М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

КВАДРАТНИ ПАРАМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА I ЧАСТ

Христо Лесов, гр. Казанлък

(*продължение от миналия брой*)

Отговори, упътвания и кратки решения

6. а) В зависимост от стойностите на параметъра n са възможни случаите:

<u>Случай I.</u> $n=1$. Даденото неравенство става $4y+1>0$ и $y>-\frac{1}{4}$. Следователно всяко $y>0$ е решение на неравенството.

<u>Случай II.</u> $n>1$. Решенията на неравенството зависят от дискриминантата $D_1=4-(n-1)(3n-2)=-3n^2+5n+2=-(n-2)(3n+1)$, като:

1.) при $D_1=0$, т.е. при $n=2$ неравенството има вида $y^2+4y+4>0$, т.е. $(y+2)^2>0$, което е изпълнено за всяко $y\neq-2$, а следователно и за всяко $y>0$;

2.) при $D_1 > 0$, т.е. при $1 < n < 2$ решенията са $y > y_1$ или $y < y_2$, където $y_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{D_1}}{n-1}$ и е ясно, че $y_2 < y_1 < 0$ предвид формулите на Виет. Всяко положително число $y > y_1$ е решение на неравенството;

3.) при $D_1 < 0$, т.е. при $n > 2$ даденото неравенство е изпълнено за всяко y.

<u>*Случай* III</u>. $n < 1$. Тогава

1.) $D_1 = 0$ за $n = -\dfrac{1}{3}$. Имаме $-\dfrac{4}{3}y^2 + 4y - 3 = -\dfrac{1}{3}(2y-3)^2 \le 0$ за всяко y;

2.) $D_1 > 0$ за $-\dfrac{1}{3} < n < 1$ и решенията са $y_2 < y < y_1 < 0$;

3.) $D_1 < 0$ за $n < -\dfrac{1}{3}$ и даденото неравенство няма решение.

Отговор на задачата $n \ge 1$.

б) Както при решаването на а) получаваме $n \le -1$.

7. За дискриминантата $D = (2p+1)^2 - 4\left(p^2 - \dfrac{1}{4}\right) = 2(2p+1)$ има следните възможности:

1.) $D = 0$, т.е. $p = -\dfrac{1}{2}$ и неравенството е $x^2 > 0$, което е изпълнено за всяко $x \neq 0$, а значи и за $x < 0$.

2.) $D < 0$, т.е. $p < -\dfrac{1}{2}$ и неравенството се удовлетворява за всяко x, включително и за $x < 0$.

3.) $D > 0$, т.е. $p > -\dfrac{1}{2}$ и решенията на даденото неравенство са $x < x_2$ или $x > x_1$, където $x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(2p+1 \pm \sqrt{2(2p+1)}\right)$. Ясно е, че $x_1 > x_2$, $x_1 > 0$ и трябва $x_2 \ge 0$, т.е. $2p+1 \ge \sqrt{2(2p+1)}$ или $(2p+1)^2 \ge 2(2p+1)$. Тъй като $2p+1 > 0$, то $2p+1 \ge 2$, т.е. $p \ge \dfrac{1}{2}$. Така, че търсените стойности са $p \le -\dfrac{1}{2}$ или $p \ge \dfrac{1}{2}$.

8. Полагаме $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \ge 0$ и даденото неравенството приема вида $(y+1)^2 + 4(y-1) + q^2 + 2q > 0$ или $y^2 + 6y + q^2 + 2q - 3 > 0$, което трябва да е изпълнено за всяко $y \ge 0$. Съответната дискриминанта е $D = 12 - q^2 - 2q$. Ако $D \le 0$, то неравенството е в сила за всяко y, а значи и за $y \ge 0$. Така, че условието на задачата се удовлетворява за тези стойности на q, за които $12 - q^2 - 2q \le 0$, т.е. $q^2 + 2q - 12 \ge 0$. Оттук определяме $q \ge \sqrt{13} - 1$ или $q \le -\left(\sqrt{13}+1\right)$. Нека $D > 0$, т.е. $q^2 + 2q - 12 < 0$ и $-\left(\sqrt{13}+1\right) < q < \sqrt{13} - 1$. Квадратното неравенство относно y има решения $y < -\left(3 + \sqrt{D}\right)$ или $y > \sqrt{D} - 3$. За да бъдат решения всички $y \geq 0$, трябва $\sqrt{D}-3 \geq 0$, т.е. $D \geq 9$ или $12-q^2-2q \geq 9$, т.е. $q^2+2q-3 \leq 0$, откъдето $-3 \leq q \leq 1$.

9. а) Случай I. $a=0$. Даденото неравенство става $x-2 \geq 0$ и всяко негово решение е решение и на неравенството $x-1 \geq 0$.

Случай II. $a>0$. Дискриминантата е $(2a-1)^2+8a=(2a+1)^2>0$ и решенията на даденото неравенство са обединение на два безкрайни интервала. Значи те съдържат числа, които не са решения на $x-1 \geq 0$.

Случай III. $a<0$. Тогава решенията на квадратното неравенство образуват интервала $[x_2;x_1]$, където $x_2<x_1$ са корените на уравнението $ax^2-(2a-1)x-2=0$. Те са 2 и $-\frac{1}{a}$. Имаме, че всяко решение на неравенството е решение и на $x-1 \geq 0$ тогава и само тогава, когато $x_2 \geq 1$. Ако $x_2=2 \leq -\frac{1}{a}=x_1$, решенията са $\left[2;-\frac{1}{a}\right]$ и понеже $a<0$, то $a \geq -\frac{1}{2}$. Но $1<2$ и значи всяко $a \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$ изпълнява изискванията на задачата. Ако $x_2=-\frac{1}{a}<2=x_1$, т.е. $a<-\frac{1}{2}$, решенията са $\left(-\frac{1}{a};2\right)$ и от $-\frac{1}{a} \geq 1$ намираме $a \geq -1$ така, че $a \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right]$. Окончателно решение на задачата е всяко $a \in [-1;0]$.

б) След разглеждане на случаите за параметъра a както в а), се получава, че решение на задачата е всяко $a \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$.

10. а) Случай I. $b=1$. Даденото неравенство става $-x-2>0$, т.е. $x<-2$ и изискването на задачата е изпълнено.

Случай II. $b>1$. Дискриминантата е $D=(2b-3)^2-4(b-1)(b-3)=4b-3>0$, а решенията на квадратното неравенство са $x \in (-\infty;x_2) \cup (x_1;\infty)$, където $x_1>x_2$ са корените на уравнението $(b-1)x^2+(2b-3)x+b-3=0$. Ясно е, че даденото неравенство има за решения числата $x<1$.

Случай III. $b<1$. Ако $D \leq 0$, т.е. $b \leq \frac{3}{4}$, то за всяко x е изпълнено $(b-1)x^2+(2b-3)x+b-3 \leq 0$. Ако $D>0$, т.е. $\frac{3}{4}<b<1$, то решенията на даденото неравенство са $x \in (x_2;x_1)$ и този интервал съдържа поне едно $x<1$ тогава и само тогава, когато $x_1<1$ или $\frac{3-2b+\sqrt{4b-3}}{2(b-1)}<1$, което при $b<1$ е равносилно на $\sqrt{4b-3}>4b-5$. Но това е в сила при $\frac{3}{4}<b<1$, защото $4b-5<-1$. Окончателно намираме $b \in \left(\frac{3}{4};\infty\right)$.

б) Полагаме $y=-x>-1$, т.е. $x<1$, а $(1-b)x^2-(2b-3)x-b-3<0$ и след умножаване с -1 даденото неравенство приема вида от а).