М+ ПОДГОТОВКА

ПИСМЕН ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

26 април 2015 г.

НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

„Акад. Б. Чакалов“

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕН “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Задача 1. Да се намерят целите решения на неравенството:

$$x^2-2|x|+1\le 0$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $\sphericalangle ABC=60^\circ$. Точките M и N лежат върху описаната около триъгълника окръжност и са среди съответно на дъгите $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$. Отсечката MN пресича AB и BC съответно в точки P и Q, като $BQ=2015$. Да се намери дължината на отсечката PQ.

Задача 3. Да се реши системата:

$$\begin{vmatrix} 2x^2+xy+y^2=8 \\ x^2+2y^2=9 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Даден е четириъгълник $ABCD$. Точките M и N са среди съответно на страните AB и CD. Да се докаже, че ако диагоналът AC разполовява отсечката MN, то той разполовява и лицето на четириъгълника.

Задача 5. Да се реши неравенството:

$$\left(3^{\cos x}-3\right)^2-4.3^{\cos x}\le 0$$

Задача 6. Дадена е триъгълната пирамида $ABCD$, за която стените ABC и ABD са равнобедрени правоъгълни триъгълници с хипотенуза $AB=2\sqrt{2}$ и сключват помежду си ъгъл 45°. Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 7. Даден е триъгълник ABC с лице $S=42$. Върху страните AB, BC и CA са взети съответно точки K, L и M така, че $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{1}{2}$. Пресечните точки на отсечките CK и AL, AL и BM, BM и CK са означени съответно с N, P и Q. Да се намери лицето S_1 на триъгълника NPQ.

Задача 8. Дадена е квадратният тричлен $f(x)=8a^2x^2-8ax+a+1$, където a е реален параметър. Да се намери a, при условие, че уравнението $f(x)=0$ има два различни реални корена x_1 и x_2, за които $5x_1-3x_2=1$.