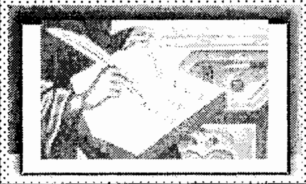

M + СЕМИНАР

НЯКОЛКО ОЛИМПИАДНИ ЗАДАЧИ

д-р Тодор Митев, Русенски университет

В тази статия ще покажем как един елементарен факт (Задача 1) може да се използва при решаването на някои нетривиални задачи.

Задача 1. Нека k, u, v, w са реални числа, за които са изпълнени неравенствата $k \neq 0$ и $S = u + v + w \neq 0$. Да се докаже, че следващите две равенства са еквивалентни:

(1) $$[(k-3)u+3S][(k-3)v+3S][(k-3)w+3S]=(k^2+3k+9)S^3,$$

(2) $$u^3+v^3+w^3=kuvw.$$

Решение: Въвеждаме означенията $P = uv + vw + wu$ и $Q = uvw$. Равенството (1) е еквивалентно последователно със следните равенства:

$$(k-3)^3 Q+3(k-3)^2 PS+9(k-3)S^3+27S^3-(k^2+3k+9)S^3=0,$$

$$(k-3)^3 Q+3(k-3)^2 PS-(k-3)^2 S^3=0.$$

Тъй като $k \neq 3$, последното равенство е еквивалентно с $(k-3)Q+3PS-S^3=0$. Сега използваме известното тъждество:

(3) $$u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)=S^3-3SP.$$

От (3) получаваме, че $(k-3)Q+3Q-u^3-v^3-w^3=0$. Това равенство съвпада с (2).

Задача 2. Целите числа a, b и c нямат общ делител, по-голям от 1 и са такива, че $a^3+b^3+c^3=13abc$. Да се докаже, че:

а) поне едно от числата $M=13a+3b+3c$, $N=3a+13b+3c$ и $P=3a+3b+13c$ се дели на 31;

б) поне едно от числата $A=2a+b+c$, $B=a+2b+c$ и $C=a+b+2c$ се дели на 7.

Решение: Прилагаме задача 1 при $k=13$, $u=a$, $v=b$ и $w=c$. Получаваме, че $MNP=7.31.(a+b+c)^3$, което доказва а). От последното равенство следва още, че $MNP \equiv 0 \pmod 7$, т.е. поне едно от числата M, N и P се дели на 7. Освен това са изпълнени сравненията $3A \equiv M \pmod 7$, $3B \equiv N \pmod 7$ и $3C \equiv P \pmod 7$. Следователно $27.ABC \equiv MNP \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$. Това доказва твърдение б).

Задача 3. Целите числа a, b и c удовлетворяват равенството $a^3+b^3+c^3+6abc=0$. Да се докаже, че $(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$ е точна трета степен на цяло число.

Задача 4 (предложена от автора за МОМ през 2014 г.). Да се докаже, че уравнението $x^2y+y^2z-z^2x=6xyz$ няма решение в множеството на естествените числа.

Решение: Допускаме противното, т.е. уравнението има решение при някои естествени числа x, y и z. Тогава ще стигнем до противоречие със следните твърдения:

(i) Уравнението $a^3+b^3-c^3=6abc$ има решение в множеството на естествените числа;

(ii) От (i) следва, че уравнението $m^3+n^3=p^3$ има решение в множеството на естествените числа, което според голямата теорема на Ферма не е вярно.

Доказателство на (i). Можем да предполагаме, че x, y и z нямат общ делител, който е по-голям от 1. Нека $(x,y)=d$, $x=x_1d$, $y=y_1d$, $(x_1,y_1)=1$. Ясно е, че

(4) $$(z,d)=1.$$

От условието следва, че $x_1^2y_1d^2+y_1^2zd-x_1z^2=6x_1y_1zd$. Тогава d/x_1z^2. Затова според (4) имаме d/x_1, което означава, че $x_1=d.x_2$. Оттук заместваме x_1 в предишното равенство и получаваме

(5) $$x_2^2y_1d^3+y_1^2z-x_2z^2=6x_2y_1zd.$$

Тъй като $(x_2,y_1)=1$, от (5) следва, че x_2/z. Нека $z_2=x_2.z_1$. Тогава след заместване в (5) получаваме

(6) $$x_2y_1d^3+y_1^2z_1-x_2^2z_1^2=6x_2y_1z_1d.$$

От (6) следва, че x_2/z_1. Нека $z_1=x_2.z_2$. Заместваме в (6) и получаваме

(7) $$y_1d^3+y_1^2z_2-x_2^3z_2^2=6x_2y_1z_2d.$$

От (7) следва, че z_2/y_1d^3. Тъй като $(z_2,d)=1$, то z_2/y_1. Нека $y_1=y_2.z_2$. След заместване в (7), както по-горе, получаваме z_2/y_2. Полагаме $y_2=y_3.z_2$ и получаваме $y_3d^3+y_3^2z_2^3-x_2^3=6x_2y_3z_2d$. Оттук следва, че y_3/x_2^3. Но от направените полагания следва, че $(x_2,y_3)=1$. Следователно $y_3=1$. Оттук и последното равенство имаме $d^3+z_2^3-x_2^3=6x_2z_2d$. Това означава, че уравнението

(8) $$a^3+b^3-c^3=6abc$$

има решение $a=d$, $b=z_2$, $c=x_2$, което е в множеството на естествените числа.

Доказателство на (ii). Прилагаме задача 1 в (8) при $k=-6$, $u=a$, $v=b$ и $w=-c$. Получаваме

(9) $$(2a-b+c)(2b-a+c)(a+b+2c)=(a+b-c)^3.$$

Означаваме $A=2a-b+c$, $B=2b-a+c$ и $C=a+b+2c$. Ще докажем, че A, B и C са естествени числа. От (8) следва, че $a^3+b^3=6abc+c^3>c^3$. Затова $a+b>c$. Тогава дясната страна на (9) е положителна. Следователно и лявата страна на (9) е положителна. Тъй като $C=a+b+2c>0$, то A и B имат еднакви знаци. Но $A+B=C=a+b+2c>0$. Следователно A и B също са естествени числа. Тъй като $A+B=C$, то можем да считаме, че числата A, B и C са две по две взаимно прости. Освен това от задача 3 следва, че ABC е куб на естествено число. Следователно съществуват естествени числа m, n и p, при които са изпълнени равенствата $A=m^3$, $B=n^3$ и $C=p^3$. Сега от $A+B=C$ следва, че $m^3+n^3=p^3$. Това противоречи на голямата теорема на Ферма.

Накрая ще направи две забележки.

Забележка 1. Интересно е дали уравнението $k^2+3k+9=p^3$ има други цели решения освен $k=-6$, $p=3$ и $k=3$, $p=3$.

Забележка 2. Да разгледаме следната

Задача 5. Нека числата a, b и c са две по две взаимно прости и е изпълнено равенството $a^3+b^3+c^3=2abc$. Да се докаже, че точно едно от числата $A=-a+b+c$, $B=a-b+c$ и $C=a+b-c$ се дели на 5.

Ако в тази задача приложим задача 1 при $k=2$, получаваме делимост на 19, но не и на 5. Нещо повече, за всички цели стойности на k числото k^2+3k+9 не се дели на 5. Следователно задача 5 не следва от задача 1.

Предлагаме последната задача за упражнение (достъпна е за ученици от осми клас).

SEVERAL OLYMPIAD PROBLEMS

Dr. Todor Mitev, University of Rusea

Abstract. If the real numbers k, u, v, w satisfy the conditions $k\neq 0$ and $S=u+v+w\neq 0$, then the following two equations are equivalent:
$[(k-3)u+3S][(k-3)v+3S][(k-3)w+3S]=(k^2+3k+9)S^3$, and $u^3+v^3+w^3=kuvw$.

This fact is applied in the paper in solving several Olympiad problems.