$\overset{?}{1 = 4}$ **M+** **ЕДНА ЗАДАЧА + МНОГО РЕШЕНИЯ**

РАЛЗАГАНЕ НА МНОЖИТЕЛИ НА ПОЛИНОМА $x^3+y^3+z^3-3xyz$

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката "Една задача + много решения", която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните ѝ приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в "мисловен алпинизъм", заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

Пожелаваме Ви приятни занимания!

Защо поставяме въпроса за разлагане на полинома $x^3+y^3+z^3-3xyz$? Първо, защото разлагането е изключително важна операция с многочислени приложения и второ, защото този полином се ползва със значителна популярност. Полиномът е свързан с полиномите x^3, $x^3 \pm y^3$, $x^3 \pm 1$, x^3+ax+b, а така също с формулата на Кардано за корените на уравнението $x^3+ax+b=0$, както и с корените на единицата, т.е с корените на уравнението $x^3-1=0$, които са $1, \omega$ и ω^2, където $\omega \neq 1 = \omega^3$.

Първоначално ще предложим евристика за разлагането на полинома $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Решение 1. (Частична „ евристика") Известно е разлагането

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right).$$

Разглеждаме множителите на това разлагане $x+y$ и x^2-xy+y^2. Забелязваме, че тези изрази са симетрични и са съответно от първа и втора степен относно променливите x и y. Естествен въпрос е как изглеждат аналогичните изрази за три променливи x, y и z, като се спазва симетричността и съответните степени относно променливите. Търсенето на аналогия води до изразите $x+y+z$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$. Остава да проверим дали тяхното произведение съвпада с разглеждания полином, т.е. умножаваме $x+y+z$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$, което организираме по следния начин:

$$x\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^3+xy^2+z^2x-x^2y-xyz-zx^2$$
$$y\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz$$
$$z\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=zx^2+y^2z+z^3-xyz-yz^2-z^2x$$

Събираме трите равенства и извършваме приведение на подобните членове:

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

По този начин доказахме, че $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Решение 2. (Още една частична „ евристика“)

Естествено е, че x^3, y^3 и z^3 са част от израза $(x+y+z)^3$. Затова започваме така:

$$(x+y+z)^3=x^3+(y+z)^3+3x.(y+z)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3yz(y+z)+3x.(y+z)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3yz(x+y+z)+3x.(y+z)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3yz(x+y+z)+3.(xy+zx)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3.(xy+yz+zx)(x+y+z)$$

Тогава $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3.(xy+yz+zx)(x+y+z)$

Изнасяйки общия множител $x+y+z$, окончателно получаваме

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right)$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)-3(xy+yz+zx)\right)$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Решение 3. („Добавяне“) Тук основната идея е да сведем разлагането до изследването на две възможности за променливата z:

Ако $z=0$, то $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ е позната формула и всичко е наред.

Ако $z\neq 0$, то разглеждаме $\left(\dfrac{x}{z}\right)^3+\left(\dfrac{y}{z}\right)^3+1-3\left(\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{y}{z}\right)$ или $p^3+q^3+1-3pq$, където $p=\dfrac{x}{z}$, $q=\dfrac{y}{z}$.

Ще използваме тъждеството $p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)$. Добавяме $1-3pq$ към двете му страни и продължаваме по следния начин:

$$p^3+q^3+1-3pq=(p+q)^3-3pq(p+q)+1-3pq$$

Но $(p+q)^3-3pq(p+q)+1-3pq=(p+q)^3+1-3pq(p+q+1)$

$$(p+q)^3+1-3pq(p+q+1)=(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1\right)-3pq(p+q+1)$$
$$(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1\right)-3pq(p+q+1)=(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1-3pq\right)$$
$$(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1-3pq\right)=(p+q+1)\left(p^2+q^2+1-pq-p-q\right).$$

Следователно, $p^3+q^3+1-3pq=(p+q+1)\left(p^2+q^2+1-pq-p-q\right)$.

Заместваме $p=\dfrac{x}{z}$ и $q=\dfrac{y}{z}$ и опростявайки с умножение по z^3, получаваме

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right).$$

Решение 4. От формулата $x^3+y^3=-3xy(x+y)+(x+y)^3$ имаме

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-3xy(x+y)+(x+y)^3+z^3-3xyz=$$
$$=(x+y)^3+z^3-3xyz-3xy(x+y)=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$$
$$(x+y+z)\left((x+y)^2-(x+y)z+z^2\right)-3xy(x+y+z)=$$
$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+2xy-xz-yz+z^2\right)-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right).$$

Следователно, $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Решение 5. (Конструктивен подход)

Очевидно е, че $(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z).t^2+(xy+yz+zx).t-xyz$.

Тогава

$$x^3-(x+y+z)x^2+(xy+yz+zx).x-xyz=0 \text{ при } t=x$$
$$y^3-(x+y+z)y^2+(xy+yz+zx).y-xyz=0 \text{ при } t=y$$
$$z^3-(x+y+z)z^2+(xy+yz+zx).z-xyz=0 \text{ при } t=z$$

Събирайки горните равенства, получаваме

$$\left(x^3+y^3+z^3\right)-(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)+(xy+yz+zx).(x+y+z)-3xyz=0.$$

Следователно

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Решение 6. (Симетричен полином)

От теоремата за единственост на изразяване на симетричния полином $x^3+y^3+z^3$ чрез елементарните симетрични функции $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz имаме

$$x^3+y^3+z^3=A.(x+y+z)^3+B.(x+y+z)(xy+yz+zx)+C.xyz,$$

където A, B и C са константи, които могат са се определят по метода на неопределените кооефициенти.

При $x=y=z=1$ имаме $27A+9B+C=3$

При $x=y=1$ и $z=0$ имаме, $8A+2B=2$

При $x=y=1$ и $z=-1$ имаме $A-B-C=1$

Решавайки системата $27A+9B+C=3$, $8A+2B=2$, $A-B-C=1$, получаваме $A=1$, $B=-3$, $C=3$. Следователно

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(xy+yz+zx)(x+y+z)+3xyz$$

Изнасяйки в дясната част на горното тъждество общия множител $x+y+z$, окончателно получаваме $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Накрая да отбележим, че полиномът $x^3+y^3+z^3-3xyz$ може да бъде полезен инструмент в решенията на много задачи и затова заслужи нашето внимание.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007, ISBN978-954-92139-1-1.