М + НАЙ-МАЛКИТЕ

МЕТОД НА ЕКСТРЕМАЛНОТО

Четиво за 6 – 7 клас

Здравейте, млади приятели,

При решаването на много задачи е полезно да се разгледа някой краен, граничен, екстремален елемент, т.е. елемент, за който някоя величина приема най-голяма или най-малка стойност. Тази най-голяма или най-малка стойност може да бъде най-дългата или най-късата страна на триъгълник, най-голямото или най-малкото разстояние и т. н. Когато се използва екстремален елемент, казваме, че се прилагаме метода на екстремалното. Подходът може да се отнася до подреждане на числа в растящ или намаляващ ред или при използване на т. нар. метод на екстремалния контрапример, който се състои в следното: допускаме, че твърдението, което трябва да се докаже в дадена задача, е невярно. Тогава целта е да докажем съществуването на екстремален контрапример в някакъв смисъл. Ако се окаже, че е възможно да се направят разсъждения, които водят до намаляването или увеличаването на кантрапримера, то стигаме до желаното противоречие.

Ще разгледаме няколко задачи, които могат да се решат с помощта на метода на екстремалното.

Задача 1. В клетките на таблица 6×6 са разположени числа, всяко от които е средно аритметично на съседните му числа. Да се намери сумата на числата в ъгловите клетки на таблицата, ако сумата на числата от най-долния ред е 30. (Две числа са съседни, ако се намират в клетки с обща страна.)

Решение: Да разгледаме най-голямото число в таблицата. Тъй като всичките му съседи не са по-големи от него, то не е възможно някой от съседите му да е строго малък от разглежданото число, защото тогава средното аритметично на всичките му съседи ще бъде строго по-малко от него. Заключаваме, че всичките съседи на най-голямото число в таблицата са равни на това число. Като разсъждаваме по същия начин за съседите, а след това и за съседите на съседите, заключаваме, че всички числа в таблицата са равни. По условие сумата на шестте числа от най-долния ред е 30 и тогава всички числа са равни на $30:6=5$. Следователно сумата на числата в ъгловите клетки на таблицата е равна на $4.5=20$.

Задача 2. В клетките на таблица 12×12 са разположени естествени числа. За всеки ред на таблицата се подчертава най-голямото число в реда (подчертава се едно от най-големите, ако най-големите са повече от едно), а за всеки стълб на таблицата се подчертава най-малкото число в стълба (подчертава се едно от най-малките, ако най-малките са повече от едно). Оказва се, че всички числа в таблицата са подчертани два пъти. Да се докаже, че всички числа са равни.

Решение: Да изберем най-голямото число в таблицата. То е подчертано един път и следователно е най-голямото в реда, в който се намира. Подчертано е и втори път, а значи е най-малкото в стълба, в който се намира (или едно от най-малките). Това е възможно само ако всички числа в този стълб са равни на най-голямото число в таблицата. Сега да изберем най-малкото число в таблицата. То е подчертано един път и следователно е най-малкото в стълба, в който се намира. Подчертано е и втори път, а значи е най-голямото в реда, в който се намира (или едно от най-големите). Това е възможно само ако всички числа в този ред са равни на най-малкото число в таблицата. Накрая да разгледаме общата клетка на стълба, в който всички числа са равни на най-голямото число в таблицата и на реда, в който всички числа са равни на най-малкото число в таблицата. Заключаваме, че най-голямото число в таблицата е равно на най-малкото число в таблицата, което е възможно само ако всички числа в таблицата са равни помежду си.

Задача 3. Да се докаже, че уравнението $m^2+n^2=3(x^2+y^2)$ няма решение в естествени числа.

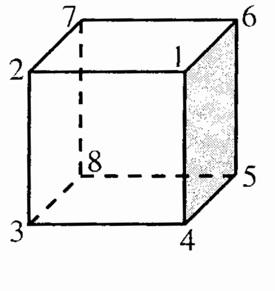
Решение: Да допуснем, че уравнението има решение и нека (m,n,x,y) е такова решение, че сборът m^2+n^2 е възможно най-малък. Ако за няколко решения този сбор е най-малък, разглеждаме едно от тези решения. От равенството $m^2+n^2=3(x^2+y^2)$ следва, че сборът m^2+n^2 се дели на 3. Но квадратът на произволно естествено число дава остатък 0 или 1 при деление на 3. Заключаваме, че всяко от числата m и n се дели на 3. Следователно съществуват естествени числа m_1 и n_1 така, че $m=3m_1$ и $n=3n_1$. Като заместим и съкратим на 3, получаваме . Като заместим и съкратим на 3, получаваме $x^2+y^2=3(m_1^2+n_1^2)$. Така получихме ново решение на уравнение (x,y,m_1,n_1), за което $x^2+y^2<m^2+n^2$. Това е противоречие и следователно уравнението от условието на задачата няма решение в естествени числа.

Задача 4. Във върховете на куб е записано по едно число, между които са числата 0 и 1. За един ход се избира връх и числото в него се заменя със средното аритметично на трите числа във върховете, които са свързани с избрания връх със страна на куба. След 10 хода се оказва, че числата във всички върхове са равни помежду си. Какви са възможностите за първоначалните числа във върховете на куба?

Решение: Нека M_i е максималното число във върховете на куба след i-ия ход, а m_i е най-малкото число във върховете на куба след i-ия ход. Очевидно е изпълнено

$$M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \ldots \geq M_{10}.$$

След като след 10-ия ход всички числа във върховете са равни, то $M_0=M_1=M_2=\ldots=M_{10}$. Аналогично $m_0=m_1=m_2=\ldots=m_{10}$. Да номерираме върховете на куба, както е показано.



Номерацията е такава, че всяка страна на куба съединява върхове с различна четност. Показаната номерация не е единствена. Без ограничение, нека след 10-ия ход във връх 1 стои най-голямото число. Оттук следва, че след 9-ия ход числата във върхове 2, 4 и 6 са равни на най-голямото. След 8-ия ход числата във върховете с нечетни номера са равни на най-голямото. Като продължим разсъжденията по ходовете назад, заключаваме, че изходните числа във върховете с еднаква четност са равни. Тъй като по условие измежду изходните числа са 0 и 1, то възможностите за изходните числа са две:

1. Във върховете с четни номера е числото 1, а във върховете с нечетни номера е 0.
2. Във върховете с четни номера е числото 0, а във върховете с нечетни номера е 1.

Задача 5. Съучениците на Иво от класа му са 28. Всеки двама от 28-те съученици на Иво имат различен брой приятели в този клас. Колко са приятелите на Иво от класа?

Решение: Съучениците на Иво могат да имат 0, 1, 2, ..., 27 или 28 приятели, т.е. за броя на приятелите има общо 29 варианта. Ако някой е приятел с всички, то всеки има поне един приятел. Следователно или има ученик от класа, който е приятел с всички, или има ученик, който не е приятел с никой. В двата случая остават 28 варианта: 1, 2, ..., 28 или 0, 1, 2 ..., 27. Нека A е ученикът с най-много приятели, а B е ученикът с най-малко приятели. В първия случай A е приятел с всички, а B е приятел само с един (единственият му приятел е A). Във втория случай B не е приятел с никой, а A е приятел с всички освен с B (A не е приятел само с B). И в двата случая A е приятел с Иво, а B не е приятел с Иво.

Да преместим A и B в друг клас. Тогава и в двата случая A е приятел с всеки от останалите в класа, а B не е приятел с никой от останалите ученици в класа. Заключаваме, че след преместването на A и B всеки от съучениците в класа на Иво остава с един приятел по-малко. Следователно всеки от оставащите в класа съученици на Иво има различен брой приятели (т.е. запазва се условието от задачата). В намаления клас отново да изберем ученика с най-много приятели и ученика с най-малко приятели. Повтаряме процедурата 14 пъти и преместваме в друг клас 14 двойки ученици. Във всяка двойка има точно един приятел на Иво. Следователно всички приятели на Иво са 14.

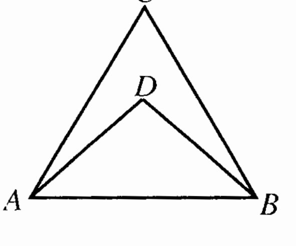
Методът на екстремалното може да се използва и в задачи по геометрия. Ето два примера:

Задача 6. В равнината са дадени няколко точки. Възможно ли е всяка от тях да лежи на отсечка, свързваща две други точки измежду дадените?

Решение: Да изберем най-малката отсечка AB. Ако върху нея има точка C измежду дадените, то дължината на отсечката AC е по-малка от дължината на AB и това противоречи на избора на AB. Следователно отговорът на поставения въпрос е отрицателен.

Задача 7. В равнината са дадени 2017 точки, никои 3 от които не лежат на една права. Да се докаже, че съществува триъгълник с върхове измежду дадените точки, който не съдържа нито една от останалите точки.

Решение: Нека ABC е триъгълникът с най-малко лице. Той не може да съдържа други точки измежду дадените, защото ако допуснем, че съдържа точка D, то лицето на триъгълника ABD е по-малко от лицето на триъгълника ABC и това противоречи на избора на ABC.



Автор на четивото: Д-р М. Плюс