М + СЕМИНАР

МИНИАТЮРА ЗА РАЗСТОЯНИЯ ОТ ТОЧКА ДО ВЪРХОВЕТЕ НА ПРАВИЛЕН СИМПЛЕКС

проф. Сава Гроздев, доц. д-р Веселин Ненков

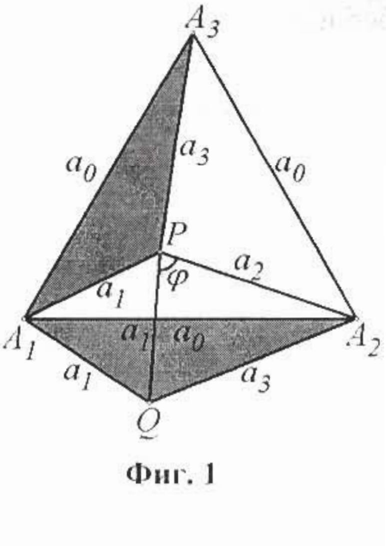
Често в равнината на даден триъгълник се търсят разстояния от точка до неговите върхове. Обратното, определянето на триъгълника по известни разстояния от дадена точка до върховете му, не винаги е възможно. Ако обаче триъгълникът е равностранен, той може да бъде определен по разстоянията от точка до върховете му и нейното положение спрямо триъгълника. Такъв е случаят със следната:

Задача 1. *Ако точката P е вътрешна за равностранния триъгълник $A_1A_2A_3$, а разстоянията от P до върховете на $A_1A_2A_3$ са равни на 3, 4 и 5, да се намери дължината на страната на $\Delta A_1A_2A_3$.*

Тук разбира се възниква въпросът за определяне на страната на $\Delta A_1A_2A_3$, ако разстоянията от P до върховете му са например 3, 5 и 7 или 57, 65 и 73. Това естествено води до следната по-обща

Задача 2. *Ако точката P е вътрешна за равностранния триъгълник $A_1A_2A_3$, а разстоянията от P до върховете A_1, A_2 и A_3 са равни съответно на a_1, a_2 и a_3, да се намери дължината на страната a_0 на $\Delta A_1A_2A_3$.*

Едно решение на задача 2, използващо допълнително построение, се получава по следния начин. Построяваме точка Q, така че ΔA_1PQ е равностранен (както е показано на фиг. 1). Означаваме с φ мярката на $\sphericalangle A_2PQ$. Тъй като $A_1A_2 = A_1A_3 = a_0$, $A_1Q = A_1P = a_1$ и $\sphericalangle A_2A_1Q = 60° - \sphericalangle A_2A_1P = \sphericalangle A_3A_1P$, то $\Delta A_1A_2Q \cong \Delta A_1A_3P$. Следователно $QA_2 = PA_3 = a_3$. Сега от косинусовата теорема за ΔA_2PQ намираме, че $\cos\varphi = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_1a_2}$.



Фиг. 1

Оттук следва още равенството $\sin\varphi = \dfrac{s_3}{2a_1a_2}$, където

(1) $$s_3 = \sqrt{2a_1^2a_2^2 + 2a_2^2a_3^2 + 2a_3^2a_1^2 - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4} = \sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}.$$

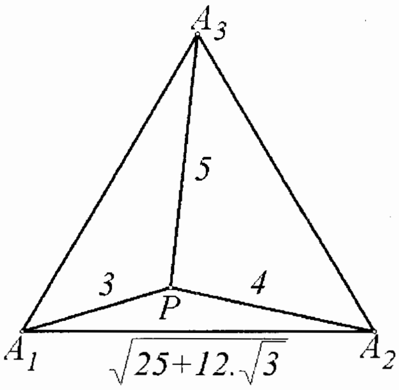
От косинусовата теорема за ΔA_1A_2P следва

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\varphi + 60°) = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2(\cos\varphi\cos 60° - \sin\varphi\sin 60°).$$

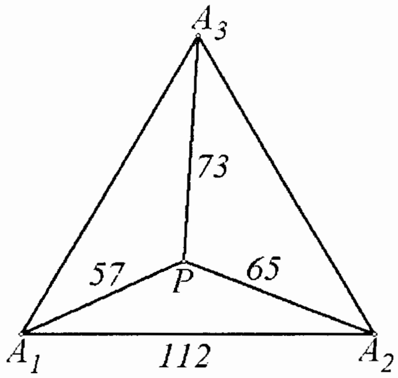
Като използваме равенствата за $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и (1), получаваме формулата:

$$(2) \qquad a_0 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + s_3\sqrt{3}}{2}}.$$

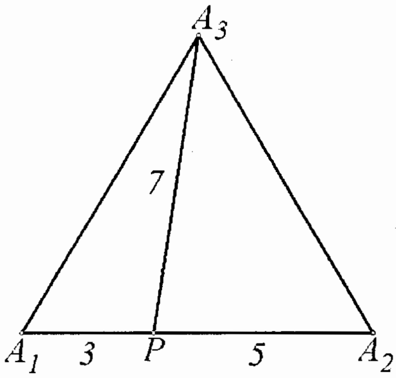
От (2) при $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ и $a_3 = 5$ получаваме $a_0 = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ (Фиг. 2). В приведеното решение $\varphi = 90°$, а косинусовата теорема се преобразува в Питагоровата теорема.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

От формулата (2) при $a_1 = 57$, $a_2 = 65$, $a_3 = 73$ (Фиг. 3) и $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$ (Фиг. 4) получаваме съответно $a_0 = 112$ и $a_0 = 8$. Във втория случай се получава, че точката P лежи върху страната A_1A_2 (Фиг. 4). Тук от една страна точката P не отговаря на всички условия в задача 2, а от друга – съществува равностранен триъгълник, страната на който се пресмята по формула (2). Това ни дава основание да обобщим задача 2 по следния начин:

Задача 3. *Ако точката P лежи в равнината на равностранния триъгълник $A_1A_2A_3$, а разстоянията от P до върховете A_1, A_2 и A_3 са равни съответно на a_1, a_2 и a_3, да се определи дължината на страната a_0 на $\Delta A_1A_2A_3$ в зависимост от положението на P спрямо $\Delta A_1A_2A_3$.*

Тъй като приведеното решение на задача 2 е коректно само когато точката P е вътрешна за $\Delta A_1A_2A_3$ и числата са дължини на страни на триъгълник, то ни е необходимо решение, обхващащо всички случаи, които се съдържат в задача 3. За целта ще използваме барицентрични координати спрямо $\Delta A_1A_2A_3$, като $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$ и $P(x_1,x_2,x_3)$ $(x_1 + x_2 + x_3 = 1)$. Разстоянието от P до произволна точка $Q(y_1,y_2,y_3)$ $(y_1 + y_2 + y_3 = 1)$ се определя чрез формулата:

$$PQ^2 = -\left[(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (y_2 - x_2)(y_3 - x_3) + (y_3 - x_3)(y_1 - x_1)\right]a_0^2.$$

От тази формула при $Q \equiv A_i$ $(i = 1,2,3)$ следват равенствата:

(3) $$a_i^2 = a_0^2\left(1 - x_i - \delta_3\right)\ \left(i = 1,2,3\right),$$

където

(4) $$\delta_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

След сумиране на равенствата (3) и използване на (4) се получава равенството:

(5) $$\delta_3 = \frac{2a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{3a_0^2}.$$

Сега от (3) и (5) намираме координатите на P във вида:

(6) $$x_1 = \frac{a_0^2 - 2a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3a_0^2},\ x_2 = \frac{a_0^2 + a_1^2 - 2a_2^2 + a_3^2}{3a_0^2},\ x_3 = \frac{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2}{3a_0^2}.$$

След заместване на координатите (6) в (4) стигаме до

(7) $$\delta_3 = \frac{a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2 + a_0^4 - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4}{3a_0^4}.$$

Приравняването на десните страни на (5) и (7) води до $a_0 = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \pm s_3\sqrt{3}}{2}}$.

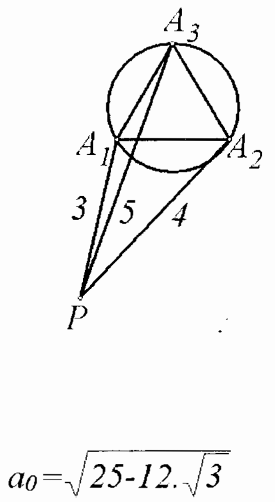
Оттук за страната a_0 получаваме (2) или

(8) $$a_0 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - s_3\sqrt{3}}{2}}.$$

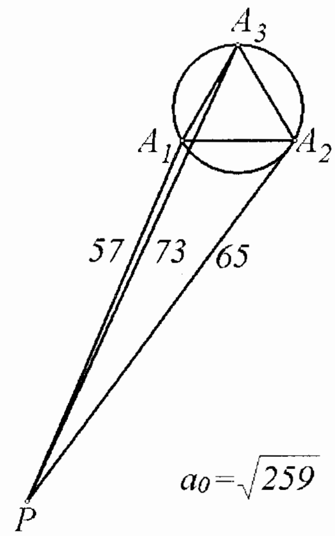
От (1), (2) и (8) следва, че когато едно от разстоянията a_1, a_2 и a_3 е по-голямо от сумата на другите две, равностранният триъгълник $A_1A_2A_3$ не съществува. В останалите случаи – когато a_1, a_2 и a_3 са страни на триъгълник или едното е равно на сумата на другите две – страната a_0 на $\Delta A_1A_2A_3$ се пресмята по една от формулите (2) или (8). Остава да се определи коя от тези формули е валидна в зависимост от положението на P в равнината на $\Delta A_1A_2A_3$. Първо да обърнем внимание, че точката P лежи върху описаната за $\Delta A_1A_2A_3$ окръжност точно когато $\delta_3 = 0$. Според (5) последното равенство е изпълнено тогава и само тогава, когато е в сила равенството

(9) $$a_0 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2}}.$$

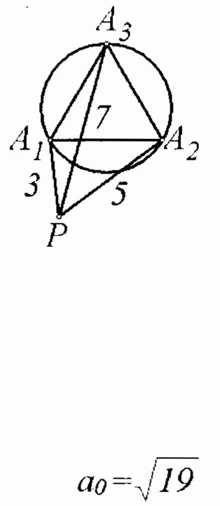
От (9) следва, че (2) и (8) водят до равенството $s_3 = 0$. От (1) се вижда, че това се случва тогава и само тогава, когато едно от разстоянията a_1, a_2 и a_3 е равно на сумата от другите две (Разбира се това твърдение е добре известно и се доказва по различни други начини). Така получихме, че a_0 се пресмята по формулата (9) тогава и само тогава, когато точката P лежи върху описаната за $\Delta A_1A_2A_3$ окръжност Γ. Освен това точката P е вътрешна за Γ, когато е изпълнено неравенството $\delta_3 > 0$, а е външна за Γ при $\delta_3 < 0$. Лесно се вижда, че тези неравенства се удовлетворяват, когато a_0 се пресмята съответно с (2) и (8). Така стигаме до следните изводи: *1) Ако P е* *вътрешна за Γ, страната a_0 се пресмята по формулата (2); 2) Ако P е външна за Γ, страната a_0 се пресмята по формулата (8); 3) Ако P е лежи върху Γ, страната a_0 се пресмята по формулата (9).*



Фиг. 5



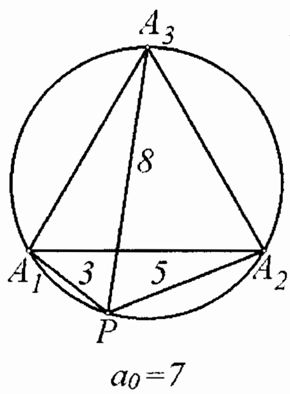
Фиг. 6



Фиг. 7

Трите разгледани по-рано случаи $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$; $a_1 = 57$, $a_2 = 65$, $a_3 = 73$ и $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$ се отнасят за точка P, вътрешна за Γ. Формулите (6) ни дават възможност да построим точката P по нейните координати, които в съответните случаи са следните: $\left(\frac{4(64-23\sqrt{3})}{193}, \frac{81-8\sqrt{3}}{193}, \frac{4(25\sqrt{3}-36)}{193}\right)$, $\left(\frac{325}{784}, \frac{33}{98}, \frac{195}{784}\right)$, $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 0\right)$.

В същите случаи, но за точка P, външна за Γ, получаваме триъгълници съответно с дължина на страната $a_0 = \sqrt{25-12\sqrt{3}}$ (Фиг. 5), $a_0 = \sqrt{19}$ (Фиг. 6) и $a_0 = 76$ (Фиг. 7). Координатите на P в съответните случаи са следните: $\left(\frac{4(64+23\sqrt{3})}{193}, \frac{81+8\sqrt{3}}{193}, -\frac{4(36+25\sqrt{3})}{193}\right)$, $\left(\frac{1105}{259}, \frac{129}{259}, -\frac{975}{259}\right)$, $\left(\frac{25}{19}, \frac{9}{19} - \frac{15}{19}\right)$. Един случай, в който точката P лежи върху описаната окръжност Γ, е показан на фигура 8 и се получава при $a_0 = 7$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$. Координатите на P са $\left(\frac{40}{49}, \frac{24}{49}, -\frac{15}{49}\right)$.



Фиг. 8

Трябва да отбележим, че както се вижда от (5) и (7), равенствата (2) и (8) (и (9), което е следствие и на двете) се обобщават с формулата $a_0^4 + a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 = = a_0^2 a_1^2 + a_0^2 a_2^2 + a_0^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2$. Тя може да се запише и по следния начин:

(10) $$\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2=3\left(a_0^4+a_1^4+a_2^4+a_3^4\right).$$

От последната формула се вижда, че всяко от числата a_0, a_1, a_2 и a_3 може са се определи чрез останалите три с някой вариант на (2) и (8), който се получава с подходяща пермутация на числата 0, 1, 2 и 3.

След като описахме подробно случая с равностранен триъгълник, възниква въпросът за разглеждане на същата задача за правилен тетраедър. Ако $A_1A_2A_3A_4$ е правилен тетраедър с ръб a_0, а $P\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ е точка в пространството, за която $PA_i=a_i$ $(i=1,2,3,4)$, аналогично на триъгълника получаваме равенствата

$$x_i=\frac{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-4a_i^2}{4a_0^2}\quad (i=1,2,3,4),$$

$$\delta_4=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{3a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2-a_4^2}{4a_0^2}=$$

$$=\frac{2\left(a_1^2a_2^2+a_1^2a_3^2+a_1^2a_4^2+a_2^2a_3^2+a_2^2a_4^2+a_3^2a_4^2\right)-3\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-a_0^2\right)}{8a_0^4}.$$

От последното равенство следва

(11) $$\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)^2=4\left(a_0^4+a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4\right).$$

Случаите на триъгълник и тетраедър се обобщават по естествен начин за правилен симплекс $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ с ръб a_0 в n-мерното пространство. Ако $P\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}\right)$ е точка, за която $PA_i=a_i$ $\left(i=1,2,\ldots,n,n+1\right)$, аналогично на предишните случаи за координатите на P спрямо $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ се получават равенствата

$$x_i=\frac{a_0^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2-4a_i^2}{na_0^2}\quad \left(i=1,2,\ldots,n,n+1\right),$$

а формулата, свързваща числата a_i $\left(i=0,1,2,\ldots,n,n+1\right)$, е следната:

(12) $$\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2\right)^2=n\left(a_0^4+a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4+a_{n+1}^4\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

Гарднер, М. Математически развлечения. Том 3. Наука и изкуство, София, 1980.

A MINIATURE ABOUT DISTANCES FROM A POINT TO THE VERTICES OF A SIMPLEX

Prof. Sava Grozdev. Assoc. prof. Dr. Veselin Nenkov

Abstract. The problem to find the side length of an equilateral triangle using the distances from a given point to the vertices of the triangle is generalized for a regular simplex.