Отговори, упътвания и кратки решения

1. а) Ще използваме твърдението: Числата от интервала $[p;q]$ са решения на неравенството $f(x)=ax^2+bx+c\le 0$ при $a>0$ тогава и само тогава, когато $f(p)\le 0$ и $f(q)\le 0$. При $p=0$, $q=1$ и $f(x)=x^2-x+d$ имаме $f(0)=f(1)=d\le 0$.

б) Ще използваме твърдението: Числата от интервала $(p;q)$ са решения на неравенството $f(x)=ax^2+bx+c<0$ при $a>0$ тогава и само тогава, когато $f(p)\le 0$ и $f(q)\le 0$. При $p=1$, $q=2$ и $f(x)=x^2-dx+1$ имаме $f(1)=2-d\le 0$ и $f(2)=5-2d\le 0$, откъдето $d\ge 2$ и $d\ge 2{,}5$. Следователно търсените стойности са $d\ge 2{,}5$.

2. Както в 1., в сила е твърдението: Всяко число от интервала $[p;q]$ е решение на неравенството $f(x)=ax^2+bx+c<0$ при $a>0$ тогава и само тогава, когато $f(p)<0$ и $f(q)<0$. При $p=-2$, $q=-1$ и имаме

$$f(-2)=8-2(2k+9)+2k^2+3k=2k^2-k-10<0 \text{ и}$$
$$f(-1)=2-(2k+9)+2k^2+3k=2k^2+k-7<0.$$

Съответните решения са $-2<k<2{,}5$ и $\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{57}\right)<k<\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{57}\right)$. Тъй като $7<\sqrt{57}<8$, то $-2{,}25<\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{57}\right)<-2$ и $1{,}5<\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{57}\right)<2$. Оттук получаваме общото решение $-2<k<\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{57}\right)$ и следователно търсените стойности на k са -1, 0 и 1.

3. При $n=0$ даденото неравенство е $x\ge 0$ и не е изпълнено условието на задачата. При $n\ne 0$ неравенството се представя във вида $n(x-n)\left(x+\frac{1}{n}\right)\ge 0$. При $n>0$ решенията на последното са обединение на два безкрайни числови интервала и не удовлетворяват условието $|x|\le 2$. При $n<0$ даденото неравенство е равносилно на $(x-n)\left(x+\frac{1}{n}\right)\le 0$, като $n<-\frac{1}{n}$ и решенията са $n\le x\le -\frac{1}{n}$. Следователно $n\ge -2$ и $-\frac{1}{n}\le 2$, откъдето $-2\le n\le -\frac{1}{2}$, а търсените цели стойности са -2 и -1.

4. Решенията на неравенството $x^2-3x+2<0$ са $1<x<2$. При $m=0$ второто неравенство има вида $x<3$ и съдържа интервала $(1;2)$ таса, че е изпълнено условието на задачата. При $m\ne 0$ второто неравенство се представя във вида $m(x-3)\left(x-\frac{1}{m}\right)>0$. При $m<0$ то е $(x-3)\left(x-\frac{1}{m}\right)<0$, като $\frac{1}{m}<0<3$. Решенията му са $\frac{1}{m}<x<3$ и съдържат интервала $(1;2)$. При $m>0$ имаме $(x-3)\left(x-\frac{1}{m}\right)>0$ и за неговите решения има следните възможности:

1) $\dfrac{1}{m}=3$, т.е. $m=\dfrac{1}{3}$. Тогава $(x-3)^2>0$ е в сила за всяко $x\neq 3$, а и за $1<x<2$;

2) $\dfrac{1}{m}>3$, т.е. $m<\dfrac{1}{3}$. Тогава решенията са $x<3$ или $x>\dfrac{1}{m}$ и включват числата от $(1;2)$;

3) $\dfrac{1}{m}<3$, т.е. $m>\dfrac{1}{3}$. Тогава решенията са $x<\dfrac{1}{m}$ или $x>3$ и съдържат $(1;2)$ само ако $\dfrac{1}{m}\geq 2$, т.е. $m\leq\dfrac{1}{2}$. Отговорът на задачата е $m\leq\dfrac{1}{2}$.

5. Решенията на неравенството $x^2+4x+3<0$ са $-3<x<-1$. Решенията на първото неравенство зависят от дискриминантата D на квадратния тричлен $f(x)=2x^2+(m+7)x+5m+1$. Ако $D\leq 0$, то $f(x)\geq 0$ за всяко x, а за да има решения $f(x)<0$, е необходимо $D=(m+7)^2-8(5m+1)>0$, т.е. $m^2-26m+41>0$, откъдето $m<13-\sqrt{128}$ или $m>13+\sqrt{128}$. Тогава решенията на $f(x)<0$ са $x_2<x<x_1$, където $x_{1,2}=\dfrac{-(m+7)\pm\sqrt{D}}{4}$ и следва, че условието на задачата е изпълнено, когато $x_1\leq -1$ и $x_2\geq -3$, т.е. $\dfrac{-(m+7)+\sqrt{D}}{4}\leq -1$ и $\dfrac{-(m+7)-\sqrt{D}}{4}\geq -3$. Тези две неравенства се преобразуват до $\sqrt{D}\leq m+3$ и $\sqrt{D}\leq 5-m$. Тъй като $\sqrt{D}>0$, трябва $m+3>0$ и $5-m>0$, т.е. $-3<m<5$ и стигаме до неравенствата $D\leq(m+3)^2$ и $D\leq(5-m)^2$ или $m^2-26m+41\leq m^2+6m+9$ и $m^2-26m+41\leq 25-10m+m^2$, които имат общо решение $m\geq 1$. Отчитайки получените резултати, окончателно намираме $1\leq m<13-8\sqrt{2}$.

6. Дадените неравенства се записват така: $x-2k>2k+1$ и $(x-2k)^2>(k+4)(4k-1)$. След полагане $x-2k=y$ те приемат вида $y>2k+1$ и $y^2>(k+4)(4k-1)$. При $(k+4)(4k-1)<0$, т.е. $k\leq -4$ или $k\geq\dfrac{1}{4}$ решенията на второто неравенство са $y<-\sqrt{(k+4)(4k-1)}$ или $y>\sqrt{(k+4)(4k-1)}$. За да се съдържат в тях решенията на $y>2k+1$, трябва $2k+1\geq\sqrt{(k+4)(4k-1)}$. При $k\leq -4$ това не е в сила, защото $2k+1<0$. При $k\geq\dfrac{1}{4}$ имаме $2k+1>0$ и след повдигане в квадрат получаваме $(2k+1)^2\geq 4k^2+15k-4$ или $11k\leq 5$, т.е. $k\leq\dfrac{5}{11}$. След обединяване на резултатите намираме $-4<k\leq\dfrac{5}{11}$ и търсените цели стойности за k са: -3, -2, -1 и 0.

7. а) Дискриминантата на квадратния тричлен x^2+ax-2 е $D=a^2+8>0$ за всяко реално a и уравнението $x^2+ax-2=0$ има два различни корена $x_1>x_2$. Множеството от решенията на даденото неравенство е интервала $(x_2;x_1)$, чиято дължина е $x_1-x_2=3$ по условие. Тъй като $x_1-x_2=\sqrt{D}$, имаме $\sqrt{D}=3$ или $a^2+8=9$, откъдето намираме $a=\pm 1$.

б) Даденото неравенство се представя във вида $(2x-5)(2x+5-2a)<0$. Множеството от решенията му е отворен интервал с краища $\frac{5}{2}$ и $a-\frac{5}{2}$, чиято дължина е $|a-5|=2$ по условие. Оттук $a-5=2$ или $a-5=-2$ и следователно $a=7$ и $a=3$.

8. При $b=0$ неравенството е $-3x+2<0$, т.е. $x>\frac{2}{3}$ и условието на задачата не е изпълнено. При $b\neq 0$ дискриминантата на квадратния тричлен bx^2-3x+2 е $D=9-8b$. Ако $D\leq 0$, т.е. $b\geq\frac{9}{8}$, даденото неравенство няма решение. При $b<\frac{9}{8}$ имаме $D>0$ и уравнението $bx^2-3x+2=0$ има два различни корена $x_1>x_2$. При $b<0$ множеството от решенията на неравенството е обединение на два безкрайни интервала и пак не е изпълнено условието на задачата. При $0<b<\frac{9}{8}$ решенията образуват интервала $(x_2;x_1)$ и по условие $x_1-x_2<1$ или $\sqrt{D}<1$, т.е. $D=9-8b<1$, откъдето $b>1$. Отговорът на задачата е $1<b<\frac{9}{8}$.

9. При $c\leq 0$ даденото неравенство има безброй много цели решения. Разглеждаме $g(z)=cz^2-(2c+1)z-1$ при $c>0$ и дискриминантата $D=(2c+1)^2+4c>0$. Тогава уравнението $g(z)=0$ има два различни корена $z_1>z_2$ и множеството от решенията на неравенството $g(z)\leq 0$ е интервалът $[z_2;z_1]$. Тъй като $g(0)=-1<0$, то нулата е решение на $g(z)<0$. А понеже $g(-1)=3c>0$, следва, че -1 не е решение на даденото неравенство. Това показва, че множеството от решенията не съдържа отрицателни цели числа. Но $g(1)=-c-2<0$ и $g(2)=-3<0$, откъдето следва, че целите числа 0, 1 и 2 удовлетворяват условието на задачата. За да няма други цели решения, трябва $z_1<3$ или $g(3)=3c-4>0$, т.е $c>\frac{4}{3}$ и това е отговорът на задачата.

10. При $m=0$ даденото неравенство е $-8x-16\leq 0$, т.е. $x\geq -2$ и има безброй много цели решения. При $m\neq 0$ разглеждаме квадратния тричлен $f(x)=mx^2+8(m-1)x+7m-16$ и неговата дискриминанта $D=16(m-1)^2-m(7m-16)=9m^2-16m+16>0$. Уравнението $f(x)=0$ има два различни корена $x_1>x_2$ и при $m<0$ множеството от решенията на неравенството $f(x)\leq 0$ е обединение на безкрайните интервали $(-\infty;x_2]$ и $[x_1;\infty)$, които съдържат безброй много цели числа. При $m>0$ решенията на $f(x)\leq 0$ образуват интервала $[x_2;x_1]$, който по условие съдържа числото 2. Следователно $f(2)\leq 0$, т.е. $4m+16(m-1)+7m-16=27m-32\leq 0$ и оттук $m\leq\frac{32}{27}$. Но

$$f(-1)=m-8(m-1)+7m-16=-8<0,$$

което означава, че числото -1 е винаги решение на $f(x)<0$. От $f(-2)=4m-16(m-1)+7m-16=-5m<0$ при $m>0$ следва, че и числото -2 е решение на $f(x)<0$. Освен това при Следователно при $0<m\le\frac{32}{7}$ имаме

$$f(0)=7m-16\le 7\cdot\frac{32}{27}-16=-\frac{208}{7}<0 \text{ и}$$

$$f(1)=m+8(m-1)+7m-16=16m-24\le 16\cdot\frac{32}{27}-24=-\frac{136}{27}<0.$$

Следователно числата 0 и 1 са също решения на $f(x)<0$. Заключаваме, че при $0<m\le\frac{32}{27}$ неравенството $f(x)\le 0$ има поне пет цели решения. Това са числата 2, 1, 0, -1 и -2. Тъй като $f(3)=9m+24(m-1)+7m-16=40(m-1)$ и $f(-3)=9m-24(m-1)+7m-16=-8(m-1)$, разглеждаме следните случаи:

Случай 1. $m=1$. Имаме $f(3)=f(-3)=0$ и неравенството $f(x)\le 0$ има седем цели решения.

Случай 2. $0<m<1$. Имаме $f(3)<0$, $f(-3)>0$ и

$$f(-4)=16m-32(m-1)+7m-16=16-9m>0.$$

За да не станат целите решения повече от шест, трябва

$$f(4)=16m+32(m-1)+7m-16=55m-48>0.$$

Оттук следва, че при $\frac{48}{55}<m<1$ даденото неравенство има шест цели решения: 3, 2, 1, 0, -1 и -2.

Случай 3. $1<m\le\frac{32}{27}$. Имаме $f(3)>0$, $f(-3)<0$, $f(-4)>0$ и $f(4)>0$. Целите решения на даденото неравенство са шестте числа: 2, 1, 0, -1, -2 и -3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Becheanu, M., B. Enescu (2002). *Inegalitati elementare*. Bucurest: Gil. (973-9238-53-X), 156 pages.

2. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

SECOND ORDER ALGEBRAIC EQUATIONS WITH PARAMETERS. PART II

Hristo Lessov

Abstract. Second order algebraic equations with parameters are considered in the paper. Different cases are discussed. The proposed problems are with methodological solutions and are suitable for 9th and 10th grade students.