M + ХРОНИКА

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Поредното издание на Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) се проведе от 27 до 29 май 2016 г. в гр. Русе при домакинството на Русенски университет „А. Кънчев". Традиционно участие в нея взе отбор на ВУЗФ, в който бяха включени опитните Анна-Мария Арнаудова (IV курс) и Борислава Ирибозова (II курс), както и дебютантите Виктория Върбанова (I курс) и Жан-Антоан Тони Гаттас (I курс). Отлично се представиха Анна-Мария (сребърен медал) и Борислава (бронзов медал). Участието на другите двама студенти беше също добро,което позволи на ВУЗФ да се нареди на престижното трето място в класирането по университети в своята състезателна група. Да припомним, че Олимпиадата се провежда в три групи:

<u>Група А</u> – за студенти от природо-математическите факултети на съответните университети;
<u>ГрупаБ</u> – за студенти от инженерни висши учебни заведения;
<u>Група В</u> – за студенти, които не попадат в горните два вида висши учебни заведения (тук се състезават икономическите вузове).

Отборът на ВУЗФ се подготвя и ръководи от проф. Сава Гроздев и д-р Александър Ахегукян.

Състезателната тема за Група В на тазгодишното издание на НСОМ изглежда така:

Задача 1. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Да се пресметне A^{2016}.

б) Ако M е 5×5 матрица от цели числа и първите 22 члена на редицата $\Delta_n = \det A^n$ (n–четно число) са нейни елементи, да се докаже, че $\det M$ е четно число.

Решение: а) По индукция следва, че $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{3^n+1}{2} & 3^n \end{pmatrix}$ за всяко n и следователно

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{3^{2016}+1}{2} & 3^{2016} \end{pmatrix} \Delta_{2016} = 3^{2016}.$$

б) От а) следва, че поне 22 елемента на M са нечетни числа. Тъй като най-много 3 елемента на M са четни числа, то поне 2 нейни реда съдържат само нечетни числа. Ако прибавим единия от тези редове към другия, ще получим ред с четни числа. Развивайки детерминантата по този ред, заключаваме, че тя е четно число.

Задача 2. Дадени са точките $A(-1;-1)$ и $B(3;3)$, както и окръжност

$$k:\ x^2+(y-5)^2=R^2$$

с радиус R.

а) Да се намери R така, че правата AB да се допира до k.

б) Ако $R=1$ и точка C лежи на k, да се намери минималното лице на ΔABC.

Решение: а) Уравнението на правата AB е $y=x$. Системата

$$\begin{vmatrix} y=x \\ x^2+(y-5)^2=R^2 \end{vmatrix}$$

трябва да има единствено решение, което означава, че дискриминантата на уравнението $2x^2-10x+25-R^2=0$ трябва да е равна на нула. Оттук $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

б) Лицето на ΔABC е равно на $S(h_c)=\dfrac{AB.h_c}{2}=2\sqrt{2}h_c$ и е минимално, когато дължината на височината h_c е минимална. Следователно точка С лежи на по-близката допирателна t към окръжността, успоредна на правата $AB: y=x$. Уравнението на t е $y=x+n$, където n се намира от условието за системата

$$\begin{vmatrix} y=x+n \\ x^2+(y-5)^2=1 \end{vmatrix}$$

да има едно решение, т.е. $n=5-\sqrt{2}$. Тогава $h_c=d(AB,t)=\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ и

$$\min S(h_c)=S\left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=2\left(5-\sqrt{2}\right).$$

<u>*Забележка*</u>. Задачата може да се реши и чрез условен екстремум на функция. Ако означим $C(x_c,y_c)$, то следва, че трябва да се намери минимумът на функцията $S(x_c,y_c)$ при

условие $x_c^2+(y_c-5)^2=1$

Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+2016}$. Да се намери броят на:

а) екстремумите на $f(x)$;

б) корените на уравнението $f(x)=0$.

Решение: Дефиниционната област на функцията е реалната права с изключение на точките $-2016,\ -2015,\ -2014,\ \ldots,\ -1,\ 0$, т.е. функцията е дефинирана в

$$D=(-\infty;-2016)\cup(-2016;-2015)\cup\ldots\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

а) Тъй като $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\ldots-\frac{1}{(x+2016)^2}<0$, в дефиниционното множество D функцията $f(x)$ е строго намаляваща и следователно няма екстремуми.

б) За всеки от интервалите $(-k;-(-k-1))$, $k=1,2,\ldots,2016$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to -k+} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to -(k-1)-} f(x)=-\infty$, откъдето следва (защото функцията е намаляваща), че уравнението $f(x)=0$ има единствено уравнение в този интервал и в интервала $(-\infty;-2016)$ уравнението няма корени. В същото време в $(0;+\infty)$. Заключаваме, че търсеният брой на корените е равен на броя на разгледаните интервали, т.е на 2016.

Организацията на олимпиадата се осъществява от Национална комисия и висше училище – домакин. Върховен орган е Общото събрание, в което участват по един представител на висшите училища, представени на олимпиадата. Всяка година Общото събрание избира Национална комисия и председател. Съгласно регламента на НСОМ, по предложение на Националната комисия Общото събрание утвърждава конспект за всяка от групите. Конспектът за Група В включва:

1. Уравнения на права и равнина.
2. Криви от втора степен.
3. Матрици, детерминанти, системи линейни уравнения.
4. Полиноми с цели и реални коефициенти.
5. Числови редици.
6. Функции на една реална променлива: непрекъснатост, диференцуемост, основни теореми на диференциалното смятане.
7. Неопределени, определени интеграли и приложения.
8. Комбинаторика.

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество