М

помагало за математика и информатика

2 / 2016

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

PER ASPERA AD ASTRA
2002

МАТЕМАТИКА +

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

помагало по математика и приложения

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 24 (94), Number 2, 2016

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат 600×840/8	Печатни коли 9
Дадена за печат на 19. 06. 2016	Подписана за печат на 29. 06. 2016 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой на списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието и науката.

Математика плюс
бр. 2, 2016

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

М+УВОДНА — 2

СПОМЕН ЗА ПЛАМЕН ИЛИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ТВОРЧЕСТВО – **Емил Карлов** — 4

ЗАДАЧИ М+ — 9

ДЕСЕТИ ЮБИЛЕЕН МЕЖДУНАРОДЕН КОНКУРС “**MITE**” – **Д-р М. Плюс** — 11

СТУДЕНТСКА НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ “ПРОБЛЕМИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА СЪВРЕМЕННАТА ИКОНОМИКА – **Д-р М. Плюс** — 14

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – **Д-р М. Плюс**

М+ПРИТУРКА – **Кандидатстуденски изпити през 2015 г.** — 19

ДУОПОЛ И ОЛИГОПОЛ НА БЕРТРАН – **Петко Казанджиев, Цеца Байчева, Кинка Кирилова-Лупанова** — 55

КОЛЕДЕН ЛИНГВИСТИЧЕН ТУРНИР – **Иван Держански, Веселин Златилов** — 66

Драги читатели,

Изминаха 20 години от първото издание на български език на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру“. Да припомним, че България беше приета за член на Европейската асоциация „Кенгуру без граници“ през 1997 г. по време на Генералната асамблея на асоциацията в Будапеща. Членството е персонализирано за всяка държава със съответен представител, който има статут на активен член на асоциацията и името му се регистрира във френския съд. Българският представител е проф. Сава Гроздев. По време на асамблеята в Будапеща се взима и едно важно решение, съгласно което всяка държава-членка получава правото да превежда задачите на родния си език. Дотогава състезанието е само на френски език. А идеята за самото състезание е от 80-те години на XX век, когато Питър О'Халоран, преподавател по математика в Сидни, Австралия, предлага състезание, което да се организира по едно и също време във всички австралийски училища. Предложението е необичайно, защото тогавашният използван по цял свят формат е участниците да се събират на едно място. Идеята на Питър О'Халоран се оказва ползотворна, тъй като дава възможност на повече ученици да се състезават едновременно върху едни и същи задачи. В резултат на успешната реализация се ражда добре известното днес Австралийско математическо състезание, което малко по-късно се превръща в международно. Появяват се и последователи на Питър О'Халоран. Двамата френски математици Андре Деледик и Жан-Пиер Будин решават да разпространят идеята и във Франция. Така, през 1991 г. възниква Математическото състезание „Кенгуру“, в което се включват 120 хил. френски ученици. Постепенно бройката на участниците се увеличава: 300 хил. през 1992 г., 500 хил. през 1993 г. Седем държави решават да приложат същата схема. Това са Беларус, Унгария, Холандия, Полша, Румъния, Русия и Испания, които заедно с Франция започват съвместно провеждане на състезанието „Кенгуру“ от м. май 1994 г. В България по инициатива на Френския институт към френското посолство в София покана за участие получават българските ученици от гимназиите с изучаване на френски език. Българското участие започва от 1995 г., но първоначално то е символично. Основният проблем е, че поради неразбиране на езика не могат да включат силни ученици от математическите гимназии, в които преобладаващо се изучава английски. С активната намеса на българския представител в Асоциацията „Кенгуру без граници“ и тогавашния експерт по френски в Министерството на образованието – г-жа Бойка Паликарска, се издава циклостилен френско-български речник с основни математически термини. Речникът се разпространява в няколко математически гимназии. Това увеличава броя на участниците в следващите издания на състезанието. Да припомним още, че през онези години заедно със задачите от Франция пристигаха и специални бланки за попълване на отговорите. Обработването на бланките ставаше в Париж, където се извършваше общо класиране за цяла Европа. Най-добрите получаваха като награда 15-дневна екскурзия във Франция. В едно от изданията сред наградените беше и българинът Младен Димитров, десетокласник от Софийската математическа гимназия. Неговият резултат беше най-висок не само в България, не само в неговата възрастова група, а изобщо за цяла Европа. Покрай състезанието Младен започва систематично изучаване на френски език. В момента той е редовен професор по математика във Франция. Преди това Младен завърши престижния колеж Луи льо Гранд и Екол Нормал Супериор.

През 1997 г. държавите-участнички са 21 и България е една от тях. Тогава за първи път състезанието „Кенгуру“ се провежда на български език и получава у нас ново име – Международно състезание „Европейско кенгуру“. Така 2016-а година се превръща в юбилейна. България остава единствената страна в света, в която състезанието освен на роден език се провежда и на френски. Днес участниците са повече от 6 млн., като броят на представените държави достигна 65. Включиха се страни от Азия, Америка и Африка. Възникнало като европейска инициатива, състезанието „Кенгуру“ разшири значително географията си и вече претендира за рекорд на Гинес като най-многобройното световно състезание в областта на математиката. То остава уникално с това, че се провежда върху едни и същи задачи, приблизително по едно и също време. Участниците в генералните асамблеи изработват състезателните теми. Впоследствие задачите се превеждат на съответните езици и всяка държава се грижи за организацията на своя територия. В България броят на участниците прогресивно расте, за да надмине 22 хил. през настоящата 2016 г.

Юбилейната торта

На 10 юни по повод 20-годишния юбилей в Министертвото на образованието и науката се състоя тържество. Заместник-министърът Диян Стаматов и посланикът на Република Франция Н. Пр. Ксавие Лапер дьо Кабан връчиха наградите на победителите от Националния кръг на „Европейско кенгуру". Официалната церемония беше открита от проф. Сава Гроздев, представител на България в Асоциация „Кенгуру без граници". Той представи официалните гости и им връчи юбилейни медали. Посланик Кабан поздрави учениците, техните учители и родители, като им пожела все така да се борят за победата, а на тези, които не са успели тази година, да бъдат достатъчно работливи, за да имат успех догодина. Той заяви, че участието на толкова млади българи в конкурса е добър знак за динамизма на обществото в нашата страна. От името на министерството призьорите бяха приветствани от г-н Диян Стаматов. Той отбеляза, че „Европейско кенгуру" е едно от трудните състезания, но това, че в него участват толкова много ученици, е показател за интереса към него. Във всяка една задача от това състезание има трудност, но преодоляването ѝ подготвя учениците за справяне с бъдещи житейски предизвикателства. Приветствие поднесе и заместник-министър проф. Иван Димов. На церемонията присъстваха служители от министерството, представители на Посолството на Република Франция, много учители и родители.

„Европейско Кенгуру" е най-масовото международно математическо състезание, подчерта проф. Гроздев. Всяка държава има право да променя до 5 задачи от общо избраните по време на асамблеите теми, съобразявайки се с конкретното учебно съдържание. Тази година Националният кръг на „Европейско кенгуру" се проведе на 4 юни в София, като до него бяха допуснати 409 млади математици от участвалите над 22 000 за страната. В него се включиха ученици от I до XII клас, ученици със специални образователни потребности (СОП), както и ученици, които решаваха задачите на френски език. Първо място завоюваха 17 участници, второ място – 9, а трето място – 10. Всички те получиха грамота и юбилеен медал. Наградени бяха и 7 ученици със СОП, както и 11 участници на френски език. За първенците е предвидена още една награда – безплатно участие в Международния летен лагер „Европейско кенгуру" в Чепеларе от 1 до 7 август 2016 г., а учениците от VIII до XII клас, класирани на призовите места, имат право да кандидатстват за стипендия по Наредбата за даровити деца.

Ваш, Д-р М. Плюс

СПОМЕН ЗА ПЛАМЕН
ИЛИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ТВОРЧЕСТВО

Емил Карлов, гр. Ямбол

На 5 март 2016 г. след кратко боледуване почина преподавателят в Софийски университет „Св. Климент Охридски" – доцент д-р Пламен Сидеров. В тази малка сбирка от негови задачи предлагам да си спомним за блестящия математик и незабравим приятел.

„В ранната есен на 1967 година" – разказваше Роман Хайнацки – „влязох в книжарницата в центъра на града и там пред етажерката със сборниците ровеше в книгите едно красиво момче с очила. Момчето беше облечено скромно, в късо палто, на палтото – големи, привличащи погледа, копчета. Попитах го в кой клас е и в кое училище се е записал за следващата учебна година. Момчето се изчерви и посочи сградата на гимназия „Васил Левски", която стърчеше до прозореца на книжарницата. Веднага го изпратих да си изтегли документите и го записах в нашата гимназия, в моя клас. Така Пламен Сидеров стана мой ученик. Три години по-късно същото момче спечели трета награда на Международната олимпиада по математика в Унгария."

Пламен е направил много задачи за много математически състезания и кандидат-студентски конкурси, но аз ще се спра само на задачи от конкурса „Роман Хайнацки", защото ги обсъждахме заедно, понякога с дни и това бяха най-хубавите дни от годината. Общото в следващите няколко задачи е изключителната им математическа хубост. Твърденията са приказно невероятни и красиви. Пламен имаше вкус и с лекота се справяше с доказателствата. Аз му се радвах, а той престорено сърдито казваше: „Търся човек, който да ме критикува, не тебе."

Първата задача, за която ще стане дума, се е появила през 1949 г. на Московската олимпиада, а по-късно през 1973 г. – на американския конкурс „Пътнам" във вида:

Нека $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}\}$ *е множество от такива цели числа, че ако премахнем едно от числата, останалите можем да разделим на две множества от n елемента с равни суми. Да се докаже, че*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}.$$

Пламен не обичаше несъществените обобщения и реши задачата за *реални* числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ (което не е лесно решение). За първото състезание „Роман Хайнацки" през 2007 г. той предложи следната:

Задача 1. Дадени са 11 цели числа, които притежават следното свойство: което и от тях да премахнем, останалите 10 числа могат да се разделят на две групи по 5 числа с равни суми. Да се докаже, че всичките 11 числа са равни помежду си.

Решение: Нека дадените числа са $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Като извадим a_1 от всички тях, получаваме числата $b_1 = a_1 - a_1 = 0$, $b_2 = a_2 - a_1, \ldots,$ $b_{11} = a_{11} - a_1$. Лесно се съобразява, че получените числа също изпълняват условието на задачата. Сега, ако $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{11}$, от условието следва, че числата $S - b_1$, $S - b_2, \ldots, S - b_{11}$ са четни. Тогава всички числа $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ са с еднаква четност (четността на S). Но $b_1 = 0$ е четно число и значи всички тези числа са четни. Като ги разделим на 2, получените числа отново изпълняват условието на задачата и отново първото от тях е равно на 0. Следователно и тези числа са четни. Отново ги делим на 2 и т.н. Този процес може да бъде безкраен само ако $b_1 = b_2 = \cdots = b_{11} = 0$. Тогава $a_1 = a_2 = \cdots = a_{11}$, което и трябваше да се докаже.

Втората задача, която предлагам да спомена, е предлагана някога през годините (не зная точно кога и къде) на международна олимпиада по математика. Обърнете внимание на елегантното решение на тази задача.

Задача 2. Всяко от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е равно на 1 или на -1, като при това $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Да се докаже, че n се дели на 4.

Решение: Сумата $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ има n на брой събираеми и всяко едно от тях е равно на 1 или на -1. Тъй като тази сума е равна на 0, то броят на единиците е равен на броя на минус единиците, така че $n = 2k$ е (засега) четно число. Очевидно $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = a_1^2a_2^2\ldots a_{n-1}^2a_n^2 = +1$. От друга страна, тъй като k на брой от тези множители са равни на -1 (а останалите са равни на 1), то $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = (-1)^k$. Така получаваме $(-1)^k = +1$ и следователно $k = 2l$ е четно число. Следователно $n = 2k = 4l$ се дели на 4.

За шести клас в състезанието „Роман Хайнацки“ същата задача имаше вида:

Задача 3. Всяко едно от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ е равно на 1 или на -1. Възможно ли е да се изпълнява равенството $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 = 0$?

През 1971 г. на Общоруската олимпиада проф. Алексей Ширшов предлага прочулата се по-късно задача ***за трите гърнета***.

Имаме три гърнета и във всяко гърне – цяло число литри мляко. Всяко от гърнетата може да побере всичкото мляко, разлято по трите гърнетата. Имаме право от гърне A с не повече литри мляко от друго гърне B да прелеем от B в A точно толкова литри, колкото има в гърнето A. Да се докаже, че след няколко подходящи преливания можем да изпразним едно от гърнетата.

През 1993 г. същата задача се появява в американския конкурс „Пътнам“ като задача B-6 т.е. задача с висока трудност.

Дадени три положителни цели числа. Можем да изберем две от тях x и y, и ако се окаже, че x ≤ y, да ги заменим съответно с 2x и y – x. Да се докаже, че след няколко (краен брой) подходящи замени можем да получим нула.

През 1989 г. Пламен Сидеров предложи за „Зимните математически състезания“ в град Варна следното твърдение, което е обратната задача на задачата за трите гърнета.

В една държава са пуснати в обръщение N монети. Позволена е следната операция: ако A и B са произволни жители и A притежава не повече монети от B, то A може да вземе от B толкова монети, колкото е притежавал до момента. Известно е, че както и да са *разпределени първоначално монетите между жителите на държавата, всички монети могат да преминат в един човек след краен брой пъти подходящи прилагания на операцията. Да се докаже, че N е степен на числото 2.* [1]

Така се стигна до задача 6 в конкурса „Роман Хайнацки“ през 2011 г.:

Задача 4. В няколко кутии са поставени по произволен начин 16 топки. Позволена е следната операция: вземаме две кутии и от тази, в която има повече топки, пресипваме в другата още толкова топки, колкото е имало в нея. Ако в двете кутии е имало равен брой топки, просто пресипваме всички топки от едната кутия в другата. Да се докаже, че след краен брой такива операции можем да пресипем всички топки в една кутия.

Решение: Първо да вземем тези кутии, които съдържат *нечетен* брой топки (да наречем тези кутии *нечетни*). Броят на нечетните кутии със сигурност е четно число. В противен случай сумарният брой на всички топки ще се окаже нечетно число, а ние знаем, че общият им брой е 16. Разделяме нечетните кутии по двойки и с всяка двойка извършваме позволената операция. Сега вече всяка кутия съдържа четен брой топки. Да приемем, че всяка от топките е направена от пластилин и от всеки две топки в една кутия правим една по-голяма топка. Така получаваме следната по-лесна задача:

В няколко кутии са поставени по произволен начин 8 топки. Позволена е следната операция: вземаме две кутии и от тази, в която има повече топки, пресипваме в другата още толкова топки, колкото е имало в нея. Ако в двете кутии е имало равен брой топки, просто пресипваме всички топки от едната кутия в другата. Да се докаже, че след краен брой такива операции можем да пресипем всички топки в една кутия.

Да вземем само нечетните кутии. Броят на нечетните кутии е четен, защото сумата на всички топки е четното число 8. Разделяме нечетните кутии по двойки и с всяка двойка извършваме позволената операция. Сега вече всяка кутия съдържа четен брой топки. Да приемем, че всяка от топките е направена от пластилин и от всеки две топки в една кутия правим една по-голяма топка. Общият брой на топките е 4. Но тогава за непразните кутии са възможни следните четири случая:

Първи случай: 1, 1, 1, 1; *Втори случай*: 1, 1, 2; *Трети случай*: 4, 4; *Четвърти случай*: 8.
За всеки от тези случаи вече е очевидно как ще пресипем всички топки в една кутия.

Тук е мястото да отбележим, че през 1982 г. Пламен Сидеров се запознава с проф. Алексей Ершов, който по покана на сектор „Алгебра“ на Института по математика и информатика към БАН гостува в София.

В книгата на проф. Иван Проданов „Принцип на Дирихле“ има една изключително красива задача, за която се говори, че е от проф. Сендов и тя е:

В равнината са дадени 5 точки с координати цели числа. Да се докаже, че между триъгълниците с върхове тези пет точки има поне един триъгълник с лице цяло число.

Тази задача беше предложена от Пламен през 2013 г. на състезанието „Роман Хайнацки“ във вида:

Задача 5. В равнината е дадена правоъгълна координатна система и пет точки A, B, C, D и E в първи квадрант, чиито координати са цели числа. Да означим с $\boldsymbol{M}$ множеството от всички триъгълници, чиито върхове са някои три от точките A, B, C, D и E. Да се докаже, че:

а) лицето на всеки триъгълник от множеството $\boldsymbol{M}$ е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число;

б) лицето на поне един триъгълник от множеството $\boldsymbol{M}$ е цяло число;

в) лицата на поне три триъгълника от множеството $\boldsymbol{M}$ са цели числа.

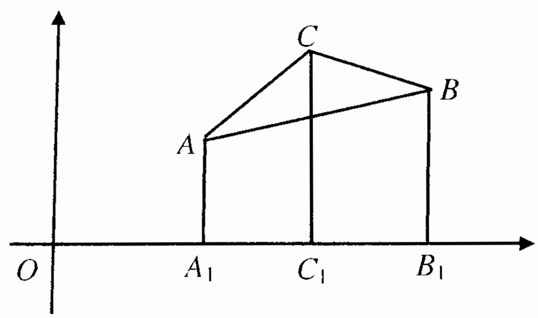
Решение: Ако $X(x_1;x_2)$ е произволна точка с координати x_1 и x_2, с X_1 ще означим петата на перпендикуляра, спуснат от X към абсцисата, т.е. това е точката $X_1(x_1;0)$. Ако $X(x_1;x_2)$ и $Y(y_1;y_2)$ са точки от първи квадрант с целочислени координати, то четириъгълникът XX_1Y_1Y е правоъгълен трапец с основи XX_1 и YY_1 и височина X_1Y_1. Лицето на този трапец е равно на

$$S=\frac{XX_1+YY_1}{2}\cdot X_1Y_1=\frac{x_2+y_2}{2}(y_1-x_1).$$

Ясно е, че лицето S е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число.

Ще отбележим, че ако абсцисите x_1 и y_1 на точките X и Y са с еднаква четност, то S е цяло число. Също така, ако ординатите x_2 и y_2 са с еднаква четност, лицето S е цяло число. Така числото S не е цяло единствено в случая, когато и абсцисите, и ординатите на X и Y са с различна четност. В този случай S е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е нечетно число.

а) Да разгледаме произволни три точки A, B и C от първи квадрант.



(*) $\qquad S_{ABC}=S_{A_1C_1CA}+S_{C_1B_1BC}-S_{A_1B_1BA}$

(Ако точките A, B и C са разположени по друг начин, разсъжденията са аналогични)

Очевидно S_{ABC} е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число.

б) Тъй като точките A, B, C, D и E са пет на брой, поне три от тях, например A, B и C, имат абсциси с еднаква четност и тогава лицето S_{ABC} е цяло число.

в) Нека абсцисите на точките A, B и C са с еднаква четност. Тъй като тези точки са три на брой, ясно е, че ординатите на поне две от тях, например A и B, са с еднаква четност.

Да разгледаме лицата на триъгълниците ABC, ABD и ABE.

За удобство знакът (н;ч) ще означава – нечетна абсциса и четна координата.

Нека координатите на точките A и B са от вида (н;ч) за точката С имаме четири случая: (н;н); (н;ч); (ч;ч) и (ч;н).

Трябва до проверим в тези четири случая в равенството (*) какви числа са участващите в лицата на трапеците. Числото $S_{A_1B_1BA}$ е винаги цяло, а другите две числа $S_{A_1C_1CA}$ и $S_{C_1B_1BC}$ не са и двете цели, но сумата им е цяло число. Аналогично се разсъждава в останалите два случая за триъгълниците ABD и ABE.

Задача 6. Намерете целите координати на пет точки в равнината така, че точно три от триъгълниците с върхове в три от дадените пет точки да са с лице цяло число.

Да си припомним една от теоремите на Дирихле:

Нека x е произволно реално число, а n е произволно естествено число. Да се докаже, че съществуват цели числа p и q, такива че $1 \le q \le n$ и $\left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{1}{nq}$. [2]

От теоремата на Дирихле се появиха задачите за състезанието „Роман Хайнацки“ през 2015 г.

Задача 7. Ще казваме, че числото x върху числовата ос (с единична отсечка от 1 см) е *почти цяло,* ако разстоянието от x до най-близкото цяло число е не повече от 1 милиметър. Да се докаже, че както и да изберем 11 числа върху числовата ос, разстоянието между някои две от ще бъде почти цяло число.

Решение: Ако x е произволно число, да означим с $[x]$ най-голямото цяло число, ненадминаващо x. Нека $[x] = x - \{x\}$. Числото $[x]$ се нарича цяла част на x, а числото $\{x\}$ – дробна част на x. Дробната част на x е число от интервала $[0;1]$.

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ са числата от условието на задачата. Разделяме интервала $[0,1]$ на 10 интервала с дължина от 1 мм и след това нанасяме дробните части на дадените числа $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, …, $\{x_{11}\}$. Тъй като те са 11 на брой числа, поне две от тях, например x_1 и x_2, ще попаднат в едно и също малко интервалче. Това означава, че дробните части на x_1 и x_2 се различават с не повече от 1 милиметър т.е. разстоянието между x_1 и x_2 е почти цяло число. С това задачата е решена.

Задача 8. Окръжност с диаметър 1 сантиметър е нарязана по произволен начин на няколко дъги и всяка дъга е оцветена в един от трите цвята: син, жълт и зелен. После тези дъги са „изправени“ така, че да се превърнат в отсечки и получените отсечки са разхвърляни без припокриване върху числовата ос (с единична отсечка 1 сантиметър). Да се докаже, че можем да намерим две (различни) едноцветни точки, разстоянието между които е цяло число сантиметри.

Решение: Сумата от дължините на всички оцветени отсечки е равна на π сантиметра, т.е. повече от 3 см. Разделяме цялата абсциса на интервали от по 1 см от вида $[n, n+1)$ и транслираме (преместваме) всички интервали в интервала $[0; 1)$. Така всяка точка от абсцисата се премества с цяло число сантиметри. Нека сините отсечки да покриват общо отсечка с дължина, повече от 1 см (ако допуснем, че и трите цвята покриват по-къс от 1 см интервал, общата им дължина не би могла да надхвърли 3 см). След преместването ще има точка от интервала $[0; 1)$, която ще се покрива от две сини „парченца“ от два различни интервала Δ_1 и Δ_2. Нека сините точка X от Δ_1 и точка Y от Δ_2 се препокриват в интервала $[0; 1)$. Тогава разстоянието между X и Y е цяло число. С това задачата е решена.

От Донка (съпругата на Пламен Сидеров) разбрах, че Пламен е приготвил задачите за следващия конкурс „Роман Хайнацки“, който ще се проведе през януари 2017 година. Това може да го направи само Пламен и никой друг.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Гроздев, С., Хр. Лесов. Зимни математически състезания (енциклопедия), София: ВУЗФ, 2012, задача № 90.

[2]. Сидеров, Пл. Теория на числата, София, 2015, задача № 1.25.

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+547. Да се определи съществуват ли n последователни цели числа, сборът от квадратите на които е квадрат на цяло число, ако $n=4^k(6m+1)$ за някои неотрицателни цели числа k и m.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+548. Положителните числа a_1, a_2, …, a_n са такива, че е изпълнено неравенството

$$\frac{a_1}{S-a_1+1}+\frac{a_2}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n+1}\le 1,$$

където $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Да се докаже, че е изпълнено неравенството $\frac{1}{S-a_1+1}+\frac{1}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{1}{S-a_n+1}\ge 1$.

(Draghia Denisa Iulia, Крайова, Румъния)

М+549. Да се докажат неравенствата:

а) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\ge 1$; б) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\ge 1$;

в) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x}\ge 1$; г) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}\ge 1$.

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

М+550. Даден е ΔABC, за който $\sphericalangle BAC=60^\circ$. Върху страната AC съществува такава точка K, че вписаните в ΔABK и ΔBCK окръжности се допират в точка L, за която $BL=6.KL$. Да се докаже, че вписаната в ΔABC окръжност минава през точката K и центърът ѝ лежи върху вписаната в ΔABK окръжност.

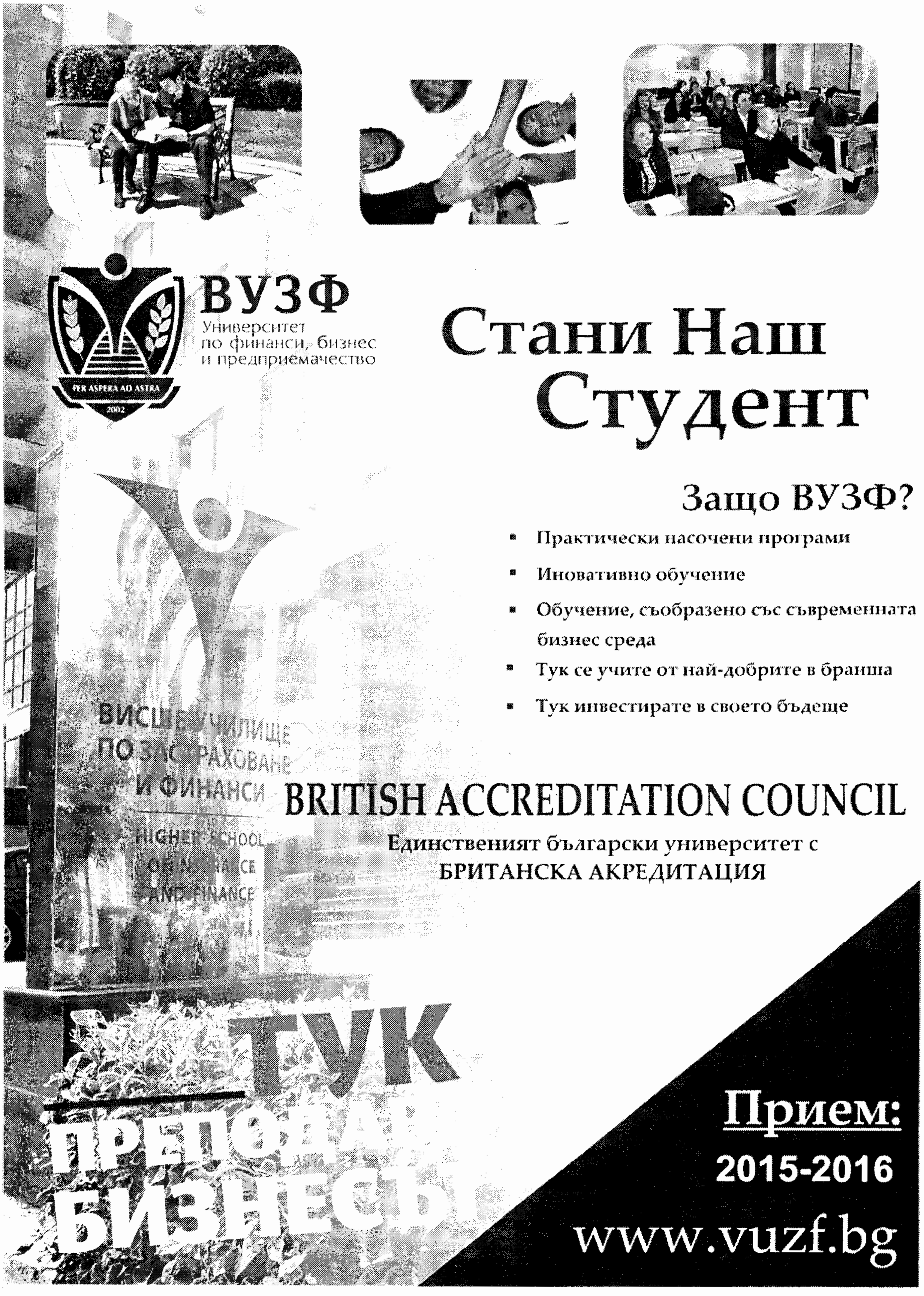
(Сава Гроздев, гр. София,
Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+551. Нека O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълен триъгълник ABC, в който $\sphericalangle ACB=\gamma$ е най-малкият му ъгъл. Ако Q е такава точка от страната BC, че $\sphericalangle HOQ=2\gamma$, да се определи $\sphericalangle OHQ$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+552. Дадени са тетраедър $ABCD$ с център на тежестта G и сфера k с център G. Ако M е произволна точка от k, да се докаже, че сумата $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ не зависи от положението на M върху k. **(Милен Найденов, гр. Варна)**

Краен срок за изпращане на решения: 15.10.2016 г.


ВУЗФ
Университет по финанси, бизнес и предприемачество
PER ASPERA AD ASTRA
2002
Стани Наш Студент
Защо ВУЗФ?
Практически насочени програми
Иновативно обучение
Обучение, съобразено със съвременната бизнес среда
Тук се учите от най-добрите в бранша
Тук инвестирате в своето бъдеще
BRITISH ACCREDITATION COUNCIL
Единственият български университет с БРИТАНСКА АКРЕДИТАЦИЯ
Прием:
2015-2016
www.vuzf.bg

ДЕСЕТИ ЮБИЛЕЕН МЕЖДУНАРОДЕН КОНКУРС "MITE: Methodics and information technologies in education" („Методика и информационни технологии в образованието")

От 30 април до 4 май 2016 г. в Москва се проведе юбилейното десето издание на Международния конкурс „Математика и проектиране" в рамките на Международния проект MITE. Да припомним, че партньори на ВУЗФ в проекта са Академията за социално управление в Москва, Московският държавен университет "М. В. Ломоносов", Центърът „Дарын" в Казахстан и Институтът по математика и информатика-БАН. В конкурса взеха участие над 190 представители на 4 страни – Беларус, България, Казахстан и Русия. България беше представена с научни проекти на ученици от Велико Търново, Ловеч, Разград, Русе и София, с един студентски проект от ВУЗФ и с един учителски от София. Българите завоюваха общо 10 първи и 2 трети места в различните направления. В новите секции на конкурса – международни „Сетевые проекты" и „Интелектуальный квест „Математическая вселенная"" екипите с български участници заеха съответно първо и трето място. Призьорите получиха грамоти и предметни награди. Във връзка с юбилея на основателите на конкурса и на активно проявилите се през годините представители на държавите-участнички бяха връчени грамоти и почетни знаци. Церемонията по награждаването беше придружена от богата културна програма. Българската група се прояви и тук. Виртуозното изпълнение на пиано на Наталия Нешева и хорото, изиграно на сцената с традиционни български носии, бяха бурно аплодирани. За финал, започнатата от българите руска песен „Катюша" беше подета от цялата зала на крака и беше изпята от сърце от всички присъстващи.

Ето представянето на българските участници:

Направление "История на математиката"
„Великият Исак Нютон" (**първо място**)
Автори: Селин Шемсиева (9 клас) и Мартин Николаев (9 клас) от МГ "Баба Тонка", гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Направление "Математика и изкуство"
„Приложение на математиката в музиката" (**първо място**)
Автори: Денислав Недев (11 клас) и Петър Петров (12 клас) от МГ "Баба Тонка", гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Направление "Геометрични миниатюри"
„Триъгълникът на Паскал" (**първо място**)
Автори: Иван Георгиев (7 клас), Йордан Илиев (7 клас) и Мартин Стефанов (7 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски", гр. София
Научен ръководител: Ваня Данова

Направление „Математика в областта на защитата на информацията"
„Малка теорема на Ферма и теорема на Ойлер" (**трето място**)
Автори: До Виет Кьонг (7 клас), Никола Стайков (7 клас) и Йордан Илиев (7 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски", гр. София
Научен ръководител: Ваня Данова

Направление „Електронен тематичен журнал"
„Страната на математиката – образователно мултимедийно приложение на цифрите" (**първо място**)
Автори: Денислав Недев (11 клас) и Петър Петров (12 клас) от МГ "Баба Тонка", гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Направление „Математическо моделиране на реални процеси в природата и обществото"
„Електронен математически наръчник" (**първо място**)
Автори: Кристиан Спасов (9 клас) и Виктор Топоров (9 клас) от МГ "Баба Тонка", гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Първо място в студентската секция зае Анна-Мария Арнаудова от ВУЗФ със своята научна разработка „Зависимост между брутния вътрешен продукт и държавните разходи в България"

Направление "Финансова математика"
„Дуопол и олигопол на Бертран" (**първо място**)
Автор: Петко Казанджиев (10 клас) от ПМГ "Васил Друмев", гр. Велико Търново
Научни ръководители: Цеца Байчева и Кинка Кирилова-Лупанова

Направление "Математиката като наука"

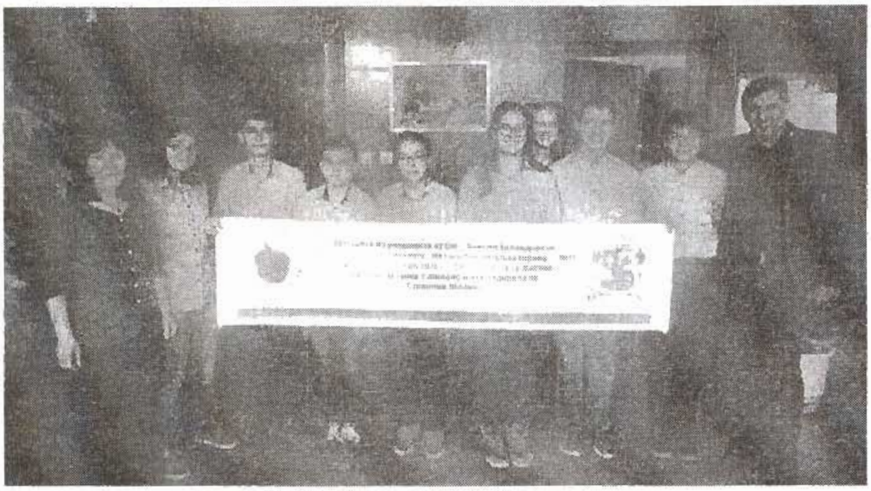
„Дискретни динамични системи и хаос“ (**първо място**)

Автори: Пресиана Маринова (11 клас) от МГ "Баба Тонка", гр. Русе и Ивета Македонска (10 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски“, гр. София

„Числата на Каталан“ (**трето място**)

Автори: Маргарита Стефанова (7 клас), Йоана Кичева (7 клас) и Алекс Цветанов (7 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски“, гр. София

Научен ръководител: Ваня Данова



Направление "Използване на математически методи за решаване на професионално-ориентирани задачи"

„ПАКОСТ – Как да предотвратим войната по пътищата“ (**първо място**)

Автори: Селин Шемсиева (9 клас) и Мартин Николаев (9 клас) от МГ "Баба Тонка", гр. Русе

Научен ръководител: Сюзан Феимова

Международни научни проекти – Сетевые проекты

Първо място за Лили Стефанов (11 клас), Ирина Христова (10 клас) и Радина Иванова (11 клас от МГ в гр. Ловеч в екип с участници от Русия и Казахстан

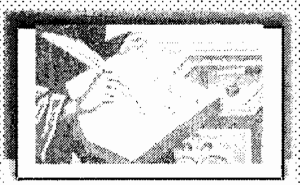
Интелектуальный квест „Математическая вселенная“

Трето място за Наталия Нешева (7 клас) от ОУ „Васил Левски“, гр. Разград в екип с участници от Русия и Казахстан.

Фестивал на методически разработки – учителски презентации

„Автоматизация на счетоводната отчетност“ (**първо място**)

Автор: Станимира Петрушкова от Националната финансово-стопанска гимназия, гр. София.



М + ХРОНИКА

СТУДЕНТСКА НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ „ПРОБЛЕМИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА СЪВРЕМЕННАТА ИКОНОМИКА”

На 11 май 2016 г. се проведе традиционната Студентска научна конференция „Проблеми и предизвикателства на съвременната икономика“. Организатор на конференцията е Висшето училище по застраховане и финанси.

ВУЗФ
Университет по финанси, бизнес и предприемачество

В определения срок бяха представени общо 19 разработки:

1. Швейцарският франк и отражението му в Европа с автори *Станислава Янкова и Ралица Младенова, ВУЗФ*

2. Държавни Ценни Книжа в България с автори *Филип Томов, Марсел Атанасов и Цветан Аврамов, ВУЗФ*

3. Анализ на развитието на системата за допълнително пенсионно осигуряване с автор *Борислава Ирибозова, ВУЗФ*

4. Устойчиво развитие на Румъния и Словакия с автори *Цветомира Цонева и Ивета Зашева, ВУЗФ*

5. Офшорка ООД с автор *Исидор Карадимов, ВУЗФ*

6. Цената на акциите на ИНДИТЕКС в сравнение със големи корпорации в търговията с мода в отрасъла с автори *Симона Пчеларова, Мартина Колева и Натали Иванова, ВУЗФ*

7. Проблеми на устойчивото развитие на България с автор *Кристиан Брешков, ВУЗФ*

8. Устойчиво развитие на Унгария и Полша с автори *Даниел Николов Капсъзов, Валентин Георгиев Попов и Явор Веселинов Димитров, ВУЗФ*

9. Оценка на пазара на небанково кредитиране в България с автор *Ирена Вачева, ВУЗФ*

10. Ролята на европейските фондове за финансиране на селското стопанство в България с автор *Славина Златкова, ВУЗФ*

11. Развитие на застраховка „Товари по време на превоз“, в условията на икономическа нестабилност и динамичен застрахователен пазар в Република България с автори *Елина Дичева и Ивоин Дичев, ВУЗФ*

12. Устойчиво развитие на Сърбия и Норвегия с автори *Райна Йорданова и Кристина Димитрова, ВУЗФ*

13. Характеристики и развитие на еко-индустриален комплекс с автори Филип Томов и Марсел Атанасов, ВУЗФ

14. Устойчиво развитие на Холандия и Великобритания с автори *Александър Николов, Виктория Върбанова и Мартин Бочуков, ВУЗФ*

15. Проблеми на устойчивото развитие на Швейцария с автор *Ивайло Генев, ВУЗФ*

16. Устойчиво развитие на Гърция и Испания с автори *Изабела Иванова, Винислава Любомирова и Петя Таушанова, ВУЗФ*

17. Проблеми на устойчиво развитие на Казахстан с автор *Нурсеит Игилманов, ВУЗФ*

18. Оценка на инвестицията в ERP система чрез анализ на разходите и ползите с автор *Анита Емилова, ВУЗФ*

19. Ще направи ли прегледът на качеството на активите по стабилни банките в ЕС? с автор *Иван Христов, ВУЗФ*

Назначеното от Ректора на ВУЗФ доц. Григорий Вазов жури прегледа разработките и ги оцени в рецензиите си по предварително установени критерии. В журито участваха: проф. д-р Румяна Нейкова, доц. д-р Ирена Мишена, доц. д-р Станислав Димитров, гл. ас. д-р Станимир Андонов и проф. дпн Сава Гроздев.

След закрито заседание на научното жури бяха определени следните лауреати:

1. Специална награда (300 лева) – Исидор Карадимов, ВУЗФ
2. Първа награда (200 лева) – Ивайло Генев, ВУЗФ
3. Първа награда (200 лева) – Анна-Мария Арнаудова, ВУЗФ
4. Втора награда (150 лева) – Елина Дичева и Ивоин Дичев, ВУЗФ
5. Втора награда (150 лева) – Нурсеит Игилманов, ВУЗФ
6. Трета награда (100 лева) – Славина Златкова, ВУЗФ
7. Трета награда (100 лева) – Борислава Ирибозова, ВУЗФ

Останалите участници получиха грамоти за много добро представяне.

ЧЕСТИТО НА ПОБЕДИТЕЛИТЕ!

М + ХРОНИКА

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Поредното издание на Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) се проведе от 27 до 29 май 2016 г. в гр. Русе при домакинството на Русенски университет „А. Кънчев". Традиционно участие в нея взе отбор на ВУЗФ, в който бяха включени опитните Анна-Мария Арнаудова (IV курс) и Борислава Ирибозова (II курс), както и дебютантите Виктория Върбанова (I курс) и Жан-Антоан Тони Гаттас (I курс). Отлично се представиха Анна-Мария (сребърен медал) и Борислава (бронзов медал). Участието на другите двама студенти беше също добро,което позволи на ВУЗФ да се нареди на престижното трето място в класирането по университети в своята състезателна група. Да припомним, че Олимпиадата се провежда в три групи:

<u>Група А</u> – за студенти от природо-математическите факултети на съответните университети;
<u>ГрупаБ</u> – за студенти от инженерни висши учебни заведения;
<u>Група В</u> – за студенти, които не попадат в горните два вида висши учебни заведения (тук се състезават икономическите вузове).

Отборът на ВУЗФ се подготвя и ръководи от проф. Сава Гроздев и д-р Александър Ахегукян.

Състезателната тема за Група В на тазгодишното издание на НСОМ изглежда така:

Задача 1. Дадена е матрицата $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

а) Да се пресметне A^{2016}.

б) Ако M е 5×5 матрица от цели числа и първите 22 члена на редицата $\Delta_n=\det A^n$ (n–четно число) са нейни елементи, да се докаже, че $\det M$ е четно число.

Решение: а) По индукция следва, че $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{3^n+1}{2} & 3^n \end{pmatrix}$ за всяко n и следователно

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{3^{2016}+1}{2} & 3^{2016} \end{pmatrix} \Delta_{2016} = 3^{2016}.$$

б) От а) следва, че поне 22 елемента на M са нечетни числа. Тъй като най-много 3 елемента на M са четни числа, то поне 2 нейни реда съдържат само нечетни числа. Ако прибавим единия от тези редове към другия, ще получим ред с четни числа. Развивайки детерминантата по този ред, заключаваме, че тя е четно число.

Задача 2. Дадени са точките $A(-1;-1)$ и $B(3;3)$, както и окръжност

$$k:\ x^2+(y-5)^2=R^2$$

с радиус R.

а) Да се намери R така, че правата AB да се допира до k.

б) Ако $R=1$ и точка C лежи на k, да се намери минималното лице на ΔABC.

Решение: а) Уравнението на правата AB е $y=x$. Системата

$$\begin{vmatrix} y=x \\ x^2+(y-5)^2=R^2 \end{vmatrix}$$

трябва да има единствено решение, което означава, че дискриминантата на уравнението $2x^2-10x+25-R^2=0$ трябва да е равна на нула. Оттук $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

б) Лицето на ΔABC е равно на $S(h_c)=\dfrac{AB.h_c}{2}=2\sqrt{2}h_c$ и е минимално, когато дължината на височината h_c е минимална. Следователно точка С лежи на по-близката допирателна t към окръжността, успоредна на правата $AB: y=x$. Уравнението на t е $y=x+n$, където n се намира от условието за системата

$$\begin{vmatrix} y=x+n \\ x^2+(y-5)^2=1 \end{vmatrix}$$

да има едно решение, т.е. $n=5-\sqrt{2}$. Тогава $h_c=d(AB,t)=\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ и

$$\min S(h_c)=S\left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=2\left(5-\sqrt{2}\right).$$

<u>*Забележка*</u>. Задачата може да се реши и чрез условен екстремум на функция. Ако означим $C(x_c,y_c)$, то следва, че трябва да се намери минимумът на функцията $S(x_c,y_c)$ при

условие $x_c^2+(y_c-5)^2=1$

Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+...+\frac{1}{x+2016}$. Да се намери броят на:

а) екстремумите на $f(x)$;

б) корените на уравнението $f(x)=0$.

Решение: Дефиниционната област на функцията е реалната права с изключение на точките $-2016,\ -2015,\ -2014,\ ...,\ -1,\ 0$, т.е. функцията е дефинирана в

$$D=(-\infty;-2016)\cup(-2016;-2015)\cup...\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

а) Тъй като $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-...-\frac{1}{(x+2016)^2}<0$, в дефиниционното множество D функцията $f(x)$ е строго намаляваща и следователно няма екстремуми.

б) За всеки от интервалите $(-k;-(-k-1))$, $k=1,2,...,2016$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to -k+} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to -(k-1)-} f(x)=-\infty$, откъдето следва (защото функцията е намаляваща), че уравнението $f(x)=0$ има единствено уравнение в този интервал и в интервала $(-\infty;-2016)$ уравнението няма корени. В същото време в $(0;+\infty)$. Заключаваме, че търсеният брой на корените е равен на броя на разгледаните интервали, т.е на 2016.

Организацията на олимпиадата се осъществява от Национална комисия и висше училище – домакин. Върховен орган е Общото събрание, в което участват по един представител на висшите училища, представени на олимпиадата. Всяка година Общото събрание избира Национална комисия и председател. Съгласно регламента на НСОМ, по предложение на Националната комисия Общото събрание утвърждава конспект за всяка от групите. Конспектът за Група В включва:

1. Уравнения на права и равнина.
2. Криви от втора степен.
3. Матрици, детерминанти, системи линейни уравнения.
4. Полиноми с цели и реални коефициенти.
5. Числови редици.
6. Функции на една реална променлива: непрекъснатост, диференцуемост, основни теореми на диференциалното смятане.
7. Неопределени, определени интеграли и приложения.
8. Комбинаторика.

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

притурка притурка

М МАТЕМАТИКА плюс

КАНДИДАТ-СТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ ПО МАТЕМАТИКА 2015 г.

Сава Гроздев Цеца Байчева

Математика плюс бр. 4, 2015 г.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 22 март 2015 г.

Задача 1. Нека положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ (в този ред) образуват геометрична прогресия с частно $q \neq 1$. Да се намери q, ако е известно, че сумата на първите 10 члена на прогресията е 5 пъти по-малка от сумата на всичките двадесет члена на прогресията.

Задача 2. В окръжност с радиус 2 е вписан трапец $ABCD$ с основа $AB = 4$. Да се намери лицето на трапеца, ако $\angle ABC = 2\angle BAC$.

Задача 3. Да се реши уравнението $\sqrt{25 - x|x-10|} = -\dfrac{x^2 - 9x + 20}{2}$.

Задача 4. В правоъгълния ΔABC ($\angle ACB = 90^\circ$) точка D, лежаща на хипотенузата AB, е такава, че $AD : DB = 18 : 7$. Да се намери лицето на ΔABC, ако е известно, че периметърът му е равен на 12 и $CA = CD$.

Задача 5. Да се реши неравенството $3^x + 3^{|x|} \geq 2\sqrt{3}$.

Задача 6. В правилна четириъгълна пирамида ъгълът между околна стена и основата е равен на 45. Да се намери мярката на ъгъла между две съседни околни стени.

Задача 7. Нека корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 + ax + b = 0$ са реални числа. Да се намерят a и b, ако числата $\dfrac{1}{1+x_1}$ и $\dfrac{1}{1+x_2}$ са корени на същото уравнение.

Задача 8. В ΔABC ($AC < BC$) вътрешните ъглополовящи AD и BE ($D \in BC, E \in AC$) удовлетворяват неравенствата $AD < AC$ и $BE < BC$. Върху страните AC и BC са избрани съответно точки A_1 и B_1, такива че $AA_1 = AD$ и $BB_1 = BE$. Да се намери мярката на $\angle ACB$, ако A_1B_1 е успоредна на AB.

26.	27.	28.	29.	30.
$x = 6$, $y = 11$	$\sqrt{37}cm$	$x = \dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{12}cm$	$a_1 = -\dfrac{2}{5}$, $a_2 = -2$

Технически университет - София
6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	в	д	а	г	г	б	б	д	а
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
б	б	д	в	в	а	г	г	д	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x = 3$	22. $x = 4$	23. $x \in [-1; 2)$	24. $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$	25. $\dfrac{1}{9}$
26. 45	27. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}cm$	28. $\sin\varphi = \sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}$	29. $k = -1$	30. $a = 6$; $b = 12$

Технически университет – Варна
25 юни 2015 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	В	Г	В	Б	А	В	А	В	Г
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	А	В	Б	Г	Г	В	В	Б	Б
21	22	23	24	25					
В	Б	Г	А	В					

26.	27.	28.	29.	30.
8	$\frac{1}{4}$	$a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$	$DB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$	$64b^3\sqrt{\cot g^2 \varphi - 1}$

Технически университет - София
18 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	г	г	г	б	б	д	д	в	а
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
а	б	а	г	д	д	д	в	в	а

ВТОРА ЧАСТ

21. $x = -4$	**22.** 10	**23.** 40 лв.	**24.** $\frac{8}{15}$	**25.** $x \in (-\infty; 3]\{7\}$
26. 2	**27.** 6, 30, 150	**28.** $24\ cm^2$	**29.** $4\ cm$, $8\ cm$	**30.** $\frac{h}{3}$

Технически университет - София
25 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
в	в	д	а	а	г	в	д	б	г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
а	б	б	в	г	в	д	д	г	а

ВТОРА ЧАСТ

21.	22.	23.	24.	25.
$x \in \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$	$x_1 = 0$; $x_2 = 1$	$x = 2\frac{1}{9}$	$\frac{1}{720}$	960

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 29 март 2015 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $\frac{x-4}{5x-x^2-4} \geq -1$.

Задача 2. В ΔABC са дадени $\angle ACB = 30$ и височините $AA_1 = 5\sqrt{3}$ и $BB_1 = 8$. Да се намерят страните на ΔABC.

Задача 3. Да се реши уравнението $\sqrt{-3x-2} = 3x+4$.

Задача 4. Пет числа образуват растяща аритметична прогресия. Намерете числата, ако сумата им е 25, а сумата от квадратите им е 285.

Задача 5. Колко нечетни трицифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 1, 4, 5, 7 и 9, като цифрите в десетичния запис на числата не се повтарят?

Задача 6. Ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича описаната около триъгълника ΔABC окръжност в точка S. Ако $AB = 3$, $AS = 7$ и $CS = 5$, намерете страната BC.

Задача 7. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB = 19$, $CD = 5$ и бедра $BC = 13$, $AD = 15$. Да се намерят лицето и диагоналите AC и BD на трапеца.

Задача 8. За кои стойности на реалния параметър k уравнението $(k-2)x^4 + 2(2k-3)x^2 + 5k - 6 = 0$ няма реални корени.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 20 юни 2015 г.

Задача 1. Пресметнете израза:

$$A = \left(\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5}\right)^2 - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}(4 + 2\sqrt{3}).$$

Задача 2. Около окръжност с диаметър 15 е описан равнобедрен трапец с дължина на бедрото 17. Намерете дължините на основите на трапеца.

Задача 3. Да се реши системата: $\begin{vmatrix} xy + x + y = 19 \\ x^2 y + xy^2 = 84 \end{vmatrix}$.

Задача 4. Върху продължението на хипотенузата AB на правоъгълния ΔABC е взета точка D, така че $BD = BC$ и B е между A и D. Намерете дължината на CD, ако $AC = 24$ и $BC = 7$.

Задача 5. Разполагаме с три разноцветни зарчета. Каква е вероятността сборът от точките върху трите зарчета при произволно хвърляне да е 7?

Задача 6. Нека a и b са положителни числа, такива че a^2 е средно аритметично на b^2 и $(a+b)^2$. Да се намери стойността на $\frac{a}{b}$.

Задача 7. Дължините на отсечките, съединяващи петите на височините в остроъгълен триъгълник, са 8, 15 и 17. Намерете радиуса на описаната около дадения триъгълник окръжност.

Задача 8. Уравнението $x^2 + 2ax + 4a = 0$ има реални корени x_1 и x_2. Намерете най-голямата стойност на израза $S = |x_1| + |x_2|$, при условие, че параметърът a принадлежи на множеството от решения на неравенството $|a| \leq 2$

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 21 юни 2015 г.

Задача 1. Да се реши уравнението $(x^2 - 10x + 24)\sqrt{5-x} = 0$.

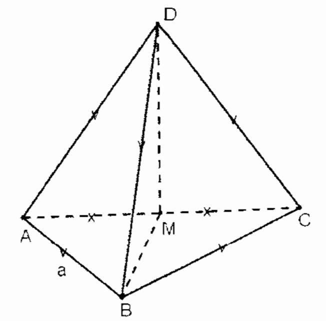
Задача 2. В правоъгълен триъгълник отношението между радиусите на вписаната и описаната окръжности е 2:5. Да се намери лицето на триъгълника, ако е известно, че периметърът му е равне на 12.

Задача 3. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 7x + 12) - \log_{\frac{1}{5}}(x-1) - \log_{\frac{1}{5}}(x+1) \geq 0.$$

Задача 4. В успоредника $ABCD$ точките M и N лежат съответно на страните AB и CD. Да се намери лицето на успоредника, ако е известно, че $AC + BD = 10 + 2\sqrt{5}$, а четириъгълникът $MBND$ е квадрат с лице, равно на 10.

Задача 4. а) От условието следва, че $DM \perp (ABC)$, т.е. $DM \perp BM$ и $DM \perp AC$. Тогава $AD = DC$. От $AD = BD$ следва, че $AM = BM$ и така получаваме $\angle ABC = 90^\circ$. Но $\Delta ACB \cong \Delta ACD$, т.е. $\angle ADC = 90^\circ$. Следователно $DM = BM$. Така намираме $\angle(BD;(ABC)) = \angle DBM = 45^\circ$.



б) От правоъгълния ΔABC намираме $AC = a\sqrt{2}$ и $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следователно $V_{ABCD} = \frac{AB.BC.DM}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{12}$. Използваме формулата $V_{ABCD} = \frac{S_1.r}{3}$, където r е радиусът на вписаната в пирамидта сфера и от $S_1 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2a^2}{2} = \frac{a^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}$ получаваме $r = \frac{a\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{2}$.

Технически университет - София
4 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
г	а	б	в	д	д	в	д	б	б
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
б	г	г	а	в	г	д	в	а	д

ВТОРА ЧАСТ

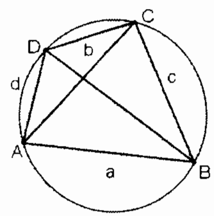
21.	22.	23.	24.	25.
$x = 2$	$x \in \left(\frac{1}{3};1\right]$	$x \in \left\{-\frac{\pi}{4};0\right\}$	$x = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$	$f_{\min}(-1) = -1$. $f_{\max}(-3) = \frac{1}{3}$

Задача 2. а) За $x \ge 0$ даденото уравнение е еквивалентно на уравненията $x-3=2x$ или $x-3=-2x$ с решения $x=-3<0$ и $x=1$. Решение на даденото уравнение е $x=1$.

б) Нека $f(x)=x^2+mx+m-1$. Уравнението $f(x)=0$ има реални корени по-малки от 1, когато $\begin{vmatrix} D \ge 0 \\ 1.f(1)>0 \\ -\frac{m}{2}<1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m^2-4m+4\ge 0 \\ 2m>0 \\ m>-2 \end{vmatrix}$. Решение е $m \in (0;+\infty)$.

в) Преобразуваме даденото уравнение до уравнението $4\sin x+1-1+2\sin^2 x=0$. Тогава $\sin x(\sin x+2)=0$. Следователно $\sin x=0$ или $\sin x+2=0$. Второто уравнение няма решение. Решение на първото, а и на даденото уравнение е $x=k\pi$, където k е цяло число.

Задача 3. а) б) От $ABCD$ вписан в окръжност следва, че $\angle ADC=120^\circ$. Нека $AB=a$, $BC=c$, $CD=b$ и $DA=d$. От $ABCD$ описан около окръжност получаваме $a+b=c+d$. От $\angle ABD=\angle DBC$ намираме $b=d$. Тогава и $a=c$. От косинусова теорема за ΔACD и ΔACB получаваме съответно $b^2=\frac{16}{3}$, т.е. $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ и $a^2=16$, т.е. $a=4$. Получаваме



$S_{ABCD}=S_{ACB}+S_{ACD}$. Заместваме и намираме

$S_{ABCD}=\frac{a^2\sin 60^\circ}{2}+\frac{b^2\sin 120^\circ}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$. Но ΔABC е равностранен, т.е. $\angle ACD=60^\circ$. Тогава $\angle BCD=90^\circ$ и $BD=2b$. Следователно $R_{ABCD}=\frac{BD}{2}=b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5. Правилна триъгълна пресечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ има основни ръбове $AB=24$ и $A_1B_1=6$, а мярата на двустенния ъгъл при основата ABC е 45°. Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 6. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)=\cos x\sin 2x-\cos 2x-2\sin x-1$.

Задача 7. В равнобедрения ΔABC ($AC=BC$) окръжността, имаща за диаметър вътрешната ъглополовяща AL ($L\in BC$), минава през средата на бедрото AC. Точките O и O_1 са съответно центровете на описаните около триъгълниците ALC и ABL окръжности. Да се намери дължината на отсечката OO_1, ако радиусът на описаната около ΔABC окръжност има дължина 7.

Задача 8. Дадена е функцията $f(x)=x^2+ax+1$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, за които за всеки три числа x, y и z от интервала $[0;1]$ числата $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$ са дължини на страни на някакъв триъгълник.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
3 юни 2015 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Стойността на израза $\left||2\sqrt{7}-3|+|2-\sqrt{7}|-4\right|$ е:

А) $\sqrt{7}-5$ Б) $9-3\sqrt{7}$ В) $1-3\sqrt{7}$ Г) $-3-\sqrt{7}$

2. Най-малкото от числата $\log_{0.5}3$, 0, 1, 2^{-1} е:

А) $\log_{0.5}3$ Б) 0 В) 1 Г) 2^{-1}

3. Стойностите на x, за които изразът $\frac{\sqrt[3]{3-x}}{\lg(x-2)}$ има смисъл, са:

А) $x \neq 2$ Б) $x \in (2,+\infty)$ В) $x \in (2,3) \cup (3,+\infty)$ Г) $x \in (2,3)$

4. Ако корените на квадратното уравнение $x^2 - 30x + 11 = 0$ са x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 - 2x_1x_2$ е равно на:

А) -8 Б) 8 В) 52 Г) $\sqrt{151}$

5. Ако $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, то $tg\alpha$ е равен на:

А) $\frac{8}{15}$ Б) $\frac{17}{8}$ В) $-\frac{15}{8}$ Г) $-\frac{8}{15}$

6. Решенията на неравенството $9^{x+2} \geq \sqrt{3^x}$ са:

А) $x \in \left(-\infty, -\frac{8}{3}\right]$ Б) $x \in \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$

В) $x \in \left[-\frac{8}{3}, +\infty\right)$ Г) $x \in (2,+\infty)$

7. За аритметична прогресия е дадено, че $a_2 + a_6 = 4$. Сумата $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ е равна на:

А) 12 Б) 14 В) 16 Г) 15

8. Решенията на уравнението $\sqrt{x+3} = x - 9$ са:

А) 6 и 13 Б) 6 В) няма решение Г) 13

9. Числената стойност на израза $A = \log_2 3.\log_3 64$ е:

А) 6 Б) $3\log_2 3$ В) 8 Г) 32

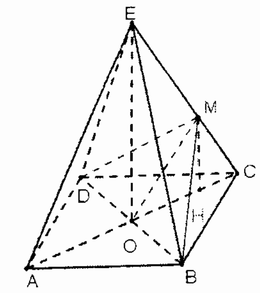
10. Сумата от квадратите на дължините на диагоналите на ромб е 400. Страната на ромба е:

А) 30 Б) 20 В) 10 Г) 40

11. Лицето на трапец $ABCD$ с основи $AB = 11$, $CD = 4$ и диагонали $AC = 14$, $BD = 13$ е:

А) $16\sqrt{2}$ Б) 42 В) 84 Г) $36\sqrt{3}$

Задача 4. **а)** Нека $AC \cap BD = O$. Тъй като пирамидата е правилна следва, че EO е височина на пирамидата. От ΔBDM равнобедрен следва $\angle((ABCD);(BMD)) = \angle MOC = 45^\circ$. Нека $MH \perp OC$, $H \in OC$. От правоъгълния ΔEOC намираме $CE = 5$. От равнобедрения правоъгълен ΔOMH следва $2MH^2 = OM^2$, а от OM ъглополовяща следва $OM^2 = OC.OE - CM.ME$.



От свойство на ъглополовящата $\frac{CM}{5-CM} = \frac{3}{4}$ след пресмятане намираме $CM = \frac{15}{7}$ и $EM = \frac{20}{7}$. Тогава $MH = \frac{12}{7}$. Следователно $V_{DBCM} = \frac{S_{DBC}.MH}{3} = \frac{36}{7}$.

б) От $V_{DBCM} = \frac{S_{DBM}.h_C}{3}$ получаваме $h_C = \frac{3V_{DBCM}}{S_{DBM}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 юли 2015 г.

Задача 1. **а)** От първото уравнение изразяваме $y = x - 2$, заместваме във второто и получаваме квадратното уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$ с корени $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$. Решение на ситемата са (-5;-7) и (2;0).

б) За $x \neq -3$ от $(x+2)^2 \geq 0$ за всяко x следва, че даденото неравенство е еквивалентно на $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$. Решение на задачата е $x \in (-3;1]$.

в) Преобразуваме и получаваме $A = \lg 10^{-3} - \log_7 7^2 + \log_{4^{-1}} 4^3 - \log_{\sqrt{5}} 1 =$
$-3\lg 10 - 2\log_7 7 - 3\log_4 4 - 0 = -8$.

б) В $2^{2x}+4.2^x-32=0$ полагаме $2^x=u>0$ и получаваме квадратното уравнение $u^2+4u-32=0$ с корени $u_1=-8<0$ и $u_2=4$. От $2^x=4$ намираме $x=2$.

в) За $x>0$ получаваме последователно $\log_3(x+2)=\log_3 x^2+\log_3 3$. Оттук следва $\log_3(x+2)=\log_3 3x^2$. Т.е. получаваме квадратното уравнение $3x^2-x-2=0$ с корени $x_1=-\frac{2}{3}<0$ и $x_2=1$. Решение на даденото уравнение е $x=1$.

Задача 2. а) Даденото уравнение е еквивалентно на уравненията $6x-3=6$ или $6x-3=-6$. Следователно $x=1,5$ или $x=-0,5$.

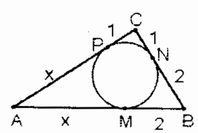
б) Намираме $\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{2}$, заместваме и получаваме

$$A=\frac{4}{5+6.\left(-\frac{1}{2}\right)}=2.$$

в) За да има корени с различни знаци трябва $x_1x_2=\frac{3(m-1)}{m}<0$.

Следователно $m\in(0;1)$.

Задача 3. а) Нека вписаната в триъгълниа окръжност се допира до страните AB, BC и AC съответно в точките M, N и P. От свойствата на правоъгълен триъгълник и вписана окръжност следва $CN=CP=r=1$ и $BN=BM=2$. Означаваме $AM=AP=x$ и от Питагорова теорема за ΔABC следва $(x+1)^2+9=(x+2)^2$. Намираме $x=3$ и следователно $AC=4$, $AB=5$ и $S_{ABC}=6$.



б) Намираме $R=\frac{AB}{2}=\frac{5}{2}$.

12. В равнобедрения ΔABC, с бедра $AC=BC=10$, центърът на вписаната окръжност дели височината към основата в отношение $5:2$. Основата на триъгълника е:

А) 8 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** $3\sqrt{5}$

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Триъгълникът ABC има страни $AC=6$, $BC=5$ и височина $CH=4$. Страната AB и радиусът на описаната около триъгълника окръжност са:.....

14. Основата на равнобедрен триъгълник има дължина 8 cm и медианите към бедрата му са взаимно перпендикулярни. Да се намери дължината на третата медиана и лицето на триъгълника.

15. Решенията на уравнението $\log_2(x-5)+\log_2(x-4)=1$ са:

16. Най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=3-2\sin x$ са:....

17. Решенията на неравенството $\frac{x^2-x}{x+2}\geq 0$ са:....

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Намерете стойностите на параметъра k, за които уравнението $(k+1)x^2-(2k+5)x+k=0$ има два различни положителни корена.

19. Да се реши системата $\begin{cases} x^2+y^2-xy=7 \\ 2xy-x-y=2 \end{cases}$.

20. Даден е равнобедрен ΔABC с основа AB=6 см. и бедро AC=5 см. Окръжност с диаметър AC пресича AB в точка E и CB в точка F. Да се намери лицето на четириъгълника AEFC.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"
10 юли 2015 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Кой от дадените изрази НЕ е равен на $4\sqrt[6]{27}$?

А) $\sqrt{48}$ Б) $4\sqrt{3}$ В) $\frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{16}}$ Г) $8\sqrt{3}$

2. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2+ax+b=0$, където a и b са реални числа, то стойността на израза $x_1^{-2}+x_2^{-2}$ е:

А) 1 Б) $\frac{a^2-2b}{b^2}$ В) $\frac{a^2-2}{b}$ Г) $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2b$

3. Решенията на уравнението $|2x+4|=6$ са:

А) -5 и 1 Б) -1 и 5 В) 5 и 1 Г) -5 и -1

4. Изразът $\frac{x+5}{x-2}:\frac{x^2-25}{x+5}$ е дефиниран при:

А) $x\neq 2, x\neq 5$ Б) $x\neq 2, x\neq -5$ В) $x\neq 2$ Г) $x\neq \pm 5, x\neq 2$

5. Корените на уравнението $\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$ са:

А) 3 и 4 Б) 3 В) 4 Г) 1 и 4

6. Корените на уравнението $\sqrt{x-2}=x-4$ са:

А) 3 и 6 Б) 6 В) 3 Г) -3

7. Решенията на неравенството $(x+1)(3-x)(x-2)^2\geq 0$ са:

А) $x\in(-\infty;+\infty)$ Б) $x\in[-1;3]$

В) $x\in[-1;2]$ Г) $x\in[-1;2]\cup[3;+\infty]$

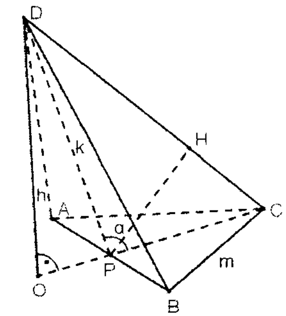
8. Сумата на три числа, образуващи аритметична прогресия, е равна на 2, а сумата от квадратите на тези числа е $\frac{14}{9}$. Трите числа са:

А) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$ Б) $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1$ В) $\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$ Г) $\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}$

9. Допирната точка M на вписаната в правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) окръжност разделя катета BC на части с дължини $BM=3$ и $CM=2$. Дължината на хипотенузата е:

А) 10 Б) 8 В) 13 Г) 11

Задача 8. а) Нека $DO=h$ е височина на пирамидата, а $DP=k$ е апотема, като P е среда на AB. Тогава $\angle((ABC);(ABD))=\angle DPC=\alpha$. От равностранния ΔABD намираме $k=\frac{m\sqrt{3}}{2}$, а от правоъгълния ΔPDO следва $h=\frac{m\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$. Тогава



$$V_{ABCD}=\frac{S_{ABC}.DO}{3}=\frac{m^3\sin\alpha}{8}.$$

б) Пълната повърхнина на пирамидата е максимална, когато $\angle CAD=\angle CBD=90^\circ$. Тогава $CD=m\sqrt{2}$ и от равнобедрения ΔCDM намираме $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Следователно $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

в) От $AB\perp CP$ и $AB\perp DP$ следва $AB\perp(CDP)$ и $AB\perp CD$. Тогава $\angle(AB;CD)=90^\circ$. Ако $PH\perp CD$ в ΔPCD, то PH е търсеното разстояние. От $PC=PD$ следва $\angle CPH=\frac{\alpha}{2}$. Следователно

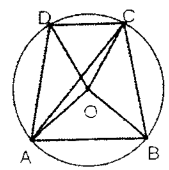
$$PH=\frac{m\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 април 2015 г.

Задача 1. а) За $x\neq\{0;1\}$ получаваме $\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x}\leq 0$ и след преобразуване следва $\frac{-(x-2)}{x(x-1)}\leq 0$. Следователно $x\in(0;1)\cup[2;+\infty)$.

$g(x)=\frac{2}{3}(m+5)x^3-2(m+5)x+2m+6$. За да има $g(x)=0$ три различни реални решения трябва уравнението $g'(x)=0$ да има два различни реални корена x_1 и x_2, за които $g(x_1).g(x_2)<0$. Пресмятаме $g'(x)=2(m+5)x^2-2(m+5)$. За $m\neq -5$ уравнението $g'(x)=0$ има корени $x_1=-1$ и $x_2=1$. Тогава заместваме и след опростяване получаваме неравенството $(m-1)(5m+19)<0$. Следователно решение е $m\in\left(-\frac{19}{5};1\right)$.

Задача 7. а) $S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BCO}+S_{CDO}+S_{ADO}=\frac{2R^2}{2}+\frac{2R^2\sin\varphi}{2}+\frac{R^2\sin(180^\circ-\varphi)}{2}=R^2(1+\sin\varphi)$.



б) От косинусова теорема за ΔABO намираме $AB=\sqrt{2R^2-2R^2\cos\varphi}=2R\sin\frac{\varphi}{2}$. От $2R\sin\frac{\varphi}{2}=R\sqrt{3}$ следва $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\varphi=120^\circ$ и $\angle COD=60^\circ$. Тогава

$S_{ACD}=S_{AOD}+S_{DOC}-S_{AOC}=\frac{R^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$.

в) От косинусова теорема за ΔCDO намираме $CD=\sqrt{2R^2+2R^2\cos\varphi}=2R\cos\frac{\varphi}{2}$. Следователно

$AB+CD=2R\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)=2R\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-45^\circ\right)\leq R\sqrt{8}$.

Равенство се получава при $\cos\left(\frac{\varphi}{2}-45^\circ\right)=1$, т.е. $\varphi=90^\circ$. Т.е. $ABCD$ е квадрат.

10. Даден е равнобедреният триъгълник ΔABC $(AC=BC)$, за който $AC=3\sqrt{3}$ и $\sphericalangle ABC=30^\circ$. Дължината на страната AB е:

А) $3\sqrt{3}$ Б) 9 В) 81 Г) $\sqrt{54.25}$

11. Даден е ромб със страна $8\sqrt{3}$ и остър ъгъл 60°. Дължината на радиуса на вписаната в ромба окръжност е:

А) 6 Б) 12 В) $6\sqrt{3}$ Г) 4

12. Основите на трапец имат дължини 6 и 8, а ъглите при голямата му основа имат големини 45° и 30°. Лицето на трапеца е:

А) $\frac{7}{\sqrt{3}-1}$ Б) $7(\sqrt{3}-1)$ В) $14(\sqrt{3}-1)$ Г) $\frac{14}{\sqrt{3}-1}$

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Ако $tg\alpha+\cot g\alpha=k$, то стойността на израза $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{cotg}^2\alpha$ е:....

14. Решенията на системата $\begin{cases}x+y=5\\x^2=y+1\end{cases}$ са:...

15. Едната страна на правоъгълник е с 2 cm по-дълга от другата. Ако увеличим всяка от страните му с по 10 cm, се получава правоъгълник с лице 1224 cm^2. Страните на дадения правоъгълник са:...

16. Две от страните на триъгълник имат дължини 4 и 6, а медианата към третата му страна има дължина $\sqrt{10}$. Лицето на триъгълника е:...

17. Около окръжност с радиус 4 е описан равнобедрен трапец с бедро 10. Дължините на основите на трапеца са:...

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Намерете корените на уравнението $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$.

19. Намерете стойностите на реалния параметър k, за които неравенството $kx^2-4x+3k+1>0$ е изпълнено за всяко реално число x.

20. В равнобедрен триъгълник с ъгъл 120° е вписана окръжност с радиус 1. Намерете дължините на страните на този триъгълник.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
19 април 2015 г.

Задача 1. а) Да се намерят първият член и разликата на аритметична прогресия, за която $\begin{cases} a_2 + a_8 = 10 \\ a_3 + a_{14} = 31 \end{cases}$;

б) Да се реши уравнението $\dfrac{1}{x^2-5x+6} + \dfrac{5-2x}{x-2} = 1 + \dfrac{2}{x-3}$;

в) Да се реши уравнението $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x$.

Задача 2. а) Да се намери най-малката стойност на реалния параметър a, за която уравнението $a^2(x-3)+4(a+3-x)=a^3$ има единствен цял положителен корен, който удовлетворява неравенството $\dfrac{x+9}{6} - \dfrac{x-2}{3} > 1$;

б) За така намерената стойност на a да се реши уравнението $(a+2)9^x + (a-3)3^x + 2a + 5 = 0$.

Задача 3. В ΔABC са построени височината CH и медианата CM. Ако $MB = BC$, $CM = 8$ и $MH = 4$, да се намерят:

а) Страните и лицето на ΔABC;

б) Радиусът на вписаната в ΔABC окръжност.

Задача 4. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$, $AB \perp AD$, в който е вписана окръжност. Известно е, че $AD = 4$ и $AB = 6$.

а) Намерете страните и лицето на трапеца;

б) Трапецът $ABCD$ служи за основа на пирамидата $MABCD$, всички околни стени на която са наклонени към равнината на основата под един и същ ъгъл с големина α. Намерете обема на пирамидата.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 26 април 2015 г.
ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е най-малко?

$DH_1 = H_1H$. Следователно $HH_1 = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$. Но ΔABC е със страни $AC = BC = 2\sqrt{5}$, $AB = 2\sqrt{2}$. Тогава $S_{ABC} = 6$ и $HH_1 = \dfrac{4}{3}$.

б) От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $C_1D \perp (ABB_1A_1)$, т.е. търсеното разстояние е 2.

в) равнините, които се пресичат в BB_1 са перпендикулярни, защото са стени на прав тристенен ъгъл. Следователно търсения косинус е равен на нула.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
13 юли 2015

1	2	3	4	5
в	в	б	г	г

Задача 6. а) За $m > 0$ от $f(1) = 0$ получаваме $(\lg m + 1)(2^m - 1) = 0$. Тогава $\lg m + 1 = 0$ или $2^m - 1 = 0$, т.е. $m = \dfrac{1}{10}$ или $m = 0$. Следователно решение е $m = \dfrac{1}{10}$.

б) От а) следва, че $x_1 = 1$ е корен на $f(x) = 0$ за всяко m. От $1 + x_2 = \dfrac{2m+6}{m+5}$ намираме $x_2 = \dfrac{m+1}{m+5}$. Следователно $\dfrac{m+1}{m+5} + \dfrac{m+5}{m+1} < 2$. Преобразуваме и получаваме $\dfrac{m+1}{m+5} < 0$, т.е. $m \in (-5; -1)$.

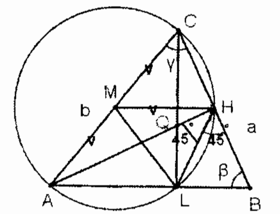
в) Намираме $f'(x) = 2(m+5)x - (2m+6)$ и $f''(x) = 2(m+5)$. Даденото уравнение представяме във вида $\dfrac{2}{3}(m+5)x^3 - 2(m+5)x + 2m + 6 = 0$. Да означим

$\angle LQH = 180^\circ - \beta$ и $\angle AQL = \beta = 135^\circ - \gamma$. Следователно

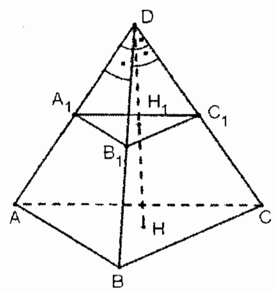
$$S_{ALHC} = \frac{AH.CL\sin\angle AQL}{2} = \frac{b^2\sqrt{2}}{4}\sin\gamma\sin\left(135^\circ - \gamma\right).$$

б) От $\sin\gamma\sin\left(135^\circ - \gamma\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right) - \cos 135^\circ\right)$ следва, че максималната стойност се достига, когато $\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right)$ е максимално, т.е. при $\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right) = 1$. Следователно $2\gamma - 135^\circ = 0$, т.е. $\gamma = 67^\circ 30'$.

в) От правоъгълните ΔAHC и ΔALC с обща хипотенуза $AC = b$ намираме $LM = HM = AM = MC = \frac{b}{2}$ и $\angle AHM = \angle HAC = 90^\circ - \gamma$. Така получаваме, че $\angle LHM = \angle LHA + \angle AHM = 45^\circ + 90^\circ - \gamma = \beta$. Прилагаме синусова теорема и намираме $R_{ABC} = 2R_{LHM}$.



Задача 8. а) Нека пресечената пирамида е получена от пирамидата $ABCD$ с прав тристенен ъгъл при върха D. От условието получаваме, че A_1, B_1 и C_1 са среди на AD, BD и CD. Тогава $DA = DB = 2$ и $DC = 4$. Следователно $V_{ABCD} = \frac{S_{ABD}.DC}{3} = \frac{8}{3}$,



$V_{A_1B_1C_1D} = \frac{S_{A_1B_1D}.DC_1}{3} = \frac{1}{3}$ и $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{ABCD} - V_{A_1B_1C_1D} = \frac{7}{3}$. Ако DH и DH_1 са височините на двете пирамиди $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ следва, че

А) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^{-1}$ Б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ В) $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2}$ Г) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}$

2. Стойността на израза $\frac{x+2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} + \frac{x-2015}{x+3}$ за $x = 2015$ е равна на:

А) 3 Б) 0 В) 2 Г) -2015

3. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\log_4 x}$ е:

А) $x \in [-3;1) \cup (1;+\infty)$ Б) $x \in (0;+\infty)$

В) $x \in (-\infty;-3]$ Г) $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

4. Броят на реалните корени на уравнението $x^3 + 7x^2 + 12x = 0$ е:

А) 1 Б) 0 В) 3 Г) 4

5. Единият корен на квадратното уравнение $kx^2 + x + k - 1 = 0$ е $x_1 = 0$. Другият корен е равен на:

А) -1 Б) 0 В) 1 Г) 2

6. Вероятността случайно избрано естествено число от 1 до 20 да бъде делител на числото 15 е:

А) $\frac{1}{5}$ Б) $\frac{4}{15}$ В) $\frac{2}{15}$ Г) $\frac{1}{2}$

7. Уравнението $x^2 - 5x + 3 = 0$ има корени x_1 и x_2. Стойността на израза $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ е равна на:

А) $\frac{18}{3}$ Б) $\frac{31}{3}$ В) $\frac{19}{3}$ Г) $-\frac{1}{3}$

8. Решенията на неравенството $3^{x+2} \le 9^{x-2}$ са:

А) $x \in (4;+\infty)$ Б) $x \in (5;+\infty)$ В) $x \in (0;6]$ Г) $x \in [6;+\infty)$

9. Дадена е аритметична прогресия, за която $a_3 = 4$ и $a_6 = 5{,}5$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5

10. Ако $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то стойността на $tg\alpha$ е равна на:

А) $\frac{3}{4}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $-\frac{3}{4}$ Г) $\frac{1}{3}$

11. Даден е ΔABC, за който $AB=10$ cm и AL ($L\in BC$) е вътрешната ъглополовяща на ъгъла при върха A. Ако $CL:LB=1:2$, то дължината на страната AC е равна на:

А) 7 cm Б) 6 cm В) 5 cm Г) 4 cm

12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб $a=6$ cm и обем $V=6\sqrt{3}$ cm^3. Дължината на височината на пирамидата е равна на:

А) 2 cm Б) 4 cm В) 7 cm Г) 5 cm

ВТОРА ЧАСТ

Запишете само отговор.

13. Да се реши системата уравнения $\begin{vmatrix} x^2+xy-y=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{vmatrix}$.

14. Частното q на геометрична прогресия е равно на 2, а сумата от първите и четири члена е 30. Да се намери шестият член на прогресията.

15. В равнобедрения ΔABC ($AC=BC$) е дадено, че $BC=25$ и височината CM ($M\in AB$) е равна на 15. Да се намери дължината на височината AH ($H\in BC$) към бедрото BC.

16. Две от страните на разностранен триъгълник са с дължини 3 cm и 4 cm, а мерките на ъглите срещу тях се отнасят съответно както 1:2. Да се намери дължината на третата страна на триъгълника.

17. Трапец с основи 21 cm и 7 cm и бедра 13 cm и 15 cm е основа на призма с обем 1680 cm^3. Да се намери височината на призмата.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

18. Да се реши уравнението $3\left(6x^2+\frac{1}{3}\right)^2+\left(6x^2+\frac{1}{3}\right)-4=0$.

Следователно $S_{ABC_1D_1}=\frac{(AB+C_1D_1)D_1M}{2}=18\sqrt{5}$.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
26 април 2015

1	2	3	4	5
а	г	б	а	б

Задача 6. а) В $f(x)=2^{2x}-2.2^x+a$ полагаме $2^x=u>0$ и получаваме $g(u)=u^2+2u+a$ с корени $u_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$. За $a<1$ намираме $x_2=\log_2\left(1+\sqrt{1-a}\right)>\log_2\left(1-\sqrt{1-a}\right)=x_1$. От $x_2-x_1=1$ получаваме $1=\log_2\left(1+\sqrt{1-a}\right)-\log_2\left(1-\sqrt{1-a}\right)$ $=\log_2\frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}}$, т.е. $\frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}}=2$. Следователно $\sqrt{1-a}=\frac{1}{3}$, т.е. $a=\frac{8}{9}$.

б) От $f(x)=2^{2x}-2.2^x+1+a-1=\left(2^x-1\right)^2+a-1$ следва, че при $x=0$ $HMCf(x)=a-1$.

в) От формулите на Виет следва $u_1+u_2=2$ и $u_1u_2=a$. Тогава $A=8^{x_1}+8^{x_2}=u_1^3+u_2^3=(u_1+u_2)^3-3u_1u_2(u_1+u_2)=8-6a$.

Задача 7. а) От $\angle ACH+\angle ALH=\gamma+180^\circ-\gamma=180^\circ$ следва, че около четириъгълника $ALHC$ може да се опише окръжност. От $\angle AHC=90$ следва, че AC е диаметър. От $\Delta BHL\approx\Delta BAC$ получаваме $\angle BAC=45$. От правоъгълните ΔAHC и ΔALC намираме $AH=b\sin\gamma$ и $CL=\frac{b\sqrt{2}}{2}$. Нека $AH\cap CL=H$. Тогава

Следователно за $u=\frac{2}{3}$ функцията получава най-голяма стойност.

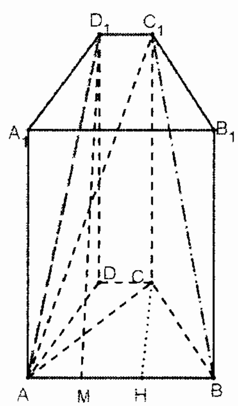
Пресмятаме и намираме $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$. Т.е. най-голямата стойност на лицето е $\frac{4}{27}$ при $\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

в) Пресмятаме последователно и получаваме

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma(\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\alpha)\sin^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\sin^2\frac{\pi}{2}.\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=$$

$$1.\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}}{4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

Задача 8. В трапеца може да се впише окръжност. Следователно $2AD=12$, т.е. $AD=BC=6$. Нека CH е височината на трапеца. От правоъгълния ΔBHC намираме $CH=3\sqrt{3}$, от ΔACH следва $AC=\sqrt{63}$, а от ΔACC_1 получаваме $CC_1=3\sqrt{2}$.



а) $V=S_{ABCD}.CC_1=\frac{9+3}{2}.3\sqrt{3}.3\sqrt{2}=54\sqrt{6}$.

б) По условие $AC_1=9$, $C_1D_1=CD=9$, а от правоъгълния ΔADD_1 получаваме $AD_1=3\sqrt{6}$.

в) Търсеното сечение е равнобедрения трапец ABC_1D_1. Ако D_1M е височината му, то от правоъгълния ΔAD_1M намираме $D_1M=3\sqrt{5}$.

19. В остроъгълния ΔABC са дадени $AB=4\sqrt{2}$, $AC=7$ и $\angle BAC=\angle OBC$, където точката O е центърът на описаната около ΔABC окръжност. Да се намери дължината на страната BC.

20. В правилна триъгълна пирамида дължината на радиуса на вписаната в основата окръжност е r, а дължината на апотемата е k. Да се намерят обемът и лицето на пълната повърхнина на пирамидата.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий" тест математика - 6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е с най-голям модул?

А) $-\sqrt{8}$ Б) $\sqrt[3]{7}$ В) $\sqrt{7}$ Г) $\sqrt{3,5}$

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\log_x\sqrt{3-x}$ е:

А) $x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$ Б) $x\in[0;8)$
В) $x\in(0;1)\cup(1;3)$ Г) $x\in(-\infty;8]$

3. Единият корен на квадратното уравнение $kx^2+x+k+2=0$ е $x_1=0$. Другият корен е равен на:

А) 0 Б) 0,5 В) -1 Г) -6

4. Решенията на неравенството $\frac{3-x}{x+1}\geq 0$ са:

А) $x\in(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$ Б) $x\in(-1;3)$ В) $x\in(-1;3]$ Г) $x\in[-1;3)$

5. За аритметична прогресия е дадено, че $d=2$ и $S_{40}=400$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) -29 Б) 29 В) 31 Г) 60

6. В банка са внесени на влог 10000 лева при сложна лихва 6%. След две години влогът ще бъде:

А) 12449 лева Б) 11236 лева В) 15000 лева Г) 9000 лева

7. В ΔABC е дадено, че $AB=2,5$, $BC=2$ и $AC=1,5$. Мярката на $\angle ACB$ е равна на:

А) 45 Б) 75 В) 120 Г) 90

8. Периметърът и лицето на правоъгълник се изразяват с едно и също число. Едната страна на правоъгълника е 4 пъти по-голяма от другата. Дължината на тази страна е равна на:

А) 5 **Б)** 10 **В)** 7 **Г)** 12

9. Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни като $AC=15$, $BD=18$. Лицето на четириъгълника е равно на:

А) 135 **Б)** 270 **В)** 100 **Г)** 150

10. Ако $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то стойността на $\cos 3\alpha$ е равна на:

А) 0,5 **Б)** 2 **В)** -1 **Г)** 0,125

11. Лицата на три стени на правоъгълен паралелепипед са 6 m^2, 12 m^2 и 8 m^2. Дължините на ръбовете (измеренията) на паралелепипеда са:

А)12 m, 1 m, 1 m **Б)**12 m, 4 m, 4 m **В)**2 m, 3 m, 4 m **Г)**4 m, 6 m, 6 m

12. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $a=8$ cm и обем $V=64$ cm^3. Дължината на апотемата на пирамидата е равна на:

А) 5 cm **Б)** 3 cm **В)** 6 cm **Г)** 4 cm

ВТОРА ЧАСТ

Запишете само отговор.

13. Ако n е естествено число и $1+2+3+\ldots+n=55$, да се намери стойността на n.

14. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-8x+2=0$, да се намери стойността на израза $A=\log_2 x_1x_2-2^{2+\log_2(x_1+x_2)}$.

15. Даден е равнобедрен ΔABC с основа $AB=8$ cm и $AC=BC=5$ cm. Да се намери дължината на радиуса на описаната около ΔABC окръжност.

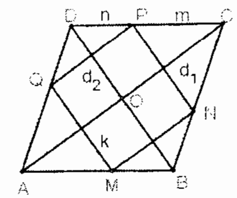
16. Основата на призма е квадрат. Височината на призмата е 3 cm, а диагоналът е 5 cm. Да се намери лицето на основата на призмата.

17. Основата на пирамида е триъгълник с една страна $8\sqrt{3}$ cm и срещулежащ на нея ъгъл 60. Всички околни ръбове на пирамидата са равни на 10 cm. Да се намери височината на пирамидата.

в) Намираме $x_1x_2=10^{-1-\sqrt{1-a}}.10^{-1+\sqrt{1-a}}=\frac{1}{100}$ и следователно получаваме

$$x_1+x_2\geq 2\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{5}.$$

Задача 7. а) Нека квадрата е $MNPQ$. $CP=m$ и $DP=n$. От



$\Delta QPD\approx\Delta ACD$ следва $\frac{k}{d_1}=\frac{n}{n+m}$, а от $\Delta PNC\approx\Delta DBC$ следва $\frac{k}{d_2}=\frac{m}{n+m}$. Събираме двете равенства и получаваме $\frac{k}{d_1}+\frac{k}{d_2}=\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1$, т.е. $\frac{1}{k}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$.

б) Нека $\cos\alpha=a$. От правоъгълния ΔAOB следва $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{d_2}{2a}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{d_1}{2a}$, т.е. $d_2=2a\sin\frac{\alpha}{2}$ и $d_1=2a\cos\frac{\alpha}{2}$. От а) използваме $k=\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}$ и получаваме последователно $\sigma(\alpha)=k^2=$

$$\frac{16a^4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4a^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{4a^2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$\frac{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{1+\sin\alpha}=\frac{(1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}=$$

$\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\sin^2\alpha-\sin^3\alpha$. Да означим $\sin\alpha=u$, $u\in[0;1]$. Тогава $g(u)=-u^3+u^2$. Намираме $g'(u)=-3u^2+2u$.

$ABCD$ следва, че точката O е център на вписаната в основата окръжност. Тогава $DH = 2r$ и от $ME \perp BC$ следва, че $\angle((ABCD);(BCM)) = \angle OME = \alpha$. Нека $AB = a$ и $DE = k$. От правоъгълните ΔADH и ΔMOE използваме равенствата $h_1 = 2r = a\sin\beta$, $tg\alpha = \frac{h}{r}$, $\cos\alpha = \frac{r}{k}$ и намираме $k = \frac{a\sin\beta}{2\cos\alpha}$.

$h = rtg\alpha = \frac{a\sin\beta tg\alpha}{2}$. Следователно $V_{ABCDM} = \frac{a^3\sin^2\beta tg\alpha}{6}$ и

$$S_1 = a^2\sin\beta + 2ak = \frac{a^2\sin\beta(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2a^2\sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Университет по архитектура, строителство и геодезия
5 април 2015 г.

1	2	3	4	5
в	б	в	г	а

Задача 6. а) За $x > 0$ получаваме $f(x) = \lg^2 x + 2\lg x + a$. Ако x_1 и x_2 са корените на $f(x) = 0$ и $x_2 \geq x_1$ намираме $x_1 = 10^{-1-\sqrt{1-a}}$ и $x_2 = 10^{-1+\sqrt{1-a}}$. От $x_2 - x_1 = \frac{1}{5}$ следва $10^{-1+\sqrt{1-a}} - 10^{-1-\sqrt{1-a}} = \frac{1}{5}$.

Преобразуваме и получаваме $10^{\sqrt{1-a}} - \frac{1}{10^{\sqrt{1-a}}} - 2 = 0$. Полагаме $10^{\sqrt{1-a}} = u > 0$ и стигаме до квадратното уравнение $u^2 - 2u - 1 = 0$ с корени $u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Следователно $u = 1 + \sqrt{2}$ и $a = 1 - \lg^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

б) От $f(x) = (\lg x + 1)^2 + a - 1$ следва, че $HMCf(x) = a - 1$.

ТРЕТА ЧАСТ

Запишете пълните решения с необходимите обосновки.

18. Да се реши системата уравнения $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 11 \end{cases}$.

19. Да се намерят решенията на уравнението $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$, които принадлежат на интервала $[0; \pi]$.

20. Основата на пирамида е ромб със страна a и остър ъгъл β. Всички околни стени на пирамидата сключват с основата ъгъл α. Да се намерят лицето на пълната повърхнина и обемът на пирамидата.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
5 април 2015 г.

Задача 1. Числата $a, 5, b, c, 14$ образуват в този ред аритметична прогресия. Тогава a е равно на:

а) 1 б) $\frac{3}{2}$ в) 2 г) $\frac{5}{2}$

Задача 2. В правоъгълен трапец с ъгъл 150° е вписан кръг с лице 1. Тогава лицето на трапеца е:

а) 4 б) $\frac{6}{\pi}$ в) π^2 г) $\sqrt{3}$

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = x^3 + x - 2$. Точка M е от графиката и лежи в I квадрант. Точка P е проекция на M върху оста Ox. Дадено е, че $\angle MOP = 45^\circ$. Тогава ординатата на точка M е равна на:

а) 1 б) 2 в) $\sqrt[3]{2}$ г) $\frac{5}{2}$

Задача 4. Околните ръбове на триъгълна пирамида са равни на 1, 2 и 3 и са два по два взаимно перпендикулярни. Тогава обемът на пирамидата е:

а) 6 б) 3 в) 2 г) 1

Задача 5. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$ се достига при x равно на:

а) 2π　　б) π　　в) $\frac{\pi}{2}$　　г) $\cos 1$

Задача 6. Дадена е функцията $f(x)=\lg^2 x+\lg x^2+a$.

а) За кои стойности на параметъра a графиката на $f(x)$ отсича от абсцисата Ox отсечка с дължина $\frac{1}{5}$.

б) Пресметнете най-малката стойност на функцията $f(x)$.

в) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$, пресметнете стойността на израза x_1x_2 и докажете, че $x_1+x_2\geq\frac{1}{5}$.

Задача 7. В ромба $ABCD$ с дължини на диагоналите d_1 и d_2 е разположен квадрат, страните на който са успоредни на диагоналите му. Върховете на квадрата лежат на страните на ромба.

а) Докажете, че ако дължината на страната на квадрата е равна на k, то $\frac{1}{k}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$.

б) Нека острият ъгъл на ромба е равен на α, а дължината на страната му е равна на $\cos\alpha$. Изразете лицето σ на квадрата като функция на α: $\sigma=\sigma(\alpha)$. При коя стойност на $\sin\alpha$ лицето $\sigma(\alpha)$ е най-голямо?

в) Пресметнете $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma(\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}$.

Задача 8. Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB=9$ и $CD=3$. В трапеца може да се впише окръжност. Дължината на телесния диагонал AC_1 е равна на 9.

а) Пресметнете обемът на призмата.

б) Пресметнете дължините на страните на AC_1D_1.

в) Пресметнете лицето на сечението, на равнината (AC_1D_1) с призмата.

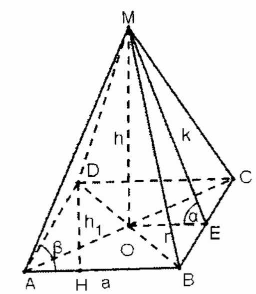
ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
10	-31	$\frac{25}{6}$	8	6

ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. Представяме дадената система във вида $\begin{vmatrix} xy+x+y=5 \\ (x+y)^2+xy=11 \end{vmatrix}$, полагаме $\begin{vmatrix} x+y=u \\ xy=v \end{vmatrix}$ и получаваме $\begin{vmatrix} u+v=5 \\ u^2+v=11 \end{vmatrix}$. Умножаваме първото уравнение с -1, прибавяме към второто и получаваме квадратното уравнение $u^2-u-6=0$ с корени $u_1=3$ и $u_2=-2$. Тогава $v_1=2$ и $v_2=7$. Следователно $\begin{vmatrix} x+y=3 \\ xy=2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x+y=-2 \\ xy=7 \end{vmatrix}$. Първата система има решения (1;2) и (2;1), а втората няма реални решения.

Задача 19. Преобразуваме и получаваме последователно $\frac{1-\cos 2x}{2}+1-\cos^2 2x=1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$. Полагаме $\cos 2x=u$, $-1\leq u\leq 1$ и стигаме до квадратното уравнение $2u^2+u-1=0$ с корени $u_1=-1$ и $u_2=\frac{1}{2}$. От $\cos 2x=-1$ и $\cos 2x=\frac{1}{2}$ намираме $x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$ и $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, където k е цяло число.

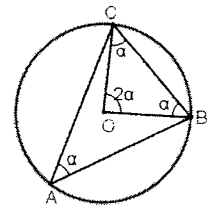


Задача 20. Нека пирамидата е $ABCDM$ с основа ромба $ABCD$. Да означим с $MO=k$ височината на пирамидата, с $DH=h_1$ височината на ромба и $OE\perp BC$. От равните двустенни ъгли при основата

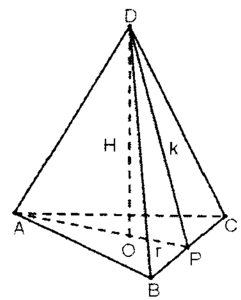
ТРЕТА ЧАСТ

Задача 18. Полагаме $6x^2+\frac{1}{3}=u>0$ и получаваме квадратното уравнение $3u^2+u-4=0$ с корени $u_1=-\frac{4}{3}<0$ и $u_2=1$. От $6x^2+\frac{1}{3}=1$ получаваме $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$.

Задача 19. Използваме стандартните означения и от условието следва $\angle BAC=\angle OBC=\angle OCB=\alpha$. От свойство на вписан и централен ъгъл следва $\angle BOC=2\alpha$. От ΔBOC намираме $\alpha=45$. От косинусова теорема за ΔABC получаваме $BC=5$.



Задача 20. Нека пирамидата е $ABCD$ с основа равностранния ΔABC, $DO=H$ е височината на пирамидата и P е среда на BC. Тогава $OP=r$ и $DP=k$. От свойства на равностранния триъгълник следва, че $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, т.е. $a=2r\sqrt{3}$ и $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}$. От правоъгълния ΔDOP намираме $H=\sqrt{k^2-r^2}$. Така получаваме $S_1=3r\sqrt{3}(k+r)$ и $V_{ABCD}=r^2\sqrt{3(k^2-r^2)}$.



Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий" тест математика - 6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
А	В	Б	В	А	Б	Г	Б	А	В	В	А

Университет по архитектура, строителство и геодезия 26 април 2015

Задача 1. Графиките на функциите $f(x)=x^3+x-a$ и $g(x)=x^3+ax^2-x$ имат единствена пресечна точка $M(x_0;y_0)$ със строго положителни координати. Координатите на т. M са:

а) (1;1) б) (2;1) в) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ г) $\left(\frac{3}{2};2\right)$

Задача 2. Височината на конус е 2 пъти по-голяма от височината на цилиндър, а диаметърът на основата му е 2 пъти по-малък от диаметъра на основата на цилиндъра. Тогава отношението на обема на цилиндъра към обема на конуса е:

а) 1 б) 2 в) $\frac{8}{3}$ г) 6

Задача 3. Ако a_n и b_n са числови редици и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$ е равно на:

а) 0 б) -1 в) 1 г) ∞

Задача 4. Основата на пирамида е правоъгълен триъгълник, а всички околни ръбове образуват равни ъгли с основата. Тогава върхът на пирамидата се проектира в:

а) средата на хипотенузата на триъгълника
б) върха на правия ъгъл на триъгълника
в) центъра на вписаната окръжност в триъгълника
г) ортоцентъра на триъгълника

Задача 5. Най-голямата стойност на функцията $\cos x-\sin x$ е равна на:

а) 2 б) $\sqrt{2}$ в) 1 г) -1

Задача 6. Дадена е функцията $f(x)=4^x-2^{x+1}+a$.

а) За кои стойности на параметъра a графиката на $f(x)$ отсича от абсцисата Ox отсечка с дължина 1.

б) Пресметнете най-малката стойност на функцията $f(x)$.

в) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$, пресметнете стойността на израза $A=8^{x_1}+8^{x_2}$.

Задача 7. В остроъгълния ΔABC AH е височина, HL е ъглополовяща в ΔAHB. Известно е, че $AC=b$ и $\angle ACB=\angle BLH=\gamma$.

а) Пресметнете лицето на четириъгълника $ACHL$.

б) За коя стойност на γ лицето на $ACHL$ е най-голямо?

в) Нека M е среда на AC. Докажете, че дължината на диаметъра на описаната около ΔLMH окръжност е равна на дължината на радиуса на описаната около ΔABC окръжност.

Задача 8. Дадена е пресечена триъгълна пирамида $ABCA_1B_1C_1$, такава, че околните ръбове AA_1, BB_1, CC_1 са два по два взаимно перпендикулярни и $AA_1=BB_1=1$, $CC_1=2$. Дадено е, че лицата на двете основи се отнасят както 4:1.

а) Докажете, че обемът на пирамидата е равен на $\frac{7}{3}$, а височината на пирамидата е $\frac{2}{3}$.

б) Пресметнете разстоянието от върха C_1 до равнината ABA_1B_1.

в) Пресметнете косинуса на ъгъла между околните стени, съдържащи околния ръб BB_1.

Университет по архитектура, строителство и геодезия
13 юли 2015

Задача 1. Решение на неравенството $\sin\varphi\cos\varphi<0$ е:

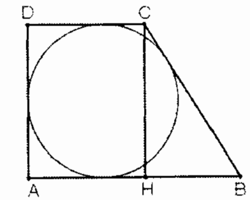
а) $\varphi\in(0^\circ;180^\circ)$ б) $\varphi\in(90^\circ;270^\circ)$

в) $\varphi\in(90^\circ;180^\circ)\cup(270^\circ;360^\circ)$ г) $\varphi\in(0^\circ;90^\circ)\cup(180^\circ;270^\circ)$

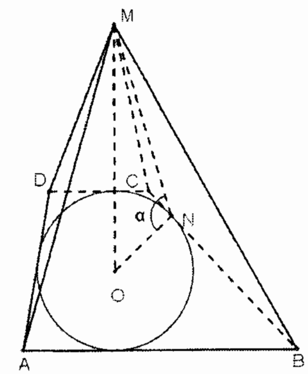
Задача 2. Ако отношението на лицата на основите на пресечена пирамида е 1:2, то отношението на периметрите е:

б) От зависимостта за правоъгълен триъгълник $r=\frac{a+b-c}{2}$ получаваме $r=4\sqrt{3}-4$.

Задача 4. а) Нека $AB=a$, $BC=c$ и $CD=b$ и да построим $CH\perp AB$, $H\in AB$. От $ABCD$ описан около окръжност следва $6+b=c+4$, т.е. $c=2+b$. От правоъгълния ΔBHC и $BH=6-b$ следва $16+(6-b)^2=(2+b)^2$. Така намираме $b=3$ и следователно $S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)AD}{2}=18$.



б) Нека $MO\perp(ABCD)$. От условието, че двустенните ъгли при основата са равни следва, че O е център на вписаната в основата окръжност. Нека $ON\perp BC$, $N\in BC$ следва, че $MN\perp BC$ и $\angle ONM=\alpha$. Но $ON=r=\frac{AD}{2}=2$. От правоъгълния ΔONM получаваме $tg\alpha=\frac{OM}{ON}$, т.е. $OM=2tg\alpha$. Следователно $V_{ABCDM}=\frac{S.OM}{3}=12tg\alpha$.



Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
тест математика - 26 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Б	Г	В	А	А	В	Г	Б	А	В	А

ВТОРА ЧАСТ

13	14	15	16	17
(2;-4), (3;-4,5)	64	24	$\frac{7}{3}$	10

б) Даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{5-2x}{x-2}=1+\frac{2}{x-3}$. За $x \neq \{2;3\}$ опростяваме и получаваме квадратното уравнение $3x^2-14x+16=0$ с корени $x_1=2$ и $x_2=\frac{8}{3}$. Решение е $x=\frac{8}{3}$.

в) За $x \neq \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, k цяло число преобразуваме и получаваме

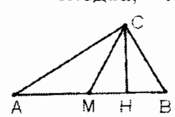
$\sin 2x=-2\cos x-2\sin x.\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos x(2\sin x+1)=0 \quad \Leftrightarrow$

$\cos x=0 \cup \sin x=-\frac{1}{2}$. Решения на даденото уравнение са $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi$ и $x=\frac{11\pi}{6}+2l\pi$, където k,l са цели числа.

Задача 2. а) Преобразуваме даденото уравнение във вида $(a-2)(a+2)x=(a-2)(a+2)(a+3)$. *1)* За $a=\pm 2$ следва $0.x=0$ и уравнението има безброй решения. *2)* За $a \neq \pm 2$ уравнението има единствено решение $x=a+3$. От условието $x>0$ следва $a>-3$ цяло число. Следователно $\frac{a+3+9}{6}-\frac{a+3-2}{3}>1$. Опростяваме и намираме $a<4$. Решение е $a=-1$.

б) За $a=-1$ получаваме $9^x-4.3^x+3=0$. Полагаме $3^x=u>0$ и следва квадратното уравнение $u^2-4u+3=0$ с корени $u_1=1$ и $u_2=3$. От $3^x=1$ и $3^x=3$ намираме $x=0$ и $x=1$.

Задача 3. а) От правоъгълния ΔMHC и $CM=2MH$ следва, че $\angle MCH=30$. Тогава $\angle CMH=60$ и ΔCMB е равностранен, т.е. $CM=MB=BC=8$. Следователно $AB=16$. От $AM=BM=CM$ следва, че $\angle ACB=90$. Тогава $AC=8\sqrt{3}$ и $S_{ABC}=32\sqrt{3}$.



а) $1:4$ б) $1:1$ в) $1:\sqrt{2}$ г) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

Задача 3. Страните на ΔABC са $AB=2$, $BC=3$ и $CA=4$. Центърът на описаната окръжност лежи:

а) вътре в ΔABC б) извън ΔABC

в) на страната AB г) на страната AC

Задача 4. Първите четири члена на редицата $a_n=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$, $n=1,2,3,\ldots$ са:

а) $\frac{1}{2},2,2,0$ б) $\frac{1}{2},\sqrt{2},2,0$ в) $1,\sqrt{2},2,\frac{1}{2}$ г)друг отговор

Задача 5. Разстоянието между върха на параболата с уравнение $y=2x^2-4x+7$ и оста Ox е рвно на:

а) 3 б) -4 в) 4 г) 5

Задача 6. Дадена е функцията, $f(x)=(m+5)x^2-(2m+6)x+m+1$, където $m \neq -5$ е реален параметър.

а) За кои стойности на m уравнението $f(x)=(\lg m+x)(2^m-x)$ има корен $x=1$?

б) За кои стойности на m за корените на уравнението $f(x)=0$ е изпълнено неравенството $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<2$?

в) За кои стойности на m уравнението $\frac{1}{3}x^3 f''(x)-f'(x)=0$ има три различни реални корена?

Задача 7. В четириъгълника $ABCD$ страните AB и CD са успоредни. Около $ABCD$ е описана окръжност с център O и радиус R. Дадено е, че $\angle AOB=\varphi$, $\angle BOC=90$.

а) Пресметнете лицето на четириъгълника.

б) За коя стойност на φ е изпълнено $AB=\sqrt{3}R$? За тази стойност на φ пресметнете лицето на ΔACD.

в) Докажете, че $AB+CD \le R\sqrt{8}$. За коя стойност на φ се достига равенство? Определете вида на четириъгълника в този случай.

Задача 8. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$. Стените ABC и ABD са равностранни триъгълници със страна m, като двустенният ъгъл между тях е α.

а) Пресметнете обема на пирамидата.

б) При $m=1$ пресметнете косинуса на α, за който пълната повърхнина на пирамидата е максимална.

в) Пресметнете ъгъла и разстоянието между правите AB и CD.

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 април 2015 г.

Задача 1. а) Да се реши неравенството $\dfrac{x}{x-1} \le \dfrac{x+2}{x}$.

б) Да се реши уравнението $4^x + 4.2^x - 32 = 0$.

в) Да се реши уравнението $\log_3(x+2) = 2\log_3 x + 1$.

Задача 2. а) Да се реши уравнението $|6x-3| = 6$.

б) Да се намери стойността на израза $A = \dfrac{4}{5+6\cos 2\alpha}$, ако $tg\alpha = -\sqrt{3}$.

в) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които корените на уравнението $mx^2 + 2x + 3(m-1) = 0$ са с различни знаци.

Задача 3. В правоъгълен ΔABC с хипотенуза AB и катет $BC=3$ радиусът на вписаната окръжност е $r=1$. Да се намери:

а) лицето на триъгълника;

б) дължината на радиуса на описаната окръжност.

Задача 4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDE$ с основен ръб с дължина $3\sqrt{2}$ и височина 4. През диагонала BD е построена равнина λ, която пресича околния ръб CE в точка M и сключва с основата $ABCD$ ъгъл 45°. Да се намери:

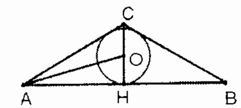
а) обемът на тетраедъра $BCDM$.

б) разстоянието от върха C до равнината λ.

18. За $x \ne \pm 2$ преобразуваме даденото уравнение в уравнението $\left(x^2+6\right)^2 - (5x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2+6-5x)(x^2+6+5x) = 0$. От $x^2-5x+6=0$ намираме $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$, а от $x^2+5x+6=0$ получаваме $x_3 = -3$ и $x_4 = -2$. Окончателно $x = \pm 3$.

19. За $k=0$ получаваме $x < \frac{1}{4}$, т.е. $k=0$ не е решение. Нека $k \ne 0$. Тогава трябва $k > 0$ и $D < 0$. От $D = -3k^2 - k + 4 < 0$ намираме $k \in \left(-\infty; -\dfrac{4}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. Окончателно $k \in (1; +\infty)$.

20. Нека е даден ΔABC с $\angle ACB = 120^\circ$. Тогава $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$. Нека $CH = x$ е височината към основата. Следователно $AC = BC = 2x$ и $AH = BH = x\sqrt{3}$. Ако O е центърът на вписаната окръжност, то O е пресечна точка на ъглополовящите и AO е ъглополовяща и в ΔAHC, като $HO = r = 1$ и $OC = x - 1$. От свойство на ъглополовящата следва $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{OH}{HC}$.



Заместваме и намираме $x = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$. Следователно $AB = 4 + 2\sqrt{3}$ и $AC = BC = \dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$.

Великотърновски университет „Св. Св. Кирил и Методий"
19 април 2015 г.

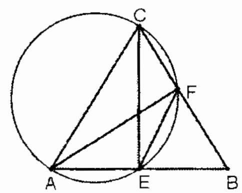
Задача 1. а) Използваме формулата за общия член на аритметична прогресия $a_n = a_1 + (n-1)d$ и получаваме $\begin{vmatrix} 2a_1 + 8d = 10 \\ 2a_1 + 15d = 31 \end{vmatrix}$ с решение $\begin{vmatrix} a_1 = -7 \\ d = 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{cases} u_2 = -\dfrac{5}{2} \\ v_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$. От $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ намираме решенията $(1;3)$ и $(3;1)$, а от

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{5}{2} \\ xy=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$ получаваме $\left(\dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{4};\dfrac{-5\mp\sqrt{29}}{4}\right)$.

20. От AC диаметър следва, че $CE \perp AB$ и $AF \perp BC$. От ΔABC равнобедрен следва, че $AE = BE = 3$. От правоъгълния ΔAEC намираме $CE = 4$. Така получаваме $S_{ABC} = 12$. Но $\Delta EBF \approx \Delta CAB$. Следователно $\dfrac{S_{EFB}}{S_{CAB}} = \left(\dfrac{EB}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$. Тогава $S_{EFB} = \dfrac{108}{25}$ и

$$S_{AEFC} = S_{ABC} - S_{EFB} = \frac{192}{25}.$$



Пловдивски университет „П. Хилендарски"
10 юли 2015 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Г	Б	А	Г	В	Б	Б	В	В	Б	А	Б

13	14	15	16	17
k^2-2	(-3;8) и (2;3)	24 cm, 26 cm	$3\sqrt{15}$	4 и 16

Висше строително училище „Любен Каравелов" - София
8 юли 2015 г.

Задача 1. а) Да се реши системата $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+3y=4 \end{cases}$.

б) Да се намери областта на решение на неравенството $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{x+3} \le 0$.

в) Да се намери стойността на израза $A = \lg\dfrac{1}{1000} - \log_7 49 + \log_{\frac{1}{4}} 64 - \log_{\sqrt{5}} 1$.

Задача 2. а) Да се реши уравнението $|x-3| = 2x$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението $x^2 + mx + m - 1 = 0$ има реални корени по-малки от 1.

в) Да се реши уравнението $4\sin x + 1 - \cos 2x = 0$.

Задача 3. Даден е четириъгълник $ABCD$ с диагонал $AC = 4$, $\angle DAC = \angle DBA = 30^\circ$, в който може да се впише окръжност и около който може да се опише окръжност. Да се намери:

а) лицето на четириъгълника $ABCD$;

б) радиусът на описаната около $ABCD$ окръжност.

Задача 4. Даден е тетраедър $ABCD$ с основа ABC, за който $AB = BD = AD = BC$ и ортогоналната проекция на върха D е средата M на AC. Да се намери:

а) големината на ъгъла между ръба BD и основата ABC;

б) радиусът на вписаната в тетраедъра сфера, ако дължината на ръба AB е a.

Технически университет - София
4 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ:* *За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\frac{1}{3}\sqrt{12\frac{1}{4}-\left(\frac{9.5^{-2}}{0,5.2^{-1}}\right)^{-0.5}}$ е:

а) 1,1 б) 2 в) $\frac{4\sqrt{3}-5}{2}$ г) $\frac{1}{3}$ д) $-\frac{1}{2}$

2. Ако $a=3b+1$ и $ab=30$, то стойността на израза a^2+9b^2 е равна на:

а) 181 б) 161 в) 121 г) 81 д) 31

3. Сборът на корените на уравнението $x^2+5x+2-\frac{x^2+x-2}{x+2}=0$ е равен на:

а) 4 б) -4 в) 0 г) -1 д) 3

4. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $2x^2-7x+4=0$, то стойността на израза $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2$ е равна на:

а) $\frac{7}{4}$ б) $\frac{7+\sqrt{2}}{2}$ в) $\frac{7+4\sqrt{2}}{4}$ г) $\frac{7+2\sqrt{2}}{2}$ д) $\frac{2+\sqrt{7}}{4}$

5. Решенията на уравнението $\sqrt{(2x+3)^2}=x$ са:

а) -1 б) -3 в) -1 и -3 г) $\frac{3}{2}$ д) няма решение

6. Броят на целите числа n, за които $\left(\frac{n+7}{2n+7}\right)^{-1}<1$, е равен на:

а) 0 б) 2 в) 4 г) 5 д) 6

7. Редицата $\{a_n\}$ е аритметична прогресия с разлика $d=2$. Стойността на израза $a_6+a_2-a_3-a_4$ е:

а) 22 б) -2 в) 2 г) -22 д) 10

8. За геометричната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_1+a_5=57$ и $a_2+a_6=171$. Частното на прогресията е равно на:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	А	В	Б	Г	В	Б	Г	А	В	В	А

13	14	15	16	17
$AB=3+2\sqrt{5}$ $R=\frac{15}{4}$	$CC_1=12\ cm$ $S=48\ cm^2$	$x=6$	$f_{нмс}=1$ и $f_{нгс}=5$;	$x\in(-2,0]\cup[1,+\infty)$

18. За $k\neq -1$ трябва да са изпълнени едновременно $D=16k+25>0$ и $x_1+x_2=\frac{2k+5}{k+1}>0$ и $x_1x_2=\frac{k}{k+1}>0$. От $D=(2k+5)^2-4k(k+1)>0$ следва $k\in(-\frac{25}{16},+\infty)$, от $x_1+x_2=\frac{2k+5}{k+1}>0$ получаваме $k\in(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(-1,+\infty)$, а от $x_1x_2=\frac{k}{k+1}>0$ намираме $k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. Окончателно $k\in(0,+\infty)$.

19. Преобразуваме и получаваме $\begin{cases}(x+y)^2-3xy=7\\2xy-(x+y)=2\end{cases}$. Полагаме $\begin{cases}u=x+y\\v=xy\end{cases}$ и следва системата $\begin{cases}u^2-3v=7\\2v-u=2\end{cases}$ с решения $\begin{cases}u_1=4\\v_1=3\end{cases}$ и че AO_1LC е вписан в оръжност. Но точките A, L, C лежат на окръжност с център O и следователно и точката O_1 лежи на същата окръжност. Т.е дължината на OO_1 е равна на дължината на радиуса на описаната около ΔALC окръжност. Прилагаме синусова теорема за ΔALC и намираме $OO_1 = R_{ALC} = \dfrac{AC}{2\sin 108^\circ} = \dfrac{AC}{2\sin 72^\circ}$, а от ΔABC следва $\dfrac{AC}{2\sin 72^\circ} = 7$. Тогава $OO_1 = 7$.

Задача 8. Да означим за $x \in [0;1]$ $НГСf(x) = M$ и $НМСf(x) = m$. Тогава за да бъдат $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$ дължини на страни на триъгълник за всяко $x, y, z \in [0;1]$ трябва $2m > M$. Ще разгледаме три случая: *1)* $-\dfrac{a}{2} < 0$, т.е. $a > 0$. Тогава $m = f(0)$, $M = f(1)$ и от $2m > M$ следва $a < 0$, което означава, че в тоя случай няма решение. *2)* $-\dfrac{a}{2} < 1$, т.е. $a < -2$. Тогава $M = f(0)$, $m = f(1)$ и от $2m > M$ следва $a > -\dfrac{3}{2}$, което означава, че в тоя случай няма решение. *3)* $-\dfrac{a}{2} \in [0;1]$, т.е. $a \in [-2;0]$. Тогава $m = f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ и $M = \max\{f(0); f(1)\}$.

Следователно от $2m > M$ получаваме $2 - \dfrac{a^2}{2} > 1$ и $2 - \dfrac{a^2}{2} > 2 + a$. Т.е.

намираме, че търсените стойности са $a \in \left(-\sqrt{2}; 0\right)$.

а) $\dfrac{57}{29}$ б) $\dfrac{29}{57}$ в) 1 г) $\dfrac{1}{3}$ д) 3

9. Ако $a = \log_3 2$, то стойността на израза $\log_9 8 + 3^a - \log_3 6$ е равна на:

а) 1 б) $\dfrac{a+2}{2}$ в) $\dfrac{a-2}{2}$ г) $\dfrac{5a+6}{2}$ д) $a+2$

10. Вероятността на случайно събитие е числото:

а) $\lg 13$ б) $(0,4)^5$ в) $\sin 181$ г) $tg47^\circ$ д) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

11. От 20 члена на студентски съвет трябва да се изберат председател и секретар. Броят на различните възможности за избора им е равен на:

а) 190 б) 380 в) 100 г) 40 д) 10

12. Стойността на числения израз $\sqrt{3}tg13\ tg47\ + tg13\ + tg47$ е:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ г) $\sqrt{3}$ д) $\dfrac{1}{2}$

13. Ако $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, то:

а) $a = 1$ б) $a = \dfrac{1}{2}$ в) $a = \dfrac{2}{5}$ г) $a = 0$ д) $a = -1$

14. Ако $2^{3x-4} = 2.2^x$, то стойността на x е:

а) $\dfrac{5}{2}$ б) $\dfrac{5}{4}$ в) -1 г) $\dfrac{3}{2}$ д) 5

15. Множеството от допустимите стойности на x за функцията $f(x) = \log_x(3 - 2x - x^2)$ е:

а) $(-3;1)$ б) $(-3;0)$ в) $(0;1)$ г) $(1;\infty)$ д) $(0;\infty)$

16. Даден е ΔABC, в който с M е означен медицентърът му, а с P е означена средата на страната AB. Отношението на лицата на ΔBMP и ΔABC е:

а) $\dfrac{1}{9}$ б) $\dfrac{1}{8}$ в) $\dfrac{1}{7}$ г) $\dfrac{1}{6}$ д) $\dfrac{1}{5}$

17. В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AD \perp AB$) основите AB и CD имат дължини съответно 4 cm и 3 cm. Върху бедрото AD е построена т. M, която е равноотдалечена от върховете B и C. Ако $MC \perp MB$, то дължината на отсечката AD е равна на:

а) 3 cm б) 4 cm в) 5 cm г) 6 cm д) 7 cm

18. Осните сечения на прав кръгов конус имат прав ъгъл при върха му, а раиусът на основата му е 3 cm. Отношението на радиусите на описаната и вписаната спрямо конуса сфери е равно на:

а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ в) $1+\sqrt{2}$ г) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ д) $\sqrt{2}-1$

19. Около основата на правилна четириъгълна пирамида е описана окръжност с диаметър $6\sqrt{2}$. Околните стени сключват с основата ъгли с големина α. Обемът на пирамидата е:

а) $36tg\alpha$ б) $108tg\alpha$ в) $36cotg\alpha$ г) $36\cos\alpha$ д) $72tg\alpha$

20. Разликата на най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=-2x^2-x-1$ в затворения интервал [-1;2] е равна на:

а) 9 б) -9 в) $-\frac{79}{8}$ г) $-\frac{97}{8}$ д) $\frac{81}{8}$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се намери най-малкото цяло число, което удовлетворява неравенството $4^x+3.2^{x+1}-16>0$.

22. Да се реши неравенството $\log_2(x+1)+\log_2(3x-1)\le 2$.

23. Да се намерят всички решения на уравнението $4\cos 2x-2\sin 2x=4\cos^2 x$, които принадлежат на затворения интервал $\left[-\frac{3\pi}{4};0\right]$.

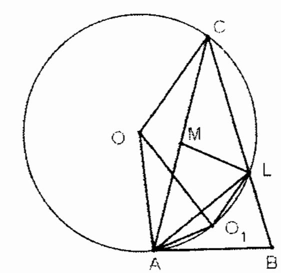
24. Да се реши уравнението $\sqrt{2x^2-x-6}=x-1$.

равностранните ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. Тогава $AP\perp BC$, $A_1P_1\perp B_1C_1$, $AO:OP=2:1$, $A_1O_1:O_1P_1=2:1$, OO_1 е височина на пирамидата и $\angle((ABCD);(BCC_1B_1))=\angle OPP_1=45^\circ$. Нека $P_1H\perp AP$, $H\in AP$. От свойствата на равностранен триъгълник намираме $OP=4\sqrt{3}$ и $O_1P_1=\sqrt{3}=OH$. От равнобедрения правоъгълен ΔHPP_1 получаваме $HP=HP_1=3\sqrt{3}$. Следователно $OO_1=3\sqrt{3}$. Така за обема на пирамидата намираме $V=\frac{3\sqrt{3}}{3}\left(144\sqrt{3}+9\sqrt{3}+36\sqrt{3}\right)=567$.

Задача 6. Преобразуваме дадената функция и получаваме $f(x)=2\cos^2 x.\sin x-2\cos^2 x-2\sin x=2\left(-\sin^3 x+\sin^2 x-1\right)$.

Полагаме $\sin x=u\in[-1;1]$ и разглеждаме $g(u)=-u^3+u^2-1$. От $g'(u)=-3u^2+2u$ и $g'(u)=0$ намираме $u_1=0$ и $u_2=\frac{2}{3}$. Но $g(0)=-1$ и $g(1)=-1$. Следователно най-малката стойност на $g(u)$ в интервала [-1;1] е $g(0)=g(1)=-1$. Тогава най-малката стойност на $f(x)$ е -2 и тя се достига за $x=k\pi$ и $x=\frac{\pi}{2}+2l\pi$, където k и l са цели числа.

Задача 7. Нека $M\in AC$ и $AM=MC$. От условието следва, че $LM\perp AC$. Тогава ΔALC е равнобедрен с $AL=LC$ и $\angle ACL=\angle CAL=\frac{1}{2}\angle BAC$. От $\angle BAC=\angle ABC$ следва $\angle BAC=\angle ABC=72^\circ$ и $\angle ACB=36^\circ$. От ΔABL получаваме $\angle AO_1L=2\angle ABL=144^\circ$. Тогава $\angle ACL+\angle AO_1L=180^\circ$, което означава,

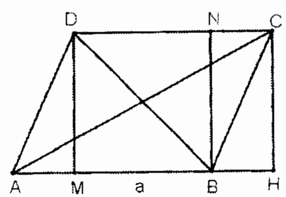


Задача 2. Използваме стандартните означения за триъгълник и получаваме $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, $R=\dfrac{c}{2}$. От $a+b+c=12$ и $r:R=2:5$ намираме $c=5$ и $a+b=7$. От Питагоровата теорема следва $a^2+b^2=25$. Тогава $(a+b)^2-2ab=25$ и намираме $ab=12$. Следователно $S=\dfrac{ab}{2}=6$.

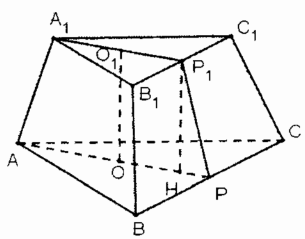
Задача 3. От $x^2-7x>0$ и $x-1>0$ и $x+1>0$ следва $x\in(1;3)\cup(4;+\infty)$. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-7x+12)\geq\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)$. От $\dfrac{1}{5}<1$ следва $x^2-7x+12\leq x^2-1$ с решение $x\geq\dfrac{13}{7}$. Решение на задачата е $x\in\left[\dfrac{13}{7};3\right)\cup(4;+\infty)$.

Задача 4. Да означим $MB=a$, $AC=x$, $BD=y$ и $AM=z$. От условието следва, че $x+y=10+2\sqrt{5}$ и $a^2=10$. Нека $CH\perp AB$, $H\in AB$. Следователно $MD=DN=NB=MB=CH=a$. От правоъгълния ΔMBD намираме $y=a\sqrt{2}=2\sqrt{5}$. Следователно $x=10$. От $\Delta AMD\cong BHC$ следва, че $BH=AM=z$. От правоъгълния ΔACH получаваме $x^2=(a+2z)^2+a^2$. Преобразуваме и намираме $a+2z=3\sqrt{10}$. Следователно $z=\sqrt{10}$ и $AB=2\sqrt{10}$. Така получаваме

$$S_{ABCD}=AB.DM=20.$$



Задача 5. Нека P и P_1 са среди съответно на BC и B_1C_1, а O и O_1 са центровете на



25. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x+\dfrac{1}{3}$ и да се установи видът им.

26. Колко служители има в даден отдел, ако начините за случаен избор на двама от тях са равни на медианата на данните 41, 29, 20, 20, 27, 60?

27. Осемте букви на думата УЧИТЕЛКИ са написани на отделни картончета и са поставени в кутия. По случаен начин се вади едно картонче. Каква е вероятността върху него да е написана буква от думата ФРИЗЬОР?

28. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4ax+a}$ е дефинирана за всяко реално число x.

29. В ромб $ABCD$ със страна a диагоналът AC пресича височината DM на ромба в т. P така, че $DP:PM=3:2$. Да се намери дължината на BD.

30. Височината на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има дължина $4b$. Основата и $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи $AB=6b$ и $CD=2b$. Ъгълът между диагонала AC_1 и равнината на основата и има големина φ. Да се намери обемът на призмата.

Технически университет - София
18 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Най-малкото от посочените числа е:

а) $4^{-2}.2^{-4}$ б) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ в) $\left(1600^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$ г) $\sqrt[3]{169}$ д) $15^2.2^{-3}$

2. Стойността на израза $\sqrt{\sqrt{256}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-4\right)^2}}$ е:

а) -2 б) $-\sqrt{2}$ в) 1 г) $\sqrt{2}$ д) $2\sqrt{2}$

3. Сборът на корените на уравнението $2x^2+10x-1=0$ е равен на:

а) -10 б) 6 в) 5 г) -5 д) -6

4. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+3}<0$ принадлежат на интервала:

а) $(-\infty;-4]$ б) $(-\infty;-2)$ в) $[-4;-3)$ г) $(2;3)$ д) $(3;4)$

5. Неравенството $\log_a \frac{1}{9} > \log_a \frac{1}{7}$ е вярно точно тогава, когато:

а) $a<0$ б) $0<a<1$ в) $1<a<2$ г) $a=2$ д) $a>2$

6. Ако $a=\log_2 3$ и $b=\log_2 10$, то изразът $\log_5 6$ е равен на:

а) $\dfrac{1+a}{1+b}$ б) $\dfrac{1+a}{b-1}$ в) $\dfrac{a-1}{b+1}$ г) $\dfrac{a-1}{b-1}$ д) $\dfrac{1+a}{1-b}$

7. Стойността на израза $\dfrac{2tg15^\circ}{1+tg^2 15^\circ}+\dfrac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$ е равна на:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ б) $1+\sqrt{3}$ в) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$ г) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$ д) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$

8. Ако $\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то стойността на израза $\sin\alpha+\sin^2 2\alpha$ е равна на:

а) 1 б) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ г) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ д) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}$

9. Общият член на числовата редица е $a_n=\sqrt{n^2-6n+9}+12$. Номерът n, за който a_n приема най-малка стойност, е равен на:

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

10. Стойността на параметъра m, при която графиката на функцията $f(x)=x^3+x-3m$ минава през точката $A(-1;7)$ е:

а) -3 б) -2 в) -1 г) 0 д) 1

11. Ученик има три различни химикалки, два модела калкулатори и четири различни сборника по математика. Броят на различните комплекти от две

CC_1. Използваме стандартните означения за ъглите и получаваме за $\Delta A_1B_1C_1$, че $\angle C_1A_1B_1=180^\circ-2\alpha$, $\angle A_1B_1C_1=180^\circ-2\beta$ и $\angle A_1C_1B_1=180^\circ-2\gamma$. За $\Delta A_1B_1C_1$ получаваме $A_1B_1^2=B_1C_1^2+A_1C_1^2$. От обратната на Питагоровата теорема следва, че $\angle B_1C_1A_1=90^\circ$, т.е. $180^\circ-2\gamma=90^\circ$. Следователно $\gamma=45^\circ$. От $\Delta ABC\approx\Delta A_1B_1C$ получаваме $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{CA_1}{AC}=\cos\gamma=\cos 45^\circ$, т.е. $AB=\dfrac{A_1B_1}{\cos 45^\circ}$. От синусова теорема за ΔABC следва $\dfrac{AB}{\sin 45^\circ}=2R$. Така получаваме

$$R=\frac{A_1B_1}{2\sin 45^\circ\cos 45^\circ}=\frac{A_1B_1}{\sin 90^\circ}=A_1B_1=17.$$

Задача 8. Решение на неравенството $|a|\le 2$ е $a\in[-2;2]$. За да са реални корените на уравнението $x^2+2ax+4a=0$ трябва $D=4a^2-16a\ge 0$, т.е $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. От $S=|x_1|+|x_2|\ge 0$ следва, че S и S^2 достигат своите най-големи стойности за една и съща стойност на a. Разглеждаме $S^2=|x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1x_2|$ и след преобразуване получаваме $S^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+8|a|=4(a^2-2a+2|a|)$. От $a\in[-2;0]$ следва $|a|=-a$. Тогава $S^2=4(a^2-4a)$. Следователно за $a\in[-2;0]$ S^2 е строго намаляваща. Тогава достига най-голяма стойност при $a=-2$ и тя е $S=4\sqrt{3}$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 21 юни 2015 г.

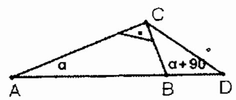
Задача 1. За $x\le 5$ от $(x-6)(x-4)\sqrt{5-x}=0$ следва, че решения на задачата са $x_1=4$ и $x_2=5$.

$a-b=16$. Следователно $AB=a=25$ и $CD=b=9$.

Задача 3. В $\begin{vmatrix} xy+x+y=19 \\ xy(x+y)=84 \end{vmatrix}$ полагаме $\begin{vmatrix} x+y=u \\ xy=v \end{vmatrix}$ и получаваме $\begin{vmatrix} u+v=19 \\ uv=84 \end{vmatrix}$. От $\begin{vmatrix} u=7 \\ v=12 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} u=12 \\ v=7 \end{vmatrix}$ следва $\begin{vmatrix} x+y=7 \\ xy=12 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} x+y=12 \\ xy=7 \end{vmatrix}$.

Решение на дадената система са $(3;4)$, $(4;3)$, $\left(6+\sqrt{29};6-\sqrt{29}\right)$, $\left(6-\sqrt{29};6+\sqrt{29}\right)$.

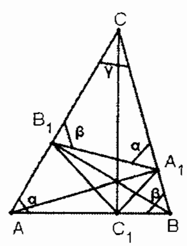
Задача 4. От правоъгълния ΔABC намираме $AB=25$ и $\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$. Но $\angle DBC=90^\circ+\alpha$ като външен за ΔABC. Използваме $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$, прилагаме косинусова теорема за ΔBDC, заместваме и получаваме



$CD^2=49+49+2.7.7.\dfrac{7}{25}=\dfrac{49.64}{25}$, т.е. $CD=\dfrac{56}{5}$.

Задача 5. Броят на всички възможни изходи при произволно хвърляне на трите зарчета е 6.6.6=216. От представянето 7=1+1+5=1+2+4=1+3+3=2+2+3 следва, че благоприятните изходи са 3+3!+3+3=15. Следователно търсената вероятност е $P=\dfrac{15}{6.6.6}=\dfrac{5}{72}$.

Задача 6. От условието следва $a>0$, $b>0$ и $2a^2=b^2+(a+b)^2$. Преобразуваме и получаваме $a^2-2ab-2b^2=0$. Разделяме на $b^2>0$, полагаме $\dfrac{a}{b}=x>0$ и получаваме квадратното уравнение $x^2-2x-2=0$ с корени $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. Следователно $\dfrac{a}{b}=1+\sqrt{3}$.



Задача 7. Нека е даден ΔABC с височини AA_1, BB_1 и

химикалки, един калкулатор и един сборник по математика, които той може да образува, е равен на:

а) 24 б) 18 в) 12 г) 8 д) 6

12. Кое от числата не може да бъде вероятност на случайно събитие?

а) $\dfrac{3!+4!}{12!}$ б) $\cos 120$ в) $\sin 390$ г) $\lg 10$ д) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

13. В равностранен триъгълник със страна $2\sqrt{3}$ cm е вписана окръжност, чийто радиус е:

а) 1 cm б) $\sqrt{3}$ cm в) 2 cm г) $2\sqrt{3}$ cm д) $3\sqrt{3}$ cm

14. Даден е правоъгълен ΔABC с катет $AC=b$ и $\angle ABC=\beta$. Радиусът на описаната около този триъгълник окръжност е равен на:

а) $b\cos\beta$ б) $b\sin\beta$ в) $\dfrac{b\sin\beta}{2}$ г) $\dfrac{b}{2\sin\beta}$ д) $b\,tg\,\beta$

15. Даден е равнобедрен трапец с височина 4 cm и основи 6 cm и 12 cm. Дължината на бедрото на трапеца е равна на:

а) 3 cm б) 4 cm в) $2\sqrt{3}$ cm г) $3\sqrt{3}$ cm д) 5 cm

16. През пресечната точка O на диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ е построена права, успоредна на основите, която пресича бедрата AD и BC съответно в точки P и Q. Дължините на отсечките PO и QO се отнасят така, както:

а) 3:2 б) 2:3 в) 2:1 г) 1:2 д) 1:1

17. Дадени са два куба. Ръб на първия куб е диагонал на стена на втория куб. Обемът на първия куб се отнася към обема на втория куб така, както:

а) 3:1 б) 2:1 в) $3\sqrt{3}:1$ г) **4:1** д) $2\sqrt{2}:1$

18. Лицето на основата на пирамида е 1 cm^2, а обемът и е повече от 10 cm^3. Възможната дължина на височина на пирамидата е:

а) 17 cm б) 29 cm в) 31 cm г) 15 cm д) 13 cm

19. В правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ всички ръбове имат дължина 1 cm. Лицето на сечението на призмата с равнината (AB_1C) е равно на:

а) $\frac{3}{2}\ cm^2$ б) $\frac{\sqrt{7}}{2}\ cm^2$ в) $\frac{\sqrt{7}}{4}\ cm^2$ г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm^2$ д) $\frac{\sqrt{3}}{4}\ cm^2$

20. Най-голямата стойност на функцията $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ е равна на:

а) 1 б) 2 в) $\sqrt{3}$ г) 4 д) $\sqrt{5}$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$.

22. Да се намери сборът на най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x)=-2x^2+8x+1$ в затворения интервал $[0;3]$.

23. Два пъти цената на един принтер е намалявана с по 10%. След второто намаление цената на този принтер е 275,40 лв. Да се намери първоначалната цена на принтера.

24. В кутия има 10 различни химикалки, 15 различни моливи с твърдост Н, 20 различни моливи с твърдост В и 30 различни моливи с твърдост НВ. Да се намери вероятността случайно избран предмет от кутията да е химикалка или молив с твърдост НВ.

25. Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко реално число x и приема положителни стойности за всяко $x\neq 7$. Ако $f(7)=0$, да се реши неравенството $(x-3)f(x)\leq 0$.

26. Да се намери броят на различните корени на уравнението $\frac{tgx+\sqrt{3}}{\sqrt{3}tgx-1}=1$, които принадлежат на отворения интервал $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$.

27. Сборът на три числа, които са последователни членове на растяща геометрична прогресия е равен на 186. Ако първите две числа се запазят, а от третото число се извади 96, то в този ред те образуват аритметична прогресия. Да се намерят трите числа.

28. Да се намери лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 10 cm и сбор от дължините на катетите 14 cm.

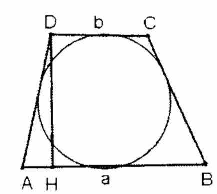
корени или да има само отрицателни корени. *2.1)* ако $D<0 \Leftrightarrow 4(1-k)(k-3)<0 \Leftrightarrow (k-1)(k-3)>0$. Т.е. $k\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. *2.2)* Ако $u_1\leq u_2<0$. Тогава $\begin{cases} D\geq 0 \\ -\frac{b}{a}<0 \\ \frac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4(1-k)(k-3)\geq 0 \\ -\frac{2(2k-3)}{k-2}<0 \\ \frac{5k-6}{k-2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\in[1;3] \\ k\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup(2;+\infty) \\ k\in\left(-\infty;\frac{6}{5}\right)\cup(2;+\infty) \end{cases}$$ с решение

$k\in\left[1;\frac{6}{5}\right)\cup(2;3]$. Решение на задачата е $k\in\left(-\infty;\frac{6}{5}\right)\cup[2;+\infty)$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 20 юни 2015 г.

Задача 1. Преобразуваме и получаваме последователно $A=\left(\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{3}{2}}+\log_{\sqrt{3}+1}\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+2=\frac{15}{4}$.

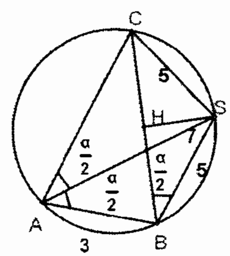


Задача 2. Нека трапецът е $ABCD$ с основи $AB=a$ и $CD=b$ и DH е височината на трапеца. От $ABCD$ равнобедрен, описан около окръжност с диаметър 15 следва, че $a+b=34$, $AH=\frac{a-b}{2}$ и $DH=15$. От правоъгълния ΔAHD намираме $AH=8$, т.е.

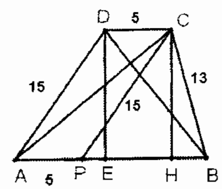
Следователно $a = 5$ и $d^2 = 16$, т.е. $d = \pm 4$. Но прогресията е растяща, т.е. търсените числа са *-3, 1, 5, 9, 13*.

Задача 5. Цифрата на единиците може да е $\{1;5;7\}$, т.е. три възможности. Но цифрите са различни. Следователно броят на числата с исканите свойства е *4.4.4=64*.

Задача 6. От $\angle BAS = \angle CAS$ следва $BS = CS = 5$. Прилагаме косинусова теорема за ΔABS и намираме $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{11}{14}$. Нека $SH \perp BC$, $H \in BC$. Тогава $BH = HC$. Използваме, че $\angle CBS = \angle CAS = \frac{\alpha}{2}$ и от правоъгълния ΔBHS и $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{BS}$ намираме, след заместване $BH = \frac{55}{14}$. Следователно $BC = \frac{55}{7}$.



Задача 7. Построяваме $CP \parallel AD$, $CH \perp AB$, $DE \perp AB$, където $P, H, E \in AB$. Тогава $APCD$ е успоредник и $AP = 5$ и $PC = 15$. Тогава $PB = 14$. Намираме лицето на ΔPBC по Хероновата формула и получаваме $S_{PBC} = 84$. От $S_{PBC} = \frac{PB.CH}{2}$ следва $CH = 12$. Следователно $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}.CH = 144$. От правоъгълния ΔBHC намираме $BH = 5$. Тогава $AH = 14$ и от правоъгълния ΔACH получаваме $AC = 2\sqrt{85}$. Аналогично от правоъгълните ΔAED и ΔACH намираме $AE = 9$, $BE = 10$ и $BD = 2\sqrt{61}$.



Задача 8. *1)* Ако $k = 2$ уравнението е $2x^2 + 4 = 0$ и следователно $k = 2$ е решение на задачата. *2)* Ако $k \neq 2$ полагаме $x^2 = u$ и следва квадратното уравнение $(k-2)u^2 + 2(2k-3)u + 5k - 6 = 0$. За да няма даденото уравнение реални корени трябва квадратното уравнение да няма реални

29. Даден е ΔABC с височина CH ($H \notin AB$) с дължина $\sqrt{15}$ cm и ъглополовяща CL ($L \in AB$), като отсечките AL и BL имат съответно дължини 2 cm и 4 cm. Да се намерят дължините на страните AC и BC, ако те са цели числа.

30. Височината на правилна четириъгълна пирамида е равна на h, а големината на ъгъла между две несъседни околни стени е 60. Да се намери радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

Технически университет - София
25 април 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $\dfrac{2^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{4-\sqrt{15}}$ е:

а) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ б) $\sqrt{2}$ в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ г) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ д) $\sqrt{15}$

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 8x + 10 = 0$, то стойността на израза $\dfrac{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1}{\sqrt{x_1 + x_2}}$ е:

а) $16\sqrt{10}$ б) 10 в) $20\sqrt{2}$ г) $40\sqrt{2}$ д) $4+\sqrt{6}$

3. Ако (x, y) е решение на системата $\begin{vmatrix} 2x^2 + 2y^2 = 1 \\ 4xy + 1 = 0 \end{vmatrix}$, то частното $\frac{x}{y}$ е равно на:

а) 1 б) $\frac{1}{4}$ в) $-\frac{1}{4}$ г) $\frac{1}{2}$ д) -1

4. Ако $a = \log_3 4$, то изразът $4^{\frac{1}{a}} \log_{27} 4$ е равен на:

а) a б) $3a$ в) $6a$ г) $9a$ д) 1

5. Петият член на аритметична прогресия с общ член a_n, за която $a_1 + a_9 = 12$, е:

а) 6　б) 12　в) 3　г) 2　д) 9

6. Най-голямото цяло решение на неравенството $|5 - x| + 3 > 2|5 - x|$ е:

а) 2　б) 4　в) 5　г) 7　д) 8

7. Корени на уравнението $2 + \sqrt{100 - x^2} = x$ са:

а) -6　б) -6 и 8　в) 8　г) 10　д) -8

8. Ако $a = \dfrac{\sqrt{3}\left(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ\right)}{\sin 25^\circ}$, то:

а) $a = 3$　б) $a = \sqrt{2}$　в) $a = 3\sqrt{2}$　г) $a = 3\sqrt{6}$　д) $a = \sqrt{6}$

9. Ако $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то изразът $5\cos\dfrac{\alpha}{2}$ е равен на:

а) $-\sqrt{5}$　б) $\sqrt{5}$　в) $\sqrt{2}$　г) $2\sqrt{5}$　д) $-2\sqrt{5}$

10. Не е вероятност на случайно събитие числото:

а) $tg27^\circ$　б) $\lg\dfrac{7}{5}$　в) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$　г) $\cos 138^\circ$　д) $\dfrac{3!+2!}{4!}$

11. Стойността на границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{2+x-3x^3}$ е:

а) $-\dfrac{1}{3}$　б) $\dfrac{1}{2}$　в) $-\dfrac{4}{3}$　г) 2　д) $\dfrac{1}{3}$

12. Стойността на реалния параметър p, при която графиката на функцията $f(x) = 5x^2 - 3x + 2p$ минава през точката $M(2;6)$ е:

а) 4　б) -4　в) 10　г) 40　д) -40

13. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ в затворения интервал [-3;0] е:

а) -4　б) -5　в) -8　г) -13　д) -20

14. Произведението на модата и медианата на данните 0, 2, 0, 1, 5, 2, 7, 2 е:

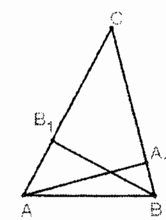
а) 6　б) 5　в) 4　г) 3　д) 2

$\dfrac{l_a}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$ и $\dfrac{l_b}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)}$. Следователно $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma\right) = \sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)$. Тогава $\dfrac{\alpha}{2}+\gamma = \dfrac{\beta}{2}+\gamma$, което е невъзможно, или $\dfrac{\alpha}{2}+\gamma = 180^\circ - \left(\dfrac{\beta}{2}+\gamma\right)$, откъдето намираме $\gamma = 60^\circ$, т.е. $\angle ACB = 60^\circ$.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 29 март 2015 г.

Задача 1. За $x \neq \{1;4\}$ даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $\dfrac{x-4}{-(x-4)(x-1)} + 1 \geq 0$. Преобразуваме и намираме $\dfrac{x-2}{x-1} \geq 0$. Следователно решение е

$$x \in (-\infty;1) \cup [2;4) \cup (4;+\infty).$$



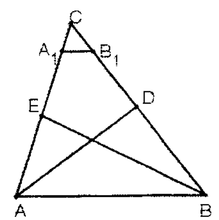
Задача 2. От правоъгълните ΔAA_1C и ΔBB_1C с $\angle ACB = 30^\circ$ намираме съответно $AC = 10\sqrt{3}$ и $BC = 16$. Прилагаме косинусова теорема за ΔBAC и получаваме $AB = 2\sqrt{19}$.

Задача 3. За $x \geq -\dfrac{4}{3}$ повдигаме двете страни на даденото уравнение на втора степен, преобразуваме и получаваме квадратното уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$ с корени $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$. Решение на даденото уравнение е $x = -1$.

Задача 4. Ако търсените числа са $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$, то $5a = 25$ и $(a-2d)^2 + (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 285$.

$MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а от правоъгълния ΔMPC следва $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Изразяваме лицето на ΔBCM по два начина и получаваме $BC.MP = CM.BH$. Заместваме и намираме $BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. От косинусова теорема за ΔDBH получаваме $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$. Следователно $\varphi = 120^\circ$.

Задача 7. От условието следва, че a и b са реални, $a^2 - 4b \ge 0$, $x_1 \ne -1$, $x_2 \ne -1$. *1)* нека $x_1 = x_2 = u$. Тогава $u = \frac{1}{1+u}$, т.е. $u^2 + u - 1 = 0$ с корени $u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \ne -1$. Използваме формулите на Виет и при $x_1 = x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ намираме $a = 1+\sqrt{5}$ и $b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. При $x_1 = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ следва $a = 1-\sqrt{5}$ и $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. *2)* Нека $x_1 \ne x_2$. Тогава $x_1 = \frac{1}{1+x_1}$ и $x_2 = \frac{1}{1+x_2}$. Следователно $x_1^2 + x_1 - 1 = 0$ и $x_2^2 + x_2 - 1 = 0$. От $x_1 \ne x_2$ следва, че x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + x - 1 = 0$. Т.е. $x^2 + x - 1 = x^2 + ax + b$, което означава, че $a = 1$ и $b = -1$. Ако $x_1 = \frac{1}{1+x_2}$ и $x_2 = \frac{1}{1+x_1}$, то следва, че $x_1 = x_2$.



Задача 8. Ще използваме стандартните означения. От $A_1B_1 \parallel AB$ и теоремата на Талес следва, че $\frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB}$. Тогава $\frac{b - l_a}{b} = \frac{a - l_b}{a}$, т.е. $\frac{l_a}{b} = \frac{l_b}{a}$. Прилагаме синусова теорема за ΔADC и ΔBCE и получаваме съответно

15. Медицентърът на равнобедрен ΔABC ($AC = BC$) лежи върху вписаната в триъгълника окръжност. Ако $AB = 2$ cm, то периметърът на триъгълника е равен на:

а) 24 cm б) 22 cm в) 20 cm г) 12 cm д) 6 cm

16. Ъгъл α срещу страната a на триъгълник със страни $a = 7$, $b = 5$ и $c = 8$ има големина:

а) 120° б) 90° в) 60° г) 45° д) 30°

17. Върху страните AB, BC, CD и DA на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AD = BC$) са взети съответно точки M, N, P и Q така, че $MNPQ$ е квадрат. За отсечката AQ е вярно, че:

а) $AQ = AM$ б) $AQ = PC$ в) $AQ = QM$ г) $AQ = QN$ д) $AQ = CN$

18. Изготвят се документи с различни серии от 3 различни букви от гръцката азбука, която има 24 букви. Броят на възможните документи, които могат да бъдат изготвени, е:

а) 80 б) 720 в) 2160 г) 2024 д) 12144

19. Стойностите на реалния параметър k, за които корените на квадратното уравнение $x^2 - (3k-2)x + k^2 = 0$ са положителни числа, принадлежат на интервала:

а) $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ б) $\left[\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right)$ в) $(0; 2]$ г) $[2; \infty)$ д) $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$

20. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDF$ е квадрат със страна 3 cm. Околният ръб DF е перпендикулярен на основата, а най-големият и околен ръб сключва с основата ъгъл 30°. Радиусът на описаната около пирамидата сфера е:

а) $\sqrt{6}$ cm б) $2\sqrt{6}$ cm в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm г) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm д) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ cm

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши неравенството $\sqrt{x} + 1 < x$.

22. Да се реши уравнението $3.4^x + 2.9^x - 5.6^x = 0$.

23. Да се намери най-малкият корен на уравнението $\log_{x-2} 9 - \log_3(x-2) - 1 = 0$.

24. При набиране на телефонен номер Иван установява, че е забравил последните три цифри на номера, но помни, че те са различни и ги набира по случаен начин. Каква е вероятността желаният номер да бъде набран от първи опит?

25. В партида има 18 изделия, от които 10 са първо качество и 8 са второ качество. По колко начина могат случайно да се вземат четири изделия така, че три да са първо качество и едно да е второ?

26. Числата $2, x-2, y-3$, взети в този ред образуват геометрична прогресия, а числата $1, x, y$, взети в посочения ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят числата x и y.

27. Даден е равностранен триъгълник със страна 11 cm. През точка $N \in AB$, успоредно на страните AC и BC са прекарани прави, пресичащи тези страни съответно в точки P и Q. Ако лицето на ΔPQN е $7\sqrt{3}\ cm^2$, да се намери дължината на отсечката PQ.

28. Да се намерят корените на уравнението $\cos 2x = 5\sin x - 3 = 0$, които принадлежат на затворения интервал $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

29. В триъгълна пирамида всички ръбове имат дължина 1 cm. Да се намери радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

30. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - (3a+2)x + a^2$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, при които функцията $f(x)$ има локален екстремум, равен на 0.

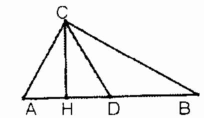
Технически университет - София
6 юли 2015 г.

ПЪРВА ЧАСТ: За всеки верен отговор по 1 точка

1. Стойността на израза $2^{-\frac{1}{4}}.32^{0.25} + \left(27^2\right)^{\frac{1}{6}} - \left(\sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$ е равна на:

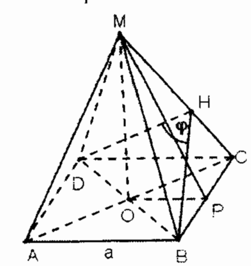
$x \in [4;5]$, т.е. $x \le 5$ следва $|x-5| = 5-x$ и намираме $(5-x)(6-x) = 0$. Т.е. $x_1 = 6$ не е решение, а $x_2 = 5$ е решение.

Задача 4. Нека $CH \perp AB$, $H \in AB$. От $CA = CD$ следва, че $AH = HD$. От условието намираме $AH = \frac{9}{25}AB$ и $BH = \frac{16}{25}AB$. От метрични зависимости в правоъгълен триъгълник получаваме $AC = \frac{3}{5}AB$ и $BC = \frac{4}{5}AB$. Но $AB + BC + AC = 12$. Следователно $AB = 5$, $AC = 3$ и $BC = 4$. Така намираме $S_{ABC} = 6$.



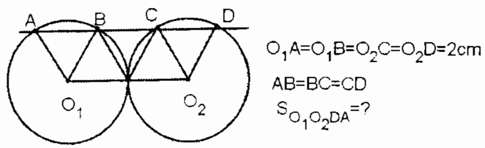
Задача 5. 1) За $x \ge 0$ даденото неравенство е еквивалентно на $3^x + 3^x \ge 2\sqrt{3}$, т.е. $x \ge 0,5$. 2) за $x < 0$ следва $3^x + 3^{-x} \ge 2\sqrt{3}$. Полагаме $3^x = u > 0$ и получаваме квадратното неравенство $u^2 - 2\sqrt{3}u + 1 \le 0$. Но $u < 1$. Тогава решение е $0 < u \le \sqrt{3} - \sqrt{2}$, т.е. $x \le \log_3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$. Следователно решение на даденото неравенство е $x \in \left(-\infty; \log_3\left(\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)\right] \cup [0,5; +\infty)$.

Задача 6. Нека пирамидата е $ABCDM$ с основа квадрата $ABCD$ и връх M. Да означим $AC \cap BD = O$, $AB = a$, $BP = PC$, $P \in BC$ и $BH \perp CM$, $H \in CM$. Тогава MO е височината на пирамидата. От $\Delta BCM \cong \Delta DCM$ получаваме $DH = BH$ и $DH \perp CM$, т.е. $\angle\left((DCM);(BCM)\right) = \angle BHD = \varphi$. От $MP \perp BC$ и $OP \perp BC$ следва, че $\angle\left((BCM);(ABCD)\right) = \angle OPM = 45^\circ$. Но $OP = \frac{a}{2}$ и от правоъгълния ΔPMO намираме



A, B, C и D такива, че $AB = BC = CD$ (вж. чертежа по-долу). Намерете лицето на четириъгълника O_1O_2DA.

А) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\ cm^2$ Б) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\ cm^2$ В) $5\sqrt{3}\ cm^2$ Г) $10\ cm^2$

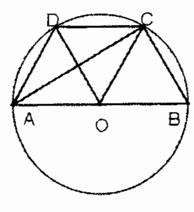


РЕШЕНИЯ

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 22 март 2015 г.

Задача 1. Използваме стандартните означения и от $5S_{10} = S_{20}$ следва $5a_1\dfrac{q^{10}-1}{q-1} = a_1\dfrac{q^{20}-1}{q-1}$. Преобразуваме и от условието, че числата са положителни и $q \neq 1$ намираме $q^5 = 2$. Следователно $q = \sqrt[5]{2}$.

Задача 2. Нека O е центърът на окръжността. От $ABCD$ вписан следва, че $AD = BC$ и $\angle ABC = \angle BAD$. От $AB = 4$ следва, че AB е диаметър и $\angle ACB = 90^\circ$. Следователно $\angle ABC = \angle BOC = \angle AOD = 60^\circ$. Тогава $\angle COD = 60^\circ$ и ΔAOD, ΔDOC и ΔCOB са равностранни със страна 2. Така намираме $S_{ABCD} = 3S_{AOD} = 3\sqrt{3}$.



Задача 3. Преобразуваме даденото уравнение във вида $2\sqrt{25 - x|x-10|} = -(x-5)(x-4)$. Следователно $x \in [4;5]$ за да са еквивалентни преобразуванията. Тогава $x < 10$ и $|x-10| = 10 - x$. Получаваме последователно $2\sqrt{x^2 - 10x + 25} = -(x-5)(x-4) \Leftrightarrow 2|x-5| = -(x-5)(x-4)$. От

а) 1   б) 2   в) 3   г) 4   д) 5

2. Ако 120% от a е равно на 40% от b, то $a : b$ е равно на:

а) $\dfrac{3}{4}$ б) $\dfrac{1}{4}$ в) $\dfrac{1}{3}$ г) $\dfrac{2}{3}$ д) $\dfrac{1}{2}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $12x^2 - 7x - 12 = 0$, то стойността на израза $x_1^2 + x_2^2$ е:

а) $-\dfrac{239}{144}$ б) $\dfrac{251}{144}$ в) $\dfrac{7}{4}$ г) $\dfrac{47}{144}$ д) $\dfrac{337}{144}$

4. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 + ax + 4$, където a е реален параметър. Най-малката цяла стойност на a, за която $f(x) > 0$ за всяка реална стойност на x, е равна на:

а) -3   б) -4   в) 3   г) 2   д) 0

5. Корените на уравнението $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+6}$ принадлежат на интервала:

а) (-6;-1]   б) [-6;3)   в) (-7;2]   г) [2;7]   д) [-1;2]

6. Броят на членовете на аритметичната прогресия -1, 5,..., 491 е равен на:

а) 38   б) 81   в) 82   г) 83   д) 103

7. За геометричната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$. Частното на прогресията е равно на:

а) $\dfrac{1}{2}$ б) 2   в) 3   г) $\dfrac{1}{3}$ д) 4

8. Стойността на израза $2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 125 + 6\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{5}$ е:

а) 2   б) 3   в) 4   г) 5   д) 6

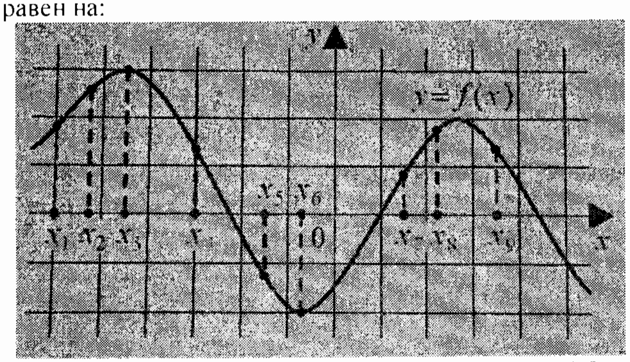
9. Ако $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin\alpha$ е равна на:

а) $\dfrac{4}{5}$ б) $-\dfrac{3}{4}$ в) $\dfrac{3}{5}$ г) $-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ д) $-\dfrac{4}{5}$

10. Ако (x, y) е решение на системата $\begin{cases} x^3 - y^3 = 72 \\ x - y = 6 \end{cases}$, то произведението xy е равно на:

а) -8 б) -7 в) -6 г) 8 д) 12

11. На графиката на функцията $y = f(x)$ са отбелязани девет точки $x_i, i = 1, \dots, 9$. Броят на точките x_i, в които производната на функцията е отрицателна, е равен на:



а) 4 б) 3 в) 2 г) 1 д) 0

12. В урна има 12 бели и 8 черни топки. По случаен начин се изтеглят три топки. Вероятността точно две от изтеглените топки да са бели е:

а) $\frac{8}{19}$ б) $\frac{44}{95}$ в) $\frac{3}{40}$ г) $\frac{3}{20}$ д) $\frac{44}{285}$

13. Ако $a = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 10x + 9}{x^2 + 3x + 2}$, то:

а) $a = \frac{9}{2}$ б) $a = 1$ в) $a = \frac{10}{3}$ г) $a = -8$ д) $a = 8$

14. Решение на уравнението $2^x \left(\frac{1}{2}\right)^{14-4x} = 64$ е числото:

а) $\frac{8}{5}$ б) $-\frac{8}{5}$ в) 4 г) -4 д) 2

19. В равнобедрен триъгълник с дължина на основата 3 cm и дължина на бедрото 5 cm ъглополовящите на ъглите при основата му пресичат бедрата в точки P и Q. Дължината на отсечката PQ е равна на:

А) 1 cm Б) $\frac{15}{8}$ cm В) 2 cm Г) $\frac{5}{2}$ cm

20. В ΔABC с дължини на страните $AB = 7$ cm, $BC = 3$ cm и $AC = 5$ cm да се намери дължината на медианата през върха C.

А) 2 cm Б) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ cm В) $\frac{5}{2}$ cm Г) 3 cm

21. Дължините на две от страните на остроъгълен триъгълник са равни на $\sqrt{10}$ cm и $\sqrt{13}$ cm. Намерете дължината на третата страна на триъгълника, ако е известно, че тя е равна на дължината на височината към нея.

А) 1 cm Б) 2 cm В) 3 cm Г) 4 cm

22. Върху страните AB и AD на успоредника $ABCD$ са избрани съответно точки P и Q такива, че $AP = \frac{2}{3}AB$ и $AQ = \frac{3}{7}AD$. Да се определи отношението от лицето на успоредника $ABCD$ и лицето на ΔAPQ:

а) $\frac{7}{2}$ б) 7 в) $\frac{15}{2}$ г) 8

23. В ромб с остър ъгъл 30° е вписана окръжност, а в тази окръжност е вписан квадрат. Отношението от лицето на ромба и лицето на този квадрат е равно на:

а) $\frac{3}{2}$ б) 2 в) 3 г) 4

24. Дължината на голямата основа на трапец е равна на *14 cm*. Намерете дължината на малката основа на трапеца, ако е известно, че разстоянието между средите на неговите диагонали е **2** *cm*.

а) 10 cm б) 16 cm в) 18 cm г) 20 cm

25. Две окръжности с центрове O_1 и O_2, които имат еднакви по дължина радиуси от 2 cm се допират външно. Права пресича оръжностите в точки

9. Всички възможни стойности на x, които са решения на уравнението $(x-2)\sqrt{x^2-6x+9} = x-3$ са:

А) $x=3$ Б) $x=2$ В) $x=1$ и $x=3$ Г) няма такива стойности

10. Решенията на неравенството $\sqrt{x+2} > 4-x$ са:

А) $x \in [4;+\infty)$ Б) $x \in [-2;+\infty)$ В) $x \in (2;4]$ Г) $x \in (2;+\infty)$

11. Решенията на неравенството $\sqrt{x^2+10x+25} \le 5$ са:

А) $x \in (-\infty;-10] \cup [0;+\infty)$ Б) $x \in [0;10]$

В) $x \in [-10;0]$ Г) няма решения

12. Сумата на третия и осмия член на аритметична прогресия е равна на 5. Сумата от първите десет члена на тази прогресия е равна на:

А) 25 Б) 30 В) 35 Г) 40

13. Всички решения на уравнението $4^x + 2^x - 6 = 0$ са:

А) няма решения Б) $x=1$ и $x=2$ В) $x=1$ Г) $x=\log_2 3$

14. Решенията на уравнението $\log_5(x+2)^2 = 2$ са:

А) $x=3$ Б) $x=3$ и $x=-7$ В) $x=1$ Г) $x=-7$

15. Решенията на неравенството $6^{x^2-x-2} < 1$ са:

А) $x \in (-1;3)$ Б) $x \in (1;2)$ В) $x \in (-2;1)$ Г) $x \in (-1;2)$

16. Решенията на неравенството $\log_{0.9} 11 \ge \log_{0.9}(2x-1)$ са всички реални числа x, за които:

А) $x \in (1;6]$ Б) $x \in (1;+\infty)$ В) $x < 1$ Г) $x \in [6;+\infty)$

17. Стойността на $\cos 75^\circ$ е равна на:

А) $-\frac{3}{4}$ Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ Г) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

18. Дължините на страните на правоъгълен триъгълник са последователни членове на аритметична прогресия с разлика *1 cm*. Дължината на хипотенузата на този триъгълник е равна на:

а) 3 *cm* б) 4 *cm* в) 5 *cm* г) 6 *cm*

15. Множеството от допустимите стойности на x за функцията $f(x) = \sqrt{4-\log_2(x-5)}$ е:

а) $(0;4)$ б) $[5;21]$ в) $(5;21]$ г) $(-\infty;4)$ д) $(4;\infty)$

16. Медицентърът на равнобедрен ΔABC ($AC = BC$) лежи върху вписаната в триъгълника окръжност, чийто радиус е равен на r. Страната AB има дължина:

а) $\sqrt{6}r$ б) $6r$ в) $2\sqrt{3}r$ г) $3\sqrt{2}r$ д) $2\sqrt{2}r$

17. В правоъгълен трапец с остър ъгъл 30° и лице 6 cm^2 е вписана окръжност. Диаметърът на тази окръжност е равен на:

а) 5 cm б) 4 cm в) 3 cm г) 2 cm д) 1 cm

18. В триъгълник две от страните са с дължини 5 cm и 8 cm, а ъгълът срещу третата страна има големина 60°. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е равен на:

а) 7 cm б) 3,5 cm в) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm г) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm д) $7\sqrt{3}$ cm

19. В правилна шестоъгълна пирамида с основен ръб a околната стена сключва с основата ъгъл с големина α. Обемът на пирамидата е:

а) $\frac{3a^3 \cot g\alpha}{4}$ б) $\frac{2a^3 \sin\alpha}{3}$ в) $\frac{4a^3 \cos\alpha}{3}$ г) $\frac{9a^3 tg\alpha}{4}$ д) $\frac{3a^3 tg\alpha}{4}$

20. Дадена е функцията $f(x) = ax^2 - (a-1)x + 2a + 1$, където a е реален параметър. Стойностите на a, при които уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена, принадлежат на интервала:

а) $[-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{7}\right]$ б) $(-\infty;-1]$ в) $\left[\frac{1}{7};\infty\right)$ г) $\left[-1;\frac{1}{7}\right]$ д) $\left[0;\frac{1}{7}\right]$

ВТОРА ЧАСТ: Запишете само отговора. За всеки получен и обоснован верен отговор по 2 точки.

21. Да се реши уравнението $\log_3(x^2-4) = 2\log_9(2x-1)$.

22. Да се намери най-голямата цяла стойност на x, за която е изпълнено е неравенството $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+x} > \left(\frac{1}{49}\right)^{16-x}$.

23. Да се реши неравенството $\frac{x^2(x+1)}{(x^2-x+1)(2-x)} \geq 0$.

24. Да се намерят всички корени на уравнението $\frac{1}{\cos^2 x} + 2\sin^2 x - 3 = 0$, които принадлежат на затворения интервал $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

25. Два различни правилни шестстенни зара се хвърлят еднократно. Да се намери вероятността сборът от точките върху двата зара да е равен на десет или на дванадесет.

26. Върху окръжност са взети 10 точки. Да се намери максималният брой на различните хорди с краища в тези точки.

27. Даден е правоъгълен ΔABC с катети $AC = 2$ cm и $BC = 1$ cm. Хипотенузата му служи за катет на равнобедрен правоъгълен ΔABD ($AB \perp BD$) като точките C и D са от различни страни на AB. Ако BM е медиана в ΔABD, намерете дължината на отсечката CM.

28. Катетите на правоъгълен триъгълник сключват с равнина α ъгли с големина β и γ, а хипотенузата му лежи в равнината α. Да се определи синусът на ъгъла φ ($\varphi \neq 90^\circ$) между равнината α и равнината на триъгълника.

29. Дадена е функцията $f(x) = (k-1)x^4 - kx^2 + k + 1$, където k е реален параметър. Да се намери при коя стойност на k графиката на $f(x)$ минава през точката $M(1;-1)$.

30. Даден е тричленът $f(x) = ax^2 + bx + 8$, където a и b са реални параметри. Определете стойностите на a и b така, че при $x = -1$ тричленът $f(x)$ да има екстремум, равен на 2.

Технически университет – Варна
25 юни 2015 г.

1. Кое от посочените числа е равно на числото $\frac{6}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$?

А) $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ Б) 6 В) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ Г) $3(\sqrt{11}-\sqrt{5})$

2. Стойността на израза $\left(\frac{81.9^{-9}}{-9^{-8}}\right)^{-2} - \frac{1}{81}$ е равна на:

А) 9 Б) $\frac{1}{9}$ В) 0 Г) 1

3. Ако $T = \left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}\right)$, то:

А) $T = 0$ Б) $T = 5$ В) $T = 7$ Г) $T = -2$

4. Решенията на неравенството $\frac{25-10x+x^2}{x^2-7x+12} \leq 0$ са:

А) $x \in (-\infty;3) \cup (4;+\infty)$ Б) $x \in (3;4)$
В) $x \in (3;4) \cup \{5\}$ Г) $x \in (-\infty;3)$

5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - x - 1 = 0$, то стойността на израза $x_1(1+x_2)+x_2$ е:

А) -1 Б) 0 В) 1 Г) 2

6. Най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 - 5x + 4$ в интервала *[3;8]* е равна на:

А) -2 Б) 0 В) 2 Г) друг отговор

7. Решенията на уравнението $|x^2 - 25| = (5-x)(5+x)$ са:

А) $x \in (-\infty;-5]$ Б) $x \in [5;+\infty;)$
В) $x \in [-5;5]$ Г) $x \in (-\infty;-5] \cup [5;+\infty)$

8. Всички реални решения на уравнението $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ са:

А) $x = \pm 3$ Б) $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$ В) $x = 3$ Г) $x = -3$

ДУОПОЛ И ОЛИГОПОЛ НА БЕРТРАН

Петко Казанджиев, 10 клас, ПМГ – В. Търново

Цеца Байчев, старши учител по математика, ПМГ – В. Търново

Кинка Кирилова-Лупанова, главен учител по информатика, ПМГ – В. Търново

Джон Форбс Неш-младши е американски математик, който работи в областта на диференциалната геометрия и теорията на игрите. Роден е на 13 юни 1928 г. в Блуфилд, Западна Вирджиния. В своята автобиография Неш отбелязва, че това, което провокира интереса му към математиката, е книгата на Ерик Темпъл Бел, Men of Mathematics и по-конкретно едно есе, посветено на Пиер дьо Ферма. Още докато е ученик в горните класове, Неш посещава лекции по математика в Блуфийлд Колидж. По-късно следва в университета Карнеги Мелън в Питсбърг, Пенсилвания, където първо учи инженерна химия, а после химия преди да се ориентира към математиката. През 1948 г., следвайки съвета на Джон Синдж, завършва едновременно и бакалавърска степен, и магистратура по математика, след което получава стипендия от Принстън. Приет е и в Харвард, но продължава своята работа в Принстън. Защитава докторат през 1950 г. с дисертация върху некооперативни игри. Дисертацията му, писана под ръководството на Албърт Тъкър, съдържа дефиницията и свойствата на понятието, което впоследствие става известно като „равновесие на Неш“. Известна е и теоремата му (Nash embedding theorem), която показва, че всяко абстрактно Риманово многообразие може да бъде изометрично реализирано като под-многообразие на Евклидовото пространство. Неш има също приноси и към теорията на нелинейните параболични частни диференциални уравнения. През 1951 г. Неш заминава за Масачузетския технологичен институт като преподавател по математика. Там среща Алиша Лопес-Харисън де Ларде, студентка по физика от Салвадор, с която сключва брак през февруари 1957 г. и с която имат две деца. През 1959 г., Алиша води Неш в болница за психични отклонения, където му е поставена диагноза „параноидна шизофрения“. В края на 1980-те, Неш започва редовно да се свързва с други математици, които осъзнават, че работата му има стойност. Те сформират група, която се свързва с Комитета по Нобелови награди към Банката на Швеция, за да свидетелства, че Неш действително заслужава да бъде награден. През 1994 г., в резултат на работата му в Принстън върху теория на игрите, той получава Нобелова награда за икономика. На 23 май 2015 г., връщайки се от церемонията, на която Джон Неш е получил Абелова награда, той загива с жена си Алиша в автомобилна катастрофа в Ню Джърси. Историята на Неш е пресъздадена в отличения с награда “Оскар” филм “Красив ум”.

В настоящата статията се представят обобщени случаи на задачи, свързани с Дуопол и олигопол на Бертран, които се използват в икономиката от различни фирми при определяне на финансовата им стратегия. Разглежданите задачи представляват различни математически модели на икономически процеси и явления от практиката.

Използват се следните дефиниции.

Дефиниция 1: Олигопол – пазарна структура, при която производството и продажбите в някой сектор на пазара се извършват от n на брой конкуриращи се фирми. При такава ситуация определените продажбени и производствени цени на една от фирмите силно влияят на цените и на другите фирми.

Дефиниция 2: Монопол – пазарна структура със строго определен единствен производител и продавач на продукция без близки заместители. Монополът е пълно отсъствие на конкуренция.

Дефиниция 3: Дуопол – специфичен вид олигопол, в който само двама производители съществуват в един пазар. На практика тази дефиниция се използва, когато две фирми имат доминиращ контрол над даден пазар.

Дефиниция 4: Игра – тройка от краен брой играчи, стратегии и печалба(N, S, U), където

$N = \{1, ..., n\}$ е краен брой играчи.

$S = \{S_1, ..., S_n\}$ е броят стратегии.

$U = \{U_1, ..., U_n\}$, $U_i : S \to R$ е печалбата.

Дефиниция 5: Best Response функция (BR) – за всеки играч съществува Best Response функция на този играч, която описва най-добрата стратегия на играча при фиксирани стратегии на останалите играчи и е такава, че е изпълнено $BR_i : \{S_1, S_2, ..., \hat{S}_i, ..., S_n\} \to P(S_i)$. За всяко $S_i \in BR_i(S_1, S_2, ..., \hat{S}_i, ..., S_n)$ и $\overline{S}_i \in S_i$ е в сила $U_i(S_i, S_1, S_2, ..., \hat{S}_i, ..., S_n) \le U_i(\overline{S}_i, S_1, S_2, ..., \hat{S}_i, ..., S_n)$.

Дефиниция 6: Равновесие на Неш – комбинация от стратегии за всички играчи $S_1, S_2, ..., S_n$, така че $S_i \in BR_i(S_1, S_2, ..., \hat{S}_i, ..., S_n)$ за всяко i.

Дефиниция 7: Безкрайно-повтаряща се игра – за всяка крайна игра съществува безкрайно-повтаряща се игра, в която крайната игра се повтаря всеки ден, а печалбата на играчите е сума от печалбите от всеки ден, като тази в ден n се обезценява с фактор δ^n темп на инфлация) за $\delta \in (0,1)$.

Дефиниция 8: История за първите n дни на безкрайно-повтаряща се игра – функция $H_n : \{1, 2, ..., n\} \to \{S_1, S_2, ..., S_n\}$, където S_i е множеството от стратегии на играч i за етапната игра.

Дефиниция 9: Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE) – Равновесие на Неш, което, ограничено до под-игра(игра в играта), също е равновесие на Неш.

Дефиниция 10: Непрекъсната печалба - за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова n, че за всеки играч i и стратегии s_i и $\overline{s}_i$, за които $s_i = \overline{s}_i$ за първите n дни от играта, то $\left|U_i(S_1, ..., \hat{S}_i, ..., S_n) - U_i(S_1, ..., \hat{S}_i, ..., S_n)\right| < \varepsilon$.

Дефиниция 11: Single Deviation Principle (SDP) – ако играта е с непрекъснати печалби, то SDP проверява дали множество от стратегии е равновесие на Неш. Дадена стратегия участва в Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE), ако за всяка история за първите $n-1$ дни, допускайки, че от ден $n+1$ нататък играчите ще следват стратегията без да се отклоняват, в ден n играч i няма печелившо отклонение.

За приложение на дуопол на Бертран се разглеждат следните задачи.

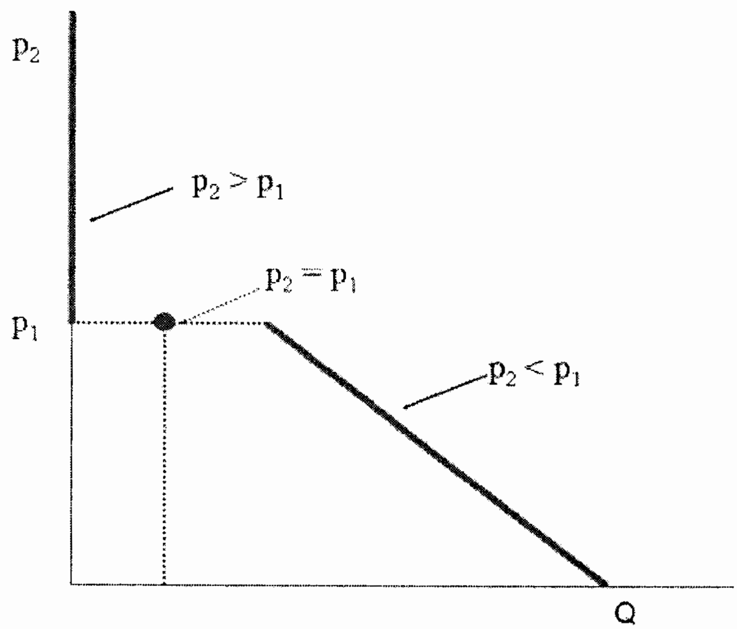
1. Разглежда се игра, в която фирми A и B продават една и съща стока. Те избират продажните цени $p_1 \in [0,1]$ и $p_2 \in [0,1]$. Продава се стоката с по-ниска цена. Фирмите произвеждат според търсенето. Производствената цена на стоката е $c \in [0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_1, p_2)$, $Q: p_1, p_2 \to [0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Количеството на продажбите на фирма A е

$$Q(p_1,p_2)=\begin{cases}1-p_1, p_1<p_2\\ \dfrac{1-p_1}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Количеството на продажбите на фирма B (Фиг. 1) е

$$Q(p_2,p_1)=\begin{cases}1-p_2, p_2<p_1\\ \dfrac{1-p_2}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$



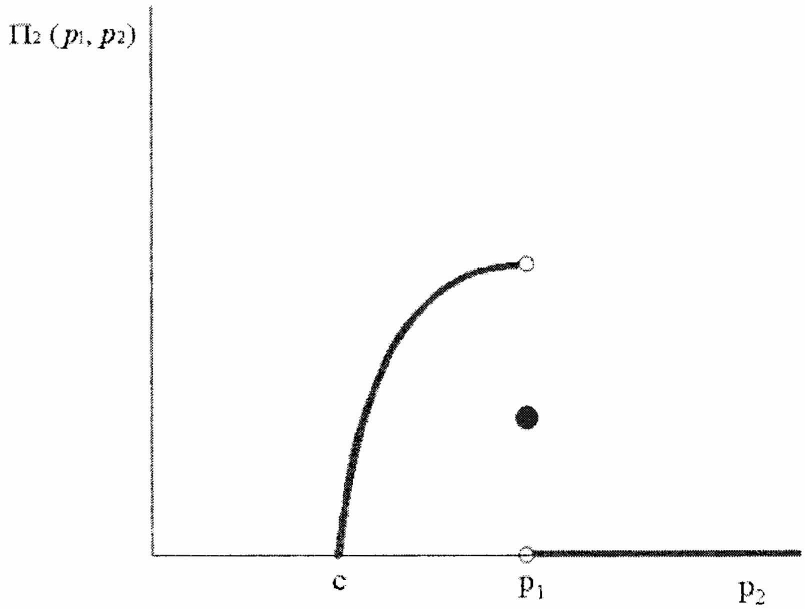
Фиг. 1

Печалбата на фирма A е

$$\Pi(p_1,p_2)=(p_1-c)Q(p_1,p_2)=\begin{cases}(1-p_1)(p_1-c), p_1<p_2\\ \dfrac{(1-p_1)(p_1-c)}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Печалбата на фирма B (Фиг. 2) е

$$\Pi(p_2, p_1) = (p_2 - c)Q(p_2, p_1) = \begin{cases} (1-p_2)(p_2-c), p_2 < p_1 \\ \dfrac{(1-p_2)(p_2-c)}{2}, p_2 = p_1 \\ 0, p_2 > p_1 \end{cases}.$$



Фиг. 2

Намира се равновесие на Неш на играта, което е $p_1 = p_2 = c_2$. В този случай и двете фирми нямат печалба, защото си разделят пазара, но продават на производствената си цена. Ако играч се отклони нагоре, няма печалба, а ако се отклони надолу, взима целия пазар, но продава на загуба. Следователно, няма стратегия, според която някоя от фирмите да има печелившо отклонение. Стигаме до равновесие на Неш на играта.

Не съществува друго равновесие на Неш, защото след разглеждане на следните три основни случая не се намира такова:

- $p_1 > p_2 > c$.

  В този случай фирма А няма печалба, защото продава стоката си на по-висока цена от фирма В. Ако фирма А реши да продава на една и съща продажна цена с В, те си разделят пазара, което е и печелившо отклонение за фирма А. Следователно няма равновесие на Неш. Аналогично е и за $p_2 > p_1 > c$.

- $p_1 = p_2 > c$.

  В този случай фирмите си разделят пазара и всяка получава по $\dfrac{Q(p_1, p_2)(p_i - c)}{2}$. Ако някоя от фирмите намали продажната цена с някакво много малко число ε, то тя ще получи целия пазар. Следователно няма равновесие на Неш.

- $p_1 > p_2 = c$

  В този случай и двете фирми нямат печалба, защото фирма В получава целия пазар, но продава на производствената си цена. Ако фирма В покачи продажната си цена малко над производствената, но тя остане по-малка от тази на фирма А, то тя ще е на печалба, следователно няма равновесие на Неш. Аналогично е и за $p_2 > p_1 = c$.

2. Разглежда се игра, в която фирми А и В продават една и съща стока. Те избират продажните цени $p_1 \in [0,1]$ и $p_2 \in [0,1]$. Продава се стоката с по-ниска цена. Фирмите произвеждат според търсенето. Те избират производствените цени $c_1 \in [0,1]$ и $c_2 \in [0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_1, p_2)$, $Q: p_1, p_2 \to [0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Количеството на продажбите на фирма А е

$$Q(p_1,p_2)=\begin{cases}1-p_1, p_1<p_2\\ \dfrac{1-p_1}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Количеството на продажбите на фирма В е

$$Q(p_2,p_1)=\begin{cases}1-p_2, p_2<p_1\\ \dfrac{1-p_2}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$

Печалбата на фирма А е

$$\Pi(p_1,p_2)=(p_1-c_1)Q(p_1,p_2)=\begin{cases}(1-p_1)(p_1-c_1), p_1<p_2\\ \dfrac{(1-p_1)(p_1-c_1)}{2}, p_1=p_2\\ 0, p_1>p_2\end{cases}.$$

Печалбата на фирма В е

$$\Pi(p_2,p_1)=(p_2-c_2)Q(p_2,p_1)=\begin{cases}(1-p_2)(p_2-c_2), p_2<p_1\\ \dfrac{(1-p_2)(p_2-c_2)}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$

Без ограничение на общността се счита, че $c_2 > c_1$. Фирма В (фирмата с по-висока производствена цена) не участва в равновесия на Неш, когато има печалба, по-голяма от 0, защото това може да се случи само ако $p_1 \geq p_2 > c_2$. Но фирма А винаги може да си позволи да продава на цена $p_2 - \varepsilon$ и така да вземе целия пазар и да продава на печалба. Следователно няма печелившо отклонение и в този случай няма равновесие на Неш. За да продава фирма В на печалба, равна на 0, има два случая:

1) $p_1 = p_2 = c_2$.

В този случай фирма А може отново да се отклони и да продава на цена $p_2 - \varepsilon$ и така да вземе целия пазар и да продава на печалба. Следователно няма равновесие на Неш.

2) $p_1 < p_2$.

Разглеждат се ограничения за стойностите на p_1, след което се намира равновесие на Неш:

- $p_1 \ge c_1$, защото в противен случай фирма А продава на загуба и има печелившо отклонение.
- $p_1 \le c_2$, защото иначе фирма В има печелившо отклонение да продава на цена $\overline{p}_2 \in (c_2, p_1)$ и да е на печалба.
- $p_1 \neq c_1$, защото $\overline{p}_1 = c_1 + \varepsilon < c_2$ е печелившо отклонение и води до положителна печалба за фирма А.

Ако $U_2(p_1, p_2)$ достига max в (c_1, c_2), то той ще е в точка $c_1 < \dfrac{c_1+1}{2} < c_2$, защото $U_1(p_1, p_2) = (1-p_1)(p_1-c_1) = p_1 - c_1 - p_1^2 + p_1c_1$. Максимум се достига, когато производната на тази функция спрямо p_1 е равна на 0, т.е $1 - 2p_1 + c_1 = 0$. Следователно равновесие на Неш се постига за $p_1 = \dfrac{c_1+1}{2}$ и за $p_1 < p_2$.

Ако max не се достига, то $p_1 = c_2$ и $p_2 > c_2$ е равновесие на Неш.

3. Разглежда се безкрайно-повтаряща се игра, с етапна игра, както в задача 1., в която фирми А и В продават една и съща стока. За кои стойности на $\delta \in (0,1)$ стратегията да продават на монополна цена, докато някой не се отклони и след това да продават на цена равна на производствената, е равновесие на Неш?

Решение: Количеството на продажбите на фирма А за един ден игра е

$$Q(p_1, p_2) = \begin{cases} 1 - p_1, p_1 < p_2 \\ \dfrac{1-p_1}{2}, p_1 = p_2 \\ 0, p_1 > p_2 \end{cases}.$$

Количеството на продажбите на фирма В за един ден игра е

$$Q(p_2, p_1) = \begin{cases} 1 - p_2, p_2 < p_1 \\ \dfrac{1-p_2}{2}, p_2 = p_1 \\ 0, p_2 > p_1 \end{cases}.$$

Печалбата на фирма А за един ден игра е

$$\Pi(p_1, p_2) = (p_1 - c)Q(p_1, p_2) = \begin{cases} (1-p_1)(p_1-c), p_1 < p_2 \\ \dfrac{(1-p_1)(p_1-c)}{2}, p_1 = p_2 \\ 0, p_1 > p_2 \end{cases}.$$

Печалбата на фирма В за един ден игра е

$$\Pi(p_2,p_1)=(p_2-c)Q(p_2,p_1)=\begin{cases}(1-p_2)(p_2-c), p_2<p_1\\ \dfrac{(1-p_2)(p_2-c)}{2}, p_2=p_1\\ 0, p_2>p_1\end{cases}.$$

Дефинира се монополна цена $p^M>0$.

Дефинира се монополна печалба $\Pi^M>0$ – максималната възможна печалба на дадена фирма

$$\Pi^M=\max(p-c)Q(p).$$

Разглежда се стратегия, в която и двете фирми продават на монополна цена. Разглежда се Single Deviation Principle за фиксиран ден n. Разглеждат се всички възможни истории за първите n-1 дни и за всички дни от n нататък. За ден n се фиксират стратегиите на всички играчи освен един и ако този играч няма стимул да се отклони, тогава има Subgame Perfect Nash Equilibrium. Разглеждат се две възможни ситуации:

1) Никой играч да не се отклони от стратегията за първите n-1 дни.

- Следва се стратегията без отклонение през цялото време. Получава се печалба за една от фирмите

$$\frac{\Pi^M}{2}+\delta^1\frac{\Pi^M}{2}+\delta^2\frac{\Pi^M}{2}+\delta^3\frac{\Pi^M}{2}+\ldots=\frac{\frac{\Pi^M}{2}}{1-\delta}.$$

- Играчът може да се отклони, ако намали цената си за един ход под тази на другия и вземе целия пазар. Но от следващия ден фирмите продават на производствената си цена и нямат печалба. Тогава ще има печалба, равна на Π^M.

За да бъде този случай Subgame Perfect Nash Equilibrium – двете фирми да имат възможно най-голяма печалба, то трябва отклонението да бъде непечелившо, т.е. трябва да е изпълнено

$$\Pi^M\le\frac{\frac{\Pi^M}{2}}{1-\delta}.$$

Следователно

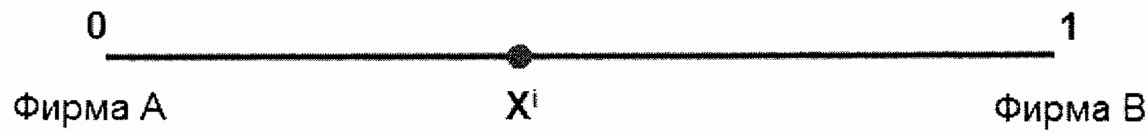
$$\delta\ge\frac{1}{2}.$$

2) Някой играч да се отклони още при първия ход.

Но тук няма печелившо отклонение, защото ако една от фирмите направи продажната си цена по-висока от производствената, другата фирма взима пазара и няма печалба. Ако направи продажната си цена по-ниска от производствената си, то тогава тя ще продава на загуба.

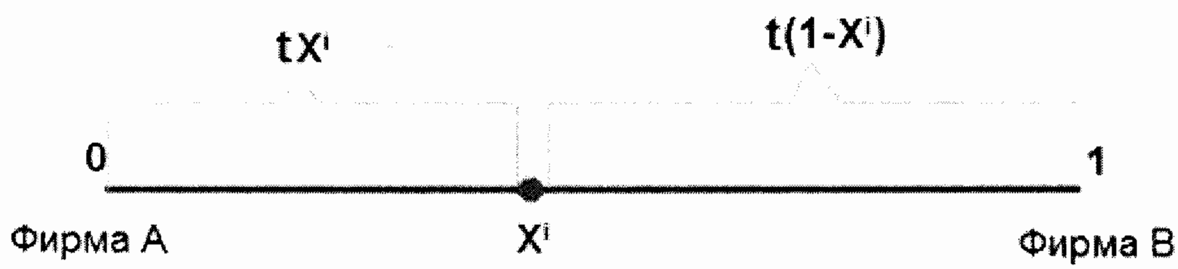
4. Разглежда се игра, в която фирми А и В продават сходни, но различни стоки. Те избират продажните цени $p_1\in[0,1]$ и $p_2\in[0,1]$. Фирмите произвеждат според търсенето. Производствената цена на стоките е $c\in[0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_1,p_2)$, $Q:p_1,p_2\to[0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Задачата се разглежда като пазар, разположен на улица(отсечка), на която в двата края има магазин съответно на фирма А и фирма В. Нека фирма А има адрес $x=0$, а фирма B има адрес $x=1$. Всяка от двете фирми има константна производствена цена c. Всяко разположение на една точка от тази отсечка се разглежда спрямо магазина на левия й край. Ако купувач предпочита магазина на разстояние i от него, то неговото местоположение на отсечката се означава с x^i (Фиг. 3).



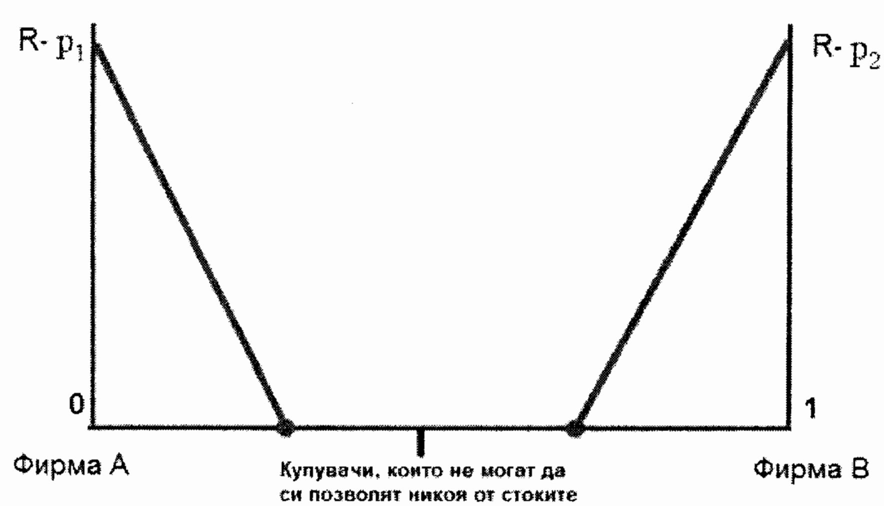
Фиг 3.

Следователно, ако купувачът избере фирма А($x=0$), то той ще има транспортен разход, равен на tx^i, а ако избере фирма В($x=1$) - $t\left(1-x^i\right)$, където t е константа по отношение на транспортните разходи (Фиг. 4).



Фиг 4.

Купувачите имат една и съща допустима максимална цена R за закупуването, на която и да е от стоките. Когато тази цена R е достатъчно висока, фирмите ще имат стимул да продават и да имат печалба. Ако R не е достатъчно висока, то има вероятност от незадоволяване на пазара, защото продажните цени на стоките може да са по-големи от R (Фиг. 5).



Фиг 5.

Разглежда се купувач x^{m} с такава максимална R, че той е безразличен по отношение на това от коя фирма ще закупи нужната стока и следователно остатъкът от парите след закупуване на стоката от двете фирми ще бъде равен на

$$R - p_1 - tx^m = R - p_2 - t\left(1 - x^m\right).$$

След преобразувания се изразява x^m като функция, зависеща от p_1 и p_2

$$x^m\left(p_1, p_2\right) = \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}.$$

За всякакви продажни цени p_1 и p_2 купувачите, намиращи се от лявата страна на x^m, купуват от фирма А, другите от фирма В. Тоест x^m част от хората купуват от фирма А, а $1 - x^m$ част от хората купуват от фирма В. Ако търсенето на целия пазар е равно на N, то количеството продажби на фирма А е

$$Q^A\left(p_1, p_2\right) = x^m\left(p_1, p_2\right)N = \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N.$$

Количеството продажби на фирма В е

$$Q^B\left(p_1, p_2\right) = \left[1 - x^m\left(p_1, p_2\right)\right]N = \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N.$$

Следователно печалбата, реализирана от фирма А, е

$$\Pi^A\left(p_1, p_2\right) = Q^A\left(p_1 - c\right) = N\left(p_1 - c\right)\left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right].$$

Печалбата, реализирана от фирма В, е

$$\Pi^B\left(p_2, p_1\right) = Q^B\left(p_2 - c\right) = N\left(p_2 - c\right)\left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right].$$

Ще се намери Best Response функцията за фирма А чрез диференциране на функцията за печалба на фирма А спрямо p_1. От

$$\Pi^A\left(p_1, p_2\right) = Q^A\left(p_1 - c\right) = N\left(p_1 - c\right)\left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]$$

следва

$$\frac{\delta\Pi^A\left(p_1, p_2\right)}{dp_1} = N\left(p_1 - c\right)\left(\frac{-1}{2t}\right) + \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N.$$

Тогава

$$N\left(p_1 - c\right)\left(\frac{-1}{2t}\right) + \left[\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right]N = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-Np_1}{2t}\right) - \left(\frac{-Np_1}{2t}\right) = N\left(\frac{-c - p_2 - t}{2t}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{2p_1}{2t} = \left(\frac{-c - p_2 - t}{2t}\right)$$

$$\Rightarrow p_1^* = \left(\frac{p_2 + c + t}{2}\right).$$

Аналогично Best Response функцията за фирма В е

$$p_2^* = \left(\frac{p_1 + c + t}{2}\right).$$

По определение равновесие на Неш се получава, когато p_1^* е най-добрата стратегия за фирма А спрямо продажната цена p_2, а p_2^* е най-добрата стратегия за фирма В спрямо продажната цена p_1. Следователно може да се замени p_1^* с p_1 и p_2^* с p_2 в изведените по-горе Best Response функции. Получава се

$$p_2^* = \left(\frac{p_1+c+t}{2}\right) = \left(\frac{\frac{p_2+c+t}{2}+c+t}{2}\right) = \frac{p_2}{4}+\frac{c}{4}+\frac{t}{4}+\frac{c}{2}+\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}p_2^* = \frac{3}{4}c+\frac{3}{4}t$$

$$\Rightarrow p_2^* = c+t\,.$$

Замества се в p_1^* и се получава

$$p_1^* = \left(\frac{p_2+c+t}{2}\right) = \frac{c+t+c+t}{2} = \frac{2(c+t)}{2}$$

$$\Rightarrow p_1^* = c+t\,.$$

Следователно равновесие на Неш има при $p_1 = c+t$ и $p_2 = c+t$. След заместване се получава $x^m = \frac{1}{2}$ и печалбата за всяка фирма е $\Pi = \frac{Nt}{2}$.

За приложение на олигопол на Бертран се разглежда обобщение на една от задачите, разгледани по-горе, за n на брой фирми.

1. Разглежда се игра, в която N фирми продават една и съща стока. Те си избират продажни цени $P = p_1, p_2, ..., p_n \in [0,1]$. Продава се стоката с най-ниска цена. Фирмите произвеждат според търсенето. Производствената цена на стоката е $c \in [0,1]$. Количеството на продадените продукти е функция $Q(p_i, p_j)$, $Q : p_i, p_j \to [0,1]$. Кои са равновесията на Неш на играта?

Решение: Дефинира се $p = \min P$ – най-ниската цена от множеството P.

Дефинира се $O = j / p = p_j$ – броят на фирмите с най-ниска цена.

Количеството на продажбите на фирма n_i е

$$Q(p, p_i) = \begin{cases} \dfrac{1-p_i}{|O|}, p_i = p \\ 0, p_i > p \end{cases}.$$

Печалбата на фирма n_i е

$$\Pi(p_i, p) = (p_i - c)Q(p_i, p) = \begin{cases} \dfrac{(1-p_i)(p_i-c)}{|O|}, p_i = p \\ 0, p_i > p \end{cases}.$$

Намира се равновесие на Неш на играта, което е $p_i = c$ за всяко $p_i \in [0,1]$. В този случай всички фирми нямат печалба, защото си разделят пазара, но продават на производствената си цена. Ако играч се отклони нагоре, няма печалба, а ако се отклони надолу, взима целия пазар, но продава на загуба. Следователно няма стратегия, според която някоя от фирмите да има печелившо отклонение и значи това е равновесие на Неш на играта.

Не съществува друго равновесие на Неш, защото след разглеждане на следните 3 основни случая не се намира такова:

- $p_i > p > c$.
  В този случай фирмите с цена, по-висока от най-ниската - p, нямат печалба. Ако фирмите с по-висока цена решат да продават на една и съща продажна цена с тези, които продават на цена p, те си разделят пазара, което е и печелившо отклонение за първите. Следователно няма равновесие на Неш.
- $p_i = p > c$.
  В този случай фирмите си разделят пазара и всяка получава по $Q(p_i, p) = \frac{(1-p_i)(p_i - c)}{|O|}$. Ако някоя от фирмите намали продажната цена с някакво много малко число ε, то тя ще получи целия пазар. Следователно няма равновесие на Неш.
- $p_i > p = c$.
  В този случай няма фирма, която да има печалба, защото фирмите с най-ниска цена p получават целия пазар, но продават на производствената си цена. Ако те покачат продажната си цена малко над производствената, но тя остане по-малка от тази на останалите фирми, то тя ще е на печалба. Следователно няма равновесие на Неш.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Muhamet Yildiz, *Lecture Notes on Game Theory*, MIT 2010
2. Muhamet Yildiz, *14.126 Lecture Notes on Supermodular Games*, MIT 2010
3. Markus M. Mobius, *Lecture XIV:Applications of Repeated Games*, Harvard 2007
4. Avinash K. Dixit, Barry J. J. Nalebuff, *The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life*

ДУОПОЛ И ОЛИГОПОЛ НА БЕРТРАН

Резюме. В статията се представят обобщени случаи на задачи свързани, с дуопол и олигопол на Бертран. Изведени са резултати, показващи равновесията на Неш и/или зависещи от тях фактори на всяка от разгледаните игри. В практиката се използват от различни фирми в икономиката при определяне на финансовата им стратегия. Те представят и различни математически модели.

BERTRAND DUOPOLY AND OLIGOPOLY

Abstract. The present article expands on problems related to Bertrand Duopoly and Oligopoly. The shown results display Nash Equilibria and/or dependent factors of each of these games. In practice they are used by various companies in determining their financial strategy. They represent different mathematical models.

КОЛЕДЕН ЛИНГВИСТИЧЕН ТУРНИР

доц. д-р Иван Держански, ИМИ-БАН и докторант Веселин Златилов

На 20 декември 2015 г. в София се проведе Коледен лингвистичен турнир, организиран от РАБОТИЛНИЦА ЗА ЗНАНИЕ. Задачите решаваха 33 ученици от шест софийски училища – СМГ „Паисий Хилендарски", ПЧМГ, 1. АЕГ, 91. НЕГ „Проф. Константин Гълъбов", 164. ГПИЕ „Мигел де Сервантес" и 107. ОУ „Хан Крум" (18 ученици във възрастовата група 5. – 7. клас и 15 ученици във възрастовата група 8. – 12. клас). Журито с председател доц. д-р Иван Держански и членове Веселин Златилов, Тина Владимирова и Здравко Иванов присъди следните награди в група 5. – 7. клас: първа награда на Любомир Коцев (5. клас, СМГ), втора награда на Борислав Кирилов (6. клас, ПЧМГ), трета награда на Гергана Тагарева (6. клас, СМГ), поощрителни награди на Ели Витанова (7. клас, ПЧМГ) и Иван Тагарев (5. клас, СМГ) и в група 8. – 12. клас: първа награда на Иван Стамболиев (12. клас, 91. НЕГ), втора награда на Марко Иванов (9. клас, ПЧМГ) и трета награда на Венислав Върбанов (11. клас, СМГ). А ето и резултатите на всички участници:

ВЪЗРАСТОВА ГРУПА 5. – 7. КЛАС

	ИМЕ	КЛАС	УЧИЛИЩЕ	зад. 1	зад. 2	зад. 3	ОБЩО
1	Любомир Коцев	5. клас	СМГ	38,5	18	20	76,5
2	Борислав Кирилов	6. клас	ПЧМГ	39,5	15	20	74,5
3	Гергана Тагарева	6. клас	СМГ	32	12	20	64
4	Ели Витанова	7. клас	ПЧМГ	39	19	2	60
5	Иван Тагарев	5. клас	СМГ	28	15	15	58
6	Калина Николова	5. клас	ПЧМГ	26	26,5	0	52,5
7	Станислава Минчева	5. клас	СМГ	21,5	18	12	51,5
8	Димитър Живков	5. клас	СМГ	26	17	0	43
9	Мартин Христов	6. клас	СМГ	28,5	7,5	0	36
10	Николай Младенов	6. клас	СМГ	31	3	0	34
11	Михаил Маринов	5. клас	СМГ	13	19	0	32
12	Никола Джунов	7. клас	СМГ	26,5	4,5	0,5	31,5
13	Троян Крумов	5. клас	СМГ	27	0	0	27
14	Ралица Радоицова	5. клас	107. ОУ	2	23,5	0	25,5
15	Виктор Велчев	5. клас	СМГ	0	19	0	19
16	Иван Иванов,	5. клас	СМГ	12	6	0	18
17	Богдан Стефанов	5. клас	СМГ	13	2	0	15
18	Виктор Величков	5. клас	ПЧМГ	0	0	0	0

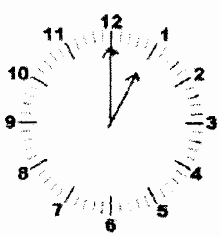
ВЪЗРАСТОВА ГРУПА 8. – 12. КЛАС

	ИМЕ	КЛАС	УЧИЛИЩЕ	зад. 1	зад. 2	зад. 3	ОБЩО
1	Иван Стамболиев	12. клас	91. НЕГ	36	22	20	78
2	Марко Иванов	9. клас	ПЧМГ	40	9,5	20	69,5
3	Венислав Върбанов	11. клас	СМГ	40	2	20	62
4	Борислав Георгиев	12. клас	164. ГПИЕ	40	0	20	60
5	Светлин Тотев	12. клас	СМГ	32	7	20	59
6	Валентин Димов	11. клас	91. НЕГ	38	14	1	53
7	Стефани Тиркова	11. клас	91. НЕГ	40	0	0	40
8	Дарина Попова	9. клас	СМГ	39	0	0	39
9	Александър Ангелов	10. клас	СМГ	32	2	0	34
10	Мартин Николов	9. клас	ПЧМГ	33	0	0	33
11	Данаил Гушев	9. клас	1. АЕГ	32	0	0	32
12	Калина Бакърджиева	9. клас	СМГ	10	0	20	30
13	Невена Гинчева	СМГ	СМГ	7	0	0	7
14	Ила Ми Нгуен	11. клас	1. АЕГ	0	3	0	3
15	Катрин Вълкова	9. клас	1. АЕГ	1	0	0	1

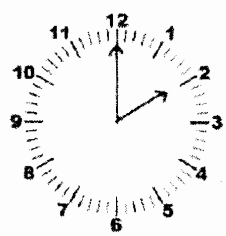
Предлагаме ви задачите от турнира и кратки решения.

ТЕМА ЗА 5. – 7. КЛАС

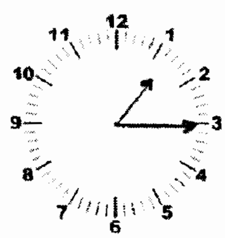
ЗАДАЧА 1. [40 т.] Следните естонски[1] изрази казват колко е часът, показан над тях:



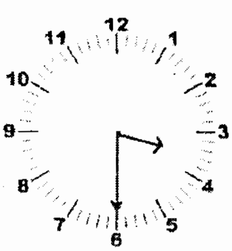
Kell on üks.



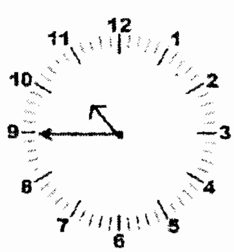
Kell on kaks.



Veerand kaks.



Pool neli.



Kolmveerand üksteist.

Viis minutit üks läbi.

[1] На естонски език говорят около 1 милион души в Естония Този език не е индоевропейски и заедно с финландския, унгарския и езиците на други (малобройни) народи образуват групата на угро-финските езици, които от своя страна са част от уралското езиково семейство.

А ето и естонските названия на някои числа: kolm (3), kuus (6), seitse (7), kaheksa (8), üheksa (9), kümme (10).

1. Напишете на естонски следните часове:
а) 4:45; б) 7:15; в) 8:30; г) 11:05; д) 12:30; е) 15:10.

2. Какво означават следните естонските изрази за време?
а) Kakskümmend viis minutit üheksa läbi. б) Veerand neli.
в) Pool kolm. г) Kolmveerand kaksteist.
д) Kolmkümmend viis minutit kuus läbi. е) Kell on kakskümmend kolm.

(по задача на Babette Newsome, NACLO-2014)

РЕШЕНИЕ: От изразите **Kell on üks. – 1:00** и **Kell on kaks. – 2:00** предполагаме, че **üks = 1** и **kaks = 2**, а **Kell on** може да означава „часът е". От следващия израз **Veerand kaks. – 1:15** и **kaks = 2** следва, че **Veerand kaks** може да означава „четвърт от втория час". Тогава **Kolmveerand üksteist – 10:45** означава „три четвърти от единадесетия час", а аналогично **Pool neli – 3:30** може да означава „половината от четвъртия час". Изразът **Viis minutit üks läbi – 1:05** има друга структура, а **üks = 1**. Следователно **Viis minutit üks läbi** може да означава „пет минути след един [часа]".
1. Казаното до тук и дадените названия на някои числа позволяват да напишем на естонски часовете:
а) 4:45 – Kolmveerand viis; б) 7:15 – Veerand kaheksa; в) 8:30 – Pool üheksa;
г) 11:05 – Viis minutit üksteist läbi; д) 12:30 – Pool kolmteist; е) 15:10 – Kümme minutit viisteist läbi.
2. Дадените естонски изрази за време означават:
а) Kakskümmend viis minutit üheksa läbi. – 9:25 б) Veerand neli. – 3:15
в) Pool kolm. – 2:30 г) Kolmveerand kaksteist. – 11:45
д) Kolmkümmend viis minutit kuus läbi. – 6:35 е) Kell on kakskümmend kolm. – 23:00

ЗАДАЧА 2. [40 т.] Дадени са узбекски[2] думи и техните разбъркани преводи на български.

osh xona	горещ чай
mehmon xona	лекарство за кожа
dori xona	офталмолог (очен лекар)
yotoq xona	гореща супа
yog'och yotoq	спалня
issiq osh	кухня
issiq xona	парник
issiq choy	болница
kasal xona	нар (дървено легло)
teri dori	хотел
ko'z doktori	аптека

а) Определете верните съответствия.
б) Преведете на узбекски: лекарство за очи, болнично легло, дерматолог (кожен лекар)
в) Преведете на български: choy xona; mehmon yotoq, xona.

[2] На узбекски говорят над 27 млн. души в Узбекистан, където е официален език, и в съседни държави.

(Здравко Иванов)

РЕШЕНИЕ: Да подредим узбекските думи в таблицата:

	xona	yotoq	osh	choy	dori	doktori
osh	osh xona					
mehmon	mehmon xona					
dori	dori xona					
yotoq	yotoq xona					
yog'och		yog'och yotoq				
issiq	issiq xona		issiq osh	issiq choy		
kasal	kasal xona					
teri					teri dori	
ko'z						ko'z doktori

Аналогично подреждаме българските словосъчетания и сравняваме двете таблици.

	стая	лекарство	супа	чай	легло	лекар
кожа		лекарство за кожа				
легло	спалня					
супа	кухня					
болен	болница					
дърво					нар	
горещ	парник		гореща супа	горещ чай		
око						очен лекар
лекарство	аптека					
гост	хотел					

Разбираме, че на узбекски определителят стои пред определяемото. Очевидно xona е стая, а issiq – горещ. Вероятно choy е чай, а doktori – доктор.[3]. Следователно osh е супа, ko'z – око, yotoq – легло, yog'och – дърво, а dori – лекарство.

а) Верните съответствия са:

osh xona	(супа + стая)	кухня
mehmon xona	(гост + стая)	хотел
dori xona	(лекарство + стая)	аптека
yotoq xona	(легло + стая)	спалня
yog'och yotoq	(дървен + легло)	нар
issiq osh	(горещ + супа)	гореща супа
issiq xona	(горещ + стая)	парник
issiq choy	(горещ + чай)	горещ чай
kasal xona	(болен + стая)	болница
teri dori	(кожа + лекарство)	лекарство за кожа
ko'z doktori	(око + доктор)	офталмолог

б) Преводите на узбекски са:

лекарство за очи	(око + лекарство)	ko'z dori
болнично легло	(болница + легло)	kasal xona yotoq
дерматолог	(кожа + доктор)	teri doktori

в) Преводите на български са:

choy xona (чай + стая) – чайна, mehmon yotoq (гост + легло) – легло за гости, xona – стая.

---

[3] Всъщност doktori не е просто „доктор", а „негов (неин, техен) доктор"; тази форма осъществява една особена граматична връзка между двете думи. Това обаче може да се пренебрегне в тази задача.

ЗАДАЧА 3. [20 т.] Разгадайте зашифрования текст:

„Сивъфумпучи йи йпипуо" Гу зомио готому рсийпучу у ьитфмуги Пъги дъжупи!

(Веселин Златилов)

РЕШЕНИЕ: Зашифрованият текст започва със словосъчетанието „Сивъфумпучи йи йпипуо", което може да е фирмено название. Сравняваме го с названието на организатора на турнира. Забелязваме, че РАБОТИЛНИЦА ЗА ЗНАНИЕ съвпада със зашифрованото словосъчетание по броя на думите и по броя на буквите в тях. Това позволява да открием съответствията при зашифроването: Р → С, А → И, Б → В, О → Ъ, Т → Ф, Л → М и т.н. Предполагаме, че ако подредим в кръг в посока на движението на часовниковата стрелка буквите от азбуката (т.н. „колело на Цезар"), всяка съгласна буква е заменена със следващата я съгласна, а всяка гласна буква е заменена с втората следваща я гласна буква. Проверяваме хипотезата за останалите думи от текста и получаваме:

„Работилница за знание" Ви желае весели празници и щастлива Нова година!

ТЕМА ЗА 8. – 12. КЛАС

ЗАДАЧА 1. [40 т.] В голямо и дружно литовско семейство решили да отбележат юбилея на главата на семейството. Присъствали почти всички. Само трима не могли да дойдат. На масата били 16 души:

1) главата на семейството Алгирдас;
2) неговата съпруга Ирма;
3) братът на Ирма, Йонас;
4) сестрата на Ирма, Йоланта;
5) сестрата на Алгирдас, Лада;
6) съпругът на Лада, Гедрюс;
7) синът на Лада и Гедрюс, Юозас;
8) дъщерята на Лада и Гедрюс, Анна;
9) най-голямата дъщеря на Алгирдас и Ирма, Гражина;
10) средната дъщеря на Алгирдас и Ирма, Раса;
11) съпругът на най-малката дъщеря на Алгирдас и Ирма, Римас;
12) братът на Римас, Едгарас;
13) сестрата на Римас, Елена;
14) съпругът на Елена, Айдас;
15) дъщерята на Раса, Мария;
16) дъщерята на Римас, Елзбета.

А ето и фамилиите (в разбъркан ред) на присъствалите на тържеството:

Юренас, Шещокас, Балсиене, Матулите, Балсите, Матулис, Шещокас, Амбразиене, Адомайтите, Юренайте, Матулис, Адомайтис, Юрениене, Матулиене, Амбразас, Шещокайте.

А) Определете фамилията на: а) Алгирдас; б) Йонас; в) Елена; г) Елзбета.

Б) Определете фамилиите на тримата членове на семейството, които не присъствали на тържеството: а) съпругът на Раса; б) съпругата на Римас; в) дъщерята на Елена и Айдас. Обяснете решението си.

(И. Б. Иткин, 28.ТОЛМ – 1997 г.)

РЕШЕНИЕ: Да съставим родословно дърво на семейството:

$$\underbrace{\left\{\boxed{\textit{Гедрюс}}+(\textit{Лада})\right\}}_{\boxed{\textit{Юозас}}-(\textit{Анна})}-\underbrace{\left\{\boxed{\textit{Алгирдас}}+(\textit{Ирма})\right\}}_{(\textit{Гражина})-\underbrace{(\textit{Раса})}_{(\textit{Мария})}-\underbrace{\{(\ldots\ldots)+\boxed{\textit{Римас}}\}}_{(\textit{Елзбета})}}-\boxed{\textit{Йонас}}-(\textit{Йоланта})$$

$$\boxed{\textit{Римас}}-\boxed{\textit{Едгарас}}-\underbrace{(\textit{Елена})+\boxed{\textit{Айдас}}}_{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$

Фамилиите на присъствалите завършват 7 пъти на **-с** и 9 пъти на **-е**. Следователно мъжките фамилии завършват на **-с**, а женските – на **-е**. Предполагаме, че в литовското общество, както в много други, децата приемат фамилията на баща си, а омъжените жени – на съпруга си. [4]

[4] Вероятно авторът на задачата е очаквал това предположение да е съвсем естествено, но за много участници в турнира не беше така: мнозина бяха сметнали, че фамилиите на ергените и на женените мъже също са

Освен това забелязваме, че окончанията на мъжките фамилии са **-ас** и **-ис**, а на женските са **-ите**, **-айте** и **-иене**.

Да подредим фамилиите в следната таблица:

	-ас	**-ис**	**-ите**	**-айте**	**-иене**
Юрен-	Юренас			Юренайте	Юрениене
Шещок-	Шещокас (2)			Шещокайте	
Балс-			Балсите		Балсиене
Матул-		Матулис (2)	Матулите		Матулиене
Амбраз-	Амбразас				Амбразиене
Адомайт-		Адомайтис	Адомайтите		

Вече са очевидни съответствията **-ас** ↔ **-айте** и **-ис** ↔ **-ите**.

Семейството на Гедрюс и Лада присъства със сина и дъщеря си, т.е. те са Матулис (2), Матулите и Матулиене. Римас присъства с дъщеря си Елзбета и брат си Едгарас, т.е. те са Шещокас (2) и Шещокайте. Можем вече да установим, че съпругите имат фамилии с окончание **-иене**, а дъщерите – с окончания **-ите** и **-айте**.

А) Проследявайки родословното дърво и таблицата разбираме, че фамилията на Алгирдас е Юренас; на Йонас е Адомайтис; на Елена – Амбразиене; на Елзбета – Шещокайте.

Б) Фамилията на съпруга на Раса трябва да е Балсис; на съпругата на Римас – Шещокиене; на дъщерята на Елена и Айдас – Амбразайте.

ЗАДАЧА 2. [40 т.] Дадени са числителни на езика цоцил[5] и техните разбъркани съответствия:

'oxib xcha'vinik; 'ox lajuneb yoxvinik; jtob; vo'ob svo'vinik; chib sbalun lajunvinik;
chan lajuneb svo'vinik; vo' lajuneb yoxvinik; jun svakvinik; vaxakib; buluchib xchanvinik;
lajcheb xcha'vinik; balun lajuneb xcha'vinik; chanvinik; buluchib; chanib

4, 8, 11, 20, 23, 32, 39, 53, 55, 71, 80, 85, 94, 101, 362

а) Определете верните съответствия.

б) Напишете на цоцил числата 6, 76 и 215.

в) Ако на цоцил jbok' означава 400, а chabok' – 800, напишете на този език числата 1978 и 2052.

(Здравко Иванов)

РЕШЕНИЕ:

- Основата на бройната система е 20.
- $\boxed{\text{X L-Y}_1\text{-vinik}}$ = $\boxed{20.(Y-1)+X}$ *или* $\boxed{\text{X}_1\text{ lajuneb L-Y}_1\text{-vinik}}$ = $\boxed{20.(Y-1)+(10+X)}$ за Y < 13 *или* $\boxed{\text{X/ X}_1\text{ lajuneb L-Y}_1\text{ lajun-vinik}}$ = $\boxed{20.(10+Y-1)+X}$ за Y > 12 (L – буква, X_1 и Y_1 са корените на наименованията съответно на числата X и Y).
- L ∈ {**x**; **s**; **y**}, като:
  - L = **x**, когато Y_1 започва с **ch**;
  - L = **s**, когато Y_1 започва с **b** или **v** (изобщо с устнена съгласна);
  - L = **y**, когато Y_1 започва с **'** (самото **'** отпада)
- $\boxed{\text{X}_1\text{-Vb}}$ = $\boxed{X}$ за 0 < X < 10 и X = 11 (V = **i**, освен при числото **vo'-ob** 5)
- $\boxed{\text{X}_1\text{ lajuneb}}$ = $\boxed{10+X}$ за 2 < X < 8.
- 10 = lajuneb, 11 = buluch-ib, 12 = lajcheb, 20 = j-tob; 400 = j-bok'

различни, че фамилиите на жените се променят не след сватбата, а след раждането на дете, и т.н. Това подсказва, че традиционното разделяне на хората на господа, госпожи и госпожици е в упадък.

[5] Цоцил е език от семейството на маянските езици. Говорят го около 235 000 души в източната част на Мексико. Звуковете **ch** (чете се почти като **ч**), **k'** и **'** (гърлен взрив) са специфични съгласни на цоцил.

- $\boxed{X_1\text{-bok'}} = \boxed{X.400}$

а) Верните съответствия са:

4	chanib	8	vaxakib	11	buluchib
20	jtob	23	'oxib xcha'vinik	32	lajcheb xcha'vinik
39	balun lajuneb xcha'vinik	53	'ox lajuneb yoxvinik	55	vo' lajuneb yoxvinik
71	buluchib xchanvinik	80	chanvinik	85	vo'ob svo'vinik
94	chan lajuneb svo'vinik	101	jun svakvinik	362	chib sbalun lajunvinik

б) Названията на цоцил на дадените числа са: 6 = vak-ib = **vakib**

76 = 20. (4 – 1) + 10 + 6 = **vak lajuneb xchanvinik**

215 = 20. (11 – 1) + 10 + 5 = **vo' lajuneb sbuluchvinik**

в) 1978 = 20. (99 – 1) + 10 + 8.

Така: 1978 = 400.4 + 20. (19 – 1) + 10 + 8 = **chanbok' vaxak lajuneb sbalun lajunvinik**

2052 = 400.5 + 20. (3 – 1) + 12 = **vo'bok' lajcheb yoxvinik**

ЗАДАЧА 3. [20 т.] Разшифровайте следното съобщение:
Свкюнъчцлкфат тниитфщц тюсеалфро: СВДТЧОТХСВЛ ИВ ИПГСНЛ Гкррйиржйи гзфйрж Лройийж, фупмъузъй гвндтюпз й ъвфцройи Оред дрзмтж!

(Веселин Златилов)

РЕШЕНИЕ: Зашифрованият текст започва със словосъчетанието **Свкюнъчцлкфат тниитфщц тюсеалфро**, което напомня условието на задачата „Разшифровайте следното съобщение". Предполагаме, че ако подредим в кръг в посока на движението на часовниковата стрелка буквите от азбуката (т.н. „колело на Цезар"), при кодирането всяка буква е била заменена със следваща я друга буква.Сравняваме побуквено двете словосъчетания. Получаваме, че в първата дума съответствията са: Р → С (първата буква след Р), А → В (втората буква след А), З → К (третата буква след З), Ш → Ю, И → Н, Ф → Ъ, Р → Ч, О → Ц, В → Л, А → К и т.н. Веднага прави впечатление, че при кодирането замяната на буквите зависи от поредното им място в думата. Проверяваме хипотезата за останалите думи от текста и получаваме:

Разшифровайте следното съобщение: РАБОТИЛНИЦА ЗА ЗНАНИЕ Ви пожелава весела Коледа, усмихната ваканция и щастлива Нова година!

CHRISTMAS LINGUISTICS TOURNAMENT

Abstract. The paper is dedicated to the problems and their solutions of the Linguistics Tournament that has taken place in December 2015. The results of the participants are presented too.

[1]Dr. Ivan Derzhanski, Assoc. Prof.
[2]Veselin Zlatilov, PhD student
Institute of Mathematics and Informatics
Acad. G. Bonchev Street, block 8
1113 Sofia
[1]E-mail: iad58g@gmail.com
[2]E-mail: veselin_zlatilov@abv.bg

ТАЛОН

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Виж www.vuzf.bg

Притежателят на този талон има правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса

Имена ....

Адрес ...., e-mail...........

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ....

10 юни 2016 г.

Тържество в Министерството на образованието и науката по случай 20-годишния юбилей на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру" в

01

Ако кандидатствате след 7 клас

02

Ако кандидатствате във ВУЗ

03

Олимпиади + Подготовка

04

Издирване на таланти уМ+

05

Конкурси

06

М+ Семинар

национален конкурс уМ+ издирване на таланти

М+ е одобрено от МОН за класна и извънкласна работа по математика и информатика

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
гр. София, 1618, кв. "Овча купел"
ул."Гусла" №1
тел: +359 2 401 58 12, факс: +359 2 401 58 21
e-mail: office@vuzf.bg
www.vuzf.bg

ISSN 0861-8321

Цена 7 лв.