

ПИСМЕН ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

23 април 2016 г.

НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

„Акад. Б. Чакалов“

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Задача 1. Да се пресметне стойността на израза $A = \frac{\sin \alpha - 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$, ако $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Задача 2. Да се реши уравнението $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}$.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ със страна $AB = 15$ и радиус на вписаната в него окръжност $r = 3$. В ъглите BAC и ABC са вписани окръжности k_1 и k_2 с равни радиуси, като k_1 допира AB в точка P , а k_2 допира AB в точка Q . Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $AP = 4$ и $BQ = 6$.

Задача 4. Да се реши неравенството $\log_2 \frac{x-1}{x-3} - \log_2 \left(\frac{x-1}{x-5} \right)^2 < 0$.

Задача 5. Да се реши уравнението $\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\sin x - \cos x}$.

Задача 6. Да се намери броят на всички трицифрени числа \overline{abc} , за които $a > b > c$.

Задача 7. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $QABCD$ с връх Q , основен ръб $AB = 2$ и околнен ръб $QA = 3$. Нека точка M лежи на околния ръб QC и е такава, че $CM : MQ = 1 : 3$. През точките A, B и M е прекарана равнина, която пресича околния ръб QD в точка N . Да се намери обемът на пирамидата $QABMN$.

Задача 8. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - (\sin m)x - \frac{1}{3} \cos^2 m$, където m е реален параметър. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$, да се намери най-голямата и най-малката стойности на израза $\frac{1}{x_1 + x_2}$, когато m се изменя в интервала $\frac{\pi}{6} \leq m \leq \frac{3\pi}{4}$.