M+ ПОДГОТОВКА

МЕТОД НА ПОДРЕЖДАНЕТО
(подготовка за младежката балканиада)

Д-р М. Плюс

Задача 1. Дадени са 7 различни естествени число със сума 100. Да се докаже, че сумата на 3 от тях е не по-малка от 50.

Решение: Да подредим дадените числа по големина: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Ще покажем, че $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$. Ако $a_5 > 15$, твърдението е очевидно, защото $a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51 > 50$. Затова можем да считаме, че $a_5 \leq 15$. Тогава $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, т.е. $-(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq -50$ и следователно отново е изпълнено $a_5 + a_6 + a_7 = 100 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq 100 - 50 = 50$

Задача 2. Върху дъската са отбелязани $2n+2$ точки, никои 3 от които не лежат на една права. Да се докаже, че съществува права, в двете полуравнини спрямо която лежат по n точки измежду дадените.

Решение: Да изберем най-лявата точка върху дъската и да вземем права през точката, вдясно от която са разположени поне 2 n точки от дадените (най-много една от останалите $2n+1$ точки лежи върху избраната права). Избраната точка означаваме с P_1. Разглеждаме правоъгълна координатна система xP_1y, за която оста P_1y е избраната права през P_1, ориентирана в посока север, а оста P_1x е перпендикулярна на избраната права и е ориентирана в посока изток, т. е. вдясно от P_1. Останалите точки означаваме с $P_2, P_3, \ldots, P_{2n+2}$, като ги подреждаме по нарастваща големина на ориентираните ъгли, които лъчите $\overrightarrow{P_1P_i}$ сключват с положителната посока на P_1x (P_1x е първото рамо на ъгъла), т.е. $j > i$, ако $\angle(P_1x, P_1P_j) > \angle(P_1x, P_1P_i)$. Ориентираните ъгли са в интервала $[-90^0; 90^0]$. Търсената права е P_1P_{n+2}, като е ясно, че точките $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$ лежат в ъгъла определен от лъча $\overrightarrow{P_1P_{n+2}}$ и отрицателната посока на ординатната ос, а точките $P_{n+3}, P_{n+4}, \ldots, P_{2n+2}$ лежат в ъгъла, определен от лъча $\overrightarrow{P_1P_{n+2}}$ и положителната посока на ординатната ос.

Задача 3. Да се докаже, че цифрите на произволно 6-цифрено число могат да се разместят по такъв начин, че да се получи ново 6-цифрено число, сумата от първите 3 цифри на което се различава най-много с 9 от сумата на останалите му цифри.

Решение: Да разгледаме произволно 6-цифрено число и нека $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6$ са шестте му цифри, подредени по големина. За първите 3 цифри на новото число избираме a_6, a_3 и a_1 (в някакъв ред). Ще докажем, че $|(a_6+a_3+a_1)-(a_2+a_4+a_5)| \le 9$. Имаме

$$a_6+a_3+a_1-a_2-a_4-a_5=(a_6-a_5)+(a_3-a_4)+(a_1-a_2) \le a_6-a_5 \le 9,$$

защото числата (a_3-a_4) и (a_1-a_2) са неположителни. От друга страна, по същата причина

$$a_2+a_4+a_5-a_6-a_3-a_1=(a_5-a_6)+(a_2-a_3)+(a_4-a_1) \le a_4-a_1 \le 9.$$

Тогава наистина $|(a_6+a_3+a_1)-(a_2+a_4+a_5)| \le 9$ и следователно числото $\overline{a_6a_3a_1a_2a_4a_5}$ изпълнява условието на задачата.

Задача 4. Единичният куб $K=\{(x;y;z):0 \le x,y,z \le 1\}$ е разрязан на части с помощта на равнините $x=y$, $y=z$ и $z=x$. Намерете броя на частите.

Решение: Равнината $x=y$ разделя куба на две части. В едната част точките се характеризират с неравенството $x<y$, а в другата – с неравенството $x>y$. Същото важи и за другите две равнини. Следователно броят на частите, на които трите равнини разделят куба, е равен на различните подреждания на *x*, *y* и *z*. Те са шест: $x<y<z$, $x<z<y$, $y<x<z$, $z<x<y$, $y<z<x$ и $z<y<x$.

Задача 5. Да се докаже, че ако $2n+1$ на брой реални числа притежават свойството, че сборът на всеки *n* на брой от тях е по-малък от сбора на останалите $n+1$ на брой, то всичките числа са положителни.

Решение: Да подредим числата по големина: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2n+1}$. От условието следва, че $a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots+a_{2n+1} < a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}$. Но тогава

$$a_1 > (a_{n+2}-a_2)+(a_{n+3}-a_3)+\ldots+(a_{2n+1}-a_{n+1}).$$

Тъй като изразите във всяка скоба вдясно са неотрицателни, то $a_1>0$. Сега е достатъчно да забележим, че a_1 е най-малкото от числата.

Задача 6. Дадени са 7 различни естествени числа, ненадминаващи 1706. Да се докаже, че съществуват 3 от тях *a*, *b* и *c* така, че $a<b+c<4a$.

Решение: Да подредим числата по големина: $a_1<a_2<\ldots<a_7<1707$. Ако $a_3<4a_2-a_1$, то $a_2<a_1+a_3<4a_2$ и задачата е решена. Затова можем да считаме, че $a_3 \ge 4a_2-a_1$. Аналогично, ако $a_4<4a_3-a_1$, то $a_3<a_1+a_4<4a_3$ и задачата е отново решена. Можем да считаме, че $a_4 \ge 4a_3-a_1$. Разсъждавайки по същия начин, можем да считаме, че:

1.) $a_3 \ge 4a_2-a_1$

2.) $a_4 \ge 4a_3-a_1$

3.) $a_5 \ge 4a_4-a_1$

4.) $a_6 \ge 4a_5-a_1$

5.) $a_7 \ge 4a_6-a_1$.

От 1.) получаваме $a_3 \ge 4a_2-a_1 \ge 4(a_1+1)-a_1=3a_1+4$ и по-нататък

от 2.) $a_4 \ge 4a_3-a_1 \ge 4(3a_1+4)-a_1=11a_1+16$,

от 3.) $a_5 \ge 4a_4-a_1 \ge 4(11a_1+16)-a_1=43a_1+64$, от 4.) $a_6 \geq 4a_5 - a_1 \geq 4(43a_1 + 64) - a_1 = 171a_1 + 256$ и

от 5.) $a_7 \geq 4a_6 - a_1 \geq 4(171a_1 + 256) - a_1 = 683a_1 + 1024 \geq 1707$, което е противоречие.

Задача 7. Дадени са n различни естествени числа, най-малкото от които е a, а най-голямото е A. Най-малкото общо кратно на числата означаваме с НОК, а най-големия общ делител – съответно с НОД. Да се докаже, че $\text{НОК} \geq na$ и $\text{НОД} \leq \frac{1}{n}A$.

Решение: Да подредим дадените числа по големина: $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = A$. Тогава $\frac{\text{НОК}}{a_n} < \frac{\text{НОК}}{a_{n-1}} < \ldots < \frac{\text{НОК}}{a_1} = \frac{\text{НОК}}{a}$. Получената редица от n естествени числа е растяща и следователно $\frac{\text{НОК}}{a} \geq n$, т.е. $\text{НОК} \geq na$. По аналогичен начин имаме $\frac{a_1}{\text{НОД}} < \frac{a_2}{\text{НОД}} < \ldots < \frac{a_n}{\text{НОД}} = \frac{A}{\text{НОД}}$, което е също растяща редица от n естествени числа и следователно $\frac{A}{\text{НОД}} \geq n$, т.е. $\text{НОД} \leq \frac{1}{n}A$.

Задача 8. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ са $2n$ $(n \geq 2)$ различни естествени числа, ненадминаващи n^2. Да се докаже, че поне три от разликите $a_i - a_j$ са равни.

Решение: Дадените числа се комбинират по двойки по $\frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$ различни начина. Разликата $a_i - a_j$ (можем да считаме, че от по-голямо вадим по-малко, защото двойките са ненаредени) може да приема стойности от 1 до $n^2 - 1$, т.е. най-много $n^2 - 1$ различни стойности. Твърдението ще следва от принципа на Дирихле, ако $2n^2 - n > 2(n^2 - 1)$, т.е. ако $n < 2$. Последното не е изпълнено, поради условието $n \geq 2$. Заключаваме, че е необходимо по-тънко разсъждение отколкото чрез принципа на Дирихле.

Без ограничение можем да считаме, че $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$. Да разгледаме разликите $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, …, $a_{2n} - a_{2n-1}$. Ако никои три от тях не са равни, то

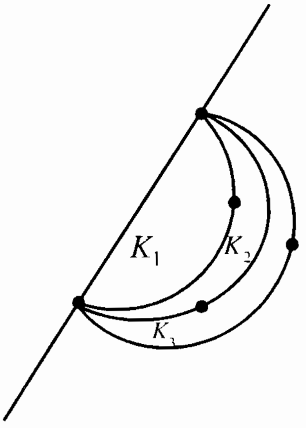
$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n-1}) \geq 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + (n-1) + (n-1) + n = \frac{2n(n-1)}{2} + n = n^2.$$

От друга страна, сумата на разликите вляво е равна на разликата $a_{2n} - a_1$, която ненадминава $n^2 - 1$ и това е противоречие.

Задача 9. (Shortlist IMO, 1993) Дадени са $2n+3$ точки в равнината, никои 3 от които не лежат на една права и никои четири от които не лежат на една окръжност. Да се докаже, че съществува окръжност през три от точките така, че точно n от точките са във вътрешността на окръжността.

Решение: Да изберем 2 от точките така, че всички останали точки да лежат от едната страна на правата, определена от избраните точки. Нека K е полуравнината, която съдържа останалите $2n+1$ точки във вътрешността си и $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{2n+1}$ са сеченията на K с кръгове, определени от окръжности през избраните 2 точки и трета точка от останалите

$2n+1$, като сеченията са наредени по включване. Множеството K_{n+1} съдържа точно n точки във вътрешността си и точно n точки във външността си.



Задача 10. Дадени са $4n$ точки в равнината, никои 3 от които не лежат на една права. Да се докаже, че съществуват n непресичащи се четириъгълника (не непременно изпъкнали) с върхове в тези точки.

Решение: Всеки две от дадените точки определят права. Броят на тези прави е краен брой. Затова можем да изберем друга права l, която не е успоредна на нито една от тези прави и която съдържа дадените точки от едната си страна. Движейки l успоредно на себе си по посока на точките, тя ще среща точките последователно една по една. Това дава възможност да номерираме дадените точки по реда на срещата им с l: A_1, A_2, …, A_{4n}. Ясно е, че четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$, $A_5A_6A_7A_8$, …, $A_{4n-3}A_{4n-2}A_{4n-1}A_{4n}$ са непресичащи се.

Задача 11. Дадени са 69 различни естествени числа, ненадминаващи 100. Да се докаже, че съществуват 4 измежду тях a, b, c и d така, че $a<b<c$ и $a+b+c=d$. Вярно ли е твърдението за 68 числа?

Решение: Да подредим числата по големина: $a_1<a_2<...<a_{69}\leq 100$. Ясно е, че $a_1\leq 32$. Разглеждаме редиците:

$$a_3+a_1<a_4+a_1<...<a_{69}+a_1 \quad \text{и} \quad a_3-a_2<a_4-a_2<...<a_{69}-a_2.$$

Членовете на тези редици са естествени числа, които ненадминават $100+32=132$. Освен това, двете редици имат общо $67+67=134$ члена, откъдето следва, че имат поне един общ член, т.е. съществуват индекси $i,\ j\in\{3,\ 4,\ ...,69\}$, за които $a_i+a_1=a_j-a_2$. Следователно $a_1<a_2<a_i$ и $a_1+a_2+a_i=a_j$. Твърдението не е вярно за 68 числа, защото ако 68-те числа са 33, 34, …, 100, то сумата на трите най-малки измежду тях $33+34+35=102>100$ не може да е равна на число от дадените.

Задача 12. Дадени са 25 различни естествени числа. Да се докаже, че могат да се изберат две от тях така, че сумата и разликата им да не са равни на числа измежду останалите 23.

Решение: Нека числата са $a_1<a_2<...<a_{25}$. Ясно е, че $a_{25}+a_1>a_{25}$ и следователно сумата на числата a_{25} и a_1 не е равна на число измежду дадените с изключение на a_{25} и a_1. Аналогично $a_{25}+a_k$ не е число измежду дадените за всяко $k=2,\ 3,\ ...,\ 24$ с изключение на a_{25} и a_k. Ако разликата $a_{25}-a_1$ не е число измежду $a_2,\ a_3,\ ...,\ a_{24}$, твърдението е доказано.

Затова можем да считаме, че това не е така. Същото можем да считаме и за числата $a_{25}-a_k$, където $k=2, 3, \ldots, 12$. Тъй като

$$a_{25}-a_1 > a_{25}-a_2 > \ldots > a_{25}-a_{12},$$

то единствената възможност е $a_{25}-a_1=a_{24}$, $a_{25}-a_2=a_{23}$, …, $a_{25}-a_{12}=a_{13}$. Оттук следва, че при $k>1$ имаме $a_{24}+a_k>a_{25}$. Ако $a_{24}-a_k$ не е число измежду дадените за някое $1<k\le 12$ с изключение на a_{24} и a_k, твърдението е доказано. Затова можем да считаме, че числата $a_{24}-a_k$ са измежду дадените за всяко $1<k\le 12$ с изключение на a_{24} и a_k. Но от равенството $a_{25}-a_2=a_{23}$ следва, че $a_{25}=a_{23}+a_2$ и значи $a_{24}<a_{23}+a_2$. Оттук $a_{24}\le a_{22}+a_2$, т.е. $a_{24}-a_2\le a_{22}$. Аналогично от равенството $a_{25}-a_3=a_{22}$ следва, че $a_{25}=a_{22}+a_3$ и значи $a_{24}<a_{22}+a_3$. Така $a_{24}\le a_{21}+a_3$, т.е. $a_{24}-a_3\le a_{21}$. Аналогично

$$a_{24}-a_4\le a_{20},\ a_{24}-a_5\le a_{19},\ \ldots,\ a_{24}-a_{11}\le a_{13} \text{ и } a_{24}-a_{12}\le a_{12}.$$

Тъй като считаме, че $a_{24}-a_{12}$ е число измежду дадените с изключение на a_{24} и a_{12}, то последното неравенство трябва да е строго, т.е. $a_{24}-a_{12}\le a_{11}$ Тогава $a_{24}-a_{13}\le a_{10}$, $a_{24}-a_{14}\le a_9$, …, $a_{24}-a_{22}\le a_1$. В крайна сметка заключаваме, че числата $a_{24}+a_{23}$ и $a_{24}-a_{23}$ не са измежду дадените с изключение на a_{23} и a_{24}, с което твърдението е доказано.

Задача 13. (Санкт-Петербургска градска олимпиада, 1998) Естествените числа от 1 до 100 са разположени по едно в единичните квадратчета на квадратна таблица 10×10. От всеки ред се избира третото по големина число. Да се докаже, че сумата на избраните числа е не по-малка от сумата на числата в някой от редовете на таблицата.

Решение: Нека $a_1>a_2>\ldots>a_{10}$ са избраните числа. Тъй като във всеки ред има по две числа, по-големи от третото по големина, то най-много $10.2=20$ числа са по-големи от a_1. Следователно $a_1\ge 80$. Освен тези най-много 20 числа, от a_2 са по-големи още най-много 8 числа – тези, които се намират в реда с a_1 и са третото, четвъртото и т.н. десетото включително по големина (общо осем на брой). Следователно $a_2\ge 72$. Тогава

$$a_1+a_2+\ldots+a_{10}\ge 80+72+a_{10}+(a_{10}+1)+\ldots(a_{10}+7)=8a_{10}+80+72+\frac{(1+7).7}{2}=8a_{10}+180.$$

От друга страна сумата на числата в реда, съдържащ a_{10}, е равна най-много на

$$100+99+a_{10}+(a_{10}-1)+\ldots+(a_{10}-7)=8a_{10}+199-28=8a_{10}+171.$$

Твърдението следва от неравенството $8a_{10}+180>8a_{10}+171$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. (2005). *Подготовка за Европейско кенгуру*. София: СМБ. (ISBN 954-8880-20-2), 220 страници.

2. Andrescu, T., R. Gelca (2000). *Mathematical Olympiad Challenges*. Boston-Basel-Berlin: Birhauser. (ISBN 0-8176-4155-6), 260 pages.

3. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.