ритурка притурка

МАТЕМАТИКА
плюс

КАНДИДАТ-СТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ ПО МАТЕМАТИКА 2016 г.

Сава Гроздев Цеца Байчева

Математика плюс бр. 2, 2017 г.

в	в	а	д	в	г	б	д	а	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
в	г	б	д	д	б	г	б	г	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=1$	**22.** $x\in(0;1]$	**23.** $x=1$	**24.** НМС=-7; НГС=-4	**25.** 1102,5 лв
26. 100	**27.** $\frac{25}{42}$	**28.** $32\pi cm^2$	**29.** $\frac{a\sin\alpha\sin\varphi}{2\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\varphi}}$	**30.** $x=\frac{\pi}{3}$

Технически университет - София
4 юли 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
б	б	б	в	а	а	д	г	б	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
б	д	б	в	а	в	д	в	д	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x=0$ и $x=2$	**22.** $6+2\sqrt{3}$	**23.** $x\in\left[\frac{9}{5};2\right)\cup\left(2;\frac{7}{3}\right]$	**24.** $\{1;3;4;5;6\}$	**25.** $(4;1)$, $(1;4)$
26. $\frac{1}{15}$	**27.** 4, $\frac{\pi}{4}$	**28.** $\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\}$	**29.** $\frac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$	**30.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$

ВТОРА ЧАСТ

21.	22.	23.	24.	25.
$x=-2$	$x\in(5;\infty)$	-12	0	$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}$
26.	**27.**	**28.**	**29.**	**30.**
$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{3}cm$	$25cm$	$108cm^3$	$k\in(-2;3)$

Технически университет - София
16 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	в	в	в	а	б	г	б	б	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
г	д	а	г	д	а	б	а	б	г

ВТОРА ЧАСТ

21.	22.	23.	24.	25.
$x=-1$	4	1	$x=4$	6
26.	**27.**	**28.**	**29.**	**30.**
$x=\pi$	$2cm$	$\sqrt{5}cm$	$\frac{3}{2\cos\frac{\alpha}{2}}cm$	$a\in\left(0;\frac{1}{8}\right)$

Технически университет - София
23 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Математика второ равнище 20 март 2016 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $(x-3)(x-7)\sqrt{\frac{x-4}{x-5}}\leq 0$.

Задача 2. В правоъгълния ΔABC ($BC>AC$), с прав ъгъл при върха C, радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е $r=6$, а радиусът на описаната около него окръжност е $R=\frac{39}{2}$. Да се намерят страните на триъгълника.

Задача 3. Нека $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ и $tg\alpha=-\frac{7}{24}$. Да се намери $tg\frac{\alpha}{2}$.

Задача 4. В трапеца $ABCD$, с основи $AB=3\sqrt{39}$ и $CD=\sqrt{39}$, ъглите при голямата основа са $\angle ABC=60^\circ$ и $\angle BAD=30^\circ$, а точката $E\in AD$. Да се намери дължината на отсечката BE, ако тя разполовява лицето на трапеца.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>1$.

Задача 6. В равнобедрения ΔABC, с бедра $AC=BC=13$, точката $M\in AB$ е такава, че $CM=5$. Да се намери основата на триъгълника, ако лицето му е възможно най-голямо.

Задача 7. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, със страна $AB=2$, точката $M\in BC$ е такава, че равнината α определена от точките A, D_1 и M разделя куба на две части, отношението на обемите на които е 17:7. Да се намери лицето на сечението на α и куба.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(x^2+2x+3-a)(a-|x-3|)=0$ има точно три различни решения.

Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Математика второ равнище 19юни 2016 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $(x^{2016}-1)|x|<0$.

Задача 2. В окръжност с радиус 1 е вписан триъгълник. Върховете му разделят окръжността на три дъги, чиито дължини се отнасят както 1:2:9. Да се намери лицето на триъгълника

Задача 3. Първият член a_1, седмият и седемнадесетият член на растяща аритметична прогресия са последователни членове на геометрична прогресия. Да се намери частното на геометричната пргресия и разликата на аритметичната прогресия, ако $a_1^2=9$.

Задача 4. Даден е равнобедрен ΔABC ($AC=BC$), за който $AB<AC$. Окръжност с радиус $R=10\sqrt{10}$ се допира до правата AB в точка A, минава през точка C и пресича страната BC във вътрешна точка M така, че $BM:MC=2:3$. Да се намери лицето на ΔABC.

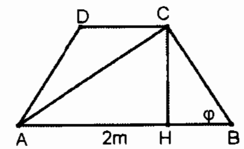
Задача 5. Да се реши неравенството $\sqrt{100-x^2}>x-2$.

Задача 6. Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната a. Да се намери дължината на най-късата отсеча, краищата на оято лежат върху контура на триъгълника и която разделя триъгълника на две равнолицеви части.

Задача 7. Основата на пирамида $EABCD$ е ромба $ABCD$, за който $BD=AB=AD=4$. Околният ръб ED е перпендикулярен на равнината на основата. Разстоянието от точката D до

б) Нека $f(\varphi)=\sin^2\varphi\sin 2\varphi=\dfrac{(1-\cos 2\varphi)\sin 2\varphi}{2}=$. $\dfrac{1}{2}\sin 2\varphi-\dfrac{1}{4}\sin 4\varphi$. Тогава $f'(\varphi)=\cos 2\varphi-\cos 4\varphi$ и $f''(\varphi)=-2\sin 2\varphi+4\sin 4\varphi$. От $f'(\varphi)=0$ получаваме $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Но $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)<0$, т.е. максималната стойност на обема се достига при $\varphi=60^0$

в) нека MP е височина в ΔADM. От ΔDOM следва $DM=\dfrac{m}{\cos\alpha}$. Тогава намираме $MP=\sqrt{MD^2-\dfrac{AD^2}{4}}=\dfrac{m}{\cos\alpha}\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}$



Изразяваме обема на пирамидата $ADBM$ по два начина $V_{ADBM}=\dfrac{S_{ADB}.MO}{3}=\dfrac{S_{ADM}.d_B}{3}$, заместваме и получаваме $d_B=\dfrac{2m\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}}$.

Технически университет - София
2 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
г	г	д	г	в	б	д	а	б	б
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
б	а	д	в	г	а	д	а	б	б

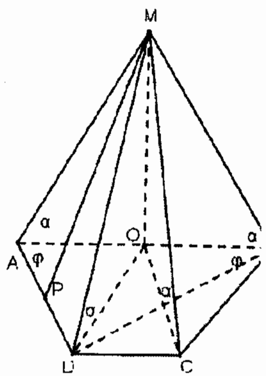
б) От $\frac{AO}{NO}=\frac{AB}{NP}=\frac{(k+1)a}{a-bk}$ следва $\frac{AN+NO}{NO}=\frac{(k+1)a}{a-bk}$. Тогава $\frac{AN}{NO}=\frac{(k+1)a}{a-bk}-1=\frac{(a+b)k}{a-bk}$.

в) Нека $OH=h$ е височина на трапеца през точката O. Използваме, че $\Delta ONP\sim\Delta OAB\sim\Delta OCD$ и получаваме последователно $\frac{OH_1}{OH}=\frac{NP}{a}$, $\frac{OT}{OH}=\frac{b}{a}$, $\frac{OT+OH}{OH}=\frac{a+b}{b}$,

$OH=\frac{ah}{a+b}$, $OH_1=\frac{NP.OH}{a}=\frac{(a-bk)h}{(a+b)(k+1)}$,

$$\frac{S_{NPO}}{S_{ABCD}}=\frac{NP.OH_1}{(a+b)h}=\frac{(a-bk)OH_1}{(a+b)(k+1)h}=\frac{(a-bk)^2}{(a+b)^2(k+1)^2}.$$

Задача 8. а) От $\angle MAO=\angle MDO=\angle MCO=\angle MBO=\alpha$ следва $AO=DO=CO=BO=m$. Около основата може да се опише окръжност, следователно $ABCD$ е равнобедрен трапец. Нека CH е височина в ΔABC, т.е. в трапеца. От O среда на AB следва, че $\angle ACB=\angle ADB=90^0$. Тогава $AC=2m\sin\varphi$, $BC=2m\cos\varphi$ и $CH=2m\sin\varphi\cos\varphi=m\sin 2\varphi$. Но $AH=\frac{AB+CD}{2}$ и от ΔACH получаваме $AH=2m\sin^2\varphi$. Тогава $S_{ABCD}=2m^2\sin^2\varphi\sin\varphi$.



От ΔAMO следва $MO=mtg\alpha$. Намираме

$$V_{ABCDM}=\frac{S_{ABCD}.MO}{3}=2m^3tg\alpha\sin^2\varphi\sin 2\varphi.$$

равнината BCE е 3. Да се намери големината на двустенния ъгъл φ между равнините BCE и $ABCD$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, при които уравнението $\left(x^2-(a+1)x+3(a-2)\right).\lg(2a-x-1)=0$ има поне един корен в интервала $[-1;2]$, а извън този интервал няма корени.

Софийски университет „Св. Климент Охридски" Математика първо равнище 27 март 2016 г.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайт в листа за отговори!

1. Най-голямото от посочените числа е:

А) $1,7$ Б) $\sqrt[3]{5}$ В) $\sqrt[6]{26}$ Г) $\sqrt{3}$

2. Ако $a=3^{-1}$ и $b=-5$, то стойността на израза $\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)$ е равна на:

А) $\frac{14}{5}$ Б) $3,5$ В) $\frac{16}{5}$ Г) $5,3$

3. Допустимите стойности на израза $\sqrt[4]{\frac{3-x}{(x-2)^2}}$ са:

А) $x\in(-\infty;3]$ Б) $x\in[2;3]$ В) $x\in(3;\infty)$ Г) $x\in(-\infty;2)\cup[2;3]$

4. Решенията на неравенството $\frac{x^2-3x+2}{9-x^2}\le 0$ са:

А) $x\in[-3;1]\cup[2;3]$ Б) $x\in(-\infty;3)\cup[1;2]\cup(3;\infty)$

В) $x\in(-3;1]\cup[2;3)$ Г) $x\in(-\infty;-3]\cup[1;2]\cup[3;\infty)$

5. Стойността на израза $\frac{\log_7 40}{\log_7 8}+\log_8 0,2$ е:

А)-1 Б)0 В)128 Г)1

6. Броят на решенията на системата $\begin{vmatrix} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{vmatrix}$ е равен на:

А)0 Б)1 В)2 Г)4

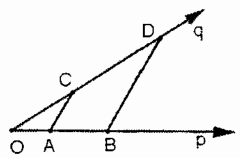
7. Ако $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ и $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$, то числата α и β са корени на уравнението:

А) $6t^2-3t-2=0$ Б) $2t^2-3t-6=0$ В) $6t^2+3t-2=0$ Г) $2t^2+3t-6=0$

8. Ако $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^2\alpha+2\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ е равна на:

А)1 Б)1,75 В)-1.75 Г)1,5

9. Върху раменете на ъгъл $\vec{p}O\vec{q}$ са взети съответно точките A, B, C и D, такива че $AC \parallel BD$, $OC=6$, $CD=10$ и $OB=12$. Дължините на отсечките OA и AB са съответно равни на:



А)4,5 и 7,5 Б)3,5 и8,5 В)4 и 8 Г)5 и 7

10. Ако основата и бедрото на равнобедрен триъгълник са съответно равни на 12 и 10, то радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е равен на:

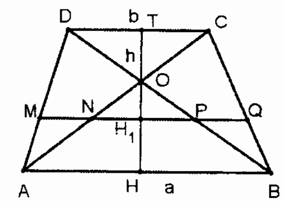
А)1 Б)2 В)3 Г)4

11. На чертежа е изобразена графиката на функцията:

б) даденото уравнение е еквивалентно на квадратното уравнение $\sqrt{2}.t^2-t-\sqrt{2}=0$ с корени $t_1=\sqrt{2}$ и $t_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. От $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ следва $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ и $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ намираме $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2l\pi$ и $x=\frac{11\pi}{6}+2n\pi$, където $k,l,n\in Z$.

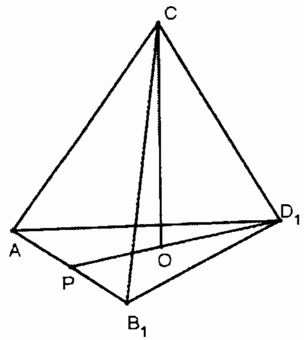
в) даденото неравенство е еквивалентно на $\sqrt{2}.t^2-t+a<0$ за $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$. Означаваме $g(t)=\sqrt{2}.t^2-t+a$ и получаваме $g(0)\le 0$ и $g\left(\sqrt{2}\right)\le 0$. Решение на системата е $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]$.

Задача 7. **а)** от $\frac{AM}{MD}=k$ следва $\frac{BQ}{QC}=\frac{AM}{MD}=k$. Нека $MD=x$ $AM=kx$. От теоремата на Талес следва $\frac{MN}{DC}=\frac{AM}{AD}$, т.е.



$MN=\frac{bk}{k+1}$ и аналогично $PQ=\frac{bk}{k+1}$. От $\frac{MP}{AB}=\frac{DM}{AD}$ намираме $MP=\frac{a}{k+1}$ и $NP=MP-MN=\frac{a-bk}{k+1}$.

$AB_1 = B_1D_1 = AD_1 = AC = CD_1 = CB_1 = b = a\sqrt{2}$. Разглеждаме пирамидата AB_1D_1C - правилен тетраедър и нека CO е нейната височина през C, т.е. CO е търсеното разстояние. Намираме $D_1O = \frac{2}{3}.\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ и от правоъгълния ΔCOD_1 по Питагоровата теорема получаваме $CO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

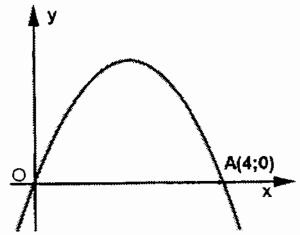


б) Да означим $\angle((AB_1D_1);(BCC_1B_1)) = \varphi$. Проектираме ортогонално ABD_1 върху равнината BCC_1B_1 и получаваме BB_1C_1. От $S_{AB_1D_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ и $S_{BB_1C_1} = \frac{a^2}{2}$ след като използваме формулата $S_{сечение}.\cos\varphi = S_{проекция}$, заместваме и намираме $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Университет по архитектура, строителство и геодезия 13 юли 2016 г.

1	2	3	4	5
а	а	а	б	в

Задача 6. а) Полагаме $\sin x + \cos x = t$, повдигаме на втора степен и следва $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$, $1 + \sin 2x = t^2$, т.е. $\sin 2x = t^2 - 1$. Следователно $f(t(x)) = \sqrt{2}.t^2 - t + a$.



А) $f(x) = 4x + x^2$ Б) $f(x) = -4x + x^2$

В) $f(x) = -4x - x^2$ Г) $f(x) = 4x - x^2$

12. Ако редицата $\{b_n\}$, $n \in N$ е зададена с равенствата $b_1 = -3$, $b_n = b_{n-1} - 1$, то шестият и член е:

А)-6 **Б)-7** **В)-8** **Г)4**

13. Дадена е геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$, за която $a_8 = 1$ и $\frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$. Първият член на прогресията е:

А) $a_1 = 128$ **Б)** $a_1 = 128$ или $a_1 = -128$ **В)** $a_1 = 256$ **Г)** $a_1 = 256$ или $a_1 = -256$

14. Ако $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то за стойностите на x е изпълнено:

А) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, където $k \in Z$

Б) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in Z$

В) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, където $k \in Z$

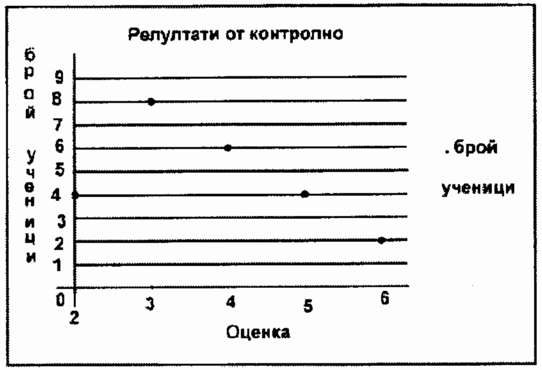
Г) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in Z$

15. Вкрая на учебната година се оказало, че всички ученици от един клас са получили годишни оценки по математика –

Добър, Мн. Добър или *Отличен*, по български език и литература – *Среден, Добър, Мн. Добър* или *Отличен*, а по физическо възпитание и спорт - *Мн. Добър* или *Отличен*. Група ученици от този клас, разглеждайки бележниците си забелязали, че няма двама от групата, които да имат едни и същи оценки и по трите предмета. Колко най-много ученици има в тази група?

А)4 **Б)24** **В)3** **Г)12**

16. На диаграмата са дадени резултатите от контролно по математика. Средното аритметично, модата и медианата са:



А) $3\frac{2}{3}, 3, 3\frac{1}{2}$

Б) $3\frac{1}{2}, 3, 3\frac{2}{3}$

В) $3\frac{1}{3}, 4, 3\frac{1}{2}$

Г) $3\frac{2}{3}, 3, 4$

17. Даден е ΔABC с ъгли 15°, 45° и 120°, който е вписан в окръжност с радиус $R = 19\sqrt{3}$. Дължината на най-голямата страна на ΔABC е равна на:

А) $19\sqrt{6}$ **Б)57** **В)** $38\sqrt{3}$ **Г)** $38\sqrt{2}$

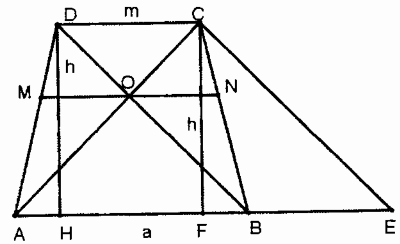
18. Даден е ΔABC, за който страната $AB = 4$, медианата $AM = 3$ и $\angle AMB = 135^\circ$. Дължината на страната BC е равна на:

в) От формулите на Виет следва $x_1 + x_2 = 3$ и $x_1 x_2 = 1$. Тогава $B = 2^{x_1+x_2} - 1 + \lg(x_1 x_2) = 2^3 - 1 + \lg 1 = 7$.

Задача 7. а) Построяваме $CE \parallel BD$. Тогава $BECD$ е успоредник и $\angle ACE = 90^0$. Нека $DH = h$ и $CF = h$ са височини на трапеца, $AB = a$ и $BE = CD = m$. От правоъгълния равнобедрен ΔAEC намираме $h = \frac{AE}{2} = \frac{a+m}{2}$ и получаваме $S_{ABCD} = \frac{(a+m)h}{2} = h^2$

б) от $ABCD$ равнобдрен следва $AH = \frac{a-m}{2}$, а от питагорова теорема за ΔAHD получаваме $AD = \sqrt{2h^2 - 2mh + m^2}$.

в) Нека $AC \cap BD = O$. От $MN \parallel AB \parallel CD$ и теоремата на Талес намираме последователно

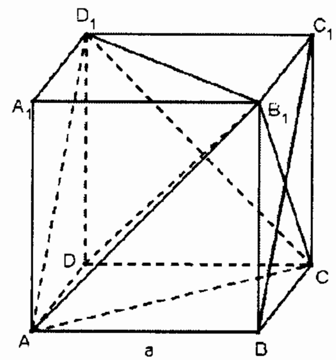


$\frac{MO}{a} = \frac{DO}{DB}$, $\frac{DO}{OB} = \frac{m}{a}$,

$\frac{OB+DO}{DO} = \frac{a+m}{m}$, $\frac{BD}{DO} = \frac{a+m}{m}$.

Следователно $\frac{MO}{a} = \frac{DO}{DB} = \frac{m}{a+m}$, т.е. $MO = \frac{am}{a+m}$. Използваме $a+m=h$ и намираме

$$MN = 2MO = \frac{2am}{a+m} = \frac{m(2h-m)}{h}.$$



Задача 8. а) от свойствата на куба и квадрата следва

б) От правоъгълния ΔMEO намираме $ME = \dfrac{r}{\cos\alpha} = \dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4\cos\alpha}$ и тогава $S_1 = S_{ABCD} + pME = \dfrac{a^2\sqrt{3}(\cos\alpha+1)}{4\cos\alpha}$.

в) използваме формулата $V = \dfrac{S_1 R}{3}$, където R е радиусът на вписаната в пирамидата сфера и намираме $R = \dfrac{3V}{S_1} = \dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)\cos\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$.

Университет по архитектура, строителство и геодезия 24 април 2016 г.

1	2	3	4	5
г	а	г	б	г

Задача 6. а) За да са отрицателни корените трябва да са изпълнени едновременно следните неравенства $D \ge 0$, $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 x_2 > 0$, т.е. $-3k^2 - 2k + 1 \ge 0$, $\dfrac{k-1}{k} < 0$ и 1>0.

Решаваме и получаваме $k \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

б) От $|x_1 - x_2| \ge 0$ следва, че най-малката стойност на A ще е при $x_1 = x_2$, т.е. когато $D = 0$. Следователно $k_1 = -1$ или $k_2 = \dfrac{1}{3}$.

А) $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{23}-3\right)$ **Б)** $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(3+\sqrt{23}\right)$

В) $BC = \sqrt{2}\left(\sqrt{23}-3\right)$ **Г)** $BC = \sqrt{2}\left(3+\sqrt{23}\right)$

19. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), който е описан около окръжност k. Ако $AD = BC$, $\angle ABC = 30$ и $S_{ABCD} = 8$, то радиусът r на окръжността k е равен на:

А) $r = 1$ **Б)** $r = 2$ **В)** $r = 1{,}5$ **Г)** $r = \sqrt{2}$

20. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$ и диагонал $BD = 5$, в който може да се впише окръжност. Лицето S_{ABCD} и дължината на раиуса r на тази окръжност са съответно равни на:

А) $S_{ABCD} = 31{,}5$ или $r = 3{,}5$ Б) $S_{ABCD} = 27$ или $r = 3$ В) $S_{ABCD} = 22{,}5$ или $r = 2{,}5$ Г) $S_{ABCD} = 18$ или $r = 2$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

21. Стойността на израза $\dfrac{3^{\frac{3}{4}} + 5^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} - (3*5)^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{2}}} - \left(\dfrac{3^{0.25} - 5^{0.25}}{3^{\sqrt{0.25}} - 5^{\sqrt{0.25}}}\right)^{-1}$ е равна на:

22. Решенията на уравнението $x = \sqrt{16 - 6x - x^2} - 2$ са:

23. Финансова институция предлага годишни влогове при 10% годишна лихва с планове както за просто, така и за сложно олихвяване на внесената сума, което се извършва в края на всеки период. Съпрузи едновременно открили два влога – единият на името на жената за 1010 лв. при проста лихва, а другият на името на мъжа за 1000 лв. при сложна лихва. След колко години сумата на мъжа ще стане по-голяма от сумата на жената (по тези конкретни влогове) и с колко лева?

24. В школа по математика учат 14 деца, средната възраст на които е 12 години. След влизането на преподавателя, средната възраст на хората в стаята нараснала с 3 години. На колко години е преподавателят?

25. Даден е ΔABC със страни $AB=15$, $BC=14$, $CA=13$. Да се намери дължината на вписаната в триъгълника окръжност.

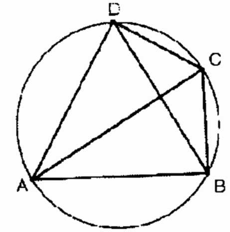
Пълните решения на задачите от 26. до 285. включително запищете в свитъка за решения!

26. Да се реши системата $\begin{cases}(x-y)xy^2=90\\(x+y)xy^2=360\end{cases}$.

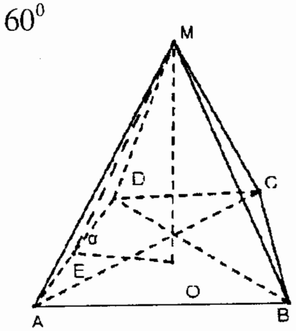
27. На щанд за сладолед с предлагат: ванилов, бананов, кокосов, шоколадов и сладолед с вкус на горски плодове, както и няколко вида сироп: ягодов, малинов, боровинков и карамелов. Колко възможности за избор има родител, който купува за детето си порция сладолед, включваща: по една топка от три различни вида сладолед, покрити с два различни вида сироп, поставени във вафлена фуния или в чашка с лъжичка? Каква е вероятността детето да получи бананов сладолед с карамелов сироп във вафлена фуния?

28. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$, със страни $AB=7$, $BC=5$, $CD=7$ и $DA=3$, се пресичат в точка O. Да се намерят дължините на отсечките AO, BO, CO и DO.

$AB+CD=BC+AD$. От $\angle ABC=\angle ADC=90$ следва, че около основата $ABCD$ може да се опише окръжност с диаметър AC. Тогава $\angle ABD=\angle ACD=2\varphi$. От $AB=BD$ следва, че $\angle BAD=90^0-\varphi$. Така получаваме $\angle BAD=90^0-\varphi$. Следователно $AB=a\cos\varphi$, $BC=a\sin\varphi$, $CD=a\cos 2\varphi$ и $AD=a\sin 2\varphi$. Тогава $a\cos\varphi+a\cos 2\varphi=a\sin\varphi+a\sin 2\varphi$,



$2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. И от $\cos\frac{\varphi}{2}\neq 0$ следва $tg\frac{3\varphi}{2}=1$, т.е. $\varphi=30^0$. Нека $ME\perp AD$ и $MO\perp(ABCD)$. Тогава $\angle MEO=\alpha$ и $MO=rtg\alpha$, където r е радиусът на вписаната в $ABCD$ окръжност. От $\angle BAD=\angle ABD=\angle ADB=\angle ACD=\angle ACB=60^0$ намираме $AB=BD=AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $BC=CD=\frac{a}{2}$. Тогава $S_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. И от $S_{ABCD}=pr$ намираме $r=\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$ и

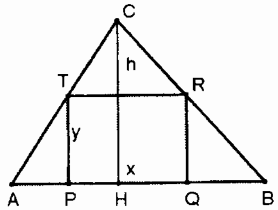


$MO=\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)tg\alpha}{4}$. Следователно

$$V_{ABCDM}=\frac{S_{ABCD}.MO}{3}=\frac{a^3\left(\sqrt{3}-1\right)tg\alpha}{16}.$$

, т.е. $\frac{k}{k+1}<0$ с решение $k\in(-1;0)$. Окончателно решение на задачата е $k\in[-1;0)\cup\left\{\frac{4}{5}\right\}$.

Задача 7. а) От условието и от синусова теорема получаваме $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$. Следователно $tg\alpha=tg\beta=tg\gamma$ и от $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ намираме $\alpha=\beta=\gamma=60^0$, т.е. ΔABC е равностранен. Тогава $AB=BC=AC=\frac{1}{2}$ и височината му $h=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



б) да означим $TP=RQ=y$ и от $\Delta TRS\sim\Delta ABC$ следва $\frac{x}{AB}=\frac{h-y}{h}$. След заместване намираме $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-2x)$. Следователно $S=xy=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-2x)x$.

в) От $S=-\frac{2\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x$ получаваме $x_0=\frac{1}{4}$, т.е. $\max S(x)=S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Задача 8. а) от условието, че всички околни стени на пирамидата сключват с равнината $ABCD$ на основата ъгъл α следва, че в $ABCD$ може да се впише окръжност, т.е.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 18 юни 2016 г.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайт в листа за отговори!

1. Нека $a=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b=\left(\sqrt[3]{27}:\sqrt[4]{16}\right)^{-1}$ и $c=20\%$ от 2.

Посочете вярното твърдение:

А) $c<a<b$ Б) $b<c<a$ В) $c<b<a$ Г) $a<b<c$

2. Ако $a=\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{2}$, то стойността на израза $\frac{3a^3-3b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{2a^3+2b^3}{a^2-ab+b^2}$ е равна на:

А) $5\sqrt{3}-\sqrt{2}$ Б) $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ В) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ Г) $\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt[3]{2-x^2}}{\sqrt[4]{x^2-2}}$ са:

А) $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$ Б) $x\in\varnothing$

В) $x\in(\sqrt{2};\infty)$ Г) $x=\pm\sqrt{2}$

4. Решенията на неравенството $\frac{8-x^3}{x^2-x-2}\le 0$ са:

А) $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;1]$ Б) $x\in(-\infty;-1]$

В) $x\in(-1;2)\cup(2;\infty)$ Г) $x\in(-1;\infty)$

5. Ако $a=lg3$ и $b=\lg 5$, то $\log_3 5$ е равен на:

А) $\frac{b}{a}$ Б) $b-a$ В) $\frac{a}{b}$ Г) $a-b$

6. Решенията на системата $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x + y = 7 \end{cases}$ са:

А)(-4;-3) Б)(3;4), (4;3) В)(-3;-4), (-4;-3) Г)(4;3)

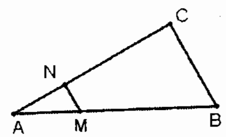
7. Ако α и β са корени на уравнението $x^2+5x-3=0$, то числата $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$ са корени на уравнението:

А) $3t^2+5t-1=0$ Б) $3t^2-5t-1=0$ В) $t^2+5t-3=0$ Г) $t^2-5t-3=0$

8. Ако $\alpha=\frac{\pi}{12}$, то стойността на израза $\frac{tg\alpha+tg2\alpha}{tg\alpha . tg2\alpha-1}$ е равна на:

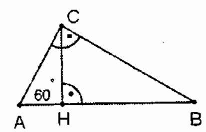
А) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б)1 В)-1 Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. Върху страните AB и AC на ΔABC, с лице $S_{ABC}=36$, са избрани съответно точки M и N, така че $AM:MB=1:2$ и $MN \parallel BC$. Лицето на ΔAMN е равно на:



А) $S_{AMN}=9$ Б) $S_{AMN}=4$ В) $S_{AMN}=12$ Г) $S_{AMN}=18$

10. Даден е ΔABC, за който $AC=5$, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$ и CH е височина. Дължината на отсечката BH е равна на:



А) $5\sqrt{3}$ Б)2,5 В) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ Г)7,5

11. Графиката на квадратната функция $y=f(x)$ пресича координатните оси в точките $A(-2;0)$, $B(3;0)$ и $C(0;4)$, а графиката на линейната функция $y=g(x)$ пресича графиката на функцията $y=f(x)$ в точки $A(-2;0)$ и $D(4;-4)$. Кое твърдение е вярно:

Университет по архитектура, строителство и геодезия
3 април 2016 г.

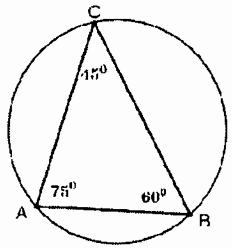
1	2	3	4	5
г	г	б	г	в

Задача 6. а) полагаме $\lg x = u$ и получаваме квадратното уравнение $2u^2-3u=1=0$ с корени $u_1=1$ и $u_2=\frac{1}{2}$. От $\lg x=1$ следва $x_1=10$, а от $\lg x=\frac{1}{2}$ следва $x_2=\sqrt{10}$.

б) От а) и $(k+1)u^2-3ku+k=0$ следва $x_1=10^{u_1}$ и $x_2=10^{u_2}$. От формулите на Виет намираме $u_1+u_2=\frac{3k}{k+1}$. Тогава условието $10x_1x_2=10^{4k}$ е еквивалентно на $10^{u_1+u_2+1}=10^{4k}$. Следователно $\frac{3k}{k+1}+1=4k$. Намираме $k=\pm\frac{1}{2}$. Решение е $k=\frac{1}{2}$, защото при $k=-\frac{1}{2}$, $D<0$, т.е. корените не са реални.

в) От $x>1$ следва $u=\lg x>\lg 1=0$. Тогава разглеждаме $(k+1)u^2-3ku+k=0$ за $u>0$. Разглеждаме следните случаи: 1) $k=-1$ - получаваме $u=\frac{1}{3}$. 2) За $k\neq-1$ следват два случая 2.1) $D=5k^2-4k>0$ и $\frac{3k}{2(k+1)}>0$ с решение $k=\frac{4}{5}$, и 2.2) $u_1\leq 0<u_2$

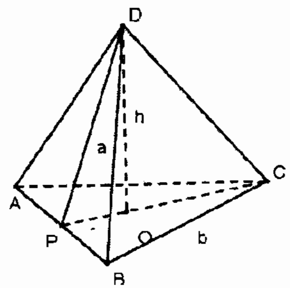
$x_1x_2=\dfrac{m}{2}$ заместваме в $\dfrac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{2(x_1+x_2)}<0$ и получаваме $\dfrac{-1}{2(2m+1)}<0$. Следователно решение е $m\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.



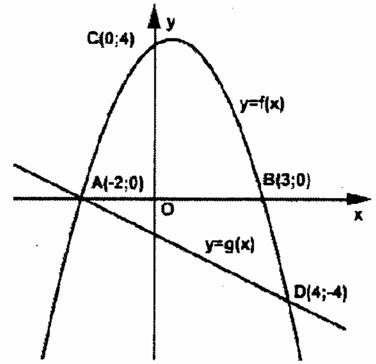
Задача 19. Използваме стандартните означения за триъгълник и намираме $\gamma=45^0$. От синусова теорема следва $a=2R\sin 75^0$ и $c=2R\sin 45^0$.

Използваме $S=\dfrac{ac\sin 60^0}{2}$, заместваме и получаваме

$$S=\frac{4\sqrt{3}R^2\sin 75^0\sin 45^0}{2.2}=\frac{R^2\sqrt{3}\left(\cos 30^0-\cos 120^0\right)}{2}=\frac{R^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}.$$



Задача 20. Нека пирамидата е $ABCD$, като $AB=BC=AC=b$, $DO=h$ е височината на пирамидата и $CO\cap AB=P$. Тогава $DP=a$ и от правоъгълния ΔDPO по Питагорова теорема намираме $h=\sqrt{a^2-r^2}$. От $r=\dfrac{1}{3}.\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$ следва $b=\dfrac{6r}{\sqrt{3}}$. Тогава $S_{ABC}=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}$ и $V_{ABCD}=\dfrac{3r^2\sqrt{3\left(a^2-r^2\right)}}{3}$. Следователно $S_1=\dfrac{3ab}{2}+S_{ABC}=3r\sqrt{3}\left(a+r\right)$.



А)Най-голямата стойност на квадратната функция $y=f(x)$ е по-голяма от 4.

Б) Линейната функция $y=g(x)$ е растяща в интервала $(-\infty;\infty)$.

В)Решенията на неравенството $f(x)<g(x)$ са $x\in(-2;4)$.

Г) Решенията на уравнението $f(x)=g(x)$ са $x=-2$, $x=3$

12. С коя от формулите се задача числова редица a_n, $n\in N$, всички членове на която са естетсвени числа?

А) $a_n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$ **Б)** $a_n=\dfrac{(n-1)n}{4}$

В) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{4}$ **Г)** $a_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

13. Дадена е аритметична прогресия $a_1,a_2,...a_n$, за която $a_1=1$, $a_3=13$ и $S_n=280$. Броят n на членовете на прогресията и последният и член a_n са:

А) $n=10$, $a_{10}=56$ **Б)** $n=10$, $a_{10}=55$ **В)** $n=11$, $a_{11}=55$ **Г)** $n=11$, $a_{11}=56$

14. Ако $tg\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$, то $\sin x$ и $\cos x$ са:

А) $\sin x=\dfrac{3}{5}$, $\cos x=\dfrac{4}{5}$ **Б)** $\sin x=\dfrac{2}{5}$, $\cos x=\dfrac{3}{5}$ **В)** $\sin x=\dfrac{4}{5}$, $\cos x=\dfrac{3}{5}$ **Г)** $\sin x=\dfrac{4}{5}$, $\cos x=\dfrac{2}{5}$

15. Дадени са 48 еднакви карти с формата на квадрат. Броят на различните фигури с формата на правоъгълник, които могат да се съставят от всички карти е:

А)6 **Б)5** **В)4** **Г)3**

16. Даден е статистически ред: 1; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 9. Кое от твърденията НЕ е вярно?

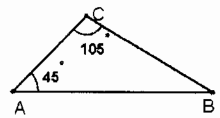
А)Медианата и среното аритметично на реда са равни.

Б)Ако прибавим нов елемент 4 към реда, то модата на новия ред ще бъде по-малка от медианата му.

В)Ако премахнем един елемент 4 към реда, то модата на новия ред ще бъде по-малка от медианата му.

Г)Ако прибавим нов елемент 4 към реда, то медианата на нвия ред ще бъде равна на 4,5.

17. Даден е ΔABC, за който $BC = 7$, $\angle ACB = 105$, $\angle BAC = 45$. Дължината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност и страната AC са равни на:



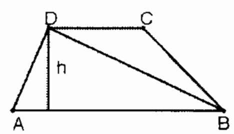
А) $R = 7\sqrt{2}$, $AC = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ **Б)** $R = 7\sqrt{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$

В) $R = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$ **Г)** $R = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AC = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

18. Даден е ΔABC, за който $AB = 2,5$, $BC = 3,5$, $\angle BAC = 120$. Полупериметърът p на ΔABC е равен на:

А) $p = 7,5$ **Б)** $p = 8$ **В)** $p = 3,75$ **Г)** $p = 4$

19. Даден е трапец $ABCD$, за който $AB = 13$, $AD = 5$, $BD = 12$ и $S_{ABCD} = 45$. Дължината на основата CD, височината h и $S_{\Delta CDB}$ са съответно равни на:



А) $CD = 6,5$, $h = 4,62$, **Б)** $CD = \frac{13}{2}$, $h = \frac{60}{13}$, $S_{\Delta CDB} = 15$

$b = 6$. От $S_{ок} = (a+b)k = 300$ намираме $k = 10$. От правоъгълния ΔBCH по Питагоровата теорема следва $h_1 = 12$. Тогава $OQ = r = \frac{1}{2}h_1 = 6$ и от правоъгълния ΔEOQ намираме $h = 8$.

Следователно $V_{ABCDE} = \frac{(a+b)h_1.h}{2.3} = 480$.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий”
тест математика – 11 юни 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
А	Б	Г	В	Г	В	В	Г	А	А	А	А

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
$(3;\pm 2)$, $(4;\pm\sqrt{3})$	-31	18	12	54

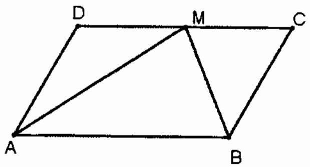
ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. От $D = (2m-1)^2 > 0$ следва, че корените на урвнението са реални. От формулите на Виет $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{2}$ и

ТРЕТА ЧАСТ

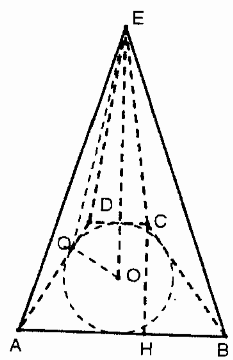
Задача 18. От условието следва, че ако геометричната прогресия е a, aq, aq^2, то аритметичната е a, aq, aq^2-2. Съставяме системата $\begin{vmatrix} a+aq+aq^2=14 \\ a-2aq+aq^2=2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a\left(1+q+q^2\right)=14 \\ a\left(1-2q+q^2\right)=2 \end{vmatrix}$, разделяме почленно, преобразуваме и получаваме квадратното уравнение $2q^2-5q+2=0$ с корени $q_1=2$ и $q_2=\frac{1}{2}$. Във всеки един от случаите получаваме търсение числа 2, 4, 6 или 8, 4, 0.

Задача 19. Да означим $AB=CD=2a$ и $AD=BC=b$. От свойствата на успоредника следва $\angle BAD=\angle BCD=60^\circ$ и $\angle ABC=\angle ADC=120^\circ$. Прилагаме косинусова теорема за ΔAMD и ΔBMC и получаваме $a^2+b^2-ab=16$ и $a^2+b^2+ab=36$. От второто равенство изваждаме първото и намираме $2ab=20$.



Следователно $S_{ABCD}=2ab\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$.

Задача 20. Да означим $AB=a$, $CD=b$, $AD=BC=c$, апотемата на пирамидата $EQ=k$, височината на пирамидата $MO=h$ и височината на основата $CH=h_1$. От $ABCD$ описан около окръжност следва $a+b=2c$, т.е.



$S_{\Delta CDB}=25$

В) $CD=\frac{60}{13}$, $h=\frac{13}{2}$, $S_{\Delta CDB}=15$ **Г)** $CD=4,62$, $h=6,5$, $S_{\Delta CDB}=25$

20. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който AC разполовява $\angle BAD$, $AD=4$, $\angle ACD=30$, $\angle ACB=75$ и $BO=DO$, където O е пресечната точка на диагоналите AC и BD. Лицето на четириъгълника е равно на:

А) $S_{ABCD}=8$ **Б)** $S_{ABCD}=16$ **В)** $S_{ABCD}=8\sqrt{3}$ **Г)** $S_{ABCD}=16\sqrt{3}$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

21. Най-голямата стойност на израза $sim\,2x-\sin^2 3x+\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ е равна на:

22. Решенията на уравнението $\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}=1$ са:

23. През първия месец от съществуването си новоучредената фирма «Възход 2016» имала 4100 лв. разходи, а приходите и били 2450 лв. От всеки следващ месец приходите на фирмата се увеличавали с по 600 лв., а разходите, т.е. фирмата е «излязла на печалба»?

24. Средният ръст на двамата треньори на детски баскетболен отбор е 205 см. В залата тренират 10 деца със среден ръст от 169 см. С колко сантиметра ще се повиши средният ръст на хората в залата при влизането на двамата треньори?

25. Даден е ΔABC със страни $AB=24$, $BC=21$, $CA=15$. Дължината на ъглополовящата CL на $\angle ACB$ е равна на:

Пълните решения на задачите от 26. до 285. включително запишете в свитъка за решения!

26. Да се реши уравнението $\left(x^2+2x\right)^2-2\left|x^2+2x\right|-3=0$.

27. С помощта на цифрите $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ е съставено четирицифрено число с неповтарящи се цифри. Колко такива числа могат да се образуват? Каква е вероятността съставеното число да е четно?

28. Даден е квадрат $ABCD$ с лице $S_{ABCD}=16$, за който с M е означена средата на страната AB, а O, N и P са съответно пресечните точки на AC и BD, BD и CM и AC и DM. Да се намери лицето на четириъгълника $MNOP$.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2016 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Числата $x_1=3$ и $x_2=-17$ са корени на уравнението:

А) $x^2-14x-51=0$ Б) $x^2+14x-51=0$
В) $x^2-14x+51=0$ Г) $x^2+51x-14=0$

2. Числото със стойност $\frac{1}{2}$ е:

А) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$ Б) $\log_{\sqrt{3}}3$ В) $\log_3\sqrt{3}$ Г) $\log_{\frac{1}{3}}9$

3. След преработката на израза $\frac{|a-3|}{3-a}+\frac{a-2}{|a-2|}$ при $a<2$ се получава:

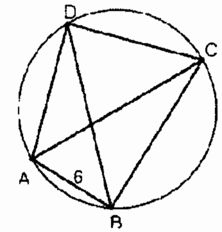
А)2 Б)-2 В)-1 Г)0

Задача 19. Уравнението има два различни положителни корена когато

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k^2-9k+4>0 \\ \frac{2(k-2)}{k}>0 \\ \frac{5-k}{k}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(4;\infty) \\ k\in(-\infty;0)\cup(2;\infty) \\ k\in(0;5) \end{cases}.$$

Решение е $k\in(4;5)$.

Задача 20. От $\angle ADC=\angle ABC$ и от $ABCD$ вписан в окръжност следва, че $\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$. Прилагаме Питагоровата теорема за правоъгълните ΔACD и ΔABC и намираме $2AD^2=100$, т.е. $AD=CD=5\sqrt{2}$ и $BC=\sqrt{10^2-6^2}=8$. От теоремата на Птоломей следва $BD.AC=AB.CD+BC.AD$. Заместваме и намираме $BD=7\sqrt{2}$.



Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 16 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Г	В	Б	А	В	Б	Б	В	Г	А	Г	Б

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
$x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$	32	$\frac{\pi}{6}$	12	6

Пловдивски университет „П. Хилендарски”
8 юли 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Г	А	В	Б	Б	А	Г	В	Б	Г	В

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
14	1	$\frac{17}{2}$	$12\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. За $x \in \left[-\frac{7}{3};7\right]$ преобразуваме даденото уравнение до уравнението $\sqrt{3x+7}=\sqrt{7-x}+2$, повдигаме на втора степен, преобразуваме и получаваме $\sqrt{7-x}=x-1$. При условие $x \geq 1$ повдигаме на втора степен и получаваме квадратното уравнение $x^2-x-6=0$ с корени $x_1=-2$ и $x_2=3$. Решение на даденото уравнение е $x=3$.

4. Ако x е корен на уравнението $4x-8=0$, то числената стойност на израза $\frac{3^x.27^{-x}.81}{9^x}$ е:

А) $\frac{1}{81}$ Б) $\frac{1}{9}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{27}$

5. Най-малкото цяло число от дефиниционната област на функцията $f(x)=\frac{x+10}{x-5}+\log_7(3x-12)$ е:

А)3 **Б)5** **В)6** **Г)4**

6. Стойностите на реалния параметър m, за които отношението на корените на уравнението $x^2+mx-16=0$ е -4 са:

А)-8 и **2** **Б)**само 6 **В)**само **-6** **Г)-6** и **6**

7. Решенията на системата $\begin{vmatrix} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{vmatrix}$ са:

А) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)$ Б) $\left(\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$ В) $\left(\sqrt{2};\frac{1}{2}\right)$ Г) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)$

8. Биквадратното уравнение, което притежава само един реален корен е:

А) $x^4+5x^2-14=0$ **Б)** $x^4+3x^2=0$

В) $x^4-2x^2+32=0$ **Г)** $x^4-8x^2+15=0$

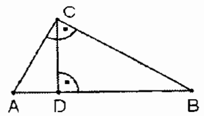
9. Изразът $\cos\alpha+\cos\left(120^\circ-\alpha\right)+\cos\left(120^\circ+\alpha\right)$ е равен на:

А)2 **Б)-2** **В)0** **Г)-1**

10. Равнобедрен и равностранен триъгълник имат обща основа. Периметърът на равностранния триъгълник е 36, а на равнобедрения – 40. Дължината на бедрото му е:

А)14 **Б)26** **В)8** **Г)16**

11. За правоъгълния ΔABC от чертежа е построена височината CD. Ако $\angle BAC = 60$ и $AB = 8$, то дължината на AD е:



А)1 Б)3 В)2 Г)не може да се намери

12. Равнобедреният трапец $ABCD$ с бедро $BC = 15$ *см* е описан около окръжност. Средната основа на трапеца е равна на:

А)30 *см* **Б)10 *см*** **В)5 *см*** **Г)15 *см***

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Решенията на неравенството $x^2+11+\sqrt{x^2+11}>42$ са:....

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25}$ е равна на:.....

15. Корените на уравнението $(x+3)^3-(x+1)^3=56$ са:...

16. В триъгълник със страни a, b, c е вписан полукръг с център лежащ върху страната c. Големината на диаметъра на този полукръг е:...

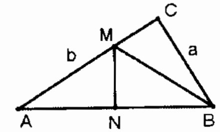
17. Височината на ромб разделя страната, към която е построена, в отношение 3:2 считано от връх на острия ъгъл. Синусът на този ъгъл е:....

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Решете уравнението $\dfrac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$.

19. За правоъгълния ΔABC с катети $BC=a$ и $AC=b$ е построена права, която разделя ΔABC на ΔANM и

Задача 19. Нека $S=\dfrac{ab}{2}$. От условието имаме $S_{ANM}=\dfrac{AN.NM}{2}=\dfrac{ab}{4}$. От $\Delta ANM \sim \Delta ACB$ получаваме



$$\frac{S_{ANM}}{S}=\frac{1}{2}=\left(\frac{MN}{a}\right)^2=\left(\frac{AN}{b}\right)^2=\left(\frac{AM}{c}\right)^2.$$

Следователно $MN^2=\dfrac{a^2}{2}$, $AN^2=\dfrac{b^2}{2}$,

$BN=c-AN=\sqrt{a^2+b^2}-\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. От Питагорова теорема за ΔBMN следва $BM^2=MN^2+BN^2$. Заместваме и намираме

$$BM^2=\frac{3a^2+3b^2-2b\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2}.$$

Тогава

$$S_{кръга}=\frac{\pi\left(3a^2+3b^2-2b\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)}{8}.$$

Задача 20. От $D=k^2+2k+13=(k+1)^2+12>0$ следва, че корените винаги са реални. Използваме формулите на Виет $x_1+x_2=k+5$ и $x_1x_2=2k+3$, преобразуваме даденото неравенство до $(x_1+x_2)^2-x_1x_2-12\ge 0$, заместваме и получаваме $(k+1)^2\ge 0$. Следователно решение е всяко k.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	В	Г	А	В	Г	А	Б	В	А	В	Г

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15
$x\in(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$	$\frac{1}{60}$	1; -5
16	**17**	
$\frac{4\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{a+b}$	$\frac{4}{5}$	

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. За $x\neq 3$ и $2^x<9$ даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$. От свойства на логаритмите следва $2^{3-x}=9-2^x$. Преобразуваме до $\frac{2^3}{2^x}-9+2^x=0$, полагаме $2^x=u$, $u\in(0;9)$ и получаваме квадратното уравнение $u^2-9u+8=0$ с корени $u_1=1$ и $u_2=8$. От $2^x=3$ следва $x=\log_2 9$, а от $2^x=8$ следва $x=3$. Решение на задачата е $x=\log_2 9$.

четириъгълник $NBCM$. Ако $S_{ANM}=S_{NBCM}$, то намерете лицето на описания около четириъгълника $NBCM$ кръг.

20. Намерете стойностите на реалния параметър k от уравнението $x^2-(k+5)x+2k+3=0$, ако е изпълнено неравенството $\left(x_1-x_2\right)^2\geq 12$, където x_1 и x_2 са корените на даденото уравнение.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
8 юли 2016 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Стойността на израза $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\sqrt{15}$ е:

А) $\sqrt{15}$ **Б)**15 **В)**4 **Г)** $4-\sqrt{15}$

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $4x^2-8x-5=0$, то стойността на израза $x_1+4x_1x_2+x_2$ е:

А)3 **Б)-7** **В)-13** **Г)-3**

3. Корените на уравнението $2^{4-x^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$ са:

А)-4 и 2 **Б)**-2 и 4 **В)**-2 **Г)**-2 и 2

4. Стойностите на x, за които е дефиниран изразът $\frac{\log_2\left(16-x^2\right)}{\sqrt{x-1}}$, са:

А) $x\in(-4;4)$ **Б)** $x\in(0;4)$ **В)** $x\in(1;4)$ **Г)** $x\in(0;1)\cup(1;4)$

5. Корените на уравнението $\frac{x-3}{x-2}-\frac{2}{x(2-x)}=0$ са:

А) 1 и 2 Б) 1 В)0 и 1 Г) -1

6. Най-малкото естествено число, решение на неравенството $\sqrt{x^2+2} > \sqrt{6}$, е:

А)2 **Б)3** **В)4** **Г)5**

7. Броят на реалните решения на системата $\begin{vmatrix} x^2+y^2=19-3xy \\ xy=3 \end{vmatrix}$ е:

А)четири Б) нула В) две Г) три

8. Ако $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, то стойността на израза $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}$ е:

А) $\frac{16}{9}$ Б) $\frac{9}{4}$ В)4 Г)9

9. В правоъгълния ΔABC ($\angle ACB = 90^\circ$) са построени височината CH и медианата CM ($H, M \in AB$). Ако $\angle MCH = 30^\circ$ и $MH = 3$, то дължината на хипотенузата на ΔABC е:

А)18 **Б)6** **В)12** **Г)9**

10. За ΔABC е известно, че $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $AC = 3\sqrt{6}$. Дължината на BC е:

А)12 Б) 6 В) $6\sqrt{3}$ Г) $6\sqrt{2}$

11. В квадрат е вписана окръжнист с радиус 8. Радиусът на описаната около квадрата окръжност е:

А) $12\sqrt{2}$ Б) $16\sqrt{2}$ В)16 Г) $8\sqrt{2}$

12. Продълженията на бедрата на равнобедрен трапец се пресичат под прав ъгъл. Ако основите на трапеца имат дължини 13 и 5, то лицето на трапеца е:

А)64 **Б)72** **В)36** **Г)18**

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

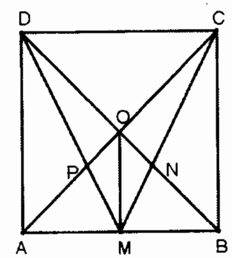
Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 18 юни 2016 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	Г	А	В	А	Г	Б	В	Б	Г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
А	Г	Б	В	Б	В	Г	В	Б	А

21	22	23	24	25
$\frac{3}{4}$	$x=2$, $x=6$	5 месеца	6 см	$CL=5\sqrt{7}$

26. Полагаме $|x^2+2x| = u \geq 0$ и получаваме квадратното уравнение $u^2-2u-3=0$ с корени $u_1=-1<0$ и $u_2=3$. От $|x^2+2x|=3$ следва $x^2+2x=3$ и $x^2+2x=-3$; второто уравнение няма реални корени, а корени на първото са $x_1=-3$ и $x_2=1$.

27. Броят на всички четирицифрени числа с различни цифри е $V_5^4 - V_4^3 = 96$ (извадени са започващите с 0). Броят на четните е $3V_4^3 - 2V_3^2 = 60$. Тогава търсената вероятност е $P = \frac{благоприятни}{всички} = \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$.



28. От DM и AO медиани следва, че P е медицентър на ΔABD. Използваме свойството на медианите и медицентъра и получаваме последователно

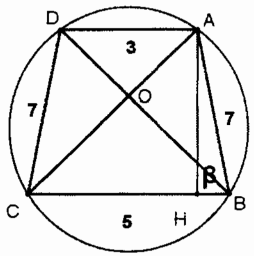
$S_{AOM} = \frac{1}{2}S_{ABO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}S_{ABCD} = 252$, $S_{APM} = S_{MNB} = \frac{2}{3}S_{AOM} = 168$.

Следователно $S_{OPMN} = S_{AOB} - 2S_{APM} = 168$.

уравнение, опростяваме и намираме $x^4=5^4$, т.е. $x=\pm5$. Тогава $y=\pm3$. Т.е. решения са (5;3) и (-5;-3).

27. Сладолед може да се избере по $C_5^3=10$ начина, опаковката на сладоледа по $C_2^1=2$ начина и сироп по $C_4^2=6$ начина. Т.е. общият брой възможни търсени комбинации е $C_5^3.C_2^1.C_4^2=120$. При фиксирана вафлена фуния, бананов сладолед и карамелов сироп възможностите са $C_4^2.C_3^1=6.3=18$. Следователно търсената вероятност е $P=\dfrac{\textit{благоприятни}}{\textit{всички}}=\dfrac{18}{120}=\dfrac{3}{20}$.

28. От $DC=AB$ следва $\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AB}$. Тогава $\angle ACB=\angle CAD$, т.е. $BC \parallel AD$ и $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи $CB>DA$. Нека AH е височината към основата CB и нека $\angle CBA=\beta$. От свойство на равнобедрен трапец намираме $BH=\dfrac{CB-DA}{2}=1$ и от правоъгълния ΔABH получаваме $\cos\beta=\dfrac{1}{7}$. От ΔABC и косинусова теорема следва $AC^2=49+25-2.5.7.\dfrac{1}{7}=64$, т.е. $AC=8$. Но $\Delta CBO \sim \Delta ADO$. Следователно $\dfrac{CO}{AO}=\dfrac{BO}{DO}=\dfrac{CB}{DA}=\dfrac{5}{3}$. Тогава $CO=BO=5$ и $DO=AO=3$.



13. Три числа са последователни членове на аритметична прогресия. Ако сумата им е 24, а произведението им е 224, то най-голямото от тези числа е ...

14. Корените на уравнението $4^{x+1}-7.2^x-2=0$ са ...

15. Дължините на основата на равнобедрен триъгълник и на височината към нея се отнасят както 5:4. Ако лицето на триъгълника е 40, то дължината на медианата към бедрото е ...

16. Лицето на трапец с дължини на основите 6 и 3 и дължини на диагоналите 7 и 8 е ...

17. Ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете A и B на ΔABC се пресичат под ъгъл 120°. Ако $AC=5$ и $BC=8$, то радиусът на вписаната в ΔABC окръжност е ...

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Намерете корените на уравнението $\sqrt{3x+7}-\sqrt{7-x}=2$.

19. Намерете стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $kx^2-2(k-2)x+5-k=0$ има два различни положителни корена.

20. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус 5. Ако $AB=6$, $AD=CD$ и $\angle ABC=\angle ADC$, то намерете дължините на диагоналите AC и BD.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 16април 2016 г.

1. Стойността на израза $A=\sqrt{\left(5-6\sqrt{3}\right)^2}+\left(\sqrt{3}-3\right)^2$ е равна на:

А) $17-12\sqrt{3}$ **Б)** $17-2\sqrt{3}$ **В)** $17+12\sqrt{3}$ **Г)** 7

2. Изразът $\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2-5x+3}$ при $x \neq 1$ и $x \neq \dfrac{3}{2}$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{x-6}{2x-3}$ Б) $\dfrac{x+6}{2x+3}$ В) $\dfrac{x+6}{2x-3}$ Г) $\dfrac{x-6}{2x+3}$

3. Числата $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$ са корени на уравнението:

А) $x^2-4x+2=0$ Б) $x^2-2x-2=0$ В) $x^2+4x-2=0$ Г) $x^2-3x+2=0$

4. Корените на уравнението $5^{2x+1}=5^{(x+1)^2}$ са:

А) $x=0$ Б) $x_1=-1$ и $x_2=0$ В) $x=2$ Г) $x_1=2$ и $x_2=6$

5. Броят на реалните корени на уравнението $x^3+7x^2+12x=0$ е:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

6. Кое от посочените числа НЕ е решение на неравенството $x^2-2x-3\geq 0$?

А) $-\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{2}$ В) 3 Г) π

7. По колко различни начина могат да се подредят 5 учебни предмета в програмата за един учебен ден при 5 часа за деня?

А) 45 Б) 120 В) 1000 Г) 15120

8. В ΔABC са дадени $BC=9\ cm$ и $AC=3\ cm$. Построена е вътрешната ъглополовяща CL ($L\in AB$) и $AL=2\ cm$. Дължината на страната AB равна на:

А) $9\ cm$ Б) $6\ cm$ В) $8\ cm$ Г) $7\ cm$

9. В равнобедрен триъгълник дължините на основите и на бедрата са равни съответно на 6 cm и 9 cm. Лицето на триъгълника е равно на:

А) $12\sqrt{2}\ cm^2$ Б) $12\sqrt{3}\ cm^2$ В) $18\sqrt{3}\ cm^2$ Г) $18\sqrt{2}\ cm^2$

ΔDHP намираме $\sin\varphi=\dfrac{DH}{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\varphi=60^\circ$.

Задача 8. Даденото уравнение има смисъл при $x<2a-1$ и е еквивалентно на $x^2-(a+1)x+3(a-2)=0$ и $\lg(2a-x-1)=0$. Първото уравнение има корени $x_1=a-2$ и $x_2=3$. Второто уравнение има корен $x_3=2a-2$. Ако x_3 е корен на даденото уравнение получаваме, че $x_3\in[-1;2]$ за $a\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. От $x_2=3\notin[-1;2]$ следва, че $3\geq 2a-1$, т.е. $a\leq 2$. Ако $a-2\geq 2$, то $a\leq -1$, което е невъзможно. Следователно $a-2\leq 2$ и $a-2\geq -1$, т.е. $a\in[1;4]$. Решение на задачата е $a\in[1;2]$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 27 март 2016 г.

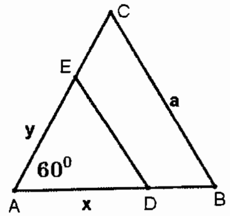
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	В	Г	Б	Г	В	А	Б	А	В
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Г	В	Б	А	Б	А	Б	В	А	Г

21	22	23	24	25
0	$x=1$	3 години; 18,00 лв	57 години	8π

26. Ясно е, че $x\neq 0, y\neq 0, x\neq \pm y$. Разделяме двете уравнения и получаваме $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{4}$. Изразяваме $y=\dfrac{3}{5}x$, заместваме в първото

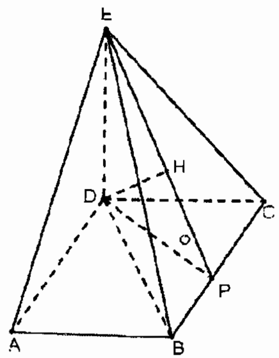
$x \in [-10;2] \cup x \in (2;8)$. Следователно решение на задачата е $x \in [-10;8)$.

Задача 6. Нека отсечката DE е търсената, като $D \in AB$, $E \in AC$. Да означим $AD = x$ и $AE = y$. Тогава $S_{ADE} = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, т.е. $xy = \frac{a^2}{2}$. Прилагаме косинусова теорема за ΔADE и получаваме $DE^2 = x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}$. От неравенството между средно аритметично и средно геометрично



следва $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Тогава $DE^2 \geq 2xy - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$, като равенство се достига при $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. От $\angle DAE = 60^\circ$ следва, че най-късата отсечка е $DE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача 7. Нека $EP \perp BC$ и от $ED \perp (ABCD)$ следва, че EP се проектира ортогонално върху DP. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $DP \perp BC$. Тогава $\angle((BCE);(ABCD)) = \angle EPD = \varphi$ и $BC \perp (DPE)$. Нека $DH \perp EP$. И от $BC \perp DH$ получаваме $DH \perp (BCE)$, т.е. $DH = 3$. От ΔBCD равностранен следва, че $DP = 2\sqrt{3}$. От правоъгълния



10. Дължината на хипотенузата на правоъгълен триъгълник с височина към нея 12 cm и катет 15 cm е равна на:

А)25 cm **Б)20 cm** **В)27 cm** **Г)30 cm**

11. Ако $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin 2\alpha$ е равна на:

А) $\frac{6}{5}$ **Б)** $\frac{5}{6}$ **В)** $-\frac{24}{25}$ **Г)** $\frac{24}{25}$

12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб $a = 6\ cm$ и височина $H = 2\ cm$. Обемът на пирамидата е равен на:

А) $6\sqrt{2}\ cm^3$ **Б)** $6\sqrt{3}\ cm^3$ **В)** $6cm^3$ **Г)** $36cm^3$

ВТОРА ЧАСТ

Запишетесамо отговор.

13. Решете неравенството $(4x^2 - 4x + 1)(x^2 - x - 6) > 0$.

14. За геометрична прогресия е дадено, че $a_3 . a_4 . a_5 = 2^9$. Намерете четвъртия член на прогресията.

15. Намерете решенията на уравнението $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$, които принадлежат на интервала $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

16. Даден е ΔABC със страни $a = 13\ cm$, $b = 15\ cm$ и $c = 14\ cm$. Намерете височината h_c.

17. Правоъгълен паралелепипед с измерения 12 cm, 9 cm и 2 cm и куб са равнообемни. Намерете дължината на ръба на куба.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

18. Сборът на три числа x, y, z, които в посочения ред образуват аритметична прогресия, е 12. Ако към третото число се прибави 2, то получените три числа образуват геометрична прогресия. Намерете числата x, y и z.

19. Точката M е средата на страната CD на успоредника $ABCD$. Намерете лицето на успоредника, ако $\angle BAD = 60$, $MA = 6\ cm$ и $MB = 4\ cm$.

20. Пирамидата $ABCDE$ е с основа равнобедрен трапец $ABCD$, в който може да се впише окръжност. Височината на пирамидата минава през центъра на тази окръжност. Голямата основа на трапеца е $AB = 24\ cm$, а бедрото му е $BC = 15\ cm$. Намерете обема на пирамидата, ако лицето на околната и повърхнина е 300 cm^2.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика – 11юни 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е с най-голям модул?

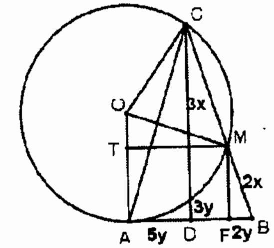
А)-5 Б) $\sqrt[3]{8}$ В) 2^2 Г)2,5

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_x \sqrt{10-x}$

А) $x \in [0;1) \cup (1;\infty)$ Б) $x \in (0;1) \cup (1;10)$

В) $x \in (-\infty;1) \cup (1;8]$ Г) $x \in (0;10]$

$BM = 2x$ и $CM = 3x$. От свойство на допирателната следва, че $BA^2 = BM.BC$, т.е. $c^2 = 10x^2$. От правоъгълния ΔBDC по Питагоровата теорема следва, че $h^2 = 25x^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{90x^2}{4}$, т.е. $h = \frac{3x\sqrt{10}}{2}$. Нека $MF \perp AB$ и $MT \perp OA$. От теоремата на Талес намираме $\frac{MF}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{BF}{BD}$, т.е. $MF = \frac{2}{5}h = \frac{3x\sqrt{10}}{5}$. Нека $BF = 2y$, $FD = 3y$ и $AD = BD = 5y$. Но $AMFT$ е правоъгълник. Тогава $TM = AF = 8y = \frac{4}{5}c$. Прилагаме Питагоровата теорема за ΔOTM, т.е. $OT^2 + TM^2 = OM^2$, използваме изразяването



$$OT = OA - TM = R - \frac{3x\sqrt{10}}{5} = 10\sqrt{10} - \frac{3x\sqrt{10}}{5},$$

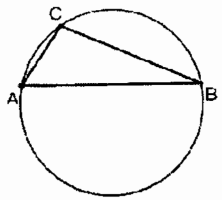
заместваме и намираме $x = 12$. Тогава $c = x\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$ и $h = 18\sqrt{10}$.

Следователно $S_{ABC} = \frac{ch}{2} = 1080$.

Задача 5. Даденото неравенство е еквивалентно на $\begin{cases} x-2 \le 0 \\ 100 - x^2 > 0 \end{cases}$

$$\cup \begin{cases} x-2>0 \\ 100 - x^2 > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \in [-10;10] \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x - 48 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ΔABC получаваме $\angle ACB = 135^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$ и $\angle ABC = 15^\circ$. От синусова теорема за ΔABC следва $\frac{BC}{\sin 30} = \frac{AC}{\sin 15} = 2R = 2$. Тогава $BC = 1$ и $AC = 2\sin 15$. Използваме формулата $S_{ABC} = \frac{AC.BC\sin 135^\circ}{2}$. Получаваме



$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

, и след заместване получаваме $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Задача 3. Да означим геометричната прогресия с a, aq, aq^2 и нека d е разликата на аритметичната прогресия. Тогава от условието получаваме $\begin{vmatrix} aq = a + 6d \\ aq^2 = a + 16d \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a(q-1) = 6d \\ a(q-1)(q+1) = 16d \end{vmatrix}$.

Разделяме двете уравнения и намираме $\frac{1}{q+1} = \frac{3}{8}$, т.е. $q = \frac{5}{3}$. От $a^2 = 9$ следва $a = \pm 3$. За $a = 3$ получаваме $d = \frac{1}{3}$, а за $a = -3$ следва $d = -\frac{1}{3}$. Но по условие аритметичната прогресия е растяща, следователно решение на задачата са $q = \frac{5}{3}$ и $d = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Нека $CD = h$ е височина към основата и O е център на окръжността. Да означим $OA = OM = OC = R$, $AB = c$,

3. Единият корен на квадратното уравнение $\boldsymbol{k}x^2 + x + \boldsymbol{k} + 1 = 0$ е $x_1 = -\frac{1}{3}$. Другият корен е равен на:

А)0 **Б)1** **В)-1** **Г)2**

4. Решенията на неравенството $\frac{2-x}{x+1} \geq 0$ са:

А) $x \in [-2;1]$ **Б)** $x \in (-4;2]$ **В)** $x \in (-1;2]$ **Г)** $x \in (-1;2)$

5. За аритметична прогресия е дадено, че $d = 2$ и $S_{40} = 500$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А)18 **Б)-10** **В)26,5** **Г)-26,5**

6. Ако 8% от числото a е $\frac{24}{5}$, то числото a е равно на:

А)24 **Б)40** **В)60** **Г)84**

7. В ΔABC е дадено, че $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ и $AC = 2$. Мярката на $\angle BAC$ е равна на:

А) 45° **Б)** 30° **В)** 60° **Г)** 90°

8. Периметърът и лицето на правоъгълник се изразяват с едно и също число. Едната страна на правоъгълника е 4 пъти по-голяма от другата. Дължината на тази страна е равна на:

А)2,5 **Б)2** **В)3** **Г)10**

9. Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни като $AC = 8$, $BD = 15$. Лицето на четириъгълника е равно на:

А)60 **Б)70** **В)100** **Г)120**

10. Изразът $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ е равен на:

А) $tg^2 \frac{\alpha}{2}$ **Б)** $tg \frac{\alpha}{2}$ **В)** $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ **Г)** $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$

11. Лицата на три стени на правоъгълен паралелепипед са 4 m^2, 3 m^2 и 12 m^2. Дължините на ръбовете (измеренията) на паралелепипеда са:

А)4 m ,3 m ,1 m Б)4 m ,3 m ,3 m В)2 m ,3 m ,1 m Г)1 m ,4 m ,6 m

12. Основата на пирамида е триъгълник с една страна 12 cm и срещулежащ ъгъл 30° .Всички околни ръбове на пирамидата са равни на 15 cm . Височината на пирамидата е равна на:

А)9 cm Б)22 cm В)13 cm Г) $3\sqrt{6}$ cm

ВТОРА ЧАСТ

Запишетесамо отговор.

13. Да се реши системата уравнения: $\begin{vmatrix} x+y^2=7 \\ xy^2=12 \end{vmatrix}$.

14. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-16x+4=0$, да се намери стойността на израза $A=\log_2 x_1x_2-2^{1+\log_2(x_1+x_2)}$.

15. Даден е равнобедрен ΔABC, за който $AC=BC=25\,cm$. Височината CD ($D\in AB$) е с дължина 20 cm, а AM ($M\in BC$) е височината към бедрото BC. Да се намери дължината на отсечката BM.

16. В равнобедрения трапец $ABCD$ може да се впише окръжност. Основите AB и CD на трапеца са съответно равни на 16 cm и 9 cm. Да се намери височината на трапеца.

17. Околният ръб на правилна четириъгълна пирамида е 6 cm и определя с основата на пирамидата ъгъл 30° . Да сенамери обемът на пирамидата.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

т.е. $x_{1,2}=-1$, $x_3=5$ и $x_4=1$. Следователно $a=2$ е решение. 2) за да има второто уравнение едно решение, трябва $a=0$. Тогава $D<0$, т.е. първото уравнение няма решение. Следователно $a=0$ не е решение. 3) нека $a>2$. Тогава $x_1=-1-\sqrt{a-2}$ и $x_2=-1+\sqrt{a-2}$. От $a>2$ следва $a+3>0$ и $-1-\sqrt{a-2}\neq a+3$. Разглеждаме три случая 3.1) $-1-\sqrt{a-2}=3-a$. За $a\geq 4$, повдигаме $\sqrt{a-2}=a-4$ на втора степен и достигаме до квадратното уравнение $a^2-9a+18=0$ с корени $a=3<4$ и $a=6$, което е и решение. 3.2) $-1+\sqrt{a-2}=a+3\Rightarrow\sqrt{a-2}=a+4$. Достигаме до $a^2+7a+18=0$, което няма реални корени. 3.3) $-1+\sqrt{a-2}=3-a\Rightarrow\sqrt{a-2}=4-a$. За $a\leq 4$ получаваме квадратното уравнение $a^2-9a+18=0$ с корени $a=6>4$ и $a=3$. Решение е $a=3$. Окончателно решение на задачата са $a=2$, $a=3$ и $a=6$

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 19 юни 2016 г.

Задача 1. За $x\neq 0$, от $|x|>0$ следва, че даденото неравенство е еквивлентно на неравенството $x^{2016}-1<0$. Следователно решения на задачата са $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Задача 2. От условието следва, че ако най-малката дъга е x, то другите са $2x$ и $9x$. Тогава $12x=360^\circ$, т.е. $x=30^\circ$. Нека $\overset{\frown}{AC}=30^\circ$, $\overset{\frown}{BC}=60^\circ$ и $\overset{\frown}{AB}=270^\circ$. Следователно за ъглите на

$V_1=\frac{4(2+y)}{6}-\frac{x^2y}{6}$. Заместваме и след опростяване получаваме $V_1=\frac{4(3y^2+6y+4)}{3(y+2)^2}$. От $V_2=8-V_1$ и $\frac{V_2}{V_1}=\frac{17}{7}$ следва $V_1=\frac{7}{3}$. Тогава опростяваме $\frac{4(3y^2+6y+4)}{3(y+2)^2}=\frac{7}{3}$ и получаваме квадратното уравнение $5y^2-4y-12=0$ с положителен корен $y=2$. Намираме $x=1$, т.е. точката M е среда на BC, а F е среда на CC_1. Сечението $AMFD_1$ е равнобедрен трапец с основи $AD=2\sqrt{2}$ и $MF=\sqrt{2}$. За бедрата е изпълнено $AM=D_1F=\sqrt{5}$. Нека MH е височина в равнобедрения трапец. Тогава $AH=\frac{AD_1-MF}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и от правоъгълния ΔAHM намираме $HM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Следователно лицето на сечението е $S_{AMFD_1}=\frac{(AD_1+MF).MH}{2}=\frac{9}{2}$.

Задача 8. За следните две уравнения $x^2+2x+3-a=0$ и $|x-3|=a$ ще разгледаме три случая : 1) първото има 1 решение, а второто 2 решения; 2) първото уравнение има 2 решения, второто -1 решение; 3) двете уравнения имат по две решения, но едното им е общо. За $a\geq 0$ второто уравнение има два корена $x_3=a+3$ и $x_4=3-a$. Дискриминантата на първото уравнение е $D=a-2$. 1) ако първото уравнение има едно решение, то $a=2$,

18. Да се намерят стойностите на реалния параметър $\boldsymbol{m}$, за които уравнението $2\boldsymbol{x}^2-(2\boldsymbol{m}+1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}=0$ има реални корени $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, удовлетворяващи неравенството $\frac{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2}{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2}<\frac{1}{2}$.

19. В окръжност с радиус $\boldsymbol{R}$ е вписан триъгълник, на който два от ъглите са с мерки 75 и 60. Да се намери лицето на триъгълника.

20. В правилна триъгълна пирамида дължината на радиуса на вписаната в основата окръжност е $\boldsymbol{r}$, а дължината на апотемата е $\boldsymbol{a}$. Да се намери лицето на пълната повърхнина и обемът на пирамидата.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
3 април 2016 г.

Задача 1. Ако $\log_2 5=\boldsymbol{a}$ и $\log_4 3=\boldsymbol{b}$, то $\log_3 5$ е равен на:

а) $\boldsymbol{ab}$ **б)** $\frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ **в)** $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ **г)** $\frac{\boldsymbol{a}}{2\boldsymbol{b}}$

Задача 2. Ъгъл $\boldsymbol{\alpha}$ е от втори квадрант и $\sin\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{3}$. Стойността на $\cot \boldsymbol{g\alpha}$ е равна на:

а) 3 **б)** $-\frac{1}{3}$ **в)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **г)** $-2\sqrt{2}$

Задача 3. В триъгълник две от страните са 3 и 5, а ъглополовящата между тях е $\frac{15}{8}$. Третат страна на триъгълника е равна на:

а) 8 **б) 7** **в) 4** **г) 6**

Задача 4. Дадени са три окръжности, k_A, k_B и k_C с центрове A, B и C и с радиуси $r_A = 1$, $r_B = 2$ и $r_C = 3$, всеки две от които се допират външно. Лицето на ΔABC е равно на:

а) 3 **б)** 4 **в)** 5 **г)** 6

Задача 5. Основата на призма с обем 36 е успоредник със страни 3 и 4 и ъгъл 60 . Околният и ръб е 4. Ъгълът между околния ръб и основата е:

а) 30 **б)** 45 **в)** 60 **г)** 90

Задача 6. Дадено е уравнението $(k+1)\lg^2 x - 3k\lg x + k = 0$, където k е реален параметър.

а) Да се реши за $k = 1$.

б) За кои стойности на k уравнението имаа реални корени x_1 и x_2, за които $10x_1x_2 = 10^{4k}$

в) За кои стойности на k уравненението има точно едно решение, по-голямо от1?

Задача 7. Даден е ΔABC, в който $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и $BC = \cos\alpha$, $CA = \cos\beta$, $AB = \cos\gamma$.

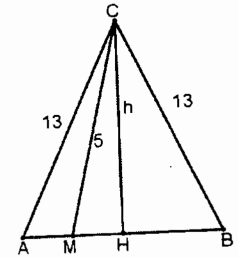
а) Докажете, че ΔABC е равностранен и височината му е равна на $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

б) Нека $PQRT$ е правоъгълник, на който върховете P и Q лежат на отсечката AB, R е точка от BC и T лежи на отсечката AC. Ако $PQ = x$, пресметнете лицето S на $PQRT$ като фунция на x

в) Пресметнете най-голямата стойност на S.

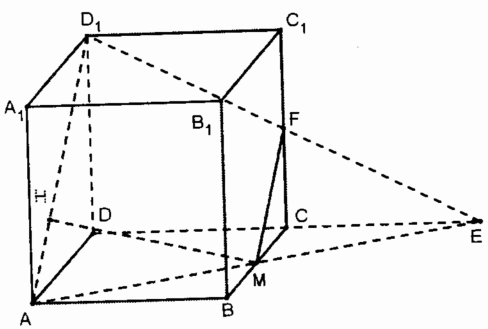
Задача 8. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$, такава че $AB = BD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90$, $\angle ACD = 2\varphi$ и $AC = a$. Всички околни стени на пирамидата сключват с равнината $ABCD$ на основата ъгъл α.

$x \in (-17;1)$. Следователно $x \in (-3;1)$. От обединението на двата случая получаваме решението на задачата $x \in (-3;1) \cup (3;4)$.



Задача 6. Нека $CH = h$ е височина към основата на ΔABC. Тогава $AH = BH$ и $h = CH \le CM = 5$. От Питагорова теорема за ΔAHC следва $AH = \sqrt{169 - h^2}$, т.е. $AB = 2\sqrt{169 - h^2}$. Тогава за лицето $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = h\sqrt{169 - h^2}$ при $h \in [0;5]$ получаваме. Намираме $S'(h) = \frac{169 - 2h^2}{\sqrt{169 - h^2}} > 0$ за всяко $h \in [0;5]$. Следователно $S(h)$ расте за $h \in [0;5]$. Т.е. най-голяма стойност $S(h)$ достига при $h = 5$. Следователно $AB = 24$.

Задача 7. Нека $AM \cap DC = E$ и $D_1E \cap CC_1 = F$. Сечението е $AMFD_1$. Нека обема на тялото „зад“ сечението е V_1, а „пред“ сечението е V_2.



Тогава $V_1 = V_{AEDD_1} - V_{MCEF}$, $V_2 = V - V_1$, където $V = 8$ е обемът на куба. Да означим $MC = CF = x$ и $CE = y$. От $\Delta MCE \sim \Delta ADE$ следва $\frac{x}{2} = \frac{y}{y+2}$, т.е. $x = \frac{2y}{y+2}$. Но равенства и намираме $x=\frac{3\sqrt{39}}{2}$. Следователно $h=\frac{3\sqrt{13}}{2}$ и $S_{ABCD}=39\sqrt{3}$. Нека $EH\perp AB$. Тогава $S_{ABE}=\frac{AB.EH}{2}=\frac{1}{2}.39\sqrt{3}$ и получаваме $EH=\sqrt{13}$. От правоъгълния ΔAHE намираме $AH=EH\cot g30\sqrt{39}$. Тогава $BH=2\sqrt{39}$. Прилагаме Питагорова теорема за ΔBHE и получаваме $BE^2=BH^2+EH^2=169$, т.е. $BE=13$.

Задача 5. За да има смисъл неравенството трябва $\frac{25-x^2}{16}>0$ и $\frac{25-x^2}{16}\neq 1$ и $\frac{24-2x-x^2}{14}>0$. Получаваме $x\in(-5;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4)$. Тогава даденото неравенство е еквивалентно на $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{25-x^2}{16}\right)$.

Разглеждаме два случая: 1) $\frac{25-x^2}{16}\in(0;1)$, т.е. $x\in(-5;-3)\cup(3;4)$. Тогава $\frac{24-2x-x^2}{14}<\frac{25-x^2}{16}$ с решение $x\in(-\infty;-17)\cup(1;+\infty)$. Следователно $x\in(3;4)$. 2) $\frac{25-x^2}{16}>1$, т.е. $x\in(-3;3)$. Тогава $\frac{24-2x-x^2}{14}>\frac{25-x^2}{16}$. Получаваме

а) Пресметнете обема на пирамидата.
б) Пресметнете пълната повърхнина на пирамидата.
в) Пресметнете радиуса на вписаната сфера.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
24 април 2016 г.

Задача 1. Прав кръгов конус има височина 4 и радиус на основата 3. Развивката на околната му повърхнина като сектор има ъгъл:

а) $\frac{3\pi}{5}$ **б)** $\frac{4\pi}{5}$ **в)** π **г)** $\frac{6\pi}{5}$

Задача 2. Най-голямото цяло число, удовлетворяващо неравенството $\log_{\frac{1}{7}}(\log_3 x)\geq 0$ е:

а) 3 **б) 1** **в) 7** **г) 0**

Задача 3. Решенията на уравнението $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ са числата от интервала:

а) $[3;+\infty)$ **б)** $[3;3]$ **в)** $(-\infty;+\infty)$ **г)** $(-\infty;3]$

Задача 4. В ΔABC медианата CM е перпендикулярна на страната AC. Ако $AC=b$ и $\angle ACB=135$, то страната BC е равна на:

а) $b\sqrt{3}$ **б)** $b\sqrt{2}$ **в)** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ **г)** $2b$

Задача 5. Ако α е остър ъгл, за който $4\sin^2\alpha+5\cos\alpha-5=0$, то α е от интервала:

а) $(0^\circ;15^\circ)$ **б)** $(45^\circ;60^\circ)$ **в)** $(60^\circ;75^\circ)$ **г)** $(75^\circ;90^\circ)$

Задача 6. Квадратното уравнение $kx^2+(1-k)x+k=0$ има реални корени x_1 и x_2.

а) За кои стойности на k корените са отрицателни числа?

б) Намерете минималната стойност на израза $A = 2^{|x_1 - x_2|}$ и при кои стойности на k тя се достига.

в) Ако $k = -\frac{1}{2}$, пресметнете стойността на израза $B = 2^{x_1}\left(2^{x_2} - 2^{-x_1}\right) + \lg x_1 + \lg x_2$.

Задача 7. Диагоналите на равнобедрен трапец $ABCD$ са взаимно перпендикулярни, а височината му е h.

а) Пресметнете лицето на трапеца.

б) Ако $CD = m$ (и височината е h), намерете AB и AD.

в) При условието на т. б). През пресечната точка на диагоналите е прекарана права успоредна на основите, отсичаща от бедрата отсечка MN. Намерете дължината на MN.

Задача 8. Кубът $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има дължина на страната a.

а) Пресметнете разстоянието от точка C до равнината (AB_1D_1).

б) Пресметнете косинуса на ъгъла между равнините (AB_1D_1) и (BCC_1B_1).

Университет по архитектура, строителство и геодезия 13юли 2016 г.

Задача 1. ΔABC има височина $CH = 4$. На какво разстояние от връх C трябва да се прекара права, успоредна на AB, която разделя лицето на ΔABP на две равни части?

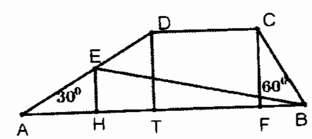
а) $2\sqrt{2}$ **б)** 2 **в)** $\sqrt{3}$ **г)** $\frac{5}{2}$

Задача 2. Дефиниционното множество на функцията $y = \log_2\left(2 - \sqrt{x}\right)$ е:

$AC = 6 + x$ и $BC = 45 - x$. Прилагаме Питагоровата теорема за ΔABC и получаваме $(x+6)^2 + (45-x)^2 = 39^2$. Опростяваме и стигаме до квадратното уравнение $x^2 - 39x + 270 = 0$ с корени $x_1 = 30$ и $x_2 = 9$. От $AC < BC$ следва $x = 9$. Следователно $AC = 15$ и $BC = 36$.

Задача 3. Нека $tg\frac{\alpha}{2} = x$. От $tg\alpha < 0$ следва $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $x > 0$. Използваме формулата $tg\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$ и от $-\frac{7}{24} = \frac{2x}{1 - x^2}$ получаваме квадратното уравнение $7x^2 - 48x - 7 = 0$ с корени $x_1 = -\frac{1}{7} < 0$ и $x_2 = 7$. Решение е $tg\frac{\alpha}{2} = x = 7$.

Задача 4. Нека $DT \perp AB$ и $CF \perp AB$. Тогава $DTFC$ е правоъгълник и $TF = DC = \sqrt{39}$ и $DT = CF = h$. Да означим $AT = x$. Получаваме $FB = 2\sqrt{39} - x$. От правоъгълните ΔATD и ΔBFC следва $h = xtg30 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $h = \left(2\sqrt{39} - x\right)tg60^{\circ} = \left(2\sqrt{39} - x\right)\sqrt{3}$. Приравняваме последните



28. Да се реши тригонометричното уравнение $4(1+\cos x)\sin^2\dfrac{x}{2} = 3\sin x + 2$.

29. В правоъгълния ΔABC ($\angle ACB = 90^\circ$) са дадени $BC = a$ и $\angle CAB = 60^\circ$. Точките M и N лежат съответно на BC и AB, така че около четириъгълника $ANMC$ може да се опише окръжност. Да се намери периметърът на ΔNMB, ако лицето му е 4 пъти по-малко от това на ΔABC.

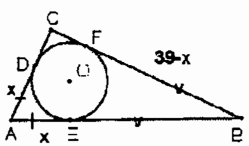
30. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 - \sqrt{8}x + 3a + 1}$ е дефинирана за всяко реално число x.

РЕШЕНИЯ

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 20 март 2016 г.

Задача 1. При $\dfrac{x-4}{x-5} \ge 0$, $x \ne 5$, т.е. $x \in (-\infty; 4] \cup (5; +\infty)$ даденото неравенство е еквивалентно на $(x-3)(x-7) \le 0$ с решение $x \in [3;7]$. Решение на задачата е $x \in [3;4] \cup (5;7]$.

Задача 2. От $R = \dfrac{39}{2}$ следва $AB = 39$. Нека допирните точки на вписаната окръжност със страните на ΔABC са $E \in AB$, $F \in BC$, $D \in AC$. Тогава $CD = CF = r = 6$. Да означим $AE = AD = x$, $x < 39$. Следователно $BE = BF = 39 - x$,



а) $[0;4)$ б) $(0;\infty)$ в) $[0;2]$ г) $(4;\infty)$

Задача 3. Даден е правилен тетраедър с обем V. Центровете на стените му са върхове на друг тетредър с обем V_1. Тогава отношението $\dfrac{V}{V_1}$ е равно на:

а) 27 **б)**8 **в)** 18 **г)** никое от посочените

Задача 4. Броят на решенията на уравненеито $|x+1| = |x|$ в интервала $[-1;0]$ е:

а) 0 **б) 1** **в) 2** **г) 3**

Задача 5. Коренитена уравнението $x^3 - kx^2 - x = 0$ образуват аритметична прогресия. Тогава k е равно на:

а) -1 **б)**1 **в) 0** **г) 2**

Задача 6.Дадена е функцията $f(x) = \sqrt{2}\sin 2x - \sin x - \cos x + a + \sqrt{2}$, където a е параметър.

а) Нека $\sin x + \cos x = t$. Изразеете f като функция на t.

б) Да се реши уравнението $f(x) = 0$ за $a = -\sqrt{2}$.

в) За кои стойности на a неравенството $f(x) < 0$ е изпълнено за всяко $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$?

Задача 7. Основите на трапеца $ABCD$ са $AB = a$ и $CD = b$ ($a > b$). Диагоналите на $ABCD$ се пресичат в точка O. Права успоредна на AB пресича отсечките AD, AO, BO и BC съответно в точките M, N, P и Q. Дадено е, че $\dfrac{AM}{MD} = k$.

а) Пресметнете дължините на отсечките MN, NP и PQ.

б) Пресметнете отношението $\dfrac{AN}{NO}$.

в) Пресметнете отношението на лицата на ΔNOP и трапеца $ABCD$.

Задача 8. Основата на пирамида $ABCDM$ е трапец с голяма основа $AB=2m$ и остър ъгъл φ. Всички околни ръбове сключват с равнината на основата ъгъл α, а върхът M се проектира в средата на страната AB.

а) Пресметнете обема на пирамидата.

б) При фиксирани m и α покажете, че максималната стойност на обема на пирамидата се достига при $\varphi=60^\circ$.

в) Пресметнете разстоянието от върха B до околната стена ADM.

Технически университет - София
2 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\sqrt[3]{\left(5-\sqrt{17}\right)\left(5+\sqrt{17}\right)}+\frac{3^4.3^{11}}{3^6.3^7}$ е:

а) 8 б) **9** в) 10 г) 11 д) **12**

2. Стойността на израза $(6,25)^{0.5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{0.25}$ е:

а) $\frac{1}{8}$ б) $\frac{3}{8}$ в) $\frac{3}{4}$ г) $\frac{5}{4}$ д) $\frac{5}{2}$

3. След намалението на цената на една стока с 20%, новата цена е 100 лв. Първоначалната цена на тзи стока е:

а) 100 лв б) 110 лв в) 115 лв г) 120 лв д) 125 лв

4. Най-големият корен на уравнението $\left|x^2-2x+1\right|=2(x+1)$ е:

а) $2-\sqrt{7}$ б) 2 в) $2+\sqrt{3}$ г) $2+\sqrt{5}$ д) $3+\sqrt{5}$

а) $3\sqrt{3}tg\alpha$ б) $\frac{\sqrt{3}}{3}tg\alpha$ в) $3\sqrt{3}\sin\alpha$ г) $9\sqrt{3}tg\alpha$ д) $9tg\alpha$

20. Корените на квадратното уравнение $kx^2+2kx-2k+1=0$ са отрицателни за стойностите на реалния параметър k в интервала:

а) $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ б) $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ в) $\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ г) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ д) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\frac{3^{2x}-21}{3^x-3}=10$.

22. Да се реши уравнението $\lg(x-4)+\lg(x-8)=\lg 8$.

23. Да се реши неравенството $\frac{4}{|x-1|}-\frac{1}{|x-2|}\le 0$.

24. Да се намерят целите решения на неравенството $\frac{x-2}{x^2-9x+14}\le-\frac{2}{13}$.

25. Да се реши системата $\begin{vmatrix}(x-y)(x^2-y^2)=45\\ x+y=5\end{vmatrix}$.

26. Библиотекар подрежда по случаен начин 10 книги в редица. Ако точно три са с червена подвързия, каква е вероятността те да са подредени една до друга?

27. Върху графиката на функцията $f(x)=x^3+x^2+4$ е избрана т. A с абсциса $x=-1$. Да се намери ординатата на т. A и големината на ъгъла, който сключва допирателната на $f(x)$ в т. A с положителната посока на оста Ox.

13. Стойността на израза $\frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ\right)\sin 10^\circ$ е:

а) $\frac{1}{4}$ **б)** $\frac{1}{8}$ **в)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **г)** $\frac{1}{8}+\sin 10^\circ$ **д)** $\frac{1}{2}\sin 10^\circ$

14. Ако $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, то числото $\cot g\frac{\alpha}{2}$ е равно на:

а) $\frac{1}{3}$ **б)** $-\frac{1}{3}$ **в)** $\frac{1}{2}$ **г)** $-\frac{1}{2}$ **д)** $\frac{3}{2}$

15. Стойността на производната на функцията $f(x)=2\cos 2x+\pi$ в $x=\frac{\pi}{6}$ е:

а) $-2\sqrt{3}$ **б)** $2\sqrt{3}$ **в)** $-\sqrt{3}$ **г)** $\sqrt{3}$ **д)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. основата на равнобдрен триъгълник е 6 cm, а медианите към бедрата са взаимно перпендикулярни. Дължината на третата медиана в сантиметри е:

а) 3 **б)** 6 **в)** 9 **г)** 12 **д)** 15

17. Дължината на страната на ромб е 5 cm, а сборът от диагоналите му е 14 cm. Лицето на ромба е:

а) 96 cm^2 **б)** $12\sqrt{2}$ **в)** 12 cm^2 **г)** 20 cm^2 **д)** 24 cm^2

18. В сфера с радиус 15 cm е вписан прав кръгов конус с ъгъл γ между двете образувателни на осното му сечение. Ако $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$, то радиусът на основата на конуса е:

а) 20 cm **б)** 7,5 cm **в)** 9 cm **г)** 10 cm **д)** 5 cm

19. Около основата на правилна триъгълна пирамида е описана окръжност с радиус $2\sqrt{3}$ cm. Околните стени сключват с основата ъгъл с големина α. Обемът на пирамидата в cm^3 е:

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2+6x+1=0$, то стойността на израза $x_1x_2^3+x_2x_1^3$ е:

а) 2 **б)** 3 **в)** 4 **г)** 5 **д)** 6

6. **Функцията** $f(x)=3x^2-5|x|+2$ за $x\in(-\infty;\infty)$ е:

а)ограничена **б)**четна **в)**нечетна
г)линейна **д)**периодична

7. Стойността на най-малкото и най-голямото цяло число, които са решение на неравенството $\frac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)}\geq 0$, е равен на:

а) 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4

8. Стойността на израза $4^{\log_2 5}+\left(\log_5 7\right)\left(\log_{49}(-5)(-25)\right)$ е:

а) 26,5 **б)** 27 **в)** 27,5 **г)** 28 **д)** 28,5

9. За разликата d на аритметична прогресия с общ член a_n, за която $a_7+a_9=30$ и $a_6a_{10}=209$, е вярно, че:

а) $d=2$ **б)** $d^2=4$ **в)** $d^2=2$ **г)** $d=3$ **д)** $d^2=9$

10. Най-малката стойност на функцията $f(x)=3\cos x-4\sin x+1$ в затворения интервал $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ е:

а) -4 **б)** -3 **в)** -2 **г)** -1 **д)** 0

11. Ако $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ и $270^\circ<\alpha<360^\circ$, то числото $tg\alpha$ е равно на:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **в)** $-\sqrt{3}$ **г)** $\sqrt{3}$ **д)** 2

12. В една ваза има 9 червени и 6 бели рози. Броят на различните начини, по които може да се образува букет от 1 червена и 2 бели рози, е:

а) 125 **б)** 125 **в)** 108 **г)** 95 **д)** 54

13. Стойностите на параметъра a, за които медианата на данните $12,5,3,7,11,6,a$ е равна на 6, са:

а) $a=7$ б) $a=\{7;8\}$ в) $a=9$ г) $a=\{9;12\}$ д) $a\in(-\infty;6]$

14. В правоъгълен ΔABC с катет $AC=20\ cm$ и височина $CD=12\ cm$ дължината на катета BC е:

а) $9\ cm$ б) $10cm$ в) $15\ cm$ г) $16\ cm$ д) $17cm$

15. Градусната мярка на острия ъгъл на ромб с периметър $32\ cm$ и височина $4\ cm$ е:

а) 75° б) 60° в) 45° г) 30° д) 15°

16. Хордата AB разделя окръжността на две дъги, дължините на които се отнасят, както 5:4. Градусната мярка на най-малкия вписан в окръжността $\angle ACB$ е:

а) 80° б) 70° в) 65° г) 60° д) 45°

17. Страните на успоредник имат дължини $6\ cm$ и $2\ cm$, а големината на острия му ъгъл е $\dfrac{\pi}{3}$. По-големият диагонал има дължина:

а) $6\ cm$ б) $6{,}5\ cm$ в) $2\sqrt{11}\ cm$ г) $7\ cm$ д) $2\sqrt{13}\ cm$

18. В правилна триъгълна пирамида $ABCM$ точка O е медицентър на основата ABC. Обемът на пирамидата е $72\ cm^3$, а лицето на основата е $12\ cm^2$. Дължината на MO е:

а) $18\ cm$ б) $20\ cm$ в) $21\ cm$ г) $22\ cm$ д) $25\ cm$

19. В правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ точка O е пресечна точка на диагоналите AC и BD на основата $ABCD$, като $AC=22\ cm$ и $MC=61\ cm$. Дължината на отсечката MO е:

а) $58\ cm$ б) $60\ cm$ в) $61\ cm$ г) $62\ cm$ д) $65\ cm$

6. Сборът на първите десет члена на аритметична прогресия е 20. Ако разликата на прогресията е $d=-4$, то първият член на тази прогресия е:

а) 20 б) 28 в) 91 г) 92 д) -80

7. Ако редицата с общ член a_n е геометрична прогресия с частно $q=0,2$, то стойността на израза $\left(\dfrac{a_8}{a_6}+\dfrac{a_{12}}{a_9}\right)^{\frac{1}{3}}$ е равна на:

а) 0,48 б) 0,048 в) $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ г) $2\sqrt[3]{6}$ д) $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{5}$

8. Статистически ред се състои от 10 данни. Ако разликата между средните два члена е 2, а медианата на тези данни е 5, то произведението на средните два члена е:

а) 5,25 б) 15,75 в) 48 г) 24 д) 12

9. Различните начини, по които могат да седнат 6 човека около кръгла маса са на брой:

а) 820 б) 120 в) 36 г) 12 д) 6

10. В кутия има3 зелени, 2 червени, 5 сини и 8 черни химикалки. По случаен начин от кутията се изважда една от тях. Вероятността тя да не е черна или червена е:

а) $\dfrac{5}{9}$ б) $\dfrac{1}{3}$ в) $\dfrac{5}{18}$ г) $\dfrac{4}{9}$ д) $\dfrac{8}{9}$

11. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\log_x\left(4-x^2\right)$ е:

а) $(-2;2)$ б) $(0;1)\cup(1;2)$ в) $(1;2]$ г) $(2;\infty)$ д) $\varnothing$

12. Границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+7}}{3x+8}$ е равна на:

а) $-\dfrac{1}{3}$ б) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$ в) $\dfrac{9}{8}$ г) $-\dfrac{1}{8}$ д) 1 лежат, сключва с основата ъгъл с големина α. Да се намери височината на дадената пирамида.

30. Да се намерят корените на уравнението $2+\cos^2 8x+\cos^2 2x=2\cos 8x\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos x$, които принадлежат на затворения инатервал $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Технически университет - София
4 юли 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}+\left(-3^3\right)^{-\frac{1}{3}}$ е:

а) $\frac{7}{3}$ б) $\frac{5}{3}$ в) -1 г) $\frac{1}{6}$ д) $\frac{17}{9}$

2. Средното аритметично на 30 числа е 50. Ако всяко от числата се намали с 10, то средното им аритметично ще е равно на:

а) 45 б) 40 в) 35 г) 30 д) 20

3. Броят на корените на уравнението $\sqrt{3x^2-11x}=2$, които са корени и на уравнението $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=3$ е:

а) нито един б) един в) два г) три д) четири

4. Стойността на израза $\log_2 1024+\lg 0,1+3^{\log_3 5}$ е:

а) 16 б) 15 в) 14 г) 12 д) 11

5. Ако числата x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2+6x+4=0$, то стойността на израза $3\sqrt{x_1x_2}-x_1^2-x_2^2$ е:

а) -22 б) -38 в) 12 г) 34 д) 0

20. Сфера с радиус 2 cm е вписана в правоъгълен парарлелепипед така, че се допира до всички негови стени. Обемът на паралелепипеда е:

а) 8 cm^3 б) 64 cm^3 в) 65 cm^3 г) 81 cm^3 д) 100 cm^3

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението: $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$.

22. Да се реши неравенството $\sqrt{2x-1}<x-2$.

23. Да се намери произведението на най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x)=-2x^2+12x-16$ при $x\in[1;4]$.

24. Числата a, b, c и d в този ред образуват геометрична прогресия. Да се намери стойността на израза $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$.

25. Да се намерят всички числа x от затворения интервал $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, за които $\sin^2 2x-\sin^2 x=\frac{1}{2}$.

26. В кутия има 10 червени, 5 зелени и 5 бели топки. По случаен начин от кутията се изважда една топка. Да се намери вероятността извадената топка да е червена или зелена.

27. Да се намери радиусът на вписаната в равнобедрен триъгълник окръжност с основа 16 cm и височина към основата 6 cm.

28. Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) се пресичат в точка O, така че $BO:OD=5:3$. Ако $DC=15$ cm, да се намери дължината на отсечката AB.

29. Основата на пирамида е равнобедрен триъгълник с основа 6 cm и височина към нея 9 cm. Всички околни ръбове на пирамидата имат дължина 13 cm. Да се намери обемът на пирамидата.

30. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $x^2-(k+1)x+k^2+k-8=0$ има два корена x_1 и x_2, за които $x_1<2<x_2$.

Технически университет - София
16 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Ако $A=\left(\frac{7}{5}+3,5\right):\left(-\frac{25}{6}+3,25\right)+\frac{26}{11}$ тостойността на израза $\sqrt{-A}$ е:

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4

2. Стойността на израза $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)$ е:

а) 2 б) 1 в) -3 г) -5 д) -7

3. Корените на уравнението $\frac{5x+4}{x+2}-\frac{2x-5}{x+5}=3$ са измежду числата:

а) 3; 4; 5 б) 2; 3; 4 в) 0; 1; 2 г) -2; -1; 3 д) $\frac{1}{2};\frac{9}{4};\frac{1}{5}$

4. Най-голямото цяло число a, за което неравенството $\frac{x-3a}{x-a+3}<0$ е изпълнено за всяко число x от затворения интервал [1;3] е:

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2+3x-5=0$, то числата x_1+x_2 и x_1x_2 са корените на уравнението:

а) $[0;1)$ б) $(0;1)$ в) $(-\infty;0)$ г) $(1;\infty)$ д) $[1;\infty)$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $25^x-3.5^x-10=0$.

22. Да се реши неравенството $\lg 2x+\log_{\frac{1}{10}}x-\lg(x+1)\geq 0$.

23. Да се намери най-малкото цяло число x, за което е изпълнено неравенството $\frac{|2x-3|-1}{6x^2-5x+2}\leq 0$.

24. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=-x^2+2x-4$ в затворения интервал $[-1;0]$.

25. Иван внесъл на срочен депозит в банка 1000 лв. при сложна годишна лихва 5%. Да се намери колко ще бъдат вложените пари след две години, ако сложната годишна лихва не се променя.

26. Колко различни набирания най-много може д анаправи човек, който иска да се свърже със седемцифрен телефонен номер, ако номеърт започва с 6582, всичките му цифри са различни и последната не е 0?

27. Да се намери вероятността първото изтеглено число в тото играта „6 от 42“ да е четно или да е число, което се дели без остатък на 5.

28. Правата t и окръжността k се допират в точка B. Хордата BC $(C\in k)$ има дължина $4\sqrt{6}\ cm$. Точка $A\in t$, $A\notin k$ и $\angle CBA=60$. Да се намери лицето на кръга, определен от k.

29. Пирамида има за основа равностранен триъгълник със страна a. Два от околните ръбове сключват с равнината на основата равни ъгли с големина φ, а равнината, в която те

14. Ако квадратната функция $f(x)$ има най-голяма стойност 4 при $x = 0$ и $f(-2) = 0$, то стойността и при $x = 3$ е равна на:

а) -1 б) -13 в) 13 г) 5 д) -5

15. В правоъгълния ΔABC отсечката CH е височина към хипотенузата AB. Ако $AH = 16\,cm$, $BH = 20\,cm$, то дължината на AC в сантиметри е:

а) $8\sqrt{5}$ б) $12\sqrt{5}$ в) $4\sqrt{5}$ г) 26 д) 24

16. Остроъгълен ΔABC е вписан в окръжност с център точка O. Страната $AB = 2\sqrt{3}\ cm$ и е на разстояние 1 cm от точка O. Градусната мярка на $\angle ACB$ е:

а) 30 б) 60 в) 45 г) 90 д) 15

17. Страната на ромба $ABCD$ е 10 cm. Ако $\angle BAD = 2\alpha$ и $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, то лицето на ромба е:

а) 60 cm^2 б) $32\sqrt{5}\ cm^2$ в) 48 cm^2 г) 96 cm^2 д) 80 cm^2

18. Голямата основа AB и бедрото на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) са съответно равни на $10cm$ и 7 cm. Ако дължината на диагонала е $\sqrt{89}\ cm$, то косинусът на $\angle ADC$ е равен на:

а) $\dfrac{3}{7}$ б) $-\dfrac{3}{7}$ в) $-\dfrac{3\sqrt{19}}{38}$ г) $\dfrac{3\sqrt{19}}{38}$ д) $\dfrac{7}{10}$

19. В правилна четириъгълна пирамида височината към основата е 6 cm, а околен ръб сключва с основата ъгъл с големина 45 . Обемът на пирамидата е:

а) 24 cm^3 б) 72 cm^3 в) 120 cm^3 г) 144 cm^3 д) 432 cm^3

20. Стойностите на реалния параметър k, за които функцията $f(x) = \lg\left(kx^2 + 2kx + 1\right)$ е дефинирана за всяко реално число x, принадлежат на интервала:

а) $x^2 + 8x + 15 = 0$ б) $x^2 - 8x + 15 = 0$ в) $x^2 - 8x - 15 = 0$

г) $x^2 + 8x - 15 = 0$ д) $x^2 - 8x + 8 = 0$

6. Най-малкото число a, за което най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 - 2ax + 43$ при $x \in (-\infty;\infty)$ е равна на 7, е:

а) -12 б) -6 в) 1 г) 6 д) 12

7. Най-голямото число, което е решение на неравенството $\dfrac{\left(x^3+8\right)\left(x^2-6x-7\right)}{x^2-4} \le 0$, е:

а) 3 б) 4 в) 5 г) 7 д) 9

8. Числото a е избрано така, че модата на данните $13; 5; 2; 7; 10; 9; a$ е 7. Тогава медианата на тези данни е равна на:

а) 5 б) 7 в) 8 г) 9 д) 10

9. Ако системата $\begin{cases} 3x - \left(p^2 - 6\right)y = p \\ x - y = 1 \end{cases}$ няма решение, то стойността на параметъра p е:

а) -5 б) -3 в) 1 г) 3 д) 5

10. За аритметична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_2 + a_6 = 54$ и $a_3 + a_8 = 69$. Разликата на прогресията е:

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6

11. За геометрична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_4 = 64a_1$ и $a_2 + a_3 = 10$. Стойността на a_1 е:

а) 2 б) $\dfrac{3}{2}$ в) $\dfrac{3}{4}$ г) $\dfrac{1}{2}$ д) 4

12. Сборът на корените на уравнението $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$ е:

а) 18 б) 25 в) 30 г) 34 д) 36

13. Решението на уравнението $4^x.5^{x+1} = 100.20^{1-x}$ е измежду числата:

а) 1; 3 б) 2; 4 в) 3; 5 г) 4; 6 д) 5; 7

14. Най-големият корен на уравнението $\log_5 x - \log_x 5 = \frac{3}{2}$ е:

а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ б) $\sqrt{5}$ в) 5 г) 25 д) 125

15. Стойността на израза $\sin^2 265^\circ + \cos^2 95^\circ$ е:

а) 3 б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ г) $\frac{3}{2}$ д) 1

16. Даден е ΔABC, като $AB = 5\ cm$, $BC = 8\ cm$ и $\cos\angle BAC = \frac{7}{8}$. Дължината на страната AC е:

а) 12 cm б) 11 cm в) 10 cm г) 9 cm д) 8 cm

17. Даден е равнобедрен триъгълник с бедро 20 cm и диаметър на описаната около триъгълника окръжност 25 cm. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:

а) 5 cm б) 6 cm в) 7 cm г) 8 cm д) 9 cm

18. Дължината на единия катет на правоъгълен триъгълник е с 10 cm по-голяма от дължината на другия катет и е с 10 cm по-малка от дължината на хипотенузата. Дължината на хипотенуата е:

а) 50 cm б) 45 cm в) 40 cm г) 35 cm д) 30 cm

19. Телесен диагонал на куб е $3\sqrt{3}\ cm$. Лицето на пълната повърхнина на куба е:

а) 56 cm^2 б) 54 cm^2 в) 48 cm^2 г) 45 cm^2 д) 32 cm^2

20. Основата на триъгълна пирамида $ABCM$ е равностранен ΔABC със страна 6 cm. Градусната мярка на ъгъла между равнините (ABC) и (BCM) е 30°. Ако околният ръб MA е перпендикулярен на основата, то обемът на пирамидата е:

а) $\frac{25}{4}\ cm^3$ б) в) г) $9\sqrt{3}\ cm^3$ д) $27\sqrt{3}\ cm^3$

6. Броят на членовете на крайната аритметична прогресия 7; 11; 15;...,399 е:

а) 96 б) 97 в) 98 г) 99 д) 100

7. Стойността на израза $\lg 2 + \lg 5 + 3^{\log_3 2} + \log_{1.5}\frac{2}{3} + 4\log_2\sqrt{8}$ е:

а) 9 б) 8 в) 10 г) -1 д) 5

8. Кое от числата не може да бъде вероятност на случайно събитие?

а) $tg\frac{\pi}{4}$ б) $\sqrt{\frac{1}{1764}}$ в) 123^{-2} г) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ д) $\lg\frac{1}{2}$

9. От клас с 15 момчета и 10 момичета се избират по случаен начин трима ученици за участие в ученическа конференция. Различните начини, по които може да бъдат иззбрани, така че да има точно две момчета, са:

а) 1050 б) 600 в) 290 г) 35 д) 29

10. Произведението на модата и медианата на данните 14; 11; 2; 7; 1; 3; 2; 10 е равно на:

а) 8 б) 2 в) 6 г) 10 д) 5

11. Стойността на израза $\frac{\sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ + 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ}{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$ е:

а) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{3}{2}$ в) $\sqrt{3}$ г) $2+\sqrt{3}$ д) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

12. Броят на целите числа a, за които $\left(\frac{27-3a^2}{a^2-4a+3}\right)^{-1} \geq 0$, е равен на:

а) 5 б) 2 в) 3 г) 4 д) ∞

13. Границата $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+11x+10}{x^3+1}$ е равна на:

а) 9 б) 3 в) -3 г) -11 д) -9

29. Основата на пирмида е равнобедрен триъгълник с бедро 3 cm и ъгъл между бедрата с големина α. Всички околни ръбове на пирамидата склюючват с основата равни ъгли с градусна мярка 45°. Да се намери височината на пирамидата.

30. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ има четири различни корена.

Технически университет - София
23 април 2016 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$ е:

а) 0 **б)** 2 **в)** $2\left(\sqrt{3}-2\right)$ **г)** $2\left(2-\sqrt{3}\right)$ **д)** $\sqrt{3}-3$

2. Числото $\sqrt{22+\sqrt{84}}$ е равно на:

а) $\sqrt{106}$ **б)** $\sqrt{21}-1$ **в)** $\sqrt{21}+1$ **г)** $\sqrt{22}+\sqrt[4]{84}$ **д)** $\sqrt[4]{568}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2+3x-6=0$, то стойността на израза $x_1^3+x_2^3$ е:

а) -81 **б)** 81 **в)** 54 **г)** -27 **д)** 27

4. Корените на уравнението $(x+1)\left(x-\sqrt{7}\right)=0$ са:

а) -1 и 49 **б)** -1 и $\sqrt{7}$ **в)** -1 **г)** $\sqrt{7}$ **д)** 49

5. За геометрична прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_4-a_2=30$ и $a_2+a_5=90$. Частното на прогресията е:

а) $2+\sqrt{8}$ **б)** $2-\sqrt{8}$ **в)** 2 **г)** -2 **д)** 5

$\dfrac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^3$ $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^3$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

22. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2-4x+1=0$, да се намери стойността на израза $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

23. Да се намерят всички цели положителни числа, които са решение на неравенството $\left(x^2-x\right)\left(x^2+3x+2\right)\le 0$.

24. Да се реши уравнението $\sqrt{x+12}+x=8$.

25. В кутия има 9 червени и повече от две бели рози. Броят на различните начини, по които от розите в кутията може да се образува букет от 1 червена и 2 бели рози е равен на 135. Да се намери броят на белите рози.

26. Да се намерят корените на уравнението $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}=2\sin x-1$, които принадлежат на затворния интервал $[0;\pi]$.

27. В трапец разстоянието нежду средите на двете основи е 2 cm, а градусните мерки на ъглите при едната основа са 20° и 70°. Ако средната отсечка на трапеца е 4 cm, да се намери дължината на по-малката основа.

28. Основите на трапец са 10 cm и 2 cm. В трапеца може да се впише окръжност и около него може да се опише окръжност. Да се намери радиусът на вписаната в трапеца окръжност.