М+ ПОДГОТОВКА

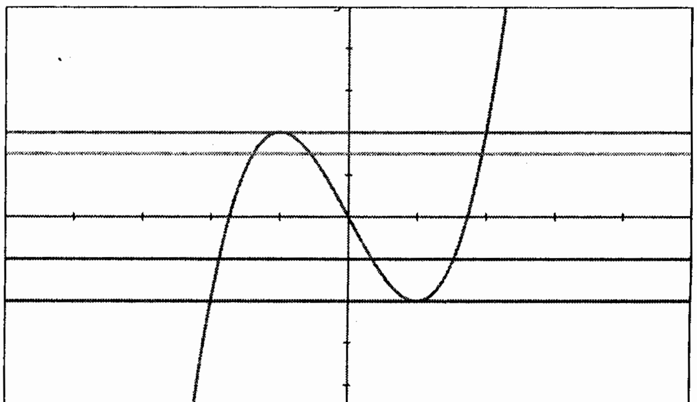
ЕДИН МЕТОД ЗА РЕШАВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА
(подготовка за младежката балканиада)

Навид Сафаеи, докторант
Шарифски Технологичен Университет – Техеран, Иран

За да не възникват недоразумения, ще поясним, че „шариф“ е арабско звание, което, употребявано като прилагателно, означава „благороден“. (б. ред.)

Изследователски проблем. При фиксирани реални стойности на p и q да се намерят най-голямата и най-малката стойност на r така, че полиномът $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ да има 3 реални нули.

Резултат: Да разгледаме графиките на функциите $y = x^3 - px^2 + qx$ и $y = r$:



Условието $P(x)$ да има 3 реални нули, означава, че правата $y = r$ пресича графиката на първата функция в 3 точки или я пресича в 1 точка, а във втора точка се допира до нея. Допирането означава, че в съответната точка нулата е двукратна, т.е. уравнението $P(x) = 0$ има 3 реални корена, два от които са равни. Както се вижда от чертежа, най-голямата стойност на r се получава, когато правата се допира в горната част на графиката на първата функция. Това се случва в точка, която е между двете по-малки нули на първата функция. Пак от чертежа, най-малката стойност на r се получава, когато правата се допира в долната част на графиката на първата функция и това се случва в точка, която е между двете по-големи нули на първата функция. Макар, че геометричната обосновка е достатъчна, ще докажем резултата аналитично, като доказателството може да се изпусне от по-малките ученици.

Доказателство: Ако a, b и c са трите реални корена на уравнението $P(x)=0$, от формулите на Виет за уравнение от трета степен следва, че $a+b+c=p$, $ab+ac+bc=q$ и $abc=r$. Поради симетричността, можем да считаме без ограничение, че $a\le b\le c$. От формулировката по-горе следва, че p и q са фиксирани. Търсим най-голямата и най-малката стойност на r така, че да са изпълнени исканите условия. От известното неравенство $(a+b+c)^2\ge 3(ab+ac+bc)$ следва, че $p^2\ge 3q$. Ще докажем, че най-малката стойност на r се достига при $b=c$, а най-голямата – при $a=b$, т.е. ще получим потвърждение на резултата от геометричните разсъждения по-горе. Нека $x=\dfrac{p-2\sqrt{p^2-3q}}{3}$ и $y=\dfrac{p-\sqrt{p^2-3q}}{3}$. Тогава $(b-c)^2=(b+c)^2-4bc=(b+c)^2-4a(b+c)-4q=(p-a)^2+4a(p-a)-4q$, което е равно на $-3a^2+2pa+p^2-4q$. Оттук заключаваме, че последният израз е неотрицателен. От свойствата на квадратната функция спрямо a следва, че a е между корените на уравнението $-3a^2+2pa+p^2-4q=0$. Получаваме, че $a\ge x$, като равенство се достига при $a=x$, т.е. при $b=c$. По-нататък да забележим, че

$$0\le(a-b)(a-c)=a^2-2a(b+c)+bc+q=a^2-2a(p-a)+q=3a^2-2ap+q$$

Оттук следва, че $a\le y$. В крайна сметка установихме, че $a\in[x,y]$. Имаме:

$$abc=a\big(q-a(b+c)\big)=aq-q^2(p-a)=a^3-pa^2+qa=r(a).$$

Остава да се намерят екстремумите на функцията $r(a)$ в интервала $a\in[x,y]$. Това може да стане по различни начини, но най.бързо е с помощта на производни (за големи ученици), а именно: От $r'(a)=3a^2-2pa+q=(a-b)(a-c)\ge 0$ следва, че $r(x)\le r(a)\le r(y)$. Първото равенство се получава при $b=c$, а второто – при $a=b$. С това всичко е доказано и аналитично.

Приложение. Ако реалните числа x, y и z изпълняват условията $x+y+z=3$ и $xy+xz+yz=-9$, да се докаже, че $-27\le xyz\le 5$. (Полска олимпиада)

Решение: Нека (без ограничение на общността поради симетрията) $x\le y\le z$. Съгласно резултата по-горе, най-малката стойност на xyz е при $y=z$. Тогава

$$x+2z=3,-9=z^2+2zx=$$
$$z^2+2z(3-2z)=-3z^2+6z=-9$$

Оттук $z=3$ и $z=-1$. В първия случай $y=3, x=-3$ и $xyz=-27$. Вторият случай е невъзможен, защото при него $x=5$, което противоречи на максималността на z. За да намерим най-голямата стойност на xyz, трябва да използваме, че $x=y$. Сега получаваме единствената възможност $x=y=-1, z=5$ и търсената най-голяма стойност е $xyz=5$.

Задача. Ако реалните числа x, y и z изпълняват условията $x+y+z=5$ и $xy+yz+zx=8$, намерете най-голямата и най-малката стойност на произведението xyz.

Отговор: $4\le x.y.z\le\dfrac{112}{27}$

За директно упражняване на изложения метод предлагаме на читателя да реши горната задача, а след това да се опита да докаже една от формите на неравенството на Шур $a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$. Самото доказателство, както и други приложения, ще бъдат разгледани в следваща публикация.

ЛИТЕРАТУРА

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.