М + НАЙ-МАЛКИТЕ

БРОЕНЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Четиво за 4 – 5 клас

Здравейте, приятели!

По случай празника на детето 1-ви юни учениците от един клас решили да разменят подаръци помежду си. Разбира се, никой нямал желание да остане със собствения си подарък. Естественият въпрос е по колко различни начина може да се извърши разпределението, ако всеки ученик участва с точно един подарък. Задачата е от групата на т. нар. комбинаторни задачи. Отговорът зависи от броя на учениците в класа. Колко е броят на възможните различни разпределения, ако класът наброява например 20 ученици? Да се отговори веднага е трудно и затова ще разсъждаваме последователно. В задачите по-долу става дума за група ученици, които приготвили по един подарък. Подаръците се разпределят между учениците така, че всеки получава подарък, различен от собствения.

Задача 1. По колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са двама?

Решение: Отговорът е очевиден – по един единствен начин.

Задача 2. По колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са трима?

Решение: Да означим учениците с A, $Б$ и $В$. Без ограничение можем да разсъждаваме от позицията на A. За A има две възможности – да даде своя подарък на $Б$ или на $В$. Без ограничение, нека A дава подаръка си на $Б$. Тогава $Б$ трябва да даде своя подарък на $В$. В противен случай $В$ ще остане със собствения си подарък и това противоречи на условието на задачата. Заключаваме, че възможността е единствена и следователно броят на разпределенията при трима ученици е равен на 2.

Задача 3. По колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са четирима?

Решение: Да означим учениците с A, $Б$, $В$ и $Г$. Без ограничение можем да разсъждаваме отново от позицията на A. За A има три възможности – да даде своя подарък на $Б$, на $В$ или на $Г$. Това означава, че резултатът от следващите разсъждения трябва накрая да умножим по 3. А тези следващи разсъждения включват два варианта. При първия от тях този, който е получил подарък от A, връща своя на A. За останалите двама възможността е единствена съгласно задача 1. При втория вариант стигаме до задачата за разпределение на подаръците между трима, което е точно задача 2. Като използваме резултата от задача 2, заключаваме, че вторият вариант се разпада на 2 случая и случаите (общо за двата варианта) стават 3. Заключаваме, че броят на разпределенията при четирима ученици е $3.3=9$.

Задача 4. Ивана разполага с пет кръгчета в пет различни цвята и с пет звездички в същите цветове. Тя иска да залепи звездичка върху кръгче, но забелязва, че ако двете са едноцветни, звездичката не се вижда. По колко начина може Ивана да залепи всички звездички върху кръгчетата така, че да се виждат?

Решение: Забелязахте ли, че това е всъщност задача от вида, който разглеждахме досега: по колко начина могат да се разпределят подаръците, ако учениците в групата са петима?

Да означим цветовете с *А*, *Б*, *В*, *Г* и *Д*. Ще разсъждаваме отново от позицията на *А*. За звездичката *А* има четири възможности – да бъде залепена върху кръгче *Б*, *В*, *Г* или *Д*. Следователно резултатът от следващите разсъждения трябва накрая да се умножи по 4. Следващите разсъждения включват пак два варианта. При първия от тях звездичката с цвета на кръгчето, върху което е *А*, залепяме на *А*. За останалите три звездички прилагаме задача 2, съгласно която случаите са 2. При втория вариант имаме 4 свободни кръгчета и четири свободни звездички, като стигаме до задачата за разпределение на подаръците между четирима, което е точно задача 3. Като използваме резултата от задача 3, заключаваме че вторият вариант се разпада на 9 случая и случаите (общо за двата варианта) стават $2+9=11$. Заключаваме, че броят на залепванията е $(2+9).4=11.4=44$.

Резултатите от решените задачи нанасяме в таблица:

2	3	4	5
1	2	9	44

Нека направим изводи от полученото до тук.

Да обърнем внимание, че когато става дума за един единствен ученик, той няма с кого да размени своя подарък и следователно броят на разпределенията е равен на 0. Таблицата може да се разшири:

брой ученици	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
брой разпределения	0	1	2	9	44	265				

Как се получава бройката на втория ред в шестата колонка? Събираме числата от втория ред на предишните две колонки (в конкретния случай четвърта и пета колонка) и умножаваме сбора с номера на предната колонка, т.е. $(9+44).5=53.5=265$.

<u>За упражнение</u>:

Задача 5. Попълнете числата в колонките с номера 7, 8, 9 и 10.

Задача 6. Ива разполага с 6 топки в 6 различни цвята и с 6 кутийки в същите цветове. Тя поставила по една топка във всяка кутийка. Оказало се, че няма топка, поставена в кутийка със същия цвят. По колко различни начина може да стане това?

(Опишете разсъжденията си!)

До нови срещи!

Автор на четивото: Д-р М. Плюс