ЕДНА ПОСТРОИТЕЛНА ЗАДАЧА

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката "Една задача + много решения", която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните й приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в "мисловен алпинизъм", заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

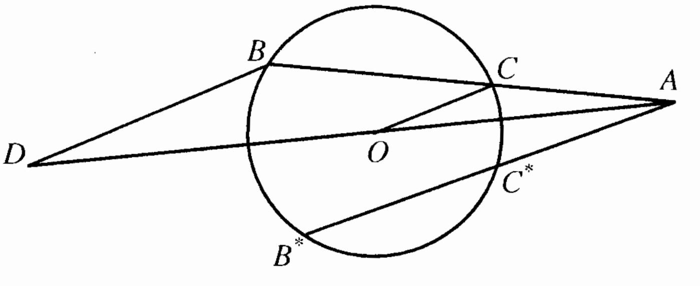
Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

Пожелаваме Ви приятни занимания!

Задача. [1] През точката A, външна за дадена окръжност, постройте секуща така, че нейната външна част да бъде равна на вътрешната й. (Решете задачата по три начина.)

Решение 1. **Анализ.** Нека AB е исканата секуща на окръжност с център O (вж. чертежа), т.е. средата C на отсечката AB лежи върху окръжността.



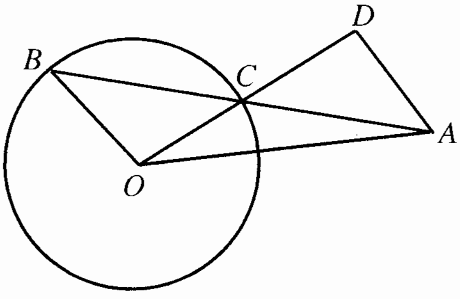
Нека D е точка върху лъча $\overrightarrow{AO}$ така, че $AD = 2AO$. Тогава CO е средна отсечка в ΔDAB и дължината на страната DB е равна на диаметъра на окръжността. Заключаваме, че точката В лежи на окръжност с център D и радиус, равен на диаметъра на дадената окръжност.

Построение. 1) От точката A построяваме лъч през центъра на кръга O. 2) Върху този лъч нанасяме отсечката AD, равна на удвоената отсечка AO. 3) От точката D с радиус, равен на диаметъра на окръжността, построяваме дъга, пресичаща дадената окръжност в точките B и B^*. 4) Съединяваме точките B и B^* с точката A. Отсечките AB и AB^* са исканите секущи.

Изследване. В общия случай задачата има две решения. Решението е единствено, ако AO пресича окръжността в точка, разстоянието от която до A е равно на диаметъра на окръжността. Задачата няма решение, ако това разстояние е по-голямо от диаметъра.

Решение 2. **Анализ.** Допускаме, че задачата е решена и $AC = BC$ (вж. чертежа). Ако съединим центъра O на дадената окръжност с точките A, B и C, получаваме триъгълника ABO, в който са известни две от страните (AO и OB) и медианата OC към третата страна. Ето защо задачата се свежда до построението на триъгълник по две страни и медиана към третата страна. Ако върху продължението на медианата OC нанесем отсечката CD, равна на OC и съединим точката D с A, получаваме, че

(*) $$\Delta ACD \cong \Delta BCO$$



по две страни ($AC = BC$, $OC = CD$) и ъгли между тях ($\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCO$ като връхни).

От (*) следва, че $AD = BO$. Следователно, за триъгълника AOD са известни всичките три страни, Ако R е радиусът на окръжността, то: $AD = BO = R$, $OD = 2OC = 2R$ и AO. Така, задачата се свежда до построяване на триъгълника ADO и на медианата AC към страната OD. можем да определим отсечката AC, която е външната част на исканата секуща.

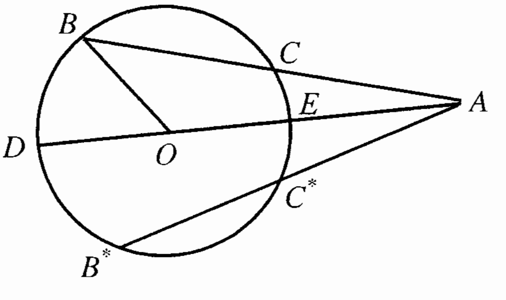
Построение. 1) Построяваме триъгълника ADO по три страни: $AD = R$, $DO = 2R$ и AO. 2) Намираме точка C, която разполовява отсечката DO. 3) Правата AC пресича окръжността за втори път в търсената точка B.

Изследване. Различните случаи са както в Решение 1.

Решение 3. **Анализ.** Допускаме, че секущата AB удовлетворява условието на задачата, т.е.

(1) $$AC = CB.$$

Нека AD е секущата от A, която минава през центъра O на окръжността. Тази секуща пресича окръжността за втори път в точката E (вж. чертежа).



Положението на точката A е дадено и затова са известни отсечките AE и AD. От теоремата за секущите имаме:

(2) $$AB.AC = AD.AE$$

Означавайки с x дължината на отсечката AC, т.е. $AC = x$. Тогава $AB = 2x$ и от (1) получаваме $AD.AE = 2x^2$, т.е.

(3) $$x = \sqrt{\frac{AD}{2}.AE}.$$

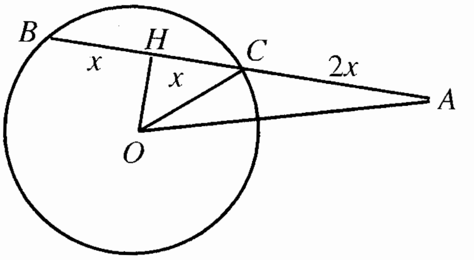
Така, задачата се свежда до построяване на отсечка x, която е средно пропорционална на известните отсечки $\frac{AD}{2}$ и AE [2].

Построение. 1) Построяваме отсечката x, определена по формулата (3) като средно пропорционална на отсечките $\frac{AD}{2}$ и AE. 2) С център точката A описваме дъга с радиус x до пресичане с дадената окръжност в точки C и C^*. 3) През точката A и точките C и C^* построяваме исканите секущи AB и AB^*.

Изследване. Различните случаи са както в Решение 1.

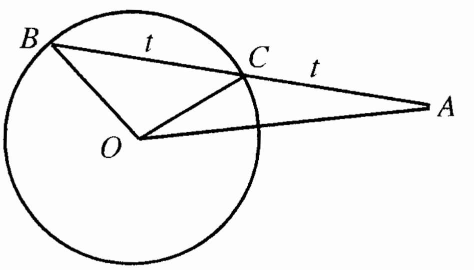
Ще опишем по-подробно изследването, което в сила и за трите решения. По условие частта от секущата, намираща се вътре в окръжността (която е хорда в окръжността), трябва да е равна на нейната външна част. Но хордата в една окръжност не може да надминава нейния диаметър. Оттук следва, че дължината на цялата секуща не може да надминава удвоения диаметър и затова решението на задачата е възможно само в случай, че най-късото разстояние от точката A до дадената окръжност е не по-голямо от диаметъра. Означавайки както по-горе центъра и радиуса на дадената окръжност съответно с O и R, можем да запишем резултатите от изследването по следния начин:

1) Задачата няма решение, ако $AO > 3R$;
2) Задачата има едно решение, ако $AO = 3R$;
3) Задачата има две решения, ако $AO < 3R$.



Решение 4. (Хари Алексиев) Нека $AC = CB = 2x$. Построяваме $OH \perp BC$ ($H \in AB$). Ясно е, че $BH = CH = x$, защото $OB = OC = R$ и значи ΔOCB е равнобедрен. От правоъгълните триъгълници OHC и OHA имаме: $OH^2 = R^2 - x^2$ и $OH^2 = OA^2 - 9x^2$. От първото равенство изваждаме второто и намираме $8x^2 = OA^2 - R^2$, т.е. $\left(2\sqrt{2}.x\right)^2 = OA^2 - R^2$ и следователно $2\sqrt{2}.x = \sqrt{OA^2 - R^2}$. Задачата се свежда до построяване на катет в правоъгълен триъгълник по дадени хипотенуза и другия катет. В крайна сметка стигаме до $AB = 4x$. Детайлите оставяме на читателя.

Решение 5. (Хари Алексиев) За триъгълника OAB имаме, че OC е медиана и затова $4.OC^2 = 2OB^2 + 2OA^2 - AB^2$. Ако $AC = BC = t$, то $4R^2 = 2R^2 + 2OA^2 - 4t^2$ и оттук $2t^2 = OA^2 + R^2$, т.е. $t\sqrt{2} = \sqrt{OA^2 + R^2}$. Задачата се свежда до построяване на хипотенуза в правоъгълен триъгълник по дадени катети OA и R.



ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Орленко, М. И. Решение геометрических задач на построение. Пособие для учителей средней школы, Государственое учебно-педагогическое издательство Министерство просвещения, БССР, Минск, 1958, 144-146.

2. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007, ISBN978-954-92139-1-1.