M+ РЕШЕНИЯ

M+529. Реалните числа x и y са корени съответно на уравненията $8x^5-60x^4+184x^3-288x^2+231x-84=0$ и $81y^5-270y^4+378y^3-276y^2+107y-8=0$. Да се намери стойността на израза $2x+3y$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Полагаме $x=\dfrac{u+3}{2}$ и $y=\dfrac{v+2}{3}$. Дадените равенства преминават в следните $u^5+2u^3+3u-30=0$ и $v^5+2v^3+3v^2+30=0$. След почленно събиране на тези равенства се получава $(u+v)\left[u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4+2\left(u^2-uv+v^2\right)+3\right]=0$. Тъй като

$$u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4=\left(u-\frac{1}{4}v\right)^4+\frac{5}{8}v^2\left[\left(u-\frac{3}{4}v\right)^2+\frac{33}{32}v^2\right]\geq 0 \text{ и}$$

$u^2-uv+v^2=\left(u-\dfrac{1}{2}v\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2\geq 0$, то $u+v=0$. Тогава след почленно събиране на равенствата $u=2x-3$ и $v=3y-2$ получаваме $0=u+v=2x+3y-5$. Следователно $2x+3y=5$.

M+530. Ако n и p са естествени числа, да се докаже, че $\left\{\sum\limits_{k=p}^{n}\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}\right\}<\dfrac{1}{p^2}$, където $\{x\}$ означава дробната част на x.

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. От неравенството на Бернули следва

$$\left(1+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right)^{k^2(k+1)^2}>1+k^2(k+1)^2.\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=2(k+1).$$

Оттук $1+\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}>\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}>1$. Сумираме тези неравенства и получаваме

$$n-p+1+\sum_{k=p}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}>\sum_{k=p}^{n}\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}>n-p+1.$$

Тъй като $\sum\limits_{k=p}^{n}\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum\limits_{k=p}^{n}\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{p^2}$, то от последните неравенства получаваме $n-p+1+\dfrac{1}{p^2}>\sum\limits_{k=p}^{n}\sqrt[k^2(k+1)^2]{2(k+1)}>n-p+1$. Оттук следва твърдението на задачата.

M+531. Ако $x,y,z\in(2,+\infty]$, да се, че $\log_x\dfrac{yz+x}{3}+\log_y\dfrac{zx+y}{3}+\log_z\dfrac{xy+z}{3}\geq 3$.

(Каталин Кристеа, Крайова, Румъния)

Решение. От $y;z\in[2,+\infty)$ следва $yz\geq y+z$, което е еквивалентно с $(y-1)(z-1)\geq 1$. Сега от неравенството между средните следва $\dfrac{yz+x}{3}=\dfrac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$. Оттук намираме $\log_x\dfrac{yz+x}{3}\geq\log_x\sqrt[3]{xyz}=\dfrac{1}{3}\left(1+\log_x y+\log_x z\right)$. Аналогично имаме

$$\log_y\frac{zx+y}{3}\ge\frac{1}{3}\left(1+\log_y z+\log_y x\right) \text{ и } \log_z\frac{xy+z}{3}\ge\frac{1}{3}\left(1+\log_z x+\log_z y\right).$$

След събиране на последните три неравенства получаваме

$$\log_x\frac{yz+x}{3}+\log_y\frac{zx+y}{3}+\log_z\frac{xy+z}{3}\ge$$

$$\ge\frac{1}{3}\left[3+\left(\log_x y+\log_y x\right)+\left(\log_y z+\log_z y\right)+\left(\log_z x+\log_x z\right)\right]\ge$$

$$\ge\frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\log_x y\log_y x}+2\sqrt{\log_y z\log_z y}+2\sqrt{\log_z x\log_x z}\right)=\frac{1}{3}(3+2+2+2)=3.$$

M+532. Да се намерят всички прости числа k, за които съществуват равнобедрени триъгълници с целочислени страни така, че лицата им да са k пъти по-големи от обиколките им. **(Милен Найденов, гр. Варна)**

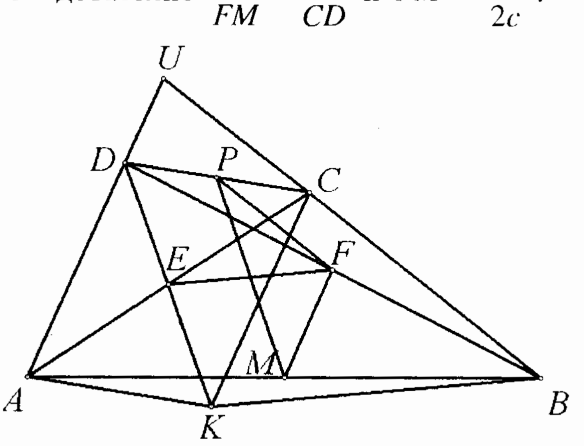
Решение. При обичайните означения за елементите на триъгълника имаме $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=2kp$. Оттук $(p-a)(p-b)(p-c)=4k^2p$. Въвеждаме означенията $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$. Следователно $xyz=4k^2(x+y+z)$. Ако $y=x$, от последното равенство следва квадратното спрямо x уравнение $zx^2-bk^2x-4k^2z=0$. Дискриминантата му е $D=4k^2\left(4k^2+z^2\right)$, която е точен квадрат при $z=k^2-1$. Тогава положителният корен на уравнението е $x=2k+4+\dfrac{4}{k-1}$. Числото x е цяло положително само при $k=2,3,5$. В тези случаи получаваме триъгълници със страни $a=15$, $b=15$, $c=24$; $a=20$, $b=20$, $c=24$; $a=39$, $b=39$, $c=39$. Тъй като 2, 3 и 5 са прости числа, те са всички търсени стойности на k.

M+533. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с дължини на страните BC, CD и DA съответно b, c и d, дължини на диагоналите AC и BD – съответно m и n и мерки на ъглите A, B и D – съответно α, β и δ. Нека M и P са средите съответно на страните AB и CD, а E и F – на диагоналите AC и BD. Ако $d^2=b.c$ и $\delta=\alpha+\beta$, да се докаже, че

а) $MP=\dfrac{m.d}{2c}$, б) $EF=\dfrac{n.d}{2m}$. **(Хаим Хаимов, гр. Варна)**

Решение. а) Тъй като $\alpha+\beta=\delta<180°$, то AD и BC не са успоредни. Нека $AD\cap BC=U$. Тъй като $MF\parallel AD$ и $PF\parallel BC$ (като средни отсечки), то $\sphericalangle MFP=180°-\sphericalangle AUB=\alpha+\beta=\delta$.

От условието $AD^2=BC.CD$ следва, че $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BC}{AD}$. Но $PF=\dfrac{1}{2}BC$ и $MF=\dfrac{1}{2}AD$. Затова $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{PF}{MF}$. Оттук следва, че $\Delta ADC\sim\Delta PFM$. Следователно $\dfrac{PM}{FM}=\dfrac{AC}{CD}$ и $PM=\dfrac{m.d}{2c}$.



б) Означаваме с K точката, симетрична на върха D спрямо E. Четириъгълникът $AKCD$ е успоредник. Затова $AK=CD=c$, $CK=AD=d$ и $\sphericalangle AKC=\sphericalangle ADC=\delta=\alpha+\beta=180°-\sphericalangle AUB$.

Следователно четириъгълникът $AKCU$ е вписан в окръжност и $\sphericalangle KAD=\sphericalangle KCB$. От друга страна $\dfrac{AK}{AD}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{b}=\dfrac{CK}{BC}$ и затова $\Delta AKD\sim\Delta CKB$.

Оттук следват равенствата $\dfrac{AK}{CK}=\dfrac{DK}{BK}$ и

$\sphericalangle AKD = \sphericalangle BKC$. Следователно $\sphericalangle AKC = \sphericalangle AKD + \sphericalangle DKC = \sphericalangle BKC + \sphericalangle DKC = \sphericalangle BKD$. Оттук получаваме, че $\Delta AKC \sim \Delta DKB$ и затова $KB = \frac{BD.KC}{AC} = \frac{nd}{m}$. Тъй като EF е средна отсечка в ΔBKD, то $EF = \frac{1}{2}KB = \frac{n.d}{2m}$.

М+534. Не еднаквите параболи π и π' лежат в една равнина γ и имат успоредни оси. Да се докаже, че съществуват реално число k и точка H от равнината γ, такива че за произволна точка M от π съществува точка M' от π', за която е изпълнено равенството $\overline{HM'} = k.\overline{HM}$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Нека параболите π и π' имат съответно върхове O и O', фокуси F и F', фокални параметри p и p'. Тогава спрямо съответните си канонични координатни системи $K = Oxy$ и $K' = O'x'y'$ параболите π и π' имат съответно уравненията $\pi: y^2 = 2px$ и $\pi': y'^2 = 2p'x'$. Съответно спрямо $K = Oxy$ и $K' = O'x'y'$ за фокусите имаме $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и $F'\left(\frac{p'}{2}, 0\right)$. Нека $O'(m,n)$ е координатното представяне на върха O' спрямо $K = Oxy$. Ако P е точка от γ, която има координати (x,y) спрямо $K = Oxy$ и координати (x',y') спрямо $K' = O'x'y'$, то от равенството $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$ следва, че връзките между координатите на точката P спрямо двете координатни системи са следните $x' = x - m$ и $y' = y - n$. Оттук намираме, че спрямо $K = Oxy$ уравнението на π' е $\pi': (y-n)^2 = 2p'(x-m)$, а координатното представяне на фокуса F' е $F'\left(\frac{p'}{2} + m, n\right)$. Тъй като по условие параболите не са еднакви, то $p' \neq p$, а правите OO' и FF' не са успоредни. Нека H е пресечната точка на правите OO' и FF'. Уравненията на правите OO' и FF' са съответно следните $OO': nx - my = 0$ и $FF': nx - \left(m + \frac{p-p'}{2}\right)y - \frac{np}{2} = 0$. От тези уравнения за координатите на точката H намираме $H\left(\frac{mp}{p-p'}, \frac{np}{p-p'}\right)$. Нека сега h е права през O, колинеарна с вектора $\vec{h}(\alpha,\beta)$. Тази права представяме с параметричните ѝ уравнения $h: \begin{cases} x = \frac{mp}{p-p'} + \alpha t, \\ y = \frac{np}{p-p'} + \beta t. \end{cases}$ След заместване на последните равенства в уравненията на π и π' намираме, че пресечните точки на h с π се получават при стойности на параметъра t, удовлетворяващи уравнението $\beta^2(p-p')^2 t^2 - 2p(p-p')\left[(p-p')\alpha - n\beta\right]t + p^2\left[n^2 - 2m(p-p')\right] = 0$, а пресечните точки на h с π' се получават при стойности на параметъра $t = t'$, удовлетворяващи уравнението $\beta^2(p-p')^2 t'^2 - 2p'(p-p')\left[(p-p')\alpha - n\beta\right]t' + p'^2\left[n^2 - 2m(p-p')\right] = 0$. От първото уравнение намираме, че правата h пресича π в точките

$$M\left(\frac{mp}{p-p'} - \frac{\alpha p(\Delta_1 + \Delta_2)}{\beta^2(p-p')}, \frac{np}{p-p'} - \frac{\beta p(\Delta_1 + \Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

$$N\left(\frac{mp}{p-p'}-\frac{\alpha p(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')},\frac{np}{p-p'}-\frac{\beta p(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

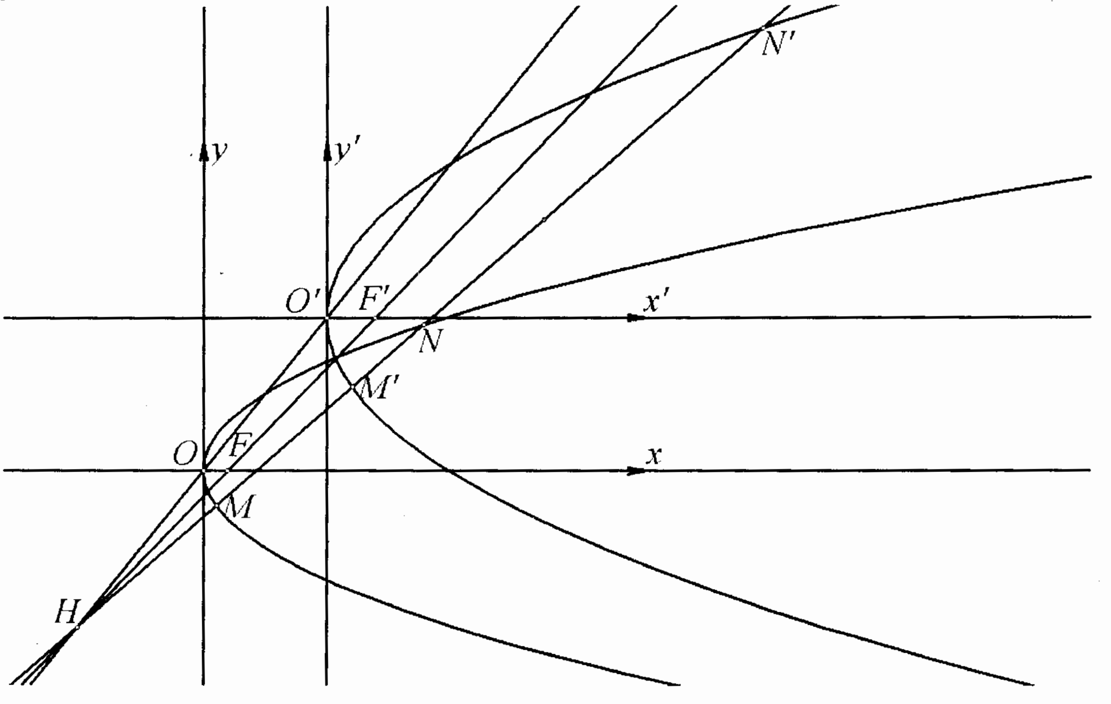
а от второто уравнение намираме, че правата h пресича π' в точките

$$M'\left(\frac{mp}{p-p'}-\frac{\alpha p'(\Delta_1+\Delta_2)}{\beta^2(p-p')},\frac{np}{p-p'}-\frac{\beta p'(\Delta_1+\Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

$$N'\left(\frac{mp}{p-p'}-\frac{\alpha p'(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')},\frac{np}{p-p'}-\frac{\beta p'(\Delta_1-\Delta_2)}{\beta^2(p-p')}\right),$$

където $\Delta_1=(p-p')\alpha-n\beta$, $\Delta_2=\sqrt{(p-p')\left[(p-p')\alpha^2-2n\alpha\beta+2\beta^2m\right]}$.

От координатите на H и от последните координати следват равенствата $\overrightarrow{HM'}=\frac{p'}{p}\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{HN'}=\frac{p'}{p}\overrightarrow{HN}$. С това задачата е решена.



M+535. Нека $\lim\limits_{x\to 2}\frac{a^2+b^2x}{cx^2+3x+d}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^2+b^2x}{cx^2+3x+d}=3$, където $a,d\in\mathbb{N}$ и $b,c\in\mathbb{R}$. Ако изразът $a-d$ има максимална стойност, да се намерят a, b, c и d.

(Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. От $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^2+b^2x}{cx^2+3x+d}=3$ следва, че $c=0$ и $b^2=9$. Оттук $b=\pm3$ Тогава, от $\lim\limits_{x\to 2}\frac{a^2+9x}{3x+d}=3$ следва, че $\frac{a^2+18}{6+d}=3$. Следователно $a^2=3d$. Оттук $a=3k$, $k\in\mathbb{N}$ и $d=3k^2$. Изразът $a-d=3k-3k^2$ има максимална стойност 0 при $k=1$ (естествено число), откъдето $a=d=3$. Така получихме, че $a=3$, $b=\pm3$, $c=0$, $d=3$.

M+536. Дадено е уравнението $x^3-3kx^2+(k^2-1)x-k^3+k=0$, където $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Ако x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} са корените на това уравнение за $k=2,3,\ldots$, да се намери сумата $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{x_{1k}x_{2k}x_{3k}}$.

(Росен Николаев, гр. Варна)

Решение. От формулите на Виет $x_{1k}x_{2k}x_{3k}=-(-k^3+k)=(k-1)k(k+1)$. Тогава:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_{1k}x_{2k}x_{3k}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{2}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}.$$

Извършваме граничен преход: $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{x_{1k}x_{2k}x_{3k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}$.

Забележка. Произведението $x_{1k}x_{2k}x_{3k}=(k-1)k(k+1)$ може да се намери и без да се използват формулите на Виет. Лесно се установява, че $x_{2k}=k$ е корен на даденото уравнение. Тогава то е равносилно на $(x-k)(x^2-2kx+k^2-1)=0$, откъдето $x_{1k}=k-1$, $x_{3k}=k+1$.

M+537. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{2\sqrt{2}+2^2\sqrt{2^2}+\cdots+2^n\sqrt{2^n}+3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}+3.2^n\sqrt{3.2^n}}>$$
$$>\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\cdots+\sqrt[4]{2^n}+\sqrt[4]{3.2^{n-1}}+\sqrt[4]{3.2^n}.$$

(Лучиан Туцеску, Крайова, Николае Опреа, Балцести, Румъния)

Решение. От неравенството на Коши-Буняковски имаме

$$\left[\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2^2\sqrt{2^2}}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{2^n\sqrt{2^n}}\right)^2+\left(\sqrt{3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}}\right)^2+\left(\sqrt{3.2^n\sqrt{3.2^n}}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2^2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3.2^{n-1}}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3.2^n}}\right)^2\right]>$$
$$>\left(\sqrt{2\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2^2\sqrt{2^2}}.\frac{1}{\sqrt{2^2}}+\cdots+\sqrt{2^n\sqrt{2^n}}.\frac{1}{\sqrt{2^n}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}}.\frac{1}{\sqrt{3.2^{n-1}}}+\sqrt{3.2^n\sqrt{3.2^n}}.\frac{1}{\sqrt{3.2^n}}\right)^2.$$

Тъй като $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3.2^{n-1}}+\frac{1}{3.2^n}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{3.2^n}=1$, последното неравенство е еквивалентно с

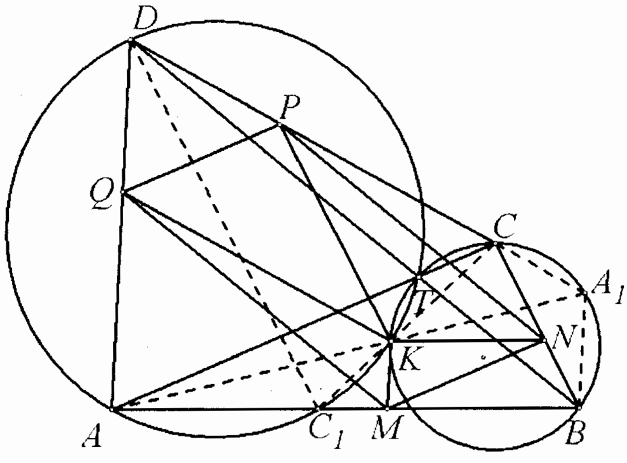
$$2\sqrt{2}+2^2\sqrt{2^2}+\cdots+2^n\sqrt{2^n}+3.2^{n-1}\sqrt{3.2^{n-1}}+3.2^n\sqrt{3.2^n}>$$
$$>\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\cdots+\sqrt[4]{2^n}+\sqrt[4]{3.2^{n-1}}+\sqrt[4]{3.2^n}\right)^2.$$

С това задачата е решена.

M+538. За изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите T са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=\sphericalangle ATD=\varphi$. Нека K е втората обща точка на описаните окръжности за ΔADT и ΔBCT, а M, N, P и Q са такива точки съответно върху страните AB, BC, CD и DA, че $KM\parallel DA$, $KN\parallel AB$, $KP\parallel BC$ и $KQ\parallel CD$. Да се докаже, че $MNPQ$ е успоредник.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. От свойствата на вписаните ъгли следват равенствата $\sphericalangle AKD = \sphericalangle ATD = \varphi$ и $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BTC = \varphi$. По същия начин се получават равенствата $\sphericalangle KAT = \sphericalangle KDT$, т.е. $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KDB$ и $\sphericalangle KCT = \sphericalangle KBT$, т.е. $\sphericalangle KCA = \sphericalangle KBD$. Следователно $\Delta KCA \sim \Delta KBD$. Оттук $\frac{KA}{KC} = \frac{KD}{KB}$ и $\sphericalangle AKC = \sphericalangle DKB$. От последното равенство следва



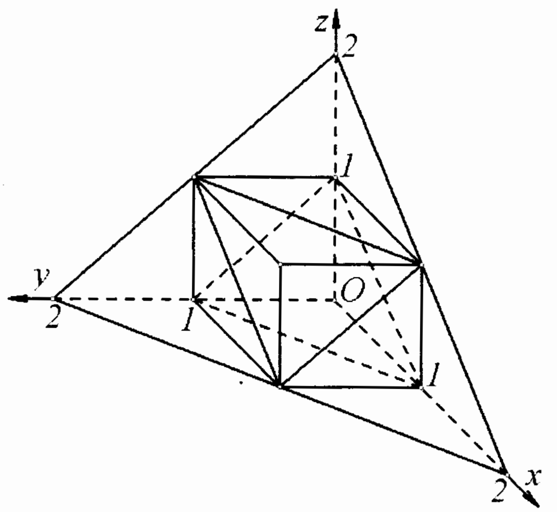
$\sphericalangle AKD = \sphericalangle AKC - \sphericalangle DKC = \sphericalangle DKB - \sphericalangle DKC = \sphericalangle CKB$, т.е. $\sphericalangle AKD = \sphericalangle CKB$. Това равенство заедно с получената пропорция показва, че $\Delta ADK \sim \Delta CBK$. Следователно (1) $\frac{KA}{DA} = \frac{KC}{BC} = k$ и $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCB = \varphi_1$. Сега въвеждаме означенията $AK \cap DC = A_1$ и $CK \cap AB = C_1$. Ще докажем, че $BA_1 \parallel AD$ и $DC_1 \parallel BC$. Изпълнени са равенствата $\sphericalangle AA_1D = 180° - \sphericalangle ADA_1 - \sphericalangle A_1AD = 180° - \varphi - \varphi_1$ и $\sphericalangle KBC = 180° - \sphericalangle BKC - \sphericalangle KCB =$ $= 180° - \varphi - \varphi_1$. Оттук $\sphericalangle AA_1D = \sphericalangle KBC$. Следователно четириъгълникът KBA_1C е вписан в окръжност и затова $\sphericalangle KA_1B = \sphericalangle KCB = \sphericalangle KAD$. Оттук получаваме, че $BA_1 \parallel AD$. Аналогично се доказва, че $DC_1 \parallel BC$. Сега ще докажем, че $\frac{KC}{CC_1} = \frac{KA}{AA_1} = k^2$. Тъй като $\sphericalangle BKC = \sphericalangle C_1BC = \varphi$, то $\Delta BKC \sim \Delta C_1BC$. Оттук следва $\frac{CC_1}{BC} = \frac{BC}{KC}$, т.е. $CC_1 = \frac{BC^2}{KC}$. Сега имаме $\frac{KC}{CC_1} = \frac{KC.KC}{BC^2} = \frac{KC^2}{BC^2} = k^2$. Аналогично се показва, че $\frac{KA}{AA_1} = \frac{KA^2}{DA^2} = k^2$. Тъй като по условие $KN \parallel C_1B$, то $\frac{CN}{CB} = \frac{KC}{CC_1} = k^2$. От $KP \parallel BC \parallel DC_1$ аналогично се получава, че $\frac{CP}{CD} = \frac{KC}{CC_1} = k^2$. Следователно $\frac{CN}{CB} = \frac{CP}{CD} = k^2$. Това означава, че $NP \parallel BD$ и $NP = k^2 BD$. Аналогично се доказва, че $QM \parallel BD$ и $QM = k^2 BD$. Следователно $MNPQ$ е успоредник.

М+539. Върху отсечката AB по произволен начин са избрани точките X, Y и Z. Каква е вероятността от отсечките AX, XY, YZ и ZB да е възможно да се построи четириъгълник.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека отсечката AB има дължина 2, а дължините на отсечките AX, XY, YZ и ZB са x, y, z и t. Тогава $x+y+z+t=2$. За числата x, y, z и t са изпълнени неравенствата $0<x<2$, $0<y<2$, $0<z<2$ и $0<t<2$. От последните неравенства и $x+y+z=2-t$ следва, че $x+y+z<2$. Освен това, тъй като $x+y+z=2-t$, елементарното събитие се характеризира с три параметъра x, y, z. Следователно на всяко случайно събитие съответства точка в тримерното пространство с координати x, y, z. Затова ще използваме

формулата за геометрична вероятност $P = \frac{V_D}{V_\Omega}$, където Ω е пространството на всички събития, а D е множеството на благоприятните събития. От направения анализ следва, че $\Omega = \{0 < x < 2, 0 < y < 2, 0 < z < 2, x + y + z < 2\}$. Следователно Ω е правоъгълен тетраедър с ръбове при правия тристенен ъгъл, равни на 2. Обемът на този тетраедър е $V_\Omega = \frac{1}{6}.2.2.2 = \frac{4}{3}$.
Благоприятните събития определяме по следния начин. За да съществува четириъгълникът, е изпълнено неравенството $x + y + z > t$. Затова от $t = 2 - x - y - z$ следва, че $x + y + z > 1$. Освен това всяка от страните на четириъгълника е по-малка от периметъра му. Затова са изпълнени неравенствата $x < 1$, $y < 1$ и $z < 1$. Следователно $D = \{x < 1, y < 1, z < 1, x + y + z > 1\}$. Това е тялото, което се получава след отрязването от куб с ръб 1 на два правоъгълни тетраедъра с ръбове при правия тристенен ъгъл, равни на 1. Следователно обемът на D е $V_D = 1^3 - 2.\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Така получаваме, че търсената вероятност е $P = \frac{V_D}{V_\Omega} = \frac{1}{2}$.



М+540. Двойките точки A_1, B_1; A_2, B_2 и A_3, B_3 са противоположните върхове на правилен октаедър с обем T. Ако за произволна точка P от описаната за октаедъра сфера с V_0, V_1, V_2, V_3, W_0, W_1, W_2, W_3 са означени обемите съответно на тетраедрите $A_1A_2A_3P$, $A_2A_3B_1P$, $A_3A_1B_2P$, $A_1A_2B_3P$, $B_1B_2B_3P$, $B_2B_3A_1P$, $B_3B_1A_2P$, $B_1B_2A_3P$, да се докажат равенствата:

а) $V_0^2 + W_0^2 + V_1^2 + W_1^2 + V_2^2 + W_2^2 + V_3^2 + W_3^2 = \left(\frac{T}{2}\right)^2$;

б) $\left(V_0^2 - W_0^2\right)^2 + \left(V_1^2 - W_1^2\right)^2 + \left(V_2^2 - W_2^2\right)^2 + \left(V_3^2 - W_3^2\right)^2 = \left(\frac{T^2}{6}\right)^2$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Нека точката O е центърът на описаната около октаедъра сфера. Разглеждаме Декартова координатна система $Oxyz$, както е показано на чертежа, като $A_1(1,0,0)$,

$A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$ и $P(\lambda,\mu,\nu)$. Лесно се вижда, че $T=\frac{4}{3}$. Обемът V_0 на тетраедъра $A_1A_2A_3P$ получаваме по следния начин:

$$V_0=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|1-\lambda-\mu-\nu|.$$

Аналогично се получават и обемите на останалите тетраедри:

$$V_1=\frac{1}{6}|-1-\lambda+\mu+\nu|,\ V_2=\frac{1}{6}|-1+\lambda-\mu+\nu|,\ V_3=\frac{1}{6}|-1+\lambda+\mu-\nu|,\ W_0=\frac{1}{6}|-1-\lambda-\mu-\nu|,$$

$$W_1=\frac{1}{6}|1-\lambda+\mu+\nu|,\ W_2=\frac{1}{6}|1+\lambda-\mu+\nu|,\ W_3=\frac{1}{6}|1+\lambda+\mu-\nu|.$$

След повдигане в квадрат на тези равенства и почленното им събиране получаваме

$$V_0^2+W_0^2+V_1^2+W_1^2+V_2^2+W_2^2+V_3^2+W_3^2=\frac{2}{9}\left(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right).$$

Тъй като P е точка от описаната около октаедъра сфера, то $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$. Сега от полученото равенство намираме $V_0^2+W_0^2+V_1^2+W_1^2+V_2^2+W_2^2+V_3^2+W_3^2=\frac{2}{9}.2=\left(\frac{T}{2}\right)^2$.

От намерените равенства за обемите следва, че $V_0^2-W_0^2=-\frac{1}{9}(\lambda+\mu+\nu)$, $V_1^2-W_1^2=-\frac{1}{9}(-\lambda+\mu+\nu)$, $V_2^2-W_2^2=-\frac{1}{9}(\lambda-\mu+\nu)$, $V_3^2-W_3^2=-\frac{1}{9}(\lambda+\mu-\nu)$. Следователно

$$\left(V_0^2-W_0^2\right)^2+\left(V_1^2-W_1^2\right)^2+\left(V_2^2-W_2^2\right)^2+\left(V_3^2-W_3^2\right)^2=\frac{4}{9^2}\left(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right)=\frac{4}{9^2}.1=\left(\frac{T^2}{6}\right)^2.$$