# МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО ФИНАНСОВА МАТЕМАТИКА

**ВУЗФ-София, ИУ-Варна, САФУ-Архангелск**

**проф. Мария Шабанова, доц. Росен Николаев, проф. Сава Гроздев**

**Задача 1.** Цена данного товара снизилась в сентябре на 17% по сравнению с августом и на 6% в октябре по сравнению с сентябрем. Определите процент снижения цены товара в октябре по сравнению с августом.

A) 23% B) 102% C) 0,23% D) 11% E) 21,98%

*Решение.* Пусть цена товара в августе *K*. Тогда ее цена в сентябре равна $K-\frac{17K}{100}=0,83K$ , а в октябре - $0,83K-\frac{6.0,83K}{100}=0,7802K$ . Изменение цены в октябре по сравнению с августом равно $\frac{0,7802K-K}{K}=-0,2198$, то есть цена снизилась на 21,98%.

**Задача 2.** Определите индекс инфляции в 2015 г. по сравнению с 2014 г., если известны цены и потребление 10 видов товаров (таблица 1).

*Таблица 1*

| *Товар* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Потребление 2014 г.* | 60 | 240 | 100 | 120 | 300 | 40 | 160 | 800 | 210 | 420 |
| *Цена 2014 г.* | 6 | 0,9 | 4,5 | 8 | 3,5 | 12 | 2,1 | 0,5 | 8 | 4,2 |
| *Цена 2015 г.* | 6,2 | 1,1 | 4,3 | 7 | 4 | 15 | 2 | 0,8 | 9 | 5 |

A) 0,89 B) 11,2% C) 1,12 D) 12,47% E) 1,5

*Решение.* Пусть $p_i^{(2014)}$, $i=1,2,...,15$ - цены товаров в 2014 г., $p_i^{(2015)}$, $i=1,2,...,10$ - цены товаров в 2015 г., а $q_i^{(2014)}$, $i=1,2,...,10$ - потребленные количества товаров в 2014 г. Индекс инфляции равен

$$I_{2015/2014}=\frac{p_1^{(2015)}.q_1^{(2014)}+p_2^{(2015)}.q_2^{(2014)}+...+p_{10}^{(2015)}.q_{10}^{(2014)}}{p_1^{(2014)}.q_1^{(2014)}+p_2^{(2014)}.q_2^{(2014)}+...+p_{10}^{(2014)}.q_{10}^{(2014)}}=\frac{8656}{7696}=1,12.$$

**Задача 3.** Найдите максимальную сумму (до второго знака после запятой), которую инвестор готов вкладывать в проект, если этот проект генерирует будущие доходы, соответственно 10000 евро в первом году и 200000 во втором году и инвестор желает минимальную доходность 6,25%.

A) 200000 B) 150000 C) 10000

D) 186574,39 E) 190000.

*Решение.* Инвестиция является приемлемой, если чистая приведённая стоимость $NPV=\frac{10000}{1+r}+\frac{210000}{(1+r)^2}-I\geq 0$, где $r$ – желаемый уровень доходности, $I$ – размер инвестиции. Ищем максимальное значение $I_0$, для которого выполнено $\frac{10000}{1+r}+\frac{210000}{(1+r)^2}\geq I$ для $r\geq 0,625$. Функция $f(r)=\frac{10000}{1+r}+\frac{210000}{(1+r)^2}$ монотонно убывающая для каждого $r\geq 0,625$ (так как $f'(r)\geq 0$ для каждого $r\geq 0$). Тогда $I_0=\max\limits_{r\geq 0} f(r)=f(0,625)=186574,39$.

**Задача 4.** Пусть сумма 10000 евро ставится на срочный одномесячный депозит при *p*% сложной ставке. В конце первого месяца к накопленной сумме добавляются 5000 евро и они ставятся на тот же самой депозит. В конце второго месяца к накопленной сумме добавляются 2500 евро и они ставятся на тот же самой депозит. Какой минимальный процент *p* гарантирует, что в конце третьего месяца накопленная сумма будет не менее 20000 евро.

A) 2% B) 3% C) 4% D) 5% E) 6%

*Решение.* $K_1=10000.\left(1+\frac{p}{100}\right)=10000q$, $K_2=(K_1+5000).q=10000q^2+5000q$,

$K_3=(K_2+2500).q=10000q^3+5000q^2+2500q$.

Необходимо, что $f(q)=10000q^3+5000q^2+2500q\geq 20000$

Если $p=2\%$, то $q=1{,}02$ и $f(q)=18364{,}08<20000$.

Если $p=3\%$, то $q=1{,}03$ и $f(q)=18806{,}77<20000$.

Если $p=4\%$, то $q=1{,}04$ и $f(q)=19256{,}64<20000$.

Если $p=5\%$, то $q=1{,}05$ и $f(q)=19713{,}75<20000$.

Если $p=6\%$, то $q=1{,}06$ и $f(q)=20178{,}16>20000$.

**адача 5.** Сумма из $K$ евро положена в банк при сложной ставке $5\%$. В конце каждого года $n=1,2,3,\ldots$ выплачивают 1000 евро. Найти минимальную сумму $K$, чтобы процесс был бесконечным.

A) 100000 евро B) 10000 евро C) 1500 евро

D) 20000 евро E) 50000 евро

*Решение.* Начальная сумма $K$ должна быть не менее чем настоящей стоимости всех будущих доходов (до бесконечности) при дисконтной ставке 5%:

$$K\geq PV=\frac{1000}{1+\frac{5}{100}}+\frac{1000}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^2}+\frac{1000}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^3}+\ldots+\frac{1000}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^n}+\ldots=$$

$$=1000\left(\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}05^2}+\frac{1}{1{,}05^3}+\ldots+\frac{1}{1{,}05^n}+\ldots\right).$$

Так как $\frac{1}{1{,}05}<1$, то $PV=1000.\frac{\frac{1}{1{,}05}}{1-\frac{1}{1{,}05}}=\frac{1000}{0{,}05}=20000$. Следовательно $K\geq 20000$ евро.

**Задача 6.** Инвестор имеет возможность инвестировать 100000 евро в двух типов активов – A и B. Ожидаемые годовые доходности соответственно $M(r_A)=6\%$ и $M(r_B)=8\%$, а квадратические отклонения от ожидаемых доходностей соответственно $\sigma_A=2$ и $\sigma_B=2{,}5$. Коэффициент корреляции $\rho_{AB}=0{,}3$. Какую сумму должен инвестор вкладывать в A и B, чтобы общая дисперсия доходности будет минимальной?

*Решение.* Пусть инвестированный капитал равен 1, $x$ – часть, инвестирована в A и (1-$x$) – часть, инвестирована в B, $x\in[0,1]$. Портфель из двух активов $p$ имеет характеристики:

$r_p = xr_A + (1-x)r_B$ (доходность портфеля);

$M(r_p) = M(xr_A + (1-x)r_B) = xM(r_A) + (1-x)M(r_B)$ (ожидаемая доходность портфеля), которое следует из свойств математического ожидания. Согласно дефиниции дисперсии:

$$\sigma_p^2 = M\left(r_p - M(r_p)\right)^2 = M(r_p^2) - M^2(r_p) =$$

$$= M\left(xr_A + (1-x)r_B\right)^2 - \left(xM(r_A) + (1-x)M(r_B)\right)^2 =$$

$$= M\left(x^2r_A^2 + (1-x)^2r_B^2 + 2x(1-x)r_Ar_B\right) - x^2M^2(r_A) - (1-x)^2M^2(r_B) - 2x(1-x)M(r_A)M(r_B) =$$

$$= x^2\left[M(r_A^2) - M^2(r_A)\right] + (1-x)^2\left[M(r_B^2) - M^2(r_B)\right] + 2x(1-x)\underbrace{\left[M(r_Ar_B) - M(r_A)M(r_B)\right]}_{\operatorname{cov}(r_A, r_B) = \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}} =$$

$$= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}.$$

То есть

$$\sigma_p^2 = 4x^2 + 6,25(1-x)^2 + 2x(1-x).2.2,5.0,3 = 7,25x^2 - 9,5x + 6,25 \to \min_{x\in[0,1]}.$$

$(\sigma_p^2)' = 14,5x - 9,5x = 0 \Rightarrow x = 0,65517 \in [0,1]$ и $(\sigma_p^2)'' = 14,5 > 0$, следовательно $\min\limits_{x\in[0,1]} \sigma_p^2 = \sigma_p^2(0,65517)$.

Инвестор должен вкладывать $x.100000 = 65517$ евро в А и $(1-x).100000 = 34483$ евро в В.

**Задача 7.** Известны функциональные зависимости ежемесячной прибыли $П_1$ и $П_2$ двух конкурирующих компаний в зависимости от значений $p_1, p_2$ и $p_3$ трех факторов:

$$П_1(p_1, p_2, p_3) = -2p_1^2 + 3p_2^2 + 4p_3^2 - 5p_1p_2 + 5p_1p_3 - 15p_1 + 16p_2 - 24p_3 + 36;$$

$$П_2(p_1, p_2, p_3) = -4p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 + p_1p_3 + 4p_2p_3 - 3p_1 + 4p_2.$$

Если $p_1 = p$ $(const)$ и $П_1 = П_2$, то $p_1 + p_2 + p_3 =?$

*Решение.*

$$П_1 - П_2 = 2p_1^2 + 2p_2^2 + 4p_3^2 - 4p_1p_2 + 4p_1p_3 - 4p_2p_3 + 12p_1 + 12p_2 - 24p_3 + 36 = 0 \quad |:2,$$

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_3^2 - 2p_1p_2 + 2p_1p_3 - 2p_2p_3 + 6p_1 + 6p_2 - 12p_3 + 18 = 0,$$

$$(p_1 - p_2 + p_3 - 3)^2 + (p_3 - 3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} p_1 - p_2 + p_3 - 3 = 0 \\ p_3 - 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} p_1 = p_2 = p \\ p_3 = 3 \end{array}\right. .$$

Тогда $p_1 + p_2 + p_3 = 2p + 3$.