

М + СЕМИНАР

ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧНИ СИСТЕМИ И ХАОС

Пресиана Маринова, Ивета Македонска

Резюме. Настоящата разработка разглежда дадена динамична система с параметър и поведението ѝ в дългосрочен план. Наблюдаваме, че след достатъчен брой итерации на функцията $f(x) = r - x^2$, която представлява нашата динамична система, за едни стойности на параметъра r тя се ориентира към определено число, но за други стойности – към периодично поведение. Оказва се, че в един момент се постига хаос. Изучават се интересните явления „периодичен прозорец” и „синхронизиран хаос”.

Key words: dynamical system, chaos, function, orbit diagram, periodic window, synchronized chaos

1. Въведение.

Да си представим, че имаме дадена функция $f: X \rightarrow X$ и начална точка $x_0 \in \mathbb{R}$. Рекурентната зависимост $x_n = f(x_{n-1})$ се интерпретира по следния начин: x_n означава състоянието на системата в момент n и състоянието на системата в следващия момент се определя от правилото, зададено от изображението f . Фундаментален въпрос е какво е поведението на системата в дългосрочен план.

За определени функции f независимо от началната точка x_0 , f клони към константа. Сега да предположим, че f съдържа някакъв параметър r . За едни стойности на този параметър f^n клони към константа или към зависещо от параметъра число, но за други стойности това число се превръща в циклично поведение на функцията, т.е. например $f^n(x) = p, f^{n+1} = q$ и $f^{n+2} = p$. Такова поведение се нарича 2-цикъл. За други стойности на r можем да получим 4-цикъл, 8-цикъл, дори 5-цикъл. В определен момент достигахме хаос, т.е. няма регулярно периодично поведение.

Всъщност, ако графиката на f притежава единствен максимум и е вдлъбната, поведението ѝ е качествено определено. Всяка функция, изпълняваща тези условия, се държи по един и същи начин, който ще опишем за $f(x) = r - x^2$.

2. Дефиниции.

Дефиниция 2.1. *Логистично изображение* е рекурентна зависимост от втора степен, която често се използва, за да определи хаотично поведение.

Дефиниция 2.2. *Орбита*: Стойностите x , итерирани по функцията $x_{n+1} = f(x_n)$, образуват редица от резултати x_0, x_1, x_2 и т.н. Тази редица всъщност се нарича орбита, започваща от x_0 .

Дефиниция 2.3. *Фиксирана точка* x^* е точка, която удовлетворява връзката $f(x^*) = x^*$. Всъщност, ако $x_n = x^*$, то $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) = x^*$.

Дефиниция 2.4. *Линейна стабилност*: Точка от графиката на дадена функция е линейно стабилна тогава и само тогава, когато производната на функцията в тази точка е по-малка от 1 по абсолютна стойност.

Дефиниция 2.5. *Глобална стабилност* на фиксирана точка: За дадена функция f точка $x = f(x^*)$ е стабилна тогава и само тогава, когато $f^n(x_0) \rightarrow x^*$ за $\forall x_0$ при $n \rightarrow \infty$.

Бележка: Разликата между двете е показана чрез пример 3.1 в секция 3, подсекция 3.2.

Дефиниция 2.6. *Производната на функция* характеризира скоростта на изменението на функцията. Геометричното ѝ съдържание е, че задава наклона на графиката на функцията в дадена точка. Функция, която има производна, се нарича диференцируема.

Дефиниция 2.7. *Бифуркация* е драматична промяна в поведението на динамична система с варирането на параметъра.

Дефиниция 2.8. *Хаос* е аperiодично дългосрочно поведение на динамична система, при което се наблюдава чувствителност спрямо началното условие.

3. Фиксирани точки и паяжинни диаграми.

3.1. Фиксирани точки и линейна стабилност.

Нека x^* е фиксирана точка за дадена функция f . За да определим стабилността на x^* , разглеждаме много близък до x^* член: $x_n = x^* + \eta_n$, където $\eta_n \in \mathbb{R}$ е с много малка стойност. Задаваме си въпроса дали отклонението расте или намалява с увеличаването на n . Заместваме и получаваме следния резултат:

$$\begin{aligned} x^* + \eta_{n+1} &= x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = \\ &= f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n)^2 \\ f(x^* + \eta_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

Но тъй като $f(x) = x$, уравнението се свежда до

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n)^2$$

Уравнението се разделя на два случая.

Случай 1. При $|f'(x^*)| \neq 0$

Поради пренебрежително малката стойност на $O(\eta_n)^2$ можем да разглеждаме уравнението без него. Тогава получаваме линейната графика $\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n$ със собствена стойност или множител $\lambda = f'(x^*)$. Всъщност решението на това линейно изображение се забелязва доста лесно $\eta_1 = \lambda \cdot \eta_0, \eta_2 = \lambda \cdot \eta_1 = \lambda^2$ и т.н. Така получаваме, че $\eta_n = \lambda^n \cdot \eta_0$.

Ако $|\lambda| = |f'(x^*)| < 1$, то $\eta_n \rightarrow 0$, когато $n \rightarrow \infty$ и тогава фиксираната точка е линейно стабилна. И обратното, ако $|f'(x^*)| > 1$, фиксираната точка е нестабилна. Тези заключения за стабилността са базирани на линеаризацията, но могат да се докажат и с нелинейни изображения.

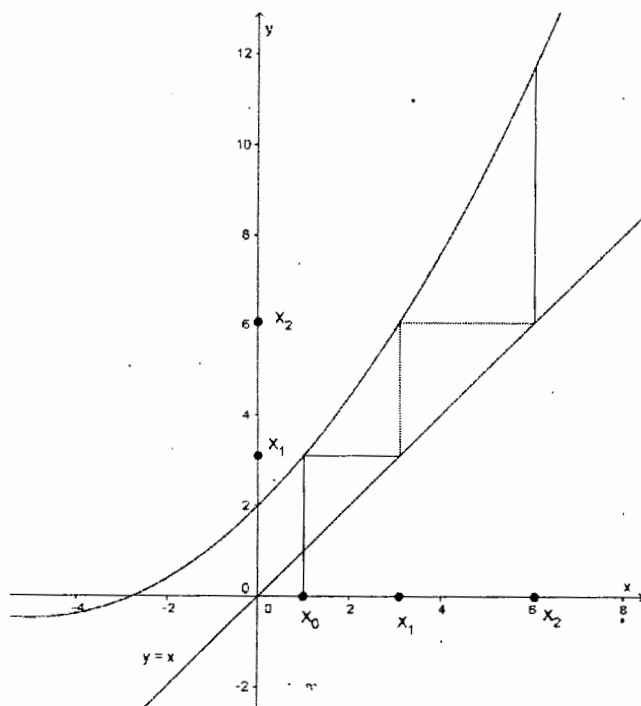
Случай 2. При $|f'(x^*)| = 0$

Всъщност линеаризацията не ни показва нищо за този граничен случай и тогава пренебрегнатият член $O(\eta)^2$ има значение за определянето на стабилността. Оказва се, че когато $|f'(x^*)| = 0$, функцията клони с много по-голяма скорост към фиксираната точка x^* . Такава точка се нарича *суперстабилна*.

3.2. Паяжинни диаграми.

В тази част ще покажем практически метод за намиране на стабилните фиксирани точки на дадена функция $f(x)$.

Избираме начална точка x_0 , от която започваме итерацията. Нанасяме я на абсцисната ос и издигаме перпендикуляр от нея, докато не пресече графиката на функцията. Ординатата на пресечната точка е $f(x_0) = x_1$. Вместо обаче да нанасяме x_1 на абсцисата и да повтаряме операцията, за улеснение построяваме успоредна на абсцисата права и я пресичаме с правата $y = x$. От новата пресечна точка издигаме вертикал, който пресича графиката, и повтаряме за всяка итерация на функцията. Получаваме диаграма, която напомня паяжина, както на фиг. 1.



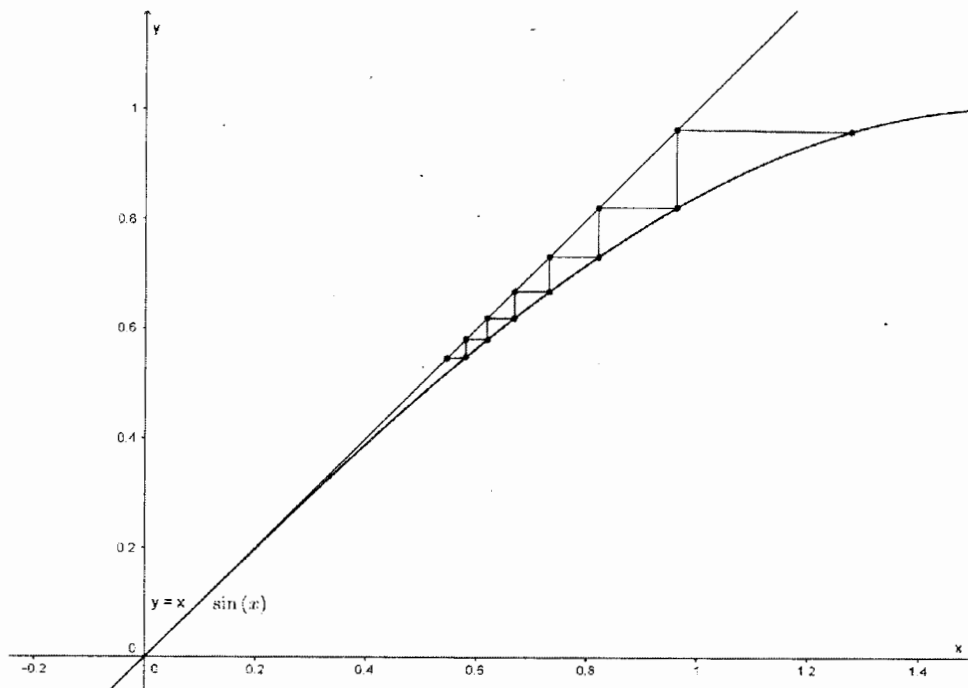
Фигура 1. Паяжинна диаграма

Паяжинните диаграми са доста полезни, понеже дават нагледно значителна информация за поведението на функцията след итерирането ѝ и така по-лесно усвояваме линейно получените резултати. Паяжинните диаграми стават още по-ценни, когато линейният анализ не може да се справи както в следващия пример.

Пример 3.2.1. Разглеждаме изображението $x_{n+1} = \sin x_n$. Ще покажем, че стабилността на фиксираната точка $x^* = 0$ не е определена от линеаризацията. След това ще използваме паяжинна диаграма, за да покажем, че $x = 0$ е глобално стабилна в целия интервал.

Доказателство. Множителят $x^* = 0$ е $f'(0) = \cos 0 = 1$, което е граничният случай, където линейният анализ не дава решение. Обаче паяжинната диаграма от фигура 2 показва, че x_0 е стабилна. Орбитата бавно се насочва към тясно каналче във фиксирана точка. (Подобно изображение се получава и при $x_0 < 0$).

За да покажем, че стабилността е в целия интервал, трябва да проверим, че всички орбити удовлетворяват условието $x_n \rightarrow 0$. Но за всяко x_0 първата итерация ни изпраща незабавно към интервала $-1 \leq x_1 \leq 1$, докато $|\sin x| \leq 1$. В този интервал паяжинната диаграма качествено изглежда като на фигура 2, така че срещата е сигурна.

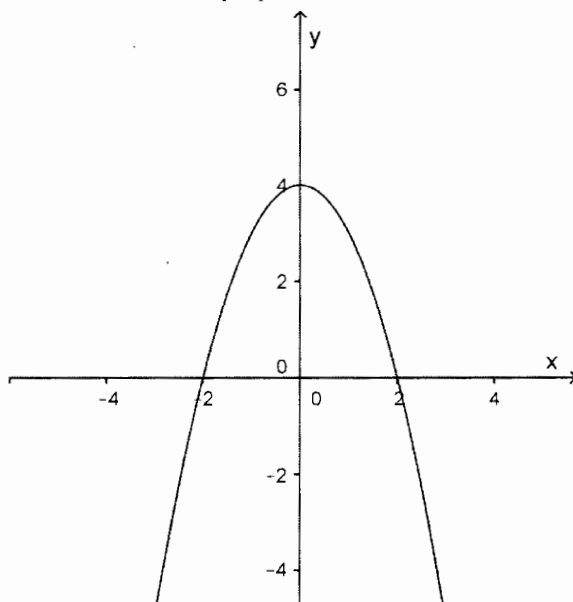


Фигура 2.

4. Логически изображения.

В настоящата разработка разглеждаме функцията $f(x) = r - x^2$ в зависимост от параметъра r . На фиг. 3 е показана графиката на f в интервала $0 \leq r \leq 5$. Както можем да видим, тя представлява параболa и с изменението на параметъра r променя позицията си по

ординатната ос. В тази статия изследваме функцията в интервала $r \in [-\infty, 1.8]$, защото тук се наблюдава много интересно поведение на графиката.

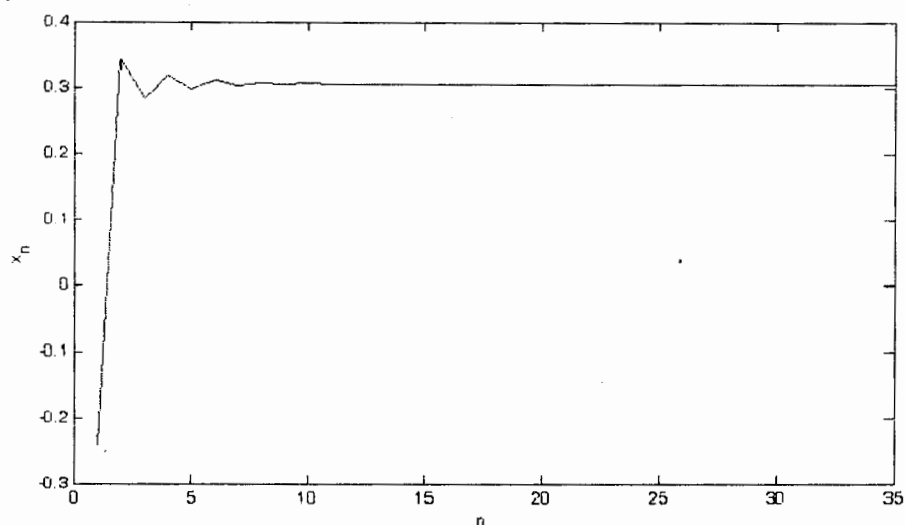


Фигура 3. Графика на функцията $f(x) = r - x^2$ при $r = 4$

4.1. Удвояване на периода.

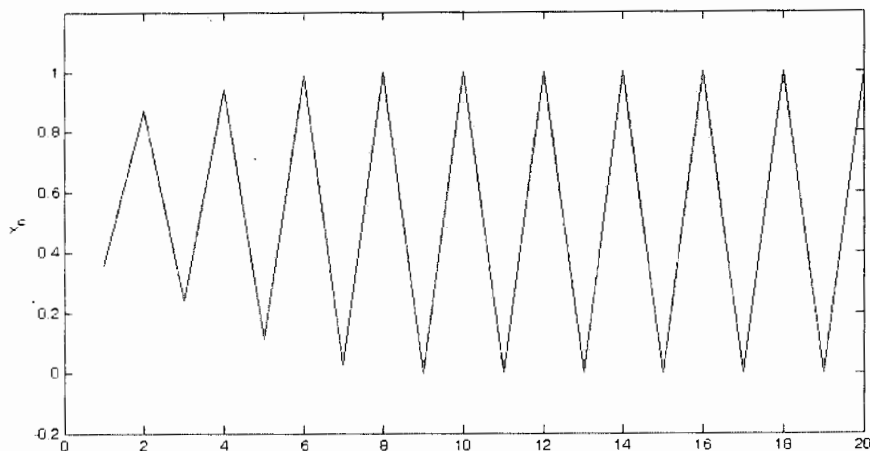
Както вече споменахме, ще изследваме функцията в интервала $r \in [-\infty, 1.8]$. В този интервал графиката ѝ драстично променя поведението си за изключително кратки периоди.

За $r < -0.25$ графиката клони към 1. В малкия интервал $0.25 < r < 0.75$ стойността расте и графиката клони към една фиксирана точка. Наблюдава се драстично изменение на графиката на f (фиг. 4).



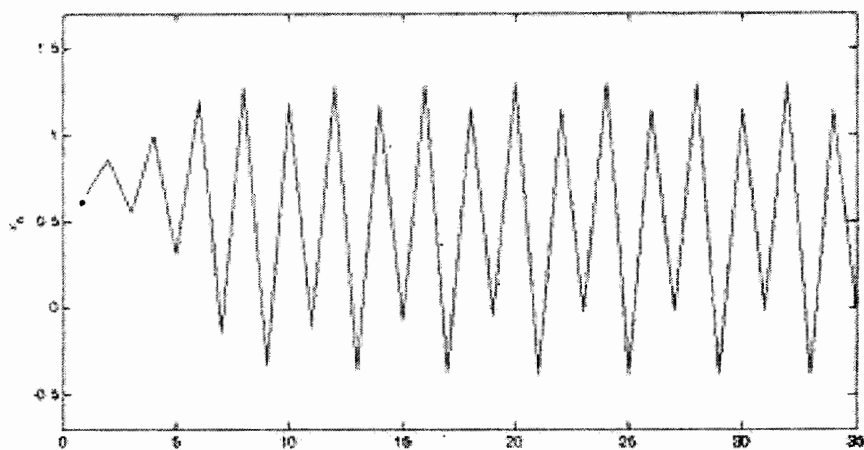
Фигура 4. Графиката, клоняща към една фиксирана точка при $r = 0.4$

За по-голямо r , например при $r = 1$ стойностите отново растат, но се редуват по-голяма стойност с по-малка. Такова изменение, в което x_n се изменя на всеки две итерации, се нарича периодичен 2-цикъл. Този резултат ясно се забелязва на фиг. 5



Фигура 5. 2-цикъл при $r = 1$

При още по-голямо r , $r = 1.3$ се получава друг цикъл, който този път повтаря всеки 4 стойности (фиг. 6). Този нов цикъл се получава с удвояването на предишния 2-цикъл и се нарича 4-цикъл.



Фигура 6. 4-цикъл при $r = 1.3$

При по-нататъшните получаващи се цикли с увеличаване на r периодите се удвояват: 8, 16, 32 и т.н. Тогава с компютърни експерименти достигаме до резултатите:

| | |
|-------------------|------------------|
| $r_1 = 0.75$ | ражда се 2-цикъл |
| $r_2 = 1.25$ | 4 |
| $r_3 = 1.36789$ | 8 |
| $r_4 = 1.39399$ | 16 |
| $r_5 = 1.3996933$ | 32 |

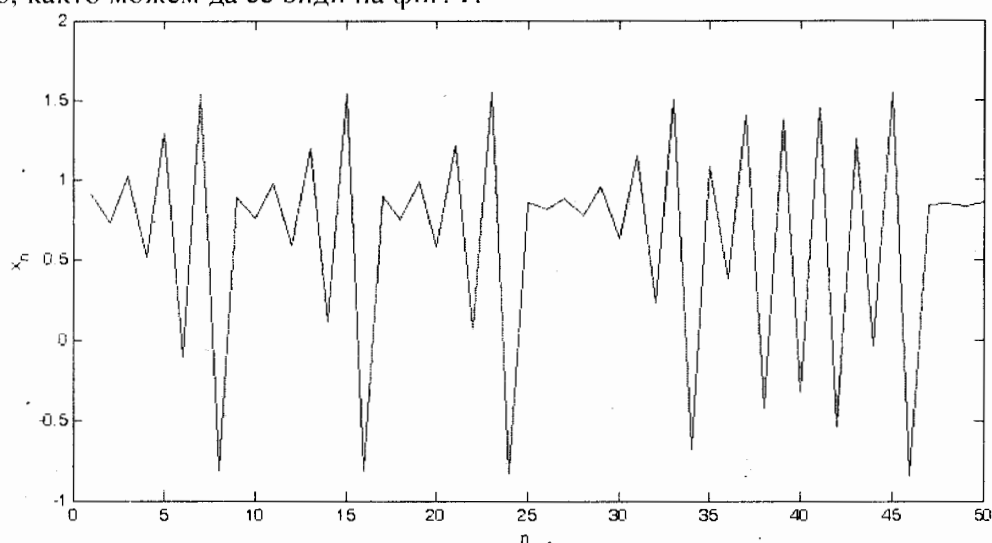
Забелязваме, че периодите се удвояват все по-бързо с нарастването на r . Оказва се, че съществува коефициент, с който апроксимативно можем да определим стойността на r за следващото удвояване на периода от предните две такива стойности:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669 \dots$$

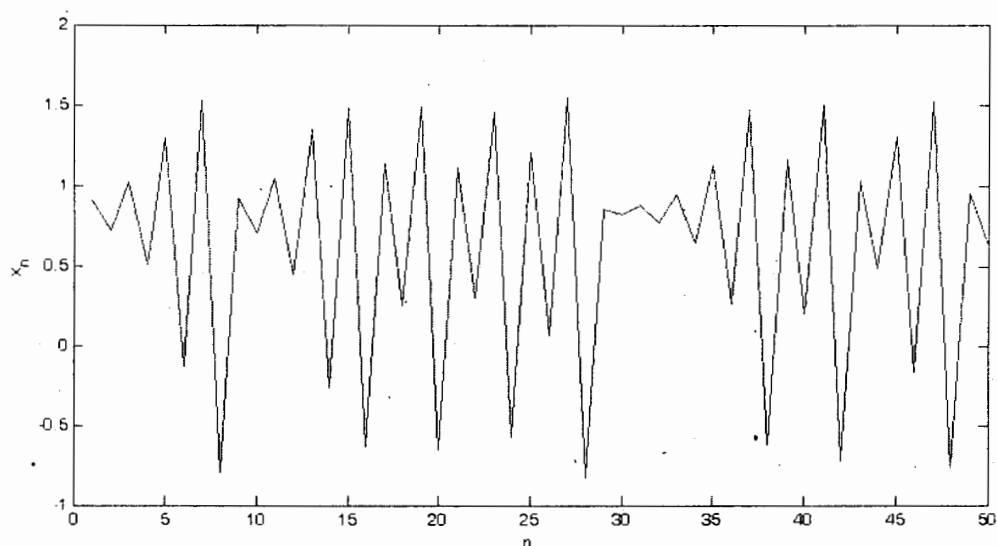
Тази граница е една и съща, без значение каква функция се итерира. В такъв смисъл числото $\delta = 4.669$ е универсално.

4.2. Хаос и периодични прозорци.

В процеса на изследване на функцията забелязваме, че при някои стойности на r настъпва хаос. В тези случаи за няколко стойности на r последователността x_n никога не се застопорява на фиксирана точка или периодична орбита, тоест дългосрочното поведение е аperiodично, както можем да се види на фиг. 7.

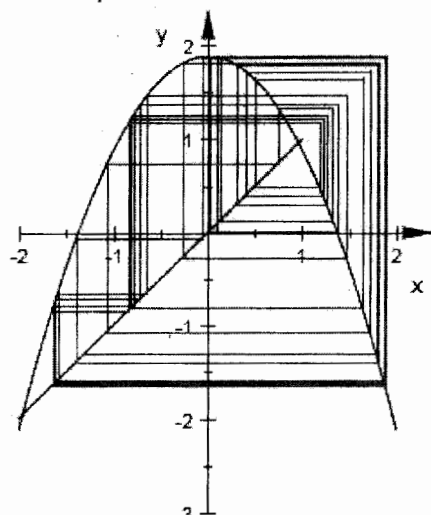


Фигура 7. Хаос при $r = 1.547, x_0 = 0.8$



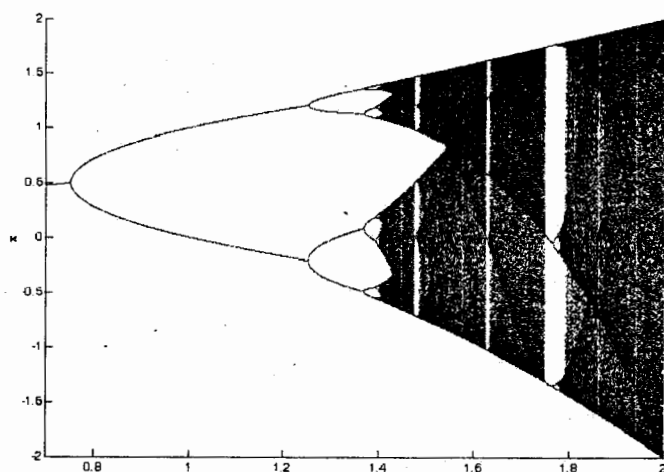
Фигура 8. Хаос при $r = 1.547, x_0 = 0.801$

Всъщност съответната паяжинна диаграма е с впечатляваща сложност (фиг. 9).

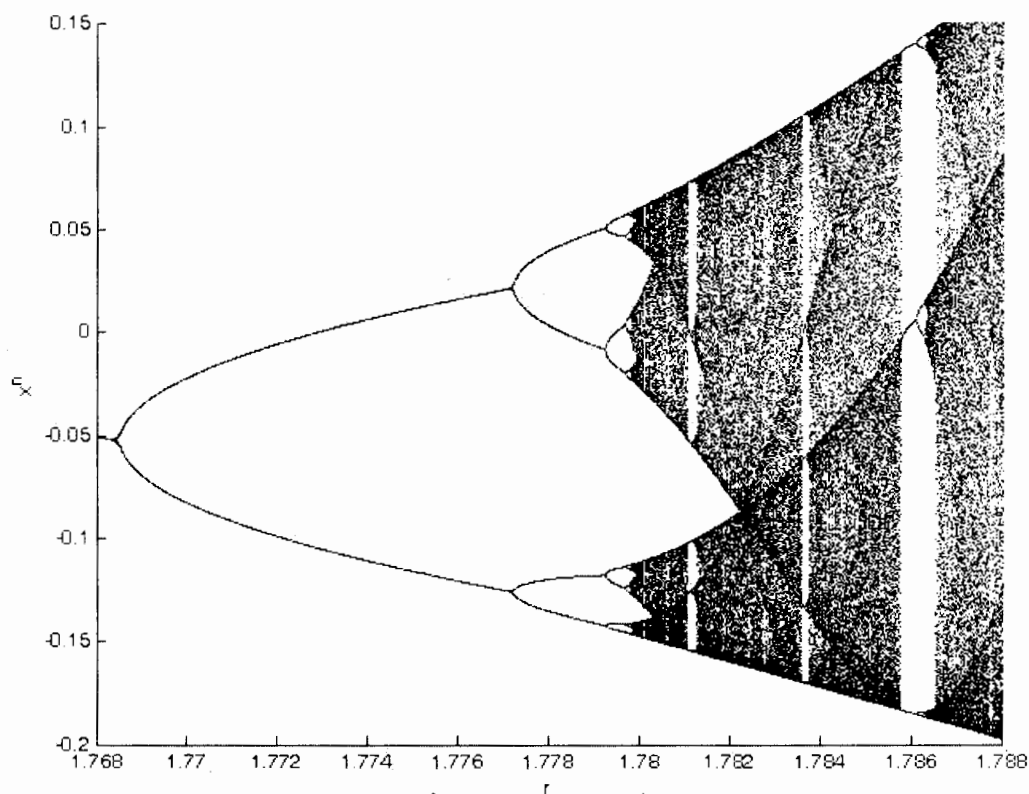


Фигура 9. Паяжинна диаграма на хаос при $r = 1.547$

Логично е да предположим, че с увеличаването на r системата става все по-хаотична, но динамиките са много по-изтънчени. За да покажем дългосрочното поведение на графиката за всички стойности на r при една и съща начална стойност x_0 , сме създали орбитова диаграма (фиг. 10), която е толкова великолепна, че е станала символ на нелинейната динамика. Реализираме орбитна диаграма чрез компютърна програма с няколко стъпки. Първо генерираме орбита, започваща от произволно избрана стойност x_0 и някакво начално r . Итерируем достатъчен брой пъти (напр. 1000), за да може динамичната система да се установи към един тип поведение, като например да се получи 4-цикъл. След като приключат предходните процеси, начертаваме точките, получени от 1000-ата итерация до например 1300-а. След това избираме друга стойност на r , но много близка до предната и повтаряме операцията. Продължаваме до крайното избрано r . Така се забелязват промените при различните стойности на параметъра.



Фигура 10. Орбитова диаграма в интервала $r \in [0.7; 2]$



Фигура 11. Орбитова диаграма в интервала $r \in [1.768; 1.788]$

На фиг. 11 е показана много интригуваща част от диаграмата - в периода $1.768 \leq r \leq 1.788$ - намираме се в периодичен прозорец. Ясно се вижда, че графиката представлява умалено копие на общата орбитна диаграма. Разделянето, което забелязваме при $r = 1.768$, представлява бифуркацията, която удвоява периодите, но в периодичния 3-прозорец. Ще обясним по-подробно това явление в секция 5.1.

4.3. Анализ.

4.3.1. Първа итерация.

В предната секция изведохме няколко резултата. В тази част ще покажем не само графичното им представяне, но и аналитичното им доказателство.

Пример. Намерете всички фиксирани точки и определете стабилността им за функцията $f(x) = r - x^2$.

Решение. Фиксираните точки се определят от $x^* = f(x^*) = r - (x^*)^2$. Тогава:

$$(x^*)^2 + x^* - r = 0 \text{ и } x_{1,2}^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4r}}{2}.$$

Това всъщност са фиксираните точки на нашата функция. Стабилността зависи от множителя $f'(x^*) = -2x^* + 1 = 1 - 2x^*$. За да е стабилна една точка, трябва да е изпълнено условието: $|f'(x^*)| < 1$. Тогава неравенството има вида $|1 - 2x^*| < 1$, т.е. $|1 \pm \sqrt{1+4r}| < 1$.

Случай 1. $|1 - \sqrt{1+4r}| < 1$.

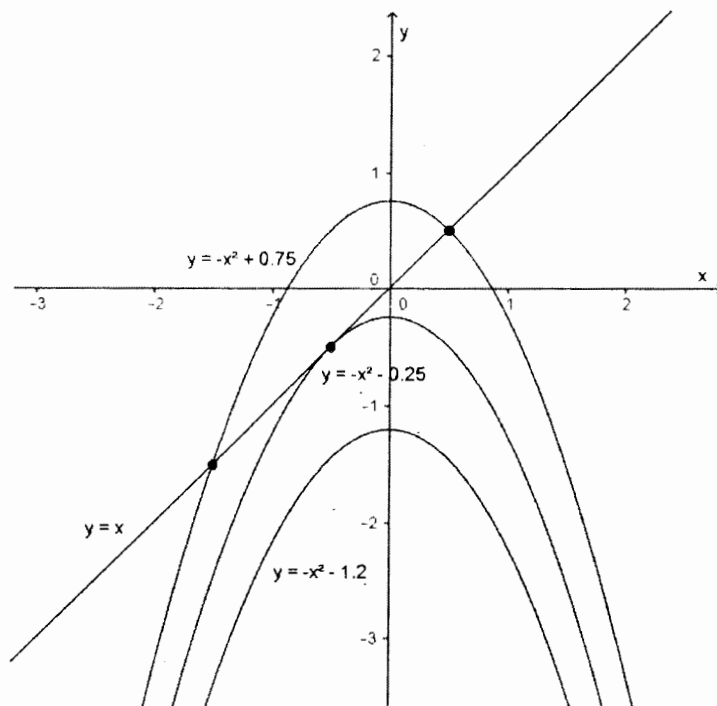
а) $1 - \sqrt{1+4r} < 1$, откъдето $\sqrt{1+4r} > 0$ и следователно $r > -0,25$.

б) $\sqrt{1+4r} - 1 < 1$, откъдето $\sqrt{1+4r} < 2$, т.е. $1+4r < 4$ и следователно $r < 0,75$.

Случай 2. $|1 + \sqrt{1+4r}| < 1$. Но $1 + \sqrt{1+4r} > 0$ и този случай е невъзможен.

Следователно фиксираната точка е нестабилна..

Резултатите от примера са онагледени с графичен анализ. При $r < 0.25$ параболата лежи под диагонала и нямаме фиксирана точка. С нарастването на r параболата се движи нагоре по ординатата. Само при $r = 0.25$ диагоналят става допирателна за графиката и имаме единствена фиксирана точка. За $r > 0.75$ параболата пресича диагонала и се създава втора фиксирана точка.



Фигура 12. Графиката на $f(x)$ при $r = 0.75$; -0.25 и -1.2

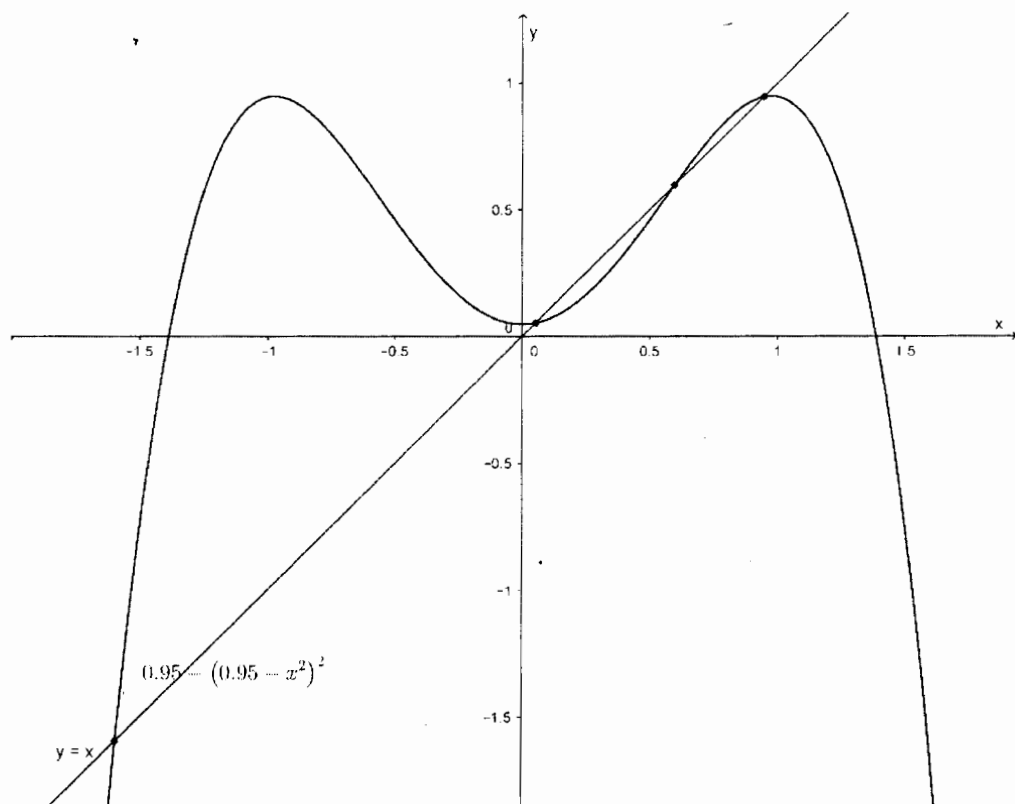
Фигурата също показва как x^* загубва стабилност. Когато r нараства повече от 1, наклонът става все по-стръмен. На фиг. 12 също може да се види, че наклонът $f'(x) = -1$ се получава при $r = 0.75$. Тази бифуркация се нарича *флип-бифуркация*. Флип-бифуркацията често се свързва с удвояването на периода. В нашето логистично изображение флип-бифуркацията настъпва при $r = 0.75$ и наистина се създава 2-цикъл.

4.3.2. Втора итерация.

Пример. Покажете, че логистичното изображение има 2-цикъл за всички $r > 0.75$

и намерете стойностите на r , за които точките са стабилни.

Решение. 2-цикълът съществува, ако съществуват две точки p и q , които отговарят на условието $f(p) = q$ и $f(q) = p$. Еквивалентно на това: $f(f(p)) = p$, където $f(x) = r - x^2$. Всъщност p е фиксирана точка на двойно-итерираното изображение при $f^2(x) = f(f(x))$. Графиката на функцията $f^2(x)$ е показана на фиг. 13.



Фигура 13. Графиката на $f^2(x)$ при $r = 0.95$

За да намерим p и q , трябва да решим уравнението за точките, в които диагоналят пресича графиката, т. е. трябва да решим уравнение от 4-та степен: $f^2(p) = p$.

$$\begin{aligned} f(f(p)) &= f(r - p^2) = r - (r - p^2)^2 = -p^4 + 2p^2r + r - r^2 \\ &= (p^2 + p - r)(p^2 - p + 1 - r) \end{aligned}$$

Достатъчно е да решим само $p^2 - p + 1 - r = 0$, тъй като другият множител представлява произведението на стойностите на фиксираните точки. Тогава $D = 1 + 4r - 4 = 4r - 3 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4r-3}}{2}$ и оттук следва, че $p_1 = \frac{1 + \sqrt{4r-3}}{2}$ и $p_2 = \frac{1 - \sqrt{4r-3}}{2}$. Решенията са реални за $4r - 3 > 0 \Rightarrow r > 0.75$. От това разбираме, че 2-цикълът съществува за всички $r > 0.75$. При $r = 0.75$ се получава флип-бифуркация, а при $r < 0.75$ не съществува 2-цикъл.

Паяжинната диаграма показва как флип-бифуркацията може да удвоява периоди. Представете си графиката на функция f и вижте локалното изображение близо до фиксираните точки, където $f'(x^*) = -1$. Ако графиката е обърната надолу, близо до x^* , паяжинната диаграма създава малък стабилен 2-цикъл, близо до фиксираните точки, както се вижда на фиг. 14.

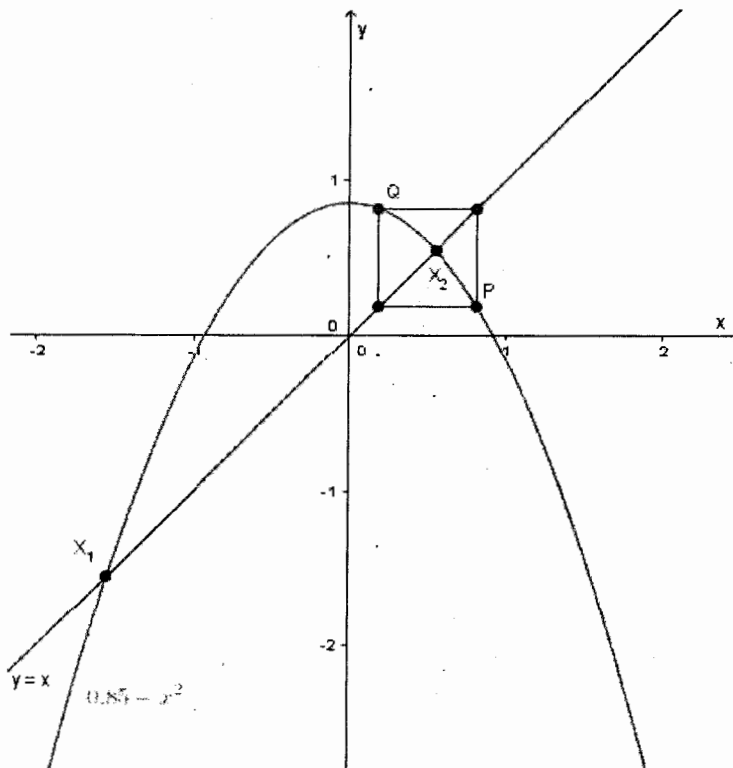
Точките p и q са стабилни при втората итерация на f , тоест:

$$|(f^2)'(p)| < 1 \Leftrightarrow |f'(f(p)) \cdot f'(p)| < 1 \Leftrightarrow |f'(q)| |f'(p)| < 1$$

Всъщност $f'(p) = -2p$ и $f'(q) = -2q \Rightarrow |4pq| < 1$ Но p и q са корени на уравнението $x^2 - x - r + 1 = 0$ и $pq = 1 - r$. Тогава: $|4(1-r)| < 1 \Leftrightarrow |4 - 4r| < 1$.

Случай 1. $4 - 4r < 1 \Leftrightarrow r > 0,75$.

Случай 2. $4r - 4 < 1 \Leftrightarrow r < 1,25$.



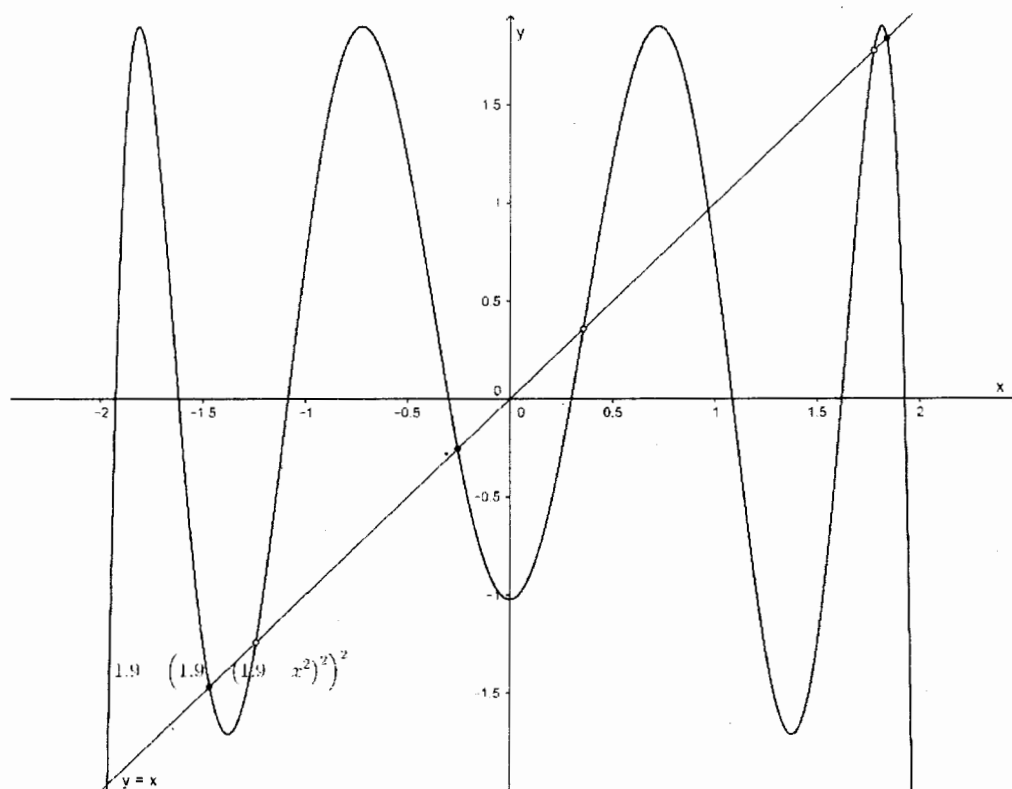
Фигура 14. Поява на 2-цикъл при $r = 0.8$

С това стигаме до интервала $0.75 < r < 1.25$, в който точките p и q са стабилни точки.

5. Периодични прозорци.

Едно от най-интересните явления в орбитовата диаграма е появяването на периодични прозорци. Първият въпрос, на който ще отговорим, е как се появява 3-цикълът (същият метод може да се приложи и за останалите периодични прозорци).

Както вече знаем, $x_{n+1} = f(x_n)$ и 2-цикъл се появява, когато $f^2(x^*) = x^*$. Аналогично, 3-цикъл се появява, когато $f^3(x^*) = x^*$, т.е. по дефиниция всяка точка p от 3-цикъл се повтаря на всеки три итерации – изпълнява $f^3(p) = p$ и следователно е фиксирана точка за третата итерация на f . За съжаление полиномът $f^3(p)$ е от 8-ма степен и не можем да го решим напълно за фиксираните точки. Построявайки си обаче графика, можем да получим нужната информация нагледно, както на фиг.15 ($r = 1.9$).

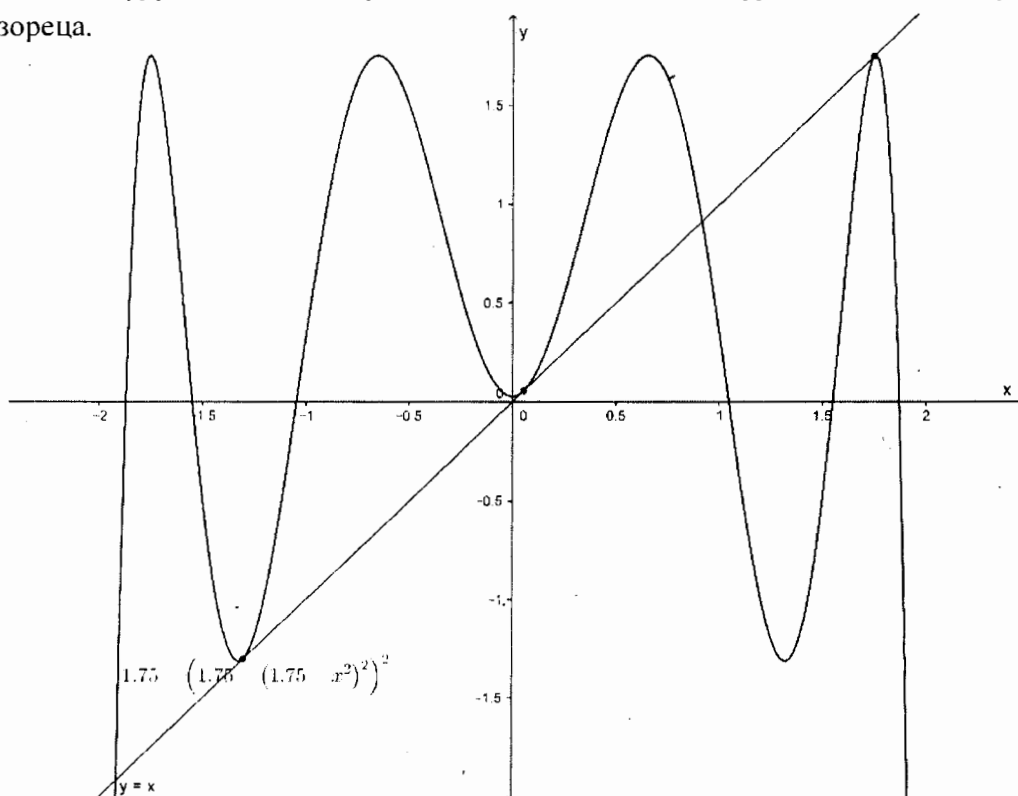


Фигура 15. Графика за $f^3(x)$ при $r = 1.9$

Пресечните точки на графиката на третата итерация на f с диагонала изобразяват решенията на $f^3(x)$. Решенията са 8, но от тях ни интересуват само 6, тъй като две от тях изпълняват $f(x^*) = x^*$. Черните точки определят стабилен 3-цикъл; при белите пък той е нестабилен. До това заключение можем да стигнем, пресмятайки наклона на допирателната в съответната точка. При черните точки той е доста по-малък по абсолютна стойност, отколкото при белите – условието за стабилност на фиксирана точка.

Сега да си представим, че намаляваме стойността на r към режима на хаос преди 3-цикъл. Така графиката от фиг. 16 ще се промени, като „хълмчетата“ ще се смъкнат надолу,

а „долините“ ще се издигнат нагоре – графиката ще се отдръпне от диагонала, както на фиг. 15, където шестте точки са изчезнали ($r = 1.748$). Следователно някъде между $r = 1.752$ и $r = 1.748$ графиката ще бъде допирателна към диагонала – ще имаме допирателна бифуркация. Тази промяна в поведението на функцията дефинира появата на 3-прозореца.



Фигура 16. Графика за $f^3(x)$ при $r = 1.75$

За да намерим аналитично стойността, при която се появява допирателната бифуркация, трябва да вземем под внимание както съществуването на 3-цикъл, така и факта, че правата $y = x$ е допирателна към графиката на функцията, т.е. наклонът на производната на $f^3(x)$ е равен на 1.

Нека фиксирани точки за третата итерация на f са a, b и c , където a, b, c са различни. Образуваме системата

$$f(a) = r - a^2 = b$$

$$f(b) = r - b^2 = c$$

$$f(c) = r - c^2 = a$$

$$(f^3)'(a) = 1$$

Пресмятаме производната $f'(a) = -2a$ и получаваме, че $abc = -\frac{1}{8}$.

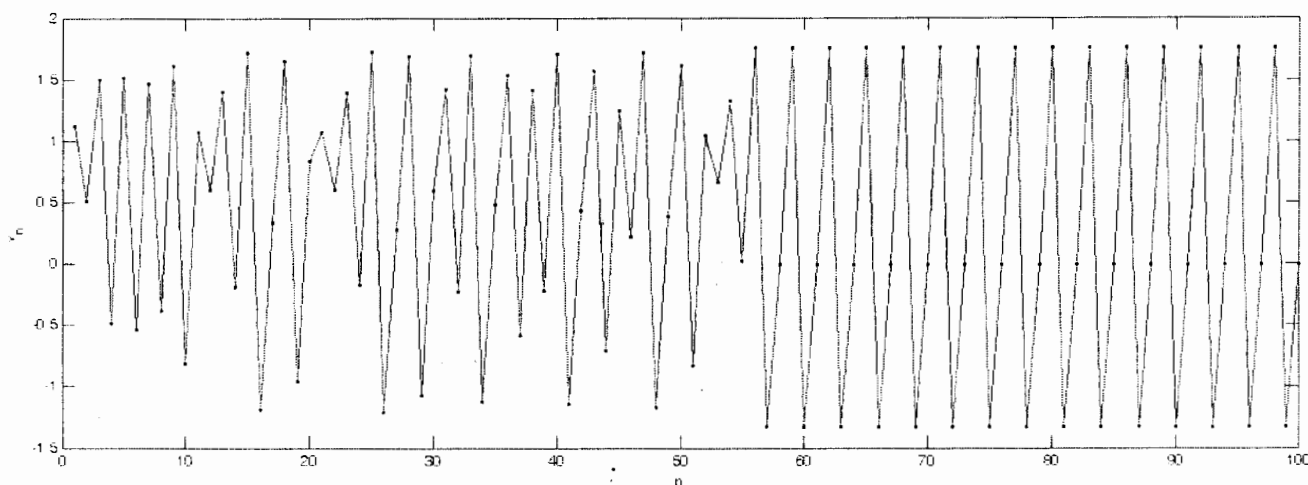
Полагаме $a + b + c = A, ab + bc + ca = B, abc = C$ и преобразуваме горната система с неизвестните A, B, C и r :

$$\begin{aligned}
 AB - C &= 1 \\
 A^2 + A - 2 &= 3r \\
 r^3 - (A^2 - 2B)r^2 + (B^2 - 2AC)r - C^2 - C &= 0
 \end{aligned}$$

$$C = -\frac{1}{8}$$

Решавайки системата, получаваме единствено решение за $r = \frac{7}{4}$, което потвърждава експериментално получените резултати.

Следващата графика показва появата на 3-цикъл около 60-тата итерация на f .



Фигура 17. Поява на 3-цикъл при $r = 1.758$

5.1. Удвояване на периода в прозореца.

В края на секция 3.2. показвахме, че графично изображение, копие на орбитната диаграма, се появява в интервала $r \in [1.768; 1.788]$, т.е. където се намира 3-прозорецът. Обяснението отново е свързано с „хълмчетата“ и „долините“. Точно след като стабилният 3-цикъл се е обособил след допирателната бифуркация, наклонът на допирателната в черните точки е много близо до $+1$. Увеличавайки r , наклонът намалява с голяма бързина от $+1$ и накрая стига до -1 . Когато това се случи, флип-бифуркация кара всяка от трите черни точки да се раздвои: 3-цикълът удвоява периода си и се превръща в 6-цикъл. Същият механизъм на удвояване на периода работи и тук само че сега образува орбити с период $3 \cdot 2^n$. Аналогична конструкция на удвояване на периода може да се намери във всички периодични прозорци.

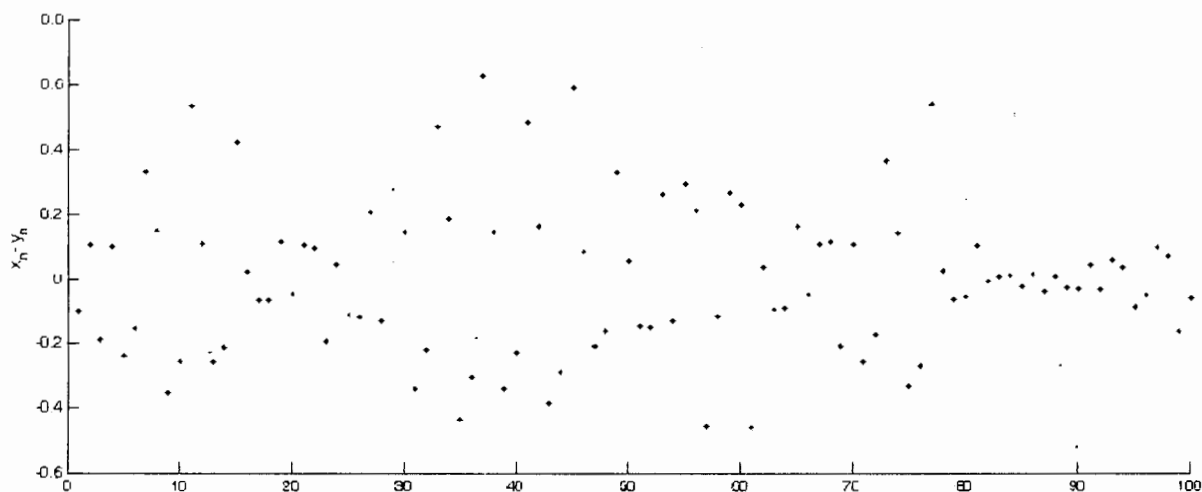
6. Синхронизиран хаос.

Разглеждаме друг тип итерации на функцията $f(x) = r - x^2$ – по две променливи x и y по следния начин:

$$\begin{aligned}
 x_n &= f(x_{n-1})(1 - \varepsilon) + f(y_{n-1})\varepsilon \\
 y_n &= f(y_{n-1})(1 - \varepsilon) + f(x_{n-1})\varepsilon,
 \end{aligned}$$

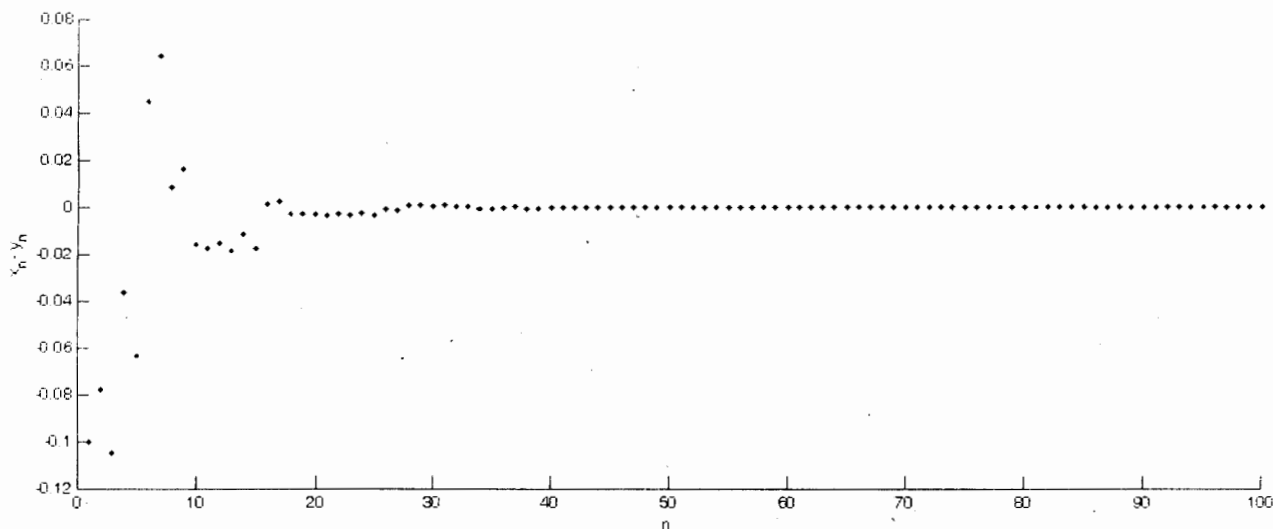
където ε е някакво реално положително число, по-малко от 1. Нека x_0 и y_0 са началните

стойности, от които започваме да итерираме. Приемаме r за константа, за която системата е в хаотичен режим. Нека $\varepsilon = 0$. Забелязваме, че двете системи са напълно независими една от друга – $x_n = f(x_n - 1)$ и $y_n = f(y_n - 1)$. При $\varepsilon = 1$ системите са обвързани, но по такъв начин, че поведението им много се различава в бъдеще. Когато $\varepsilon = 0.5$, се оказва, че x и y са напълно идентични. Оттук бихме могли да заключим, че с отдалечаването на ε от 0.5 ще имаме все по-малко зависимо поведение на двете системи една от друга.



Фигура 18. Графика на функцията при $\varepsilon = 0.09$; $x_0 = 0.6$; $y_0 = 0.7$

Наистина, на фиг. 18 са изобразени стойностите на $x_n - y_n$ в зависимост от n за $\varepsilon = 0.09$. Забелязваме, че точките са доста хаотично разположени, т.е. разликата $x_n - y_n$ варира – поведението на системите не е дори подобно. При същите начални стойности x_0 и y_0 и при $\varepsilon = 0.8$ след достатъчен брой итерации разликата започва да се ориентира към нулата, т.е. двете системи имат едно и също поведение в дългосрочен план – такова явление се нарича синхронизиран хаос.



Фигура 19. Графика на функцията при $\varepsilon = 0.8$; $x_0 = 0.6$; $y_0 = 0.7$

Както вече споменахме, за $\varepsilon = 0.5$ системите са идентични, т.е. имаме синхронизиран хаос от самото начало. Колкото повече се отдалечаваме от 0.5, толкова повече итерации ще са необходими за синхронизиране на хаоса на двете системи, докато накрая достигнем $\varepsilon = 0$, когато системите са напълно независими.

7. Бъдещо развитие.

Основната идея за разглеждане по темата е намиране на теоретични доказателства за резултатите в последната секция. Ще искаме да покажем, че наистина итерацията

$$x_n = f(x_n - 1)(1 - \varepsilon) + f(y_n - 1)\varepsilon \quad y_n = f(y_n - 1)\varepsilon + f(x_n - 1)(1 - \varepsilon)$$

води до синхронизиране на поведението на $f(x)$ и $f(y)$ при достатъчен брой итерации и близки стойности на x_0 и y_0 за $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

8. Заключение.

Настоящата разработка въвежда в основите на теорията на динамичните системи и хаоса, като разглежда по-задълбочено поведението на $f(x) = r - x^2$. Бяха показани резултати от компютърни експерименти по темата, част от тях придружени с теоретичен анализ.

9. Благодарности.

В заключение искаме да благодарим на ментора ни Никола Камбуров за предложената тема и помощта му през целия процес на работа, на Яница Пехова за съветите по софтуерната част, на Иван Герганов за това, че ни помогна да се справим с проблемите при писането и дизайна. Изказваме благодарности и на Ученическия институт по математика и информатика и Американска фондация за България за предложените условия за работа по време на Лятната изследователска школа по математика и информатика, както и на списание "*Математика плюс*" за възможността да публикуваме разработката си.

10. Бележки.

S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos (Chapter 10.1-10.4), 2001

DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS AND CHAOS

Abstract. The paper considers a given dynamical parameterized system and its behaviour in long-term conditions. After enough number of iterations of $f(x) = r - x^2$, which represents the dynamical system under consideration, for some values of r it settles down to a fixed number, but for other values – to a periodic behaviour. It turns out that at some moment chaos is obtained. The interesting phenomena “periodic window” and “synchronised chaos” are studied.

Pressiana Marinova, Baba Tonka High School of Mathematics, Ruse, 7000,
prs_marinova@abv.bg

Iveta Makedonska, Paisiy Hilendarski Sofia High School of Mathematics, Sofia, 1000,
ivetamakedonska@gmail.com