при които функцията $f(x)$ има локален екстремум, равен на 0.

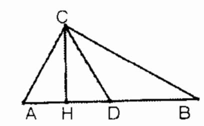
Технически университет - София
6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $2^{-\frac{1}{4}}.32^{0.25} + \left(27^2\right)^{\frac{1}{6}} - \left(\sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$ е равна на:

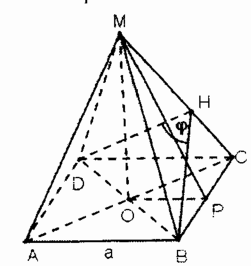
$x \in [4;5]$, т.е. $x \le 5$ следва $|x-5| = 5-x$ и намираме $(5-x)(6-x) = 0$. Т.е. $x_1 = 6$ не е решение, а $x_2 = 5$ е решение.

Задача 4. Нека $CH \perp AB$, $H \in AB$. От $CA = CD$ следва, че $AH = HD$. От условието намираме $AH = \frac{9}{25}AB$ и $BH = \frac{16}{25}AB$. От метрични зависимости в правоъгълен



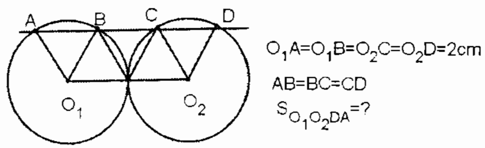
триъгълник получаваме $AC = \frac{3}{5}AB$ и $BC = \frac{4}{5}AB$. Но $AB + BC + AC = 12$. Следователно $AB = 5$, $AC = 3$ и $BC = 4$. Така намираме $S_{ABC} = 6$. **Задача 5. 1)** За $x \ge 0$ даденото неравенство е еквивалентно на $3^x + 3^x \ge 2\sqrt{3}$, т.е. $x \ge 0,5$. 2) за $x < 0$ следва $3^x + 3^{-x} \ge 2\sqrt{3}$. Полагаме $3^x = u > 0$ и получаваме квадратното неравенство $u^2 - 2\sqrt{3}u + 1 \le 0$. Но $u < 1$. Тогава решение е $0 < u \le \sqrt{3} - \sqrt{2}$, т.е. $x \le \log_3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$. Следователно решение на даденото неравенство е $x \in \left(-\infty; \log_3\left(\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)\right] \cup [0,5; +\infty)$.

Задача 6. Нека пирамидата е $ABCDM$ с основа квадрата $ABCD$ и връх M. Да означим $AC \cap BD = O$, $AB = a$, $BP = PC$, $P \in BC$ и $BH \perp CM$, $H \in CM$. Тогава MO е височината на пирамидата. От $\Delta BCM \cong \Delta DCM$ получаваме $DH = BH$ и $DH \perp CM$, т.е. $\angle\left((DCM);(BCM)\right) = \angle BHD = \varphi$. От $MP \perp BC$ и $OP \perp BC$ следва, че $\angle\left((BCM);(ABCD)\right) = \angle OPM = 45^\circ$. Но $OP = \frac{a}{2}$ и от правоъгълния ΔPMO намираме



A, B, C и D такива, че $AB = BC = CD$ (вж. чертежа по-долу). Намерете лицето на четириъгълника O_1O_2DA.

А) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\ cm^2$ Б) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\ cm^2$ В) $5\sqrt{3}\ cm^2$ Г) $10\ cm^2$

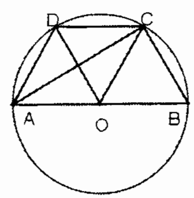


РЕШЕНИЯ

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 22 март 2015 г.

Задача 1. Използваме стандартните означения и от $5S_{10} = S_{20}$ следва $5a_1\dfrac{q^{10}-1}{q-1} = a_1\dfrac{q^{20}-1}{q-1}$. Преобразуваме и от условието, че числата са положителни и $q \neq 1$ намираме $q^5 = 2$. Следователно $q = \sqrt[5]{2}$.

Задача 2. Нека O е центърът на оккръжността. От $ABCD$ вписан следва, че $AD = BC$ и $\angle ABC = \angle BAD$. От $AB = 4$ следва, че AB е диаметър и $\angle ACB = 90^\circ$. Следователно $\angle ABC = \angle BOC = \angle AOD = 60^\circ$. Тогава $\angle COD = 60^\circ$ и ΔAOD, ΔDOC и ΔCOB са равностранни със страна 2. Така намираме $S_{ABCD} = 3S_{AOD} = 3\sqrt{3}$.



Задача 3. Преобразуваме даденото уравнение във вида $2\sqrt{25 - x|x-10|} = -(x-5)(x-4)$. Следователно $x \in [4;5]$ за да са еквивалентни преобразуванията. Тогава $x < 10$ и $|x-10| = 10 - x$. Получаваме последователно $2\sqrt{x^2 - 10x + 25} = -(x-5)(x-4) \Leftrightarrow 2|x-5| = -(x-5)(x-4)$. От

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

2. Ако 120% от a е равно на 40% от b, то $a : b$ е равно на:

а) $\dfrac{3}{4}$ б) $\dfrac{1}{4}$ в) $\dfrac{1}{3}$ г) $\dfrac{2}{3}$ д) $\dfrac{1}{2}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $12x^2 - 7x - 12 = 0$, то стойността на израза $x_1^2 + x_2^2$ е:

а) $-\dfrac{239}{144}$ б) $\dfrac{251}{144}$ в) $\dfrac{7}{4}$ г) $\dfrac{47}{144}$ д) $\dfrac{337}{144}$

4. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 + ax + 4$, където a е реален параметър. Най-малката цяла стойност на a, за която $f(x) > 0$ за всяка реална стойност на x, е равна на:

а) -3 б) -4 в) 3 г) 2 д) 0

5. Корените на уравнението $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+6}$ принадлежат на интервала:

а) (-6;-1] б) [-6;3) в) (-7;2] г) [2;7] д) [-1;2]

6. Броят на членовете на аритметичната прогресия -1, 5,..., 491 е равен на:

а) 38 б) 81 в) 82 г) 83 д) 103

7. За геометричната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$. Частното на прогресията е равно на:

а) $\dfrac{1}{2}$ б) 2 в) 3 г) $\dfrac{1}{3}$ д) 4

8. Стойността на израза $2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 125 + 6\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}$ е:

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6

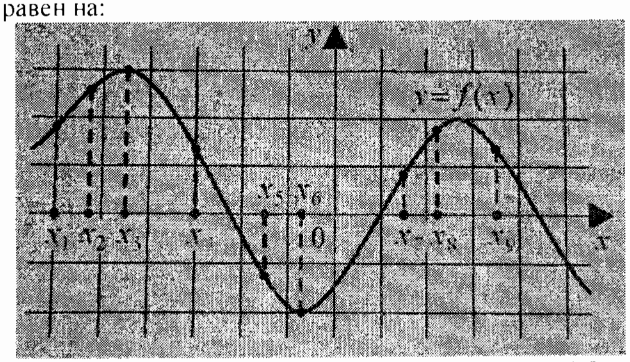
9. Ако $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin\alpha$ е равна на:

а) $\dfrac{4}{5}$ б) $-\dfrac{3}{4}$ в) $\dfrac{3}{5}$ г) $-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ д) $-\dfrac{4}{5}$

10. Ако (x, y) е решение на системата $\begin{cases} x^3 - y^3 = 72 \\ x - y = 6 \end{cases}$, то произведението xy е равно на:

а) -8 б) -7 в) -6 г) 8 д) 12

11. На графиката на функцията $y = f(x)$ са отбелязани девет точки $x_i, i = 1,...,9$. Броят на точките x_i, в които производната на функцията е отрицателна, е равен на:



а) 4 б) 3 в) 2 г) 1 д) 0

12. В урна има 12 бели и 8 черни топки. По случаен начин се изтеглят три топки. Вероятността точно две от изтеглените топки да са бели е:

а) $\frac{8}{19}$ б) $\frac{44}{95}$ в) $\frac{3}{40}$ г) $\frac{3}{20}$ д) $\frac{44}{285}$

13. Ако $a = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 10x + 9}{x^2 + 3x + 2}$, то:

а) $a = \frac{9}{2}$ б) $a = 1$ в) $a = \frac{10}{3}$ г) $a = -8$ д) $a = 8$

14. Решение на уравнението $2^x \left(\frac{1}{2}\right)^{14-4x} = 64$ е числото:

а) $\frac{8}{5}$ б) $-\frac{8}{5}$ в) 4 г) -4 д) 2

19. В равнобедрен триъгълник с дължина на основата 3 cm и дължина на бедрото 5 cm ъглополовящите на ъглите при основата му пресичат бедрата в точки P и Q. Дължината на отсечката PQ е равна на:

А) 1 cm Б) $\frac{15}{8}$ cm В) 2 cm Г) $\frac{5}{2}$ cm

20. В ΔABC с дължини на страните $AB = 7$ cm, $BC = 3$ cm и $AC = 5$ cm да се намери дължината на медианата през върха C.

А) 2 cm Б) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ cm В) $\frac{5}{2}$ cm Г) 3 cm

21. Дължините на две от страните на остроъгълен триъгълник са равни на $\sqrt{10}$ cm и $\sqrt{13}$ cm. Намерете дължината на третата страна на триъгълника, ако е известно, че тя е равна на дължината на височината към нея.

А) 1 cm Б) 2 cm В) 3 cm Г) 4 cm

22. Върху страните AB и AD на успоредника $ABCD$ са избрани съответно точки P и Q такива, че $AP = \frac{2}{3}AB$ и $AQ = \frac{3}{7}AD$. Да се определи отношението от лицето на успоредника $ABCD$ и лицето на ΔAPQ:

а) $\frac{7}{2}$ б) 7 в) $\frac{15}{2}$ г) 8

23. В ромб с остър ъгъл 30° е вписана окръжност, а в тази окръжност е вписан квадрат. Отношението от лицето на ромба и лицето на този квадрат е равно на:

а) $\frac{3}{2}$ б) 2 в) 3 г) 4

24. Дължината на голямата основа на трапец е равна на *14 cm*. Намерете дължината на малката основа на трапеца, ако е известно, че разстоянието между средите на неговите диагонали е **2** *cm*.

а) 10 *cm* б) 16 *cm* в) 18 *cm* г) 20 *cm*

25. Две окръжности с центрове O_1 и O_2, които имат еднакви по дължина радиуси от 2 cm се допират външно. Права пресича оръжностите в точки

9. Всички възможни стойности на x, които са решения на уравнението $(x-2)\sqrt{x^2-6x+9} = x-3$ са:

А) $x=3$ Б) $x=2$ В) $x=1$ и $x=3$ Г) няма такива стойности

10. Решенията на неравенството $\sqrt{x+2} > 4-x$ са:

А) $x \in [4;+\infty)$ Б) $x \in [-2;+\infty)$ В) $x \in (2;4]$ Г) $x \in (2;+\infty)$

11. Решенията на неравенството $\sqrt{x^2+10x+25} \le 5$ са:

А) $x \in (-\infty;-10] \cup [0;+\infty)$ Б) $x \in [0;10]$

В) $x \in [-10;0]$ Г) няма решения

12. Сумата на третия и осмия член на аритметична прогресия е равна на 5. Сумата от първите десет члена на тази прогресия е равна на:

А) 25 Б) 30 В) 35 Г) 40

13. Всички решения на уравнението $4^x + 2^x - 6 = 0$ са:

А) няма решения Б) $x=1$ и $x=2$ В) $x=1$ Г) $x=\log_2 3$

14. Решенията на уравнението $\log_5(x+2)^2 = 2$ са:

А) $x=3$ Б) $x=3$ и $x=-7$ В) $x=1$ Г) $x=-7$

15. Решенията на неравенството $6^{x^2-x-2} < 1$ са:

А) $x \in (-1;3)$ Б) $x \in (1;2)$ В) $x \in (-2;1)$ Г) $x \in (-1;2)$

16. Решенията на неравенството $\log_{0.9} 11 \ge \log_{0.9}(2x-1)$ са всички реални числа x, за които:

А) $x \in (1;6]$ Б) $x \in (1;+\infty)$ В) $x < 1$ Г) $x \in [6;+\infty)$

17. Стойността на $\cos 75^\circ$ е равна на:

А) $-\frac{3}{4}$ Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ Г) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

18. Дължините на страните на правоъгълен триъгълник са последователни членове на аритметична прогресия с разлика *1 cm*. Дължината на хипотенузата на този триъгълник е равна на:

а) 3 *cm* б) 4 *cm* в) 5 *cm* г) 6 *cm*

15. Множеството от допустимите стойности на x за функцията $f(x) = \sqrt{4-\log_2(x-5)}$ е:

а) $(0;4)$ б) $[5;21]$ в) $(5;21]$ г) $(-\infty;4)$ д) $(4;\infty)$

16. Медицентърът на равнобедрен ΔABC ($AC = BC$) лежи върху вписаната в триъгълника окръжност, чийто радиус е равен на r. Страната AB има дължина:

а) $\sqrt{6}r$ б) $6r$ в) $2\sqrt{3}r$ г) $3\sqrt{2}r$ д) $2\sqrt{2}r$

17. В правоъгълен трапец с остър ъгъл 30° и лице 6 cm^2 е вписана окръжност. Диаметърът на тази окръжност е равен на:

а) 5 cm б) 4 cm в) 3 cm г) 2 cm д) 1 cm

18. В триъгълник две от страните са с дължини 5 cm и 8 cm, а ъгълът срещу третата страна има големина 60°. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е равен на:

а) 7 cm б) 3,5 cm в) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm г) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm д) $7\sqrt{3}$ cm

19. В правилна шестоъгълна пирамида с основен ръб a околната стена сключва с основата ъгъл с големина α. Обемът на пирамидата е:

а) $\frac{3a^3 \cot g\alpha}{4}$ б) $\frac{2a^3 \sin\alpha}{3}$ в) $\frac{4a^3 \cos\alpha}{3}$ г) $\frac{9a^3 tg\alpha}{4}$ д) $\frac{3a^3 tg\alpha}{4}$

20. Дадена е функцията $f(x) = ax^2 - (a-1)x + 2a + 1$, където a е реален параметър. Стойностите на a, при които уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена, принадлежат на интервала:

а) $[-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{7}\right]$ б) $(-\infty;-1]$ в) $\left[\frac{1}{7};\infty\right)$ г) $\left[-1;\frac{1}{7}\right]$ д) $\left[0;\frac{1}{7}\right]$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\log_3(x^2-4) = 2\log_9(2x-1)$.

22. Да се намери най-голямата цяла стойност на x, за която е изпълнено е неравенството $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+x} > \left(\frac{1}{49}\right)^{16-x}$.

23. Да се реши неравенството $\frac{x^2(x+1)}{(x^2-x+1)(2-x)} \geq 0$.

24. Да се намерят всички корени на уравнението $\frac{1}{\cos^2 x} + 2\sin^2 x - 3 = 0$, които принадлежат на затворения интервал $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

25. Два различни правилни шестстенни зара се хвърлят еднократно. Да се намери вероятността сборът от точките върху двата зара да е равен на десет или на дванадесет.

26. Върху окръжност са взети 10 точки. Да се намери максималният брой на различните хорди с краища в тези точки.

27. Даден е правоъгълен ΔABC с катети $AC = 2$ cm и $BC = 1$ cm. Хипотенузата му служи за катет на равнобедрен правоъгълен ΔABD ($AB \perp BD$) като точките C и D са от различни страни на AB. Ако BM е медиана в ΔABD, намерете дължината на отсечката CM.

28. Катетите на правоъгълен триъгълник сключват с равнина α ъгли с големина β и γ, а хипотенузата му лежи в равнината α. Да се определи синусът на ъгъла φ ($\varphi \neq 90^\circ$) между равнината α и равнината на триъгълника.

29. Дадена е функцията $f(x) = (k-1)x^4 - kx^2 + k + 1$, където k е реален параметър. Да се намери при коя стойност на k графиката на $f(x)$ минава през точката $M(1;-1)$.

30. Даден е тричленът $f(x) = ax^2 + bx + 8$, където a и b са реални параметри. Определете стойностите на a и b така, че при $x = -1$ тричленът $f(x)$ да има екстремум, равен на 2.

Технически университет – Варна
25 юни 2015 г.

1. Кое от посочените числа е равно на числото $\frac{6}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$?

А) $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ Б) 6 В) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ Г) $3(\sqrt{11}-\sqrt{5})$

2. Стойността на израза $\left(\frac{81.9^{-9}}{-9^{-8}}\right)^{-2} - \frac{1}{81}$ е равна на:

А) 9 Б) $\frac{1}{9}$ В) 0 Г) 1

3. Ако $T = \left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{49}\right)$, то:

А) $T = 0$ Б) $T = 5$ В) $T = 7$ Г) $T = -2$

4. Решенията на неравенството $\frac{25-10x+x^2}{x^2-7x+12} \leq 0$ са:

А) $x \in (-\infty;3) \cup (4;+\infty)$ Б) $x \in (3;4)$

В) $x \in (3;4) \cup \{5\}$ Г) $x \in (-\infty;3)$

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - x - 1 = 0$, то стойността на израза $x_1(1+x_2)+x_2$ е:

А) -1 Б) 0 В) 1 Г) 2

6. Най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 - 5x + 4$ в интервала *[3;8]* е равна на:

А) -2 Б) 0 В) 2 Г) друг отговор

7. Решенията на уравнението $|x^2 - 25| = (5-x)(5+x)$ са:

А) $x \in (-\infty;-5]$ Б) $x \in [5;+\infty;)$

В) $x \in [-5;5]$ Г) $x \in (-\infty;-5] \cup [5;+\infty)$

8. Всички реални решения на уравнението $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ са:

А) $x = \pm 3$ Б) $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$ В) $x = 3$ Г) $x = -3$