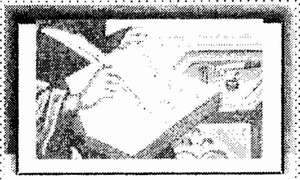


М + СЕМИНАР

ДУОПОЛ И ОЛИГОПОЛ НА БЕРТРАН

Петко Казанджиев, 10 клас, ПМГ – В. Търново
Цеца Байчев, старши учител по математика, ПМГ – В. Търново
Кинка Кирилова-Лупанова, главен учител по информатика, ПМГ – В. Търново

Джон Форбс Неш-младши е американски математик, който работи в областта на диференциалната геометрия и теорията на игрите. Роден е на 13 юни 1928 г. в Блуфилд, Западна Вирджиния. В своята автобиография Неш отбелязва, че това, което провокира интереса му към математиката, е книгата на Ерик Темпъл Бел, Men of Mathematics и по-конкретно едно есе, посветено на Пиер дьо Ферма. Още докато е ученик в горните класове, Неш посещава лекции по математика в Блуфийлд Колидж. По-късно следва в университета Карнеги Мелън в Питсбърг, Пенсилвания, където първо учи инженерна химия, а после химия преди да се ориентира към математиката. През 1948 г., следвайки съвета на Джон Синдж, завършва едновременно и бакалавърска степен, и магистратура по математика, след което получава стипендия от Принстън. Приет е и в Харвард, но продължава своята работа в Принстън. Защитава докторат през 1950 г. с дисертация върху некооперативни игри. Дисертацията му, писана под ръководството на Албърт Тъкър, съдържа дефиницията и свойствата на понятието, което впоследствие става известно като „равновесие на Неш". Известна е и теоремата му (Nash embedding theorem), която показва, че всяко абстрактно Риманово многообразие може да бъде изометрично реализирано като под-многообразие на Евклидовото пространство. Неш има също приноси и към теорията на нелинейните параболични частни диференциални уравнения. През 1951 г. Неш заминава за Масачузетския технологичен институт като преподавател по математика. Там среща Алиша Лопес-Харисън де Ларде, студентка по физика от Салвадор, с която сключва брак през февруари 1957 г. и с която имат две деца. През 1959 г., Алиша води Неш в болница за психични отклонения, където му е поставена диагноза „параноидна шизофрения". В края на 1980-те, Неш започва редовно да се свързва с други математици, които осъзнават, че работата му има стойност. Те сформират група, която се свързва с Комитета по Нобелови награди към Банката на Швеция, за да свидетелства, че Неш действително заслужава да бъде награден. През 1994 г., в резултат на работата му в Принстън върху теория на игрите, той получава Нобелова награда за икономика. На 23 май 2015 г., връщайки се от церемонията, на която Джон Неш е получил Абелова награда, той загива с жена си Алиша в автомобилна катастрофа в Ню Джърси. Историята на Неш е пресъздадена в отличения с награда "Оскар" филм "Красив ум".

В настоящата статията се представят обобщени случаи на задачи, свързани с Дуопол и олигопол на Бертран, които се използват в икономиката от различни фирми при определяне на финансовата им стратегия. Разглежданите задачи представляват различни математически модели на икономически процеси и явления от практиката.

Използват се следните дефиниции.

Дефиниция 1: Олигопол – пазарна структура, при която производството и продажбите в някой сектор на пазара се извършват от n на брой конкуриращи се фирми. При такава ситуация определените продажбени и производствени цени на една от фирмите силно влияят на цените и на другите фирми.

Дефиниция 2: Монопол – пазарна структура със строго определен единствен производител и продавач на продукция без близки заместители. Монополът е пълно отсъствие на конкуренция.

Дефиниция 3: Дуопол – специфичен вид олигопол, в който само двама производители съществуват в един пазар. На практика тази дефиниция се използва, когато две фирми имат доминиращ контрол над даден пазар.

Дефиниция 4: Игра – тройка от краен брой играчи, стратегии и печалба(N,S,U), където

$N=\{1,...,n\}$ е краен брой играчи.

$S=\{S_1,...,S_n\}$ е броят стратегии.

$U=\{U_1,...,U_n\}$, $U_i:S\rightarrow R$ е печалбата.

Дефиниция 5: Best Response функция (BR) – за всеки играч съществува Best Response функция на този играч, която описва най-добрата стратегия на играча при фиксирани стратегии на останалите играчи и е такава, че е изпълнено $BR_i:\{S_1,S_2,...,\hat{S}_i,...,S_n\}\rightarrow P(S_i)$. За всяко $S_i\in BR_i\left(S_1,S_2,...,\hat{S}_i,...,S_n\right)$ и $\overline{S}_i\in S_i$ е в сила $U_i\left(S_i,S_1,S_2,...,\hat{S}_i,...,S_n\right)\leq U_i\left(\overline{S}_i,S_1,S_2,...,\hat{S}_i,...,S_n\right)$.

Дефиниция 6: Равновесие на Неш – комбинация от стратегии за всички играчи $S_1,S_2,...,S_n$, така че $S_i\in BR_i\left(S_1,S_2,...,\hat{S}_i,...,S_n\right)$ за всяко i.

Дефиниция 7: Безкрайно-повтаряща се игра – за всяка крайна игра съществува безкрайно-повтаряща се игра, в която крайната игра се повтаря всеки ден, а печалбата на играчите е сума от печалбите от всеки ден, като тази в ден n се обезценява с фактор δ^n темп на инфлация) за $\delta\in(0,1)$.

Дефиниция 8: История за първите n дни на безкрайно-повтаряща се игра – функция $H_n:\{1,2,...,n\}\rightarrow\{S_1,S_2,...,S_n\}$, където S_i е множеството от стратегии на играч i за етапната игра.

Дефиниция 9: Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE) – Равновесие на Неш, което, ограничено до под-игра(игра в играта), също е равновесие на Неш.

Дефиниция 10: Непрекъсната печалба - за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова n, че за всеки играч i и стратегии s_i и $\overline{s}_i$, за които $s_i=\overline{s}_i$ за първите n дни от играта, то $\left|U_i\left(S_1,...,\hat{S}_i,...,S_n\right)-U_i\left(S_1,...,\hat{S}_i,...,S_n\right)\right|<\varepsilon$.

Дефиниция 11: Single Deviation Principle (SDP) – ако играта е с непрекъснати печалби, то SDP проверява дали множество от стратегии е равновесие на Неш. Дадена стратегия участва в Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE), ако за всяка история за първите $n-1$ дни, допускайки, че от ден $n+1$ нататък играчите ще следват стратегията без да се отклоняват, в ден n играч i няма печелившо отклонение.

За приложение на дуопол на Бертран се разглеждат следните задачи.

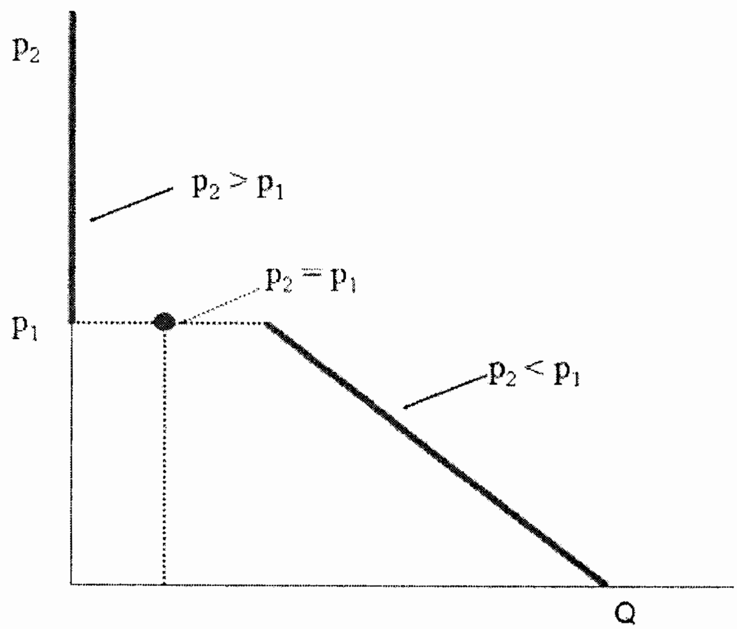
1. Разглежда се игра, в която фирми А и В продават една и съща стока. Те избират продажните цени $p_1 \in [0,1]$ и $p_2 \in [0,1]$. Продава се стоката с по-ниска цена. Фирмите произвеждат според търсенето. Производствената цена на стоката е $c \in [0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_1, p_2)$, $Q: p_1, p_2 \to [0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Количеството на продажбите на фирма А е

$$Q(p_1,p_2)=\begin{cases}1-p_1, p_1<p_2\\ \dfrac{1-p_1}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Количеството на продажбите на фирма В (Фиг. 1) е

$$Q(p_2,p_1)=\begin{cases}1-p_2, p_2<p_1\\ \dfrac{1-p_2}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$



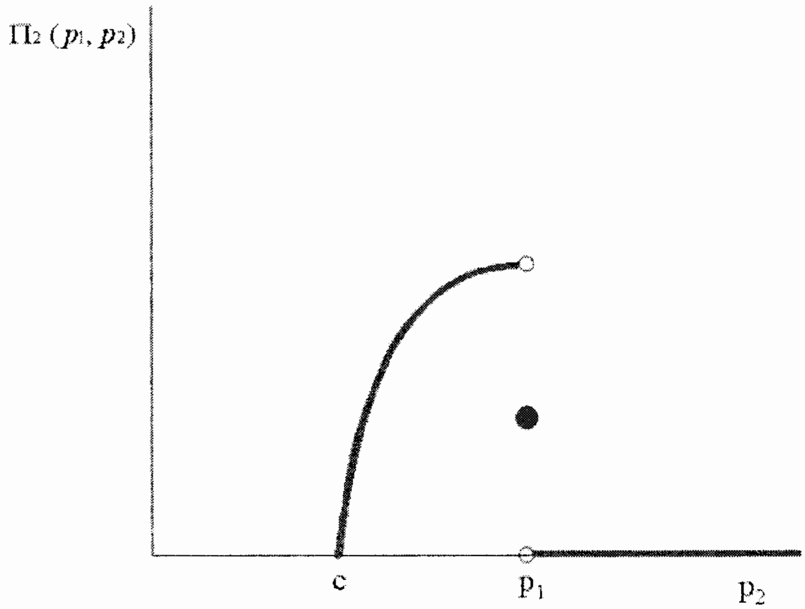
Фиг. 1

Печалбата на фирма А е

$$\Pi(p_1,p_2)=(p_1-c)Q(p_1,p_2)=\begin{cases}(1-p_1)(p_1-c), p_1<p_2\\ \dfrac{(1-p_1)(p_1-c)}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Печалбата на фирма В (Фиг. 2) е

$$\Pi(p_2,p_1)=(p_2-c)Q(p_2,p_1)=\begin{cases}(1-p_2)(p_2-c), p_2<p_1\\ \dfrac{(1-p_2)(p_2-c)}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$



Фиг. 2

Намира се равновесие на Неш на играта, което е $p_1=p_2=c_2$. В този случай и двете фирми нямат печалба, защото си разделят пазара, но продават на производствената си цена. Ако играч се отклони нагоре, няма печалба, а ако се отклони надолу, взима целия пазар, но продава на загуба. Следователно, няма стратегия, според която някоя от фирмите да има печелившо отклонение. Стигаме до равновесие на Неш на играта.

Не съществува друго равновесие на Неш, защото след разглеждане на следните три основни случая не се намира такова:

- $p_1>p_2>c$.

  В този случай фирма А няма печалба, защото продава стоката си на по-висока цена от фирма В. Ако фирма А реши да продава на една и съща продажна цена с В, те си разделят пазара, което е и печелившо отклонение за фирма А. Следователно няма равновесие на Неш. Аналогично е и за $p_2>p_1>c$.

- $p_1=p_2>c$.

  В този случай фирмите си разделят пазара и всяка получава по $\dfrac{Q(p_1,p_2)(p_i-c)}{2}$. Ако някоя от фирмите намали продажната цена с някакво много малко число ε, то тя ще получи целия пазар. Следователно няма равновесие на Неш.

- $p_1>p_2=c$

  В този случай и двете фирми нямат печалба, защото фирма В получава целия пазар, но продава на производствената си цена. Ако фирма В покачи продажната си цена малко над производствената, но тя остане по-малка от тази на фирма А, то тя ще е на печалба, следователно няма равновесие на Неш. Аналогично е и за $p_2 > p_1 = c$.

2. Разглежда се игра, в която фирми А и В продават една и съща стока. Те избират продажните цени $p_1 \in [0,1]$ и $p_2 \in [0,1]$. Продава се стоката с по-ниска цена. Фирмите произвеждат според търсенето. Те избират производствените цени $c_1 \in [0,1]$ и $c_2 \in [0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_1, p_2)$, $Q : p_1, p_2 \to [0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Количеството на продажбите на фирма А е

$$Q(p_1,p_2)=\begin{cases}1-p_1, p_1<p_2\\ \dfrac{1-p_1}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Количеството на продажбите на фирма В е

$$Q(p_2,p_1)=\begin{cases}1-p_2, p_2<p_1\\ \dfrac{1-p_2}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$

Печалбата на фирма А е

$$\Pi(p_1,p_2)=(p_1-c_1)Q(p_1,p_2)=\begin{cases}(1-p_1)(p_1-c_1), p_1<p_2\\ \dfrac{(1-p_1)(p_1-c_1)}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Печалбата на фирма В е

$$\Pi(p_2,p_1)=(p_2-c_2)Q(p_2,p_1)=\begin{cases}(1-p_2)(p_2-c_2), p_2<p_1\\ \dfrac{(1-p_2)(p_2-c_2)}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$

Без ограничение на общността се счита, че $c_2 > c_1$. Фирма В (фирмата с по-висока производствена цена) не участва в равновесия на Неш, когато има печалба, по-голяма от 0, защото това може да се случи само ако $p_1 \geq p_2 > c_2$. Но фирма А винаги може да си позволи да продава на цена $p_2 - \varepsilon$ и така да вземе целия пазар и да продава на печалба. Следователно няма печелившо отклонение и в този случай няма равновесие на Неш. За да продава фирма В на печалба, равна на 0, има два случая:

1) $p_1 = p_2 = c_2$.

В този случай фирма А може отново да се отклони и да продава на цена $p_2 - \varepsilon$ и така да вземе целия пазар и да продава на печалба. Следователно няма равновесие на Неш.

2) $p_1 < p_2$.

Разглеждат се ограничения за стойностите на p_1, след което се намира равновесие на Неш:

- $p_1 \geq c_1$, защото в противен случай фирма А продава на загуба и има печелившо отклонение.
- $p_1 \leq c_2$, защото иначе фирма В има печелившо отклонение да продава на цена $\overline{p}_2 \in (c_2, p_1)$ и да е на печалба.
- $p_1 \neq c_1$, защото $\overline{p}_1 = c_1 + \varepsilon < c_2$ е печелившо отклонение и води до положителна печалба за фирма А.

Ако $U_2(p_1, p_2)$ достига max в (c_1, c_2), то той ще е в точка $c_1 < \frac{c_1+1}{2} < c_2$, защото $U_1(p_1, p_2) = (1-p_1)(p_1-c_1) = p_1 - c_1 - p_1^2 + p_1c_1$. Максимум се достига, когато производната на тази функция спрямо p_1 е равна на 0, т.е $1-2p_1+c_1=0$. Следователно равновесие на Неш се постига за $p_1 = \frac{c_1+1}{2}$ и за $p_1 < p_2$.

Ако max не се достига, то $p_1 = c_2$ и $p_2 > c_2$ е равновесие на Неш.

3. Разглежда се безкрайно-повтаряща се игра, с етапна игра, както в задача 1., в която фирми А и В продават една и съща стока. За кои стойности на $\delta \in (0,1)$ стратегията да продават на монополна цена, докато някой не се отклони и след това да продават на цена равна на производствената, е равновесие на Неш?

Решение: Количеството на продажбите на фирма А за един ден игра е

$$Q(p_1, p_2) = \begin{cases} 1-p_1, p_1 < p_2 \\ \frac{1-p_1}{2}, p_1 = p_2 \\ 0, p_1 > p_2 \end{cases}.$$

Количеството на продажбите на фирма В за един ден игра е

$$Q(p_2, p_1) = \begin{cases} 1-p_2, p_2 < p_1 \\ \frac{1-p_2}{2}, p_2 = p_1 \\ 0, p_2 > p_1 \end{cases}.$$

Печалбата на фирма А за един ден игра е

$$\Pi(p_1, p_2) = (p_1 - c)Q(p_1, p_2) = \begin{cases} (1-p_1)(p_1-c), p_1 < p_2 \\ \frac{(1-p_1)(p_1-c)}{2}, p_1 = p_2 \\ 0, p_1 > p_2 \end{cases}.$$

Печалбата на фирма В за един ден игра е

$$\Pi(p_2,p_1)=(p_2-c)Q(p_2,p_1)=\begin{cases}(1-p_2)(p_2-c),p_2<p_1\\ \dfrac{(1-p_2)(p_2-c)}{2},p_2=p_1\\ 0,p_2>p_1\end{cases}.$$

Дефинира се монополна цена $p^M>0$.

Дефинира се монополна печалба $\Pi^M>0$ – максималната възможна печалба на дадена фирма

$$\Pi^M=\max(p-c)Q(p).$$

Разглежда се стратегия, в която и двете фирми продават на монополна цена. Разглежда се Single Deviation Principle за фиксиран ден *n*. Разглеждат се всички възможни истории за първите *n*-1 дни и за всички дни от *n* нататък. За ден *n* се фиксират стратегиите на всички играчи освен един и ако този играч няма стимул да се отклони, тогава има Subgame Perfect Nash Equilibrium. Разглеждат се две възможни ситуации:

1) Никой играч да не се отклони от стратегията за първите *n*-1 дни.

- Следва се стратегията без отклонение през цялото време. Получава се печалба за една от фирмите

$$\frac{\Pi^M}{2}+\delta^1\frac{\Pi^M}{2}+\delta^2\frac{\Pi^M}{2}+\delta^3\frac{\Pi^M}{2}+\ldots=\frac{\frac{\Pi^M}{2}}{1-\delta}.$$

- Играчът може да се отклони, ако намали цената си за един ход под тази на другия и вземе целия пазар. Но от следващия ден фирмите продават на производствената си цена и нямат печалба. Тогава ще има печалба, равна на Π^M.

За да бъде този случай Subgame Perfect Nash Equilibrium – двете фирми да имат възможно най-голяма печалба, то трябва отклонението да бъде непечелившо, т.е. трябва да е изпълнено

$$\Pi^M\le\frac{\frac{\Pi^M}{2}}{1-\delta}.$$

Следователно

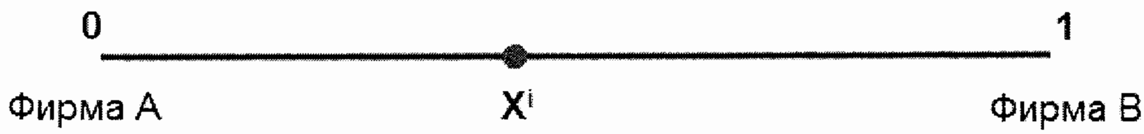
$$\delta\ge\frac{1}{2}.$$

2) Някой играч да се отклони още при първия ход.

Но тук няма печелившо отклонение, защото ако една от фирмите направи продажната си цена по-висока от производствената, другата фирма взима пазара и няма печалба. Ако направи продажната си цена по-ниска от производствената си, то тогава тя ще продава на загуба.

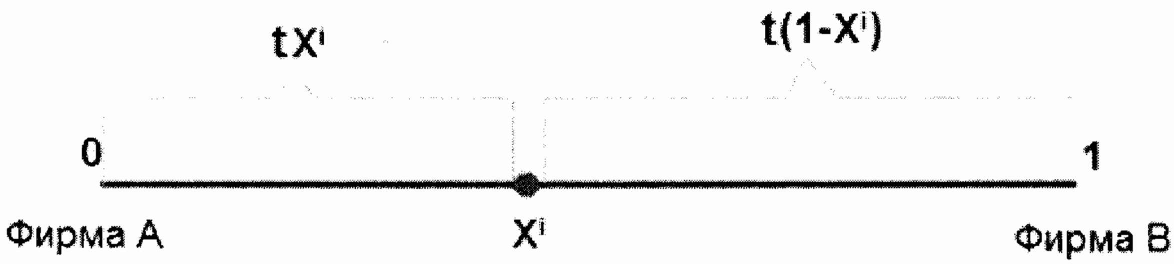
4. Разглежда се игра, в която фирми А и В продават сходни, но различни стоки. Те избират продажните цени $p_1\in[0,1]$ и $p_2\in[0,1]$. Фирмите произвеждат според търсенето. Производствената цена на стоките е $c\in[0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_1,p_2)$, $Q:p_1,p_2\to[0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Задачата се разглежда като пазар, разположен на улица(отсечка), на която в двата края има магазин съответно на фирма А и фирма В. Нека фирма А има адрес $x=0$, а фирма В има адрес $x = 1$. Всяка от двете фирми има константна производствена цена c. Всяко разположение на една точка от тази отсечка се разглежда спрямо магазина на левия й край. Ако купувач предпочита магазина на разстояние i от него, то неговото местоположение на отсечката се означава с x^i (Фиг. 3).



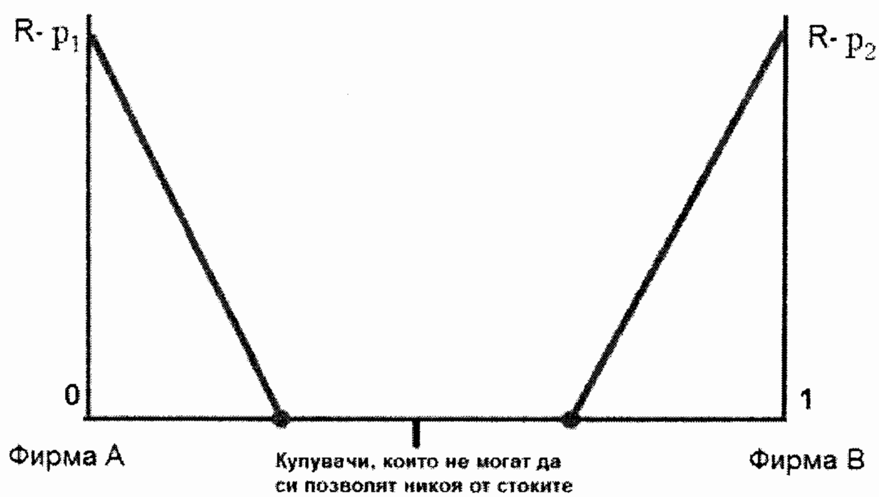
Фиг 3.

Следователно, ако купувачът избере фирма А($x = 0$), то той ще има транспортен разход, равен на tx^i, а ако избере фирма В($x = 1$) - $t(1 - x^i)$, където t е константа по отношение на транспортните разходи (Фиг. 4).



Фиг 4.

Купувачите имат една и съща допустима максимална цена R за закупуването, на която и да е от стоките. Когато тази цена R е достатъчно висока, фирмите ще имат стимул да продават и да имат печалба. Ако R не е достатъчно висока, то има вероятност от незадоволяване на пазара, защото продажните цени на стоките може да са по-големи от R (Фиг. 5).



Фиг 5.

Разглежда се купувач x^m с такава максимална R, че той е безразличен по отношение на това от коя фирма ще закупи нужната стока и следователно остатъкът от парите след закупуване на стоката от двете фирми ще бъде равен на

$$R - p_1 - tx^m = R - p_2 - t\left(1 - x^m\right).$$

След преобразувания се изразява x^m като функция, зависеща от p_1 и p_2

$$x^m\left(p_1, p_2\right) = \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}.$$

За всякакви продажни цени p_1 и p_2 купувачите, намиращи се от лявата страна на x^m, купуват от фирма А, другите от фирма В. Тоест x^m част от хората купуват от фирма А, а $1 - x^m$ част от хората купуват от фирма В. Ако търсенето на целия пазар е равно на N, то количеството продажби на фирма А е

$$Q^A\left(p_1, p_2\right) = x^m\left(p_1, p_2\right)N = \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N.$$

Количеството продажби на фирма В е

$$Q^B\left(p_1, p_2\right) = \left[1 - x^m\left(p_1, p_2\right)\right]N = \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N.$$

Следователно печалбата, реализирана от фирма А, е

$$\Pi^A\left(p_1, p_2\right) = Q^A\left(p_1 - c\right) = N\left(p_1 - c\right)\left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right].$$

Печалбата, реализирана от фирма В, е

$$\Pi^B\left(p_2, p_1\right) = Q^B\left(p_2 - c\right) = N\left(p_2 - c\right)\left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right].$$

Ще се намери Best Response функцията за фирма А чрез диференциране на функцията за печалба на фирма А спрямо p_1. От

$$\Pi^A\left(p_1, p_2\right) = Q^A\left(p_1 - c\right) = N\left(p_1 - c\right)\left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]$$

следва

$$\frac{\delta\Pi^A\left(p_1, p_2\right)}{dp_1} = N\left(p_1 - c\right)\left(\frac{-1}{2t}\right) + \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N.$$

Тогава

$$N\left(p_1 - c\right)\left(\frac{-1}{2t}\right) + \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-Np_1}{2t}\right) - \left(\frac{-Np_1}{2t}\right) = N\left(\frac{-c - p_2 - t}{2t}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{2p_1}{2t} = \left(\frac{-c - p_2 - t}{2t}\right)$$

$$\Rightarrow p_1^* = \left(\frac{p_2 + c + t}{2}\right).$$

Аналогично Best Response функцията за фирма В е

$$p_2^* = \left(\frac{p_1 + c + t}{2}\right).$$

По определение равновесие на Неш се получава, когато p_1^* е най-добрата стратегия за фирма А спрямо продажната цена p_2, а p_2^* е най-добрата стратегия за фирма В спрямо продажната цена p_1. Следователно може да се замени p_1^* с p_1 и p_2^* с p_2 в изведените по-горе Best Response функции. Получава се

$$p_2^* = \left(\frac{p_1+c+t}{2}\right) = \left(\frac{\frac{p_2+c+t}{2}+c+t}{2}\right) = \frac{p_2}{4}+\frac{c}{4}+\frac{t}{4}+\frac{c}{2}+\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}p_2^* = \frac{3}{4}c+\frac{3}{4}t$$

$$\Rightarrow p_2^* = c+t\,.$$

Замества се в p_1^* и се получава

$$p_1^* = \left(\frac{p_2+c+t}{2}\right) = \frac{c+t+c+t}{2} = \frac{2(c+t)}{2}$$

$$\Rightarrow p_1^* = c+t\,.$$

Следователно равновесие на Неш има при $p_1 = c+t$ и $p_2 = c+t$. След заместване се получава $x^m = \frac{1}{2}$ и печалбата за всяка фирма е $\Pi = \frac{Nt}{2}$.

За приложение на олигопол на Бертран се разглежда обобщение на една от задачите, разгледани по-горе, за n на брой фирми.

1. Разглежда се игра, в която N фирми продават една и съща стока. Те си избират продажни цени $P = p_1, p_2, ..., p_n \in [0,1]$. Продава се стоката с най-ниска цена. Фирмите произвеждат според търсенето. Производствената цена на стоката е $c \in [0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_i, p_j)$, $Q : p_i, p_j \to [0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Дефинира се $p = \min P$ – най-ниската цена от множеството P.

Дефинира се $O = j / p = p_j$ – броят на фирмите с най-ниска цена.

Количеството на продажбите на фирма n_i е

$$Q(p, p_i) = \begin{cases} \dfrac{1-p_i}{|O|}, p_i = p \\ 0, p_i > p \end{cases}.$$

Печалбата на фирма n_i е

$$\Pi(p_i, p) = (p_i - c)Q(p_i, p) = \begin{cases} \dfrac{(1-p_i)(p_i-c)}{|O|}, p_i = p \\ 0, p_i > p \end{cases}.$$

Намира се равновесие на Неш на играта, което е $p_i = c$ за всяко $p_i \in [0,1]$. В този случай всички фирми нямат печалба, защото си разделят пазара, но продават на производствената си цена. Ако играч се отклони нагоре, няма печалба, а ако се отклони надолу, взима целия пазар, но продава на загуба. Следователно няма стратегия, според която някоя от фирмите да има печелившо отклонение и значи това е равновесие на Неш на играта.

Не съществува друго равновесие на Неш, защото след разглеждане на следните 3 основни случая не се намира такова:

- $p_i > p > c$.

  В този случай фирмите с цена, по-висока от най-ниската - p, нямат печалба. Ако фирмите с по-висока цена решат да продават на една и съща продажна цена с тези, които продават на цена p, те си разделят пазара, което е и печелившо отклонение за първите. Следователно няма равновесие на Неш.
- $p_i = p > c$.

  В този случай фирмите си разделят пазара и всяка получава по $Q(p_i, p) = \frac{(1-p_i)(p_i-c)}{|O|}$. Ако някоя от фирмите намали продажната цена с някакво много малко число ε, то тя ще получи целия пазар. Следователно няма равновесие на Неш.
- $p_i > p = c$.

  В този случай няма фирма, която да има печалба, защото фирмите с най-ниска цена p получават целия пазар, но продават на производствената си цена. Ако те покачат продажната си цена малко над производствената, но тя остане по-малка от тази на останалите фирми, то тя ще е на печалба. Следователно няма равновесие на Неш.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Muhamet Yildiz, *Lecture Notes on Game Theory*, MIT 2010
2. Muhamet Yildiz, *14.126 Lecture Notes on Supermodular Games*, MIT 2010
3. Markus M. Mobius, *Lecture XIV:Applications of Repeated Games*, Harvard 2007
4. Avinash K. Dixit, Barry J. J. Nalebuff, *The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life*

ДУОПОЛ И ОЛИГОПОЛ НА БЕРТРАН

Резюме. В статията се представят обобщени случаи на задачи свързани, с дуопол и олигопол на Бертран. Изведени са резултати, показващи равновесията на Неш и/или зависещи от тях фактори на всяка от разгледаните игри. В практиката се използват от различни фирми в икономиката при определяне на финансовата им стратегия. Те представят и различни математически модели.

BERTRAND DUOPOLY AND OLIGOPOLY

Abstract. The present article expands on problems related to Bertrand Duopoly and Oligopoly. The shown results display Nash Equilibria and/or dependent factors of each of these games. In practice they are used by various companies in determining their financial strategy. They represent different mathematical models.