М + СЕМИНАР

ЕКСПОНЕНТАТА НА ХЪРСТ ВЪВ ФОНДОВИТЕ БОРСИ

Петко Казанджиев, 11 клас, ПМГ – В. Търново
Цеца Байчев, старши учител по математика, ПМГ – В. Търново
Кинка Кирилова-Лупанова, главен учител по информатика, ПМГ – В. Търново

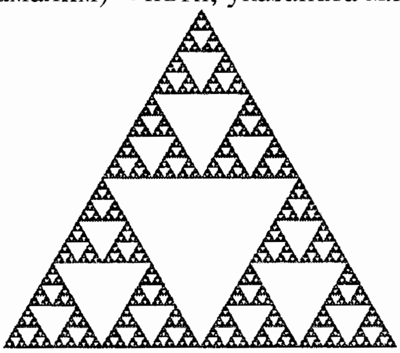
В настоящата статия се представят обобщения на научни изследвания, свързани с използването на фрактали във финансовия анализ. Представен е алгоритъм за пресмятане на Експонентата на Хърст – един от най-популярните методи във фракталния анализ на времевите финансови редове. Разгледани са примери за всеки от случаите, произтичащи от намирането на тази експонента. В практиката се използва в икономиката, от различни фирми, при анализиране на хода на активите на компаниите. Използва се и от търговци на фондовите борси за предвиждане на бъдещите трендове.

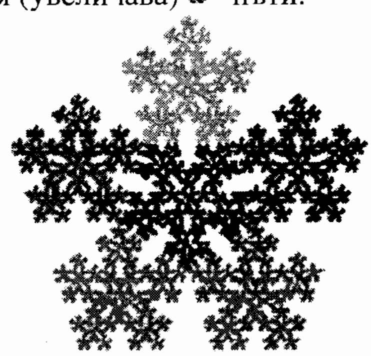
Използват се следните дефиниции.

Дефиниция 1: *Времеви ред* – последователност от точки на данните, измерени обикновено в последователни времеви моменти, разположени на унифицирани времеви интервали.

Дефиниция 2: *Фрактал* – геометрична фигура, състояща се от части и всяка от които представлява по-малко, приблизително копие на цялото. Фракталът е такъв обект, за който няма значение под какъв мащаб се разглежда – структурата му остава същата.

Дефиниция 3: *Фрактална размерност* – число D, изразяващо връзката между естествената мярка на геометричната фигура (дължина, лице, обем) с величината, положена в основата на изходната метрична система. Ако метричният еталон е такава величина, то ако я увеличим (намалим) a пъти, указаната мярка се намаля (увеличава) a^D пъти.





Дефиниция 4: *Геометричен фрактал* – известен е и с името детерминиран фрактал. Самоподобието се проявява във всички мащаби. Образува се в процеса на итерация. В двумерния случай се получава с помощта на произволна начупена линия (или повърхност в тримерния случай), наречена генератор. За всяка стъпка от алгоритъма всяка от отсечките,

съставящи начупената линия, се заменя с генератора, в съответния мащаб. Фракталът се получава в резултат на безкрайни повторения (итерации) на тази процедура.

Дефиниция 5: *Стохастичен фрактал* – фрактал, при чието построяване за всяка итерационна стъпка се въвеждат случайни величини.

Дефиниция 6: *Мащабна инвариантност* – при изменение на единиците на измерване на времето може така да се измени мерната единица, че в новите единици вероятностната мярка да се изразява със същите формули, както и в старите.

Дефиниция 7: *Пълзяща средна* – средната цена на актив за определен период от време.

Дефиниция 8: *Тренд* – посоката на движение на пазарните активи.

Дефиниция 9: *Размах на отклонения* – разликата между най-голямата и най-малката варианта.

Дефиниция 10: *Стандартно отклонение* – статистическата мярка за разсейването на стойностите на една случайна величина около нейната средна аритметична или очаквана стойност.

Дефиниция 11: *Линейна регресия* – статистически метод за построяване на приемлива линейна връзка между група независими променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и зависима променлива y. Т.е. построяване на линеен математически модел, с чиято помощ могат да се правят прогнози за състоянието на y при различни данни за x.

Ралф Елиът

В началото на изследванията за използването на фрактали във финансовия анализ *вълните на Елиът* са едно от най-значителните открития.

През 30-те години на 20-ти век Ралф Елиът прави откритие, чиято формулировка звучи така:

"Средното пазарно движение се покачва под формата на "пет вълни" и спада под формата на "три вълни"."

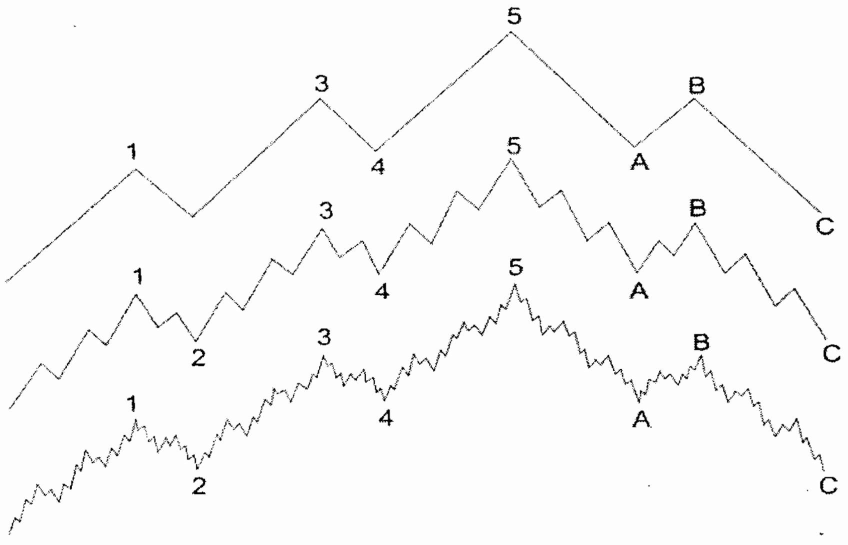
Това позволява на Елиът да прогнозира ценовите движения на акции с голяма точност. Теорията е публикувана през 1938 г. под заглавието "Вълнов принцип".

Според Елиът:

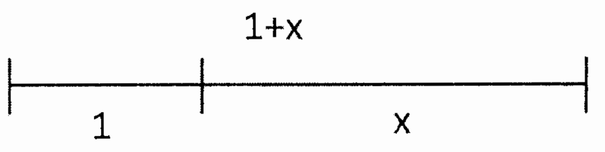
- Цените следват вълнова последователност на движение, която може да се използва за определяне на бъдещи положения на тренда.
- *Петте вълни, които следват тренда се наричат импулсни вълни*, а трите вълни, които се развиват в посока обратна на него се наричат корекционни.
- Всяка от тези импулсни и корекционнии вълни също може да се представи чрез вълнова диаграма, при която се появяват нови, по-малки вълни. По такъв начин, той прилага теорията на фракталите за разлагане на тренда на по-малки части.

Основната разлика между двата типа вълни е разликата в структурата им. Импулсните са винаги 5 вълни – обозначени с цифрите от 1 до 5, а корекционните са 3 – A, B, C.

Елиът изказва и предположението, че съотношението на мащабите при две последователни представяния във *вълновия принцип* е свързано със златното сечение.



Ако една отсечка са раздели на две части – голяма и малка и съотношенията на дължините между голямата и малката част и между цялата отсечка и голямата част са равни, то тази пропорция се нарича златно сечение.



Ако дължината на по-малката отсечка се преме за 1, а дължината на по-голямата за x, тогава е изпълнено

$$\frac{1+x}{x}=\frac{x}{1}\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}61803398\ldots$$

Това число се означава с главната гръцка буква Φ (фи).

Числото Φ е и единственото положително число, което се превръща в реципрочното си, $\frac{1}{\Phi}\approx 0{,}61803398\ldots$, при изваждане на единица.

Φ е границата, към която клони отношението на два последователни члена от редицата на Фибоначи – $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$, при която всеки член след втория е сума от предходните два члена, т.е.

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n.$$

Ако двете страни на горното равенство се разделят с a_n, се получава

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}}{a_n}+1.$$

Нека x да е границата на съотношението на два последователни члена на редицата при $n\to\infty$, т.е.

Едгар Петерс

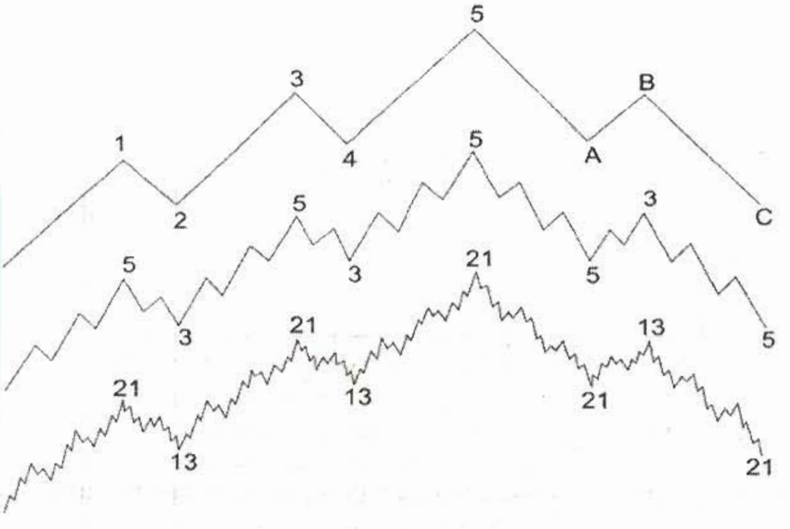
$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Тогава при граничен преход се получава

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \Phi.$$

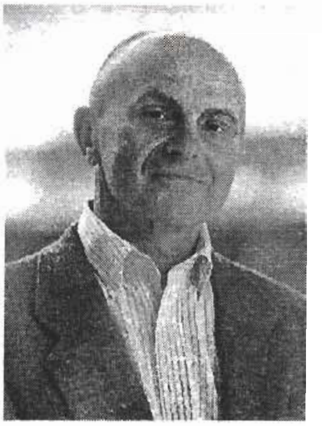
Друга връзка с редицата на Фибоначи е фактът, че след всяко едно прилагане на *вълновия принцип* броят на вълните е равен на някой от членовете на тази редица.

Вълните на Елиът са основа и на "Фракталният генератор" на Беноа Менделбро. Този метод помага да се оцени вероятността за покачване или спад на цените на активите.



В края на 60-те години на 20-ти век професор Юджийн Фама създава "Хипотеза за ефективния пазар". Според твърдението му, цената на търгуваните активи към определен момент отразява цялата налична информация, до която инвеститорите имат достъп. Според хипотезата не е възможно да се надмине пазарната доходност с информацията, която вече е известна, освен чрез късмет. Има много критики към теорията. Две от тях са следните:

- Инвеститорите не възприемат цялата налична информация по един и същ начин. Има разнообразни методи за оценка на компании, които инвеститорите прилагат и биха определили различна справедлива цена на активите.
- Според хипотезата, даден инвеститор не може да постигне по-висока печалба от друг, заради тяхната равна достъпност до информация, което в реалността не е така.



Юджийн Фама

През 2004 г. Едгар Петерс в своята книга „Фрактален анализ на финансовите пазари. Приложение на теорията на хаоса в инвестициите и икономиката" представя хипотеза за фракталност на финансовите пазари като алтернатива на хипотезата за ефективния пазар.

Хипотезата за фракталност на пазарите предполага зависимост на бъдещите цени от техните минали стойности. По този начин, процесът на ценообразуване на пазарите е глобално детерминиран, зависим от „началните условия", т.е. от предишните стойности. От друга страна, този процес е локално случаен, т.е. във всеки момент цената има два варианта на развитие.

Времевите финансови редове са фрактали с фрактална размерност D, като $1 < D < 2$. Поради това те притежават свойството *мащабна инвариантност*.

- Времевите финансови редове винаги имат определена уникална структура. Те имат свойството „памет" за своите начални условия.
- Участниците имат различия във времевите хоризонти на финансовите пазари и способност да извличат онази част от наличната информация, имаща значение за техния времеви хоризонт.
- В момент, когато поради една или друга причина тези времеви хоризонти се доближат, пазарът излиза от устойчивото си състояние на фракталност и навлиза в състояние на срив.

Съгласно хипотезата за фракталност на времевите финансови редове, те са фрактали. Но поради характерната за тях глобална детерминираност и локална случайност, времевите финансови редове представляват стохастични фрактали. Разглеждат се няклко характеристики на стохастичните фрактали – информационна, точкова и корелационна размерност. За да се пресметне фракталната размерност, е необходимо да се избере достатъчно малко δ, да се направи покритие на фрактала с фигури (кръгове, квадрати) с диаметър δ, да се преброи колко такива фигури са необходими за покритието – $N(\delta)$. Така се получава фракталната размерност D като гранично съотношение (при $\delta \to 0$) на $\ln N(\delta)$ и $\ln\frac{1}{\delta}$, т.е.

$$D = \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N(\delta)}{\ln\frac{1}{\delta}}.$$

Информационната размерност се определя по следния начин

$$D_I = \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln I(\delta)}{\ln\frac{1}{\delta}} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i \ln p_i}{\ln\frac{1}{\delta}},$$

където $I(\delta)$ е количеството информация, необходима за определяне на системата с точност δ, $N(\delta)$ – броя на фигурите с диаметър δ, необходими за покритието, p_i – вероятността диаграмата да посети i-тата фигура от покритието.

При точковата размерност се избират достатъчно много точки от диаграмата на времевия финансов ред N_0. Около избрана точка x от диаграмата се построява окръжност с диаметър δ и се преброява колко от избраните точки се оказват вътре в кръга. Този брой е $N(\delta)$ и вероятността е

$$P(\delta) = \frac{N(\delta)}{N_0}.$$

Ако точката x лежи на линия, тогава $P(\delta) \cong \delta$ при $\delta \to 0$ и $N_0 \to \infty$. В общия случай следва

$P(\delta) \cong \delta^{D_p}$, където $D_p(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln P(\delta,x)}{\ln \delta}$.

При корелационната размерност се разглежда покритие на диаграмата на времевия ред чрез фигури с диаметър δ. Избират се по случаен начин две точки, принадлежащи на реда - x_1 и x_2. Вероятността за това една от тези точки да попадне в i-тата фигура от покритието е равна на p_i. Ако попадането и на втората точка в тази фигура може да се счита за независимо събитие, то вероятността двете точки x_1 и x_2 да попаднат в i-тата фигура от покритието е равна на p_i^2. Сумирайки вероятността по всички клетки от покритието, се получава вероятността двете точки да са разделени от разстояние, по-малко от δ:

$$C(\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2.$$

При постепенното намаляване на δ ($\delta \to 0$) тази сума ще намалява по степенен закон

$$C(\delta) \sim \delta^{D_C}.$$

Това е еквивалентно на съществуването на границата

$$D_C = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln C(\delta)}{\ln \delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2}{\ln \delta},$$

където D_C е корелационната размерност.

В продължение на повече от петдесет години изследванията на времеви редове от различен характер (природни, икономически, финансови и др.) се осъществяват на базата на публикуваната от британския учен Харолд Хърст през 1951г. статия „Long-term Storage of Reservoirs". Хърст, по специалност хидролог, в продължение на 40 години наблюдава разливите на река Нил. Той решава следната задача:

"Какъв обем трябва да има водохранилище, за да не се препълва или пресъхва?"

При построяването на модела се използва предположението, че неконтролираната част от постъпващата вода представлява случаен процес с независимо събитие, което е обичайно предположение за всяка голяма система с голям брой степени на свобода. Следвайки получения модел, Хърст създава експонента. Тази статистическа характеристика намира широко приложение при изследването на времеви редове от всякакъв характер, тъй като е изключително устойчива и позволява да се разграничат случайните редове с напълно независими едно от друго нараствания от неслучайните редове. Пресмятането на експонентата се превръща в един от най-популярните методи на фракталния анализ на времевите финансови редове. Експонентата на Хърст се пресмята със следния алгоритъм.

Нека върху дадена величина (например цената на една акция от някакъв вид) са направени наблюденията

$$A = \{A_i\}, \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

където N е броят на наблюденията. Избира се произволен времеви промеждутък $T = n$ и се прави цикъл от $k = 1$ до $k = N - n + 1$. При $k = 1$ се избират първите n наблюдения $A_1, A_2, \dots, A_n$ и се пресмята пълзящата средна M_{1n}. Времевият ред от натрупаните отклонения се определя като

$$X_{1m} = \sum_{i=1}^{m} (A_i - M_{1n}),\ m \leq n.$$

При $k = 2$ се избира серията от наблюдения $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ и се пресмята пълзящата средна M_{2n}. Времевият ред от натрупаните отклонения се определя като

$$X_{2m} = \sum_{i=2}^{m+1} (A_i - M_{2n}).$$

При$k = N - n + 1$ се избира серията от n наблюдения $A_{N-n+1}, A_{N-n+2}, \dots, A_N$ и се пресмята пълзящата средна $M_{(N-n+1)n}$ и натрупаните отклонения

$$X_{(N-n+1)m} = \sum_{i=N-n+1}^{N-n+m} \left(A_i - M_{(N-n+1)n}\right).$$

Получават се $n(N - n)$ на брой натрупани отклонения

$$X_{km}(k = 1,\ 2, \dots, N - n + 1; m = 1,\ 2,\ \dots, n).$$

При следващата стъпка се пресмята размахът на редицата от натрупаните отклонения $\{X_{km}\}$

$$R_n = \max(X_{km}) - \min(X_{km}).$$

За да може да се сравни полученият размах, Хърст предлага да се раздели с пълзящото стандартно отклонение

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N-n+1} (A_i - M_{in})^2.$$

Така се нормира величината R_n. Получава се безразмерната величина $\frac{R_n}{S_n}$, измерваща вариацията на времевия ред. Тя ще расте при нарастването на n до N. Хърст извежда следното съотношение

$$\frac{R}{S} = aN^H,$$

където a е константа, а H е степенният показател на експонентата на Хърст. С други думи, налице е степенният закон

$$\frac{R}{S} \sim N^H.$$

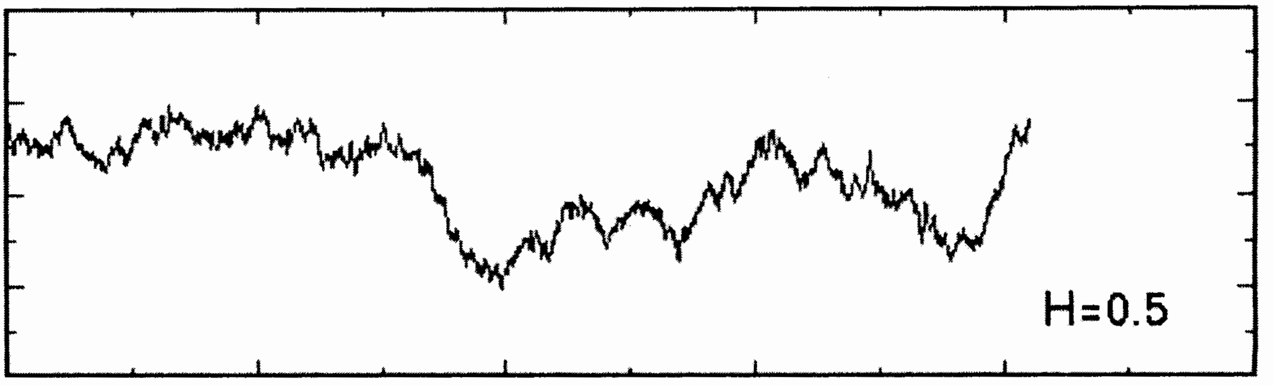
След логаритмуване на горното равенство се получава

$$\ln\frac{R}{S} = H \ln N + \ln a.$$

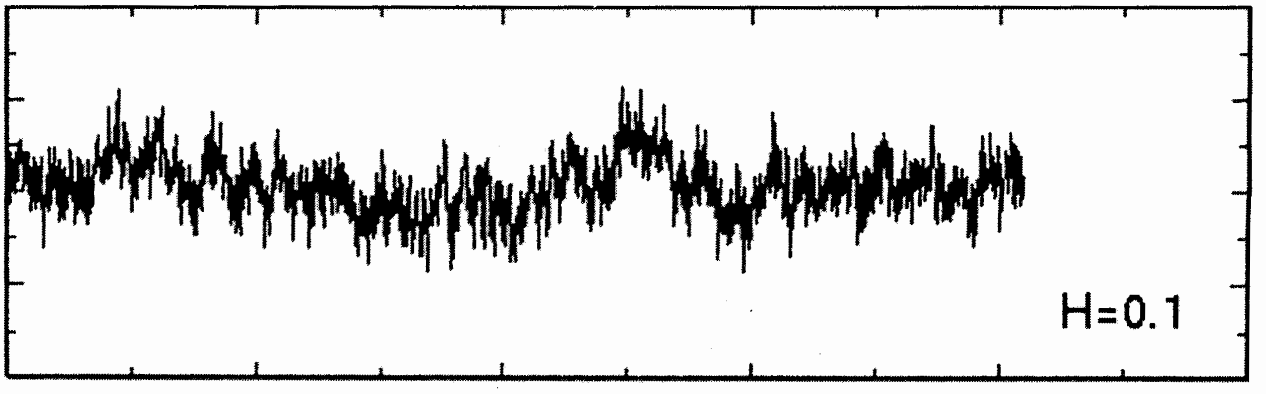
Ако се изменя броят на наблюденията N и се нанесе $\ln N$ на абсцисната ос, а $\ln\frac{R}{S}$ – на ординатната, то след извършване на линейна регресия по метода на най-малките квадрати, ще се получи експонентата на Хърст като тангенс на ъгъла, сключен с абсцисата на получената от регресията права. На графиката често се наблюдава значително отклонение на получаващото се от горната формула H при малки стойности на $\ln N$. Експонентата на Хърст

може да взема следните стойности, означаващи различни степени на постоянство на времевия ред:

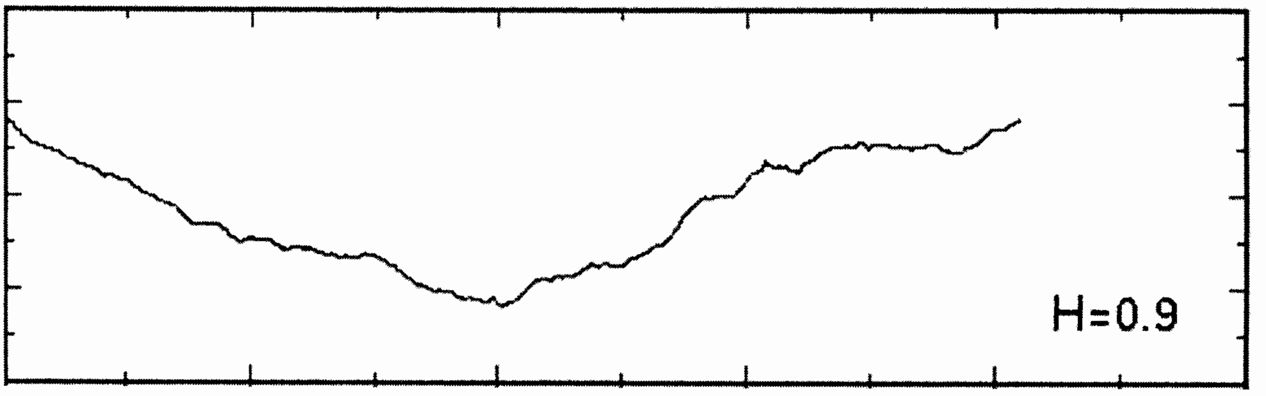
1) $H = 0{,}5$ означава, че времевият ред се получава от редица случайни и независими нараствания. Това е така нареченият „бял шум“, характеризиращ се с максимална хаотичност и минимална прогнозируемост. Мярката за корелация, изчисляваща се по формулата $C = 2^{2H-1} - 1$, е равна на 0, т.е. сегашното състояние не влияе на бъдещето.



2) При $0 \leq H < 0{,}5$ се получава времеви ред, отличаващ се с антипостоянство. Такъв ред се нарича „розов шум“. Ако редът е нараствал в предишен период, то голяма е вероятността той да намалява в следващ период и обратно. Колкото по-близко е H до 0, толкова повече мярката за корелация C се приближава до $-0{,}5$.



3) Случаят $0{,}5 < H \leq 1$ съответства на „черен шум“. Това е времеви ред, отличаващ се с дълготрайна памет. При стойности на експонентата на Хърст, значително по-големи от $0{,}5$, разглежданият времеви ред става трендоустойчив, т.е. ако редът нараства или намалява в предишен период, то голяма е вероятността той да продължава да го прави и в следващ период. Трендоустойчивостта на поведението на времевия ред нараства с приближаването на H към единица, като шумът става все по-малък и той се приближава до състояние на детерминираност и пълна прогнозируемост. При $H = 1$ за мярката на корелативност се получава $C = 1$.



ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Edgar E. Peters, Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics, 2004
2. Стойчо Панчев, Теория на хаоса, 2002
3. гл. ас. Асен Христов, Фрактална теория на финансовите пазари, Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
4. J. Mielniczuk, Estimation of Hurst exponent revisited, 2007
5. Domino, Krzysztof, The use of the Hurst exponent to predict changes in trends on the Warsaw Stock Exchange. Harvard 2011
6. https://habrahabr.ru/post/256381/
7. http://www.ratingsforex.ru/Pokazatel-Hersta-v-treydinge-na-Foreks/
8. http://bgchaos.com/1/fractals/aboutfractals/fractal/
9. http://abc.vvsu.ru/Books/stat_zo/page0004.asp
10. http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/
11. http://analytics-magazine.org/the-hurst-exponent-predictability-of-time-series/
12. http://www.forex911.com/index.php?option=com_content&view=article&id=65&Itemid=73&lang=bg
13. https://www.google.com/finance?q=NASDAQ%3AAAPL&ei=FaGKWMi9N5SCsAGCyZDgCA

HURST EXPONENT IN STOCK EXCHANGES

Abstract. This study expands on summaries of research related to the use of fractals in financial analysis. An algorithm is presented to calculate the Hurst exponent - one of the most popular methods in the fractal analysis of financial time series. Examples of each case arising from the computing of this exponent are shown. In practice, the Hurst exponent is used by various companies, in analyzing the course of their financial assets on the stock market. It is also used by traders on the stock exchanges for predicting future trends.