M + НАЙ-МАЛКИТЕ

ЧЕРВЕНАТА ШАПЧИЦА И ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Четиво за 6 – 7 клас

Червената шапчица скочи от леглото и изтича в кухнята при баба си:

- Бабо, искам варено яйце!

- Добре, моето дете, но за да стане, както ти го обичаш, яйцето трябва да се вари точно 15 минути. За съжаление, часовникът е спрял и не мога да измеря 15 минути. Трябва да изчакаме дядо ти, който отиде да купи батерия за часовника.

- Но, бабо, защо не използваш пясъчния часовник?

- Не мога да го използвам, защото той отмерва 7 минути. Не мога да използвам и пясъчния часовник на дядо ти, защото той пък отмерва 11 минути.

- О, бабо, виж как ще получим 15 минути. Ще пуснем и двата часовника. Когато първият отмери 7 минути, ще сложиш яйцето да се вари. Понеже $11-7=4$, то точно след 4 минути ще изтече пясъкът от втория часовник. Значи можем да отмерим 4 минути. Но тогава ще обърнем втория часовник и той ще отмери още 11 минути. Ето, задачата е решена, защото $11+4=15$ минути.

Възхитена от математическите способности на внучката си, бабата се зае да изпълни предложението. Скоро яйцето беше сварено точно за 15 минути и Червената шапчица го изяде с удоволствие. Тъкмо се облизваше и в кухнята влезе дядо й.

- Я, да те видя сега каква математичка си! – каза той и показа двете кофи, които носеше със себе си. – Едната кофа е 8-литрова, а другата е 14-литрова. Трябва да измеря точно 4 литра и не знам как да постъпя.

- О, дядо, тази задача е много лесна! Хайде, напълни 14-литровата кофа с вода от чешмата.

Дядото напълни кофата и се обърна очакващо към внучката.

- А сега, дядо, с водата от 14-литровата кофа напълни втората кофа. Тъй като втората кофа е 8-литрова, то в първата ще останат $14-8=6$ литра. Сега излей втората кофа и прелей в нея 6-те останали литра от първата кофа. Отново напълни 14-литровата кофа догоре с вода от чешмата. Какво имаме сега: 14 литра в първата кофа и 6 литра във втората. По-нататък допълни втората кофа с вода от първата. Допълването става точно с $8-6=2$ литра, защото втората кофа е 8-литрова, а в нея има 6 литра. Какво получаваме? Получаваме $14-2=12$ литра в първата кофа и 8 литра във втората. Но сега, дядо излей втората кофа и я напълни догоре с вода от първата кофа. Тогава в първата кофа ще останат $12-8=4$ и ето ги твоите 4 литра.

- Браво, моето внуче, откъде ги знаеш тези „фокуси“?

- Дядо, забележи, че $14.2-8.3=28-24=4$. Това означава, че два пъти сме напълнили 14-литровата кофа догоре и три пъти сме напълнили 8-литровата кофа. Точно това и направихме, разбира се в подходяща последователност. Преди малко се справих със задачата да се отмерят 15 минути с помощта на двата пясъчни часовника, единият от които отмерва 7 минути, а другият – 11 минути. В нея използвах, че $2.11-7=22-7=15$. Това означава, че часовникът за 11 минути е използван два пъти, а другият часовник – веднъж. На пръв поглед двете задачи са различни, но всъщност принципът им е един и същ. Общата задача е да се намерят цели числа x и y така, че при дадени цели числа a, b и c да е изпълнено равенството $ax+by=c$. Това равенство се нарича Диофантово уравнение, за което учихме миналата седмица в школата по математика. Учителката ни каза, че тези уравнения носят името на гръцкия математик Диофант, живял през 3. век. Наричат се още неопределени уравнения, защото имат повече от едно неизвестно. Интересуваме се само от решения, които са цели числа. В случая с кофите Диофантовото уравнение е $14x+8y=4$, а в случая с часовниците уравнението е $11x+7y=15$. И в двата случая Диофантовите уравнения имат решение. Но има уравнения, които нямат решения. Такова е например Диофантовото уравнение $14x+8y=3$. Затова, дядо, ако беше поискал да ти отмеря 3 литра с твоите кофи, щях да ти отговоря, че това е невъзможно. Ако искаш да научиш повече подробности, прочети по-долу това, което ни разказа учителката.

Дефиниция 1. Най-голямото число измежду всички делители на числата a и b се нарича най-голям общ делител на a и b. Бележи се с НОД (a,b) или само (a,b).

Например (10,25) = 5; (6,21) = 3; (4,16) = 4; (5,22) = 1.

Дефиниция 2. Ако най-големият общ делител на числата a и b е равен на 1, т.е. ако $(a,b) = 1$, числата a и b се наричат *взаимнопрости.*

Дефиниция 3. Уравнение от вида $ax+by=c$, където a, b и c са цели числа и $ab\neq 0$, се нарича *линейно Диофантово уравнение от първи ред с две неизвестни.*

Теорема 1. Линейното Диофантово уравнение $ax+by=c$ има решение тогава и само тогава, когато най-големият общ делител $d=(a,b)$ на числата a и b дели числото c.

Доказателство: Думите „тогава и само тогава“ означават, че условието $d=(a,b)$ да дели c е необходимо и достатъчно, т.е. ако уравнението има решение, то със сигурност $d=(a,b)$ дели c и обратно, ако $d=(a,b)$ дели c, то уравнението има решение. Доказателството, че условието е достатъчно, е доста сложно и затова ще го пропуснем. Напротив, доказателството, че условието е необходимо, е лесно. Настина нека (x_0,y_0) е решение на уравнението. Това означава, че $ax_0+by_0=c$. Тъй като $d = (a,b)$ дели a и b, то d дели лявата страна на равенството и следователно дели дясната му страна. Заключаваме, че d дели c.

Теорема 2. Ако $d=(a,b)$ дели c и (x_0,y_0) е решение на уравнението $ax+by=c$, то всички решения се дават с формулата $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$, където t е произволно цяло число, т.е. $t=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$

Доказателство: Директната проверка показва, че:

$$ax+by=a\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=c,$$

което означава, че $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$ е решение за всяко $t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$ Сега ще покажем, че всяко решение може да се представи в тази форма. Нека (x,y) е решение. Имаме $ax+by=ax_0+by_0$, откъдето $a(x-x_0)=b(y_0-y)$ и оттук $\frac{a}{d}(x-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y)$. Тъй като $d=(a,b)$, то $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ и от последното равенство следва, че $\frac{b}{d}$ дели $(x-x_0)$ и $\frac{a}{d}$ дели (y_0-y). Следователно $x-x_0=\frac{b}{d}u$ и $y_0-y=\frac{a}{d}v$ за някои цели числа u и v. Като заместим в равенството $a(x-x_0)=b(y_0-y)$, получаваме, че $u=v$ и това завършва доказателството.

За решаване на линейни Диофантови уравнения от първи ред с две неизвестни са известни два основни метода – на Евклид и на Ойлер. Тук ще се спрем на метода на Ойлер.

Задача 1. Да се реши Диофантовото уравнение $738x+621y=45$ по метода на Ойлер.

Решение: Нека (x,y) е решение на уравнението. Тъй като $621<738$, изразяваме y чрез x, вземайки предвид, че $738=1.621+117 \quad 45=0.621+45$. Следователно

$$y=\frac{-738x+45}{621}=-x+\frac{-117x+45}{621}.$$

От горното равенство заключаваме, че числото $\frac{-117x+45}{621}=t$ е цяло. Освобождаваме се от знаменателя и стигаме до $621t+117x=45$, което е ново Диофантово уравнение от същия вид, но с по-малки коефициенти пред неизвестните. Продължаваме по същия начин и изразяваме x чрез t, защото $117<621$. Вземаме предвид, че $621=5.117+36$ и $45=0.117+45$, откъдето следва, че

$$x=\frac{-621t+45}{117}=-5t+\frac{-36t+45}{117}.$$

Така, числото $\frac{-36t+45}{117}=u$ е цяло и $117u+36t=45$ е ново Диофантово уравнение с по-малки коефициенти. По-нататък изразяваме t чрез u и вземаме предвид, че $117=3.36+9$, $45=1.36+9$. Оттук

$$t=\frac{-117u+45}{36}=-3u+1+\frac{-9u+9}{36}=-3u+1+\frac{-u+1}{4}.$$

Числото $\frac{-u+1}{4}=v$ е цяло и $4v+u=1$. Процесът спира, защото коефициентът пред неизвестното u е единица и u се изразява направо чрез v. Стигаме до $u=-4v+1$ и връщайки се обратно, намираме:

$$t=-3u+1+v=-3(-4v+1)+1+v=13v-2$$

$$x=-5t+u=-5(-3u+1+v)+u=16u-5-5v=16(-4v+1)-5-5v=-69v+11$$

$$y=-x+t=69v-11+13v-2=82v-13.$$

Последните две равенства представляват т. нар. *параметрично представяне* на всички решения на изходното уравнение, а именно:

$$x=-69v+11,\ y=82v-13,\ v=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$$

Задача 2. Разполагате с два пясъчни часовника – единият отмерва 11 минути, а вторият – съответно 7 минути. Възможно ли с използване на двата часовника да се отмерят 15 минути?

Решение: Отговорът е положителен. Нека x и y са съответно бройките използвания на първия и втория часовник. Тогава трябва да е изпълнено $11x+7y=15$, което е линейно Диофантово уравнение от първи ред с две неизвестни. То има решение, защото $(11,7)=1$. Ще го решим по метода на Ойлер:

$$y=\frac{-11x+15}{7}=-x+2+\frac{-4x+1}{7}=-x+2+t$$

$$\frac{-4x+1}{7}=t \Leftrightarrow 7t+4x=1$$

$$x=\frac{-7t+1}{4}=-t+\frac{-3t+1}{4}=-t+u$$

$$\frac{-3t+1}{4}=u \Leftrightarrow 4u+3t=1$$

$$t=\frac{-4u+1}{3}=-u+\frac{-u+1}{3}=-u+v$$

$$\frac{-u+1}{3}=v \Leftrightarrow u=-3v+1.$$

Връщаме се обратно:

$$t=-u+v=3v-1+v=4v-1$$
$$x=-t+u=-4v+1-3v+1=-7v+2$$
$$y=-x+2+t=7v-2+2+4v-1=11v-1.$$

Всичките решения на уравнението са $x=-7v+2$, $y=11v-1$, където v е произволно цяло число. Ако $v=0$, то $x=2$ и $y=-1$. Това означава следното (Обърнете внимание на отрицателните числа!):

Стартираме двата часовника едновременно. Вторият часовник отмерва 7 минути. От този момент нататък можем да отмерим точно $11-7=4$ минути, оставайки първия часовник, т.е. точно след 4 минути пясъкът в първия часовник ще изтече. След тези 4 минути обръщаме първия часовник и изчакваме пясъка да изтече. По този начин отмерваме още 11 минути или общо получаваме $11+4=15$ минути. Първият часовник е използван 2 пъти ($x=2$), а вторият е използван веднъж, но с изваждане на отмереното време от него ($y=-1$).

Задача 3. Разполагате с две кофи за вода – едната е 14-литрова, а втората е 8-литрова. Възможно ли е с помощта на двете кофи да се отмерят точно 4 литра?

Решение: Отговорът е положителен. Нека x и y са съответно бройките използвания на първата и втората кофа. Тогава трябва да е изпълнено $14x+8y=4$, което е линейно Диофантово уравнение от първи ред с две неизвестни. То има решение, защото $(14,8)=2$ и 2 дели 4. Ако разделим двете страни на 2, получаваме $7x+4y=2$. Ще използваме отново метода на Ойлер:

$$y=\frac{-7x+2}{4}=-x+\frac{-3x+2}{4}=-x+t$$

$$\frac{-3x+2}{4}=t \Leftrightarrow 4t+3x=2$$

$$x=\frac{-4t+2}{3}=-t+\frac{-t+2}{3}=-t+u$$

$$\frac{-t+2}{3}=u \Leftrightarrow t=-3u+2.$$

Връщаме се обратно:

$$x=-t+u=3u-2+u=4u-2$$

$$y=-x+t=-4u+2-3u+2=-7u+4.$$

Така, всичките решения са $x=4u-2$, $y=-7u+4$, където u е произволно цяло число. Ако $u=0$, то $x=-2$ и $y=4$. Това означава следното (Обърнете внимание на отрицателната стойност на x!):

Напълваме 14-литровата кофа от чешмата. От нея напълваме втората кофа. Тогава в първата кофа остават $14-8=6$ литра. Изпразваме втората кофа и наливаме в нея 6-те литра от първата. Отново напълваме 14-литровата кофа догоре от чешмата. От нея допълваме втората кофа. Допълването е точно с 2 литра. Тогава в първата кофа остават $14-2=12$ литра. Сега изпразваме втората кофа и я напълваме с вода от първата. В първата кофа остават $12-8=4$ литра и задачата е решена.

Последователните ходове можем да отбележим по следния начин:

$(0,0)\to(14,0)\to(6,8)\to(6,0)\to(0,6)\to(14,6)\to(12,8)\to(12,0)\to(4,8)\to(4,0)$.

Задача 4. Да се реши Диофантовото уравнение $14x+8y=3$.

Решение: Уравнението няма решение, защото $(14,8)=2$ и 2 не дели дясната страна 3.

Задачи за упражнение:

Задача 5. Да се намерят всички цели решения на уравненията:

а) $13x-2y=7$; б) $24x+3y=15$; в) $7x-28y=15$.

Задача 6. Да се намерят всички решения на уравненията, които са естествени числа:

а) $5x+6y=7$; б) $-4x+12y=64$; в) $8x-24y=7$.

Задача 7. Да се намерят цели числа x и y, за които $5x+11y=3$ и сумата $x+y$ е възможно най-малкото естествено число.

Отг. $(x,y)=(5,-2)$

Задача 8. Да се намерят цели числа x и y, за които $3x+14y=5$ и разликата $y-x$ е възможно най-малкото естествено число, което е просто.

Отг. $(x,y)=(-73,16)$

Задача 9. Да се намерят цели числа x и y, за които $2x+3y=7$ и числото $-xy$ е възможно най-малкият точен квадрат.

Отг. $(x,y)=(-7,7)$

Задача 10. Да се намерят всички цели числа x и y, които се делят на 9 и за които $-5x+3y=9$.

Отг. $(x,y)=(27u+9,45u+18)$, където u е произволно цяло число.

Автор на четивото: Д-р М. Плюс