M

помагало за математика и информатика

3-4 / 2017

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

PER ASPERA AD ASTRA
2002

МАТЕМАТИКА +

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

п о м а г а л о   п о   м а т е м а т и к а   и   п р и л о ж е н и я

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 25 (99-100), Number 3-4, 2017

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат 600×840/8 Печатни коли 9
Дадена за печат на 06. 11. 2017 Подписана за печат на 20. 11. 2017 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой на списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието и науката.

Математика плюс
бр. 3-4, 2017

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

Драги читатели,

Оксфордският университет отново оглави класацията за най-добрите висши учебни заведения в света според версията на сп. „*Times Higher Education*" („Таймс хайър едюкейшън"). Оксфордският университет успя да запази лидерската си позиция, която извоюва миналата година за пръв път, сред 1000 висши учебни заведения от 77 страни. На второ място фигурира друг представител на Обединеното Кралство – Университетът в Кембридж. Миналата година той беше класиран четвърти. Трета позиция си разделят две американски учебни заведения – Калифорнийският технически университет и Станфордският университет. По-нататък първата десетка не е претърпяла изменение спрямо класацията от миналата година. Следват Масачузетският технологичен институт (5. място), Харвардският университет (6. място), Принстънският университет (7. място), Импириъл колидж в Лондон (8. място), Чикагският университет (9. място) и класираните на десета позиция Швейцарски федерален технологичен институт и Пенсилванският университет в САЩ.

„*Times Higher Education*" е седмично списание със седалище в Лондон, което публикува специфична информация и новини във връзка с висшето образование. Счита се, че в разглежданата област списанието има водеща позиция във Великобритания.

ТОП-УНВЕРСИТЕТИТЕ ВЪВ ВЕЛИКОБРИТАНИЯ ЗА 2018 Г.

№ по ред в Европа	№ по ред в света	Университет	Град
1	1	University of Oxford	Оксфорд
2	2	University of Cambridge	Кембридж
3	8	Imperial College London	Лондон
4	16	University College London	Лондон
5	25	London School of Economics and Political Science	Лондон
6	27	University of Edinburgh	Единбург
7	36	King's College London	Лондон
8	54	University of Manchester	Манчестър
9	76	University of Bristol	Бристол
10	80	University of Glasgow	Глазгоу
11	91	University of Warwick	Ковънтри
12	97	Durham University	Дюрхам
13	104	University of Sheffield	Шефилд

Д-р М. Плюс

КОНКУРС
ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ

Изпращайте решенията на задачите на адрес

МАТЕМАТИКА ПЛЮС,

ВУЗФ, ул. „Гусла” № 1, 1618 София

През 2018 г. списанието ще излиза само онлайн. Търсете задачите от конкурса на адрес **http://www.matematika-plus.eu/**

Задачи за 4 клас

1. Произведението на 4 различни цифри е 0, а сборът им е равен на най-малкото двуцифрено число. Чрез тези цифри да се образуват най-голямото и най-малкото четирицифрени числа и да се определят сборът и разликата на тези от тях, които са:

а) четни; б) нечетни.

2. Да се определи точният час в момента, ако от 12:00 часà досега са изминали 5 чàса и 34 минути повече, отколкото остават до края на денонощието.

3. На колко най-малко части може да се разреже правоъгълник с размери 9 см и 4 см така, че от частите да се състави квадрат със страна 6 см?

Задачи за 5 клас

1. Дължините на страните в сантиметри на два квадрата са последователни четни естествени числа, а сборът от обиколките им е 2 метра. Да се намери сборът S от лицата на квадратите в квадратни сантиметри и да се установи дали има квадрат с лице S и дължина на страната в сантиметри естествено число.

2. Четвъртокласникът Стефан купил 650 кг банани при цена 2 лв 80 ст за килограм, 800 кг ябълки при цена 1 лв 60 ст за килограм и два кроасана по 88 ст. Стефан платил с една банкнота и получил три монети ресто. Да се определят видът на банкнотата и на монетите.

3. На дъската са записани числата 24 и 75. Разрешава се да се дописват нови числа, които са равни на сумата, разликата или произведението на две числа, които са вече записани.

а) Могат ли по този начин да се запишат числата 2018 и 2019?

б) Ако вместо 24 и 75 на дъската са записани числата 24 и 72, могат ли по този начин да се запишат числата 2016 и 2017?

Задачи за 6 клас

1. Сборът на четири числа е равен на най-малкото четирицифрено число с различни цифри. Ако от първото число извадим 5, към второто прибавим 3, а третото разделим на 2, ще получим едно и също число. Четвъртото число е с 4 по-голямо от второто. Да се намерят четирите числа.

2. Намерете цифрите a, b и c, ако $a+b+c=9$ и $\overline{abc}.7=\overline{b0ca}$.

3. Даден е правоъгълник, който е разделен на четири по-малки правоъгълника A, B, C и D с помощта на успоредни на страните отсечки. Изберете четири числа измежду 27, 44, 52, 64, 125, 176, 208 и 343, които да изразяват лицата на по-малките правоъгълници в квадратни сантиметри.

A	B
C	D

Задачи за 7 клас

1. Намерете петцифрените числа, които са точни квадрати и са с равни две последни цифри.

2. Намерете най-голямото естествено число p така, че $22^{2017}+2^{2017}$ да се дели на 2^p.

3. Дадени са 11 отсечки, чиито дължини в сантиметри се изразяват с различни цели числа, ненадминаващи 100.

а) Да се докаже, че могат да се изберат три от отсечките, с които да се построи триъгълник.

б) Остава ли твърдението в а) вярно, ако вместо 11 отсечките са 10?

Срок за изпращане на решения на задачите от I кръг 10 февруари 2018 г.

М + НАЙ-МАЛКИТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКО ЛЯТО В ОРЯХОВИЦА

Д-р М. Плюс

От 3 до 8 юли 2017 г. в с. Оряховица, в базата на Фондация „Миню Балкански“ се проведе лятната лагер-школа с участието на лауреати от Националния конкурс „Издирване на таланти УМ+“. Школата беше посветена на забавната математика, на усвояване на познания по криптография и на решаване на задачи от конкурса УМ+. Включиха се ученици от Благоевград, Варна, Димитровград, Казанлък, Кюстендил, Нова Загора, София, Стара Загора и от чужбина. Научното ръководство на лагер-школата се осъществи от екип в състав: проф. дпн Сава Гроздев, доц. д-р Росен Николаев, доц. д-р Веселин Ненков, Ирина Шаркова, както и от проф. Мария Шабанова и ас. Мария Павлова от Русия. Гост-лектор на лагер-школата беше Хусам Зенати от Университета *Centrale Supelec (Ecole Centrale)* в Париж.

Веднага след откриването на лагер-школата участниците се разделиха в шест отбора. Тъй като учениците бяха от различни възрастови групи, бе съобразено равномерното им разпределение във всеки отбор. Имената на отборите бяха повече от атрактивни: Балкан, Жълти домати, Не знам – нямам идея, Никарагуанските патриоти, Коледарите и Прецаканите. Програмата включваше лекции в областта на математиката, състезания, игри, спорт, рисуване, театър и др. Отборните състезания бяха Математическа щафета, Моята игра, Карибски пирати, Математическо ориентиране, Шпионски игри. Участниците решаваха олимпиадни задачи и судоку, участваха в турнир по шах и се включиха в конкурса „Нарисувай математиката“, впечатлявайки журито с идеи и умения. По време на официалното закриване на лагер-школата представянето на две театрални пиеси на математически теми остави незабравими спомени, а най-малките математици-актьори наистина развълнуваха всички. Бурните аплодисменти бяха мерило за таланта им! Имаше викторина, много песни и забавления и един лагерен химн, който децата ще помнят завинаги!

Крайното класиране отреди първото място за отбора на „Прецаканите“, Риаз от ПЧМГ стана победител в турнира по шах, а Елица и Рая получиха награди за най-добре подредена стая.

На всички участници в лагер-школата бяха връчени сертификати за отлично представяне.

Скъпи приятели,

Предлагаме ви резултатите от тазгодишния конкурс „Издирване на таланти УМ+“ по класове, като ви припомняме, че всяка от първите 9 задачи се оценяваше по шестобалната система, а Десета задача – с най-много 10 точки. Не публикуваме имената на участниците със слаби резултати.

Ч Е Т В Ъ Р Т И   К Л А С – УМ+ 2017 г.

Калоян Владиславов Цанев (София), 0+0+0+6+5+6+6+6+6+8=43; Катерина Стефанова Стойчева (София), 3+6+0+5+3+6+0+0+0+0=23.

П Е Т И   К Л А С – УМ+ 2017 г.

Красимира Бориславова Дочева (Варна), 5+6+6+6+6+5+6+6+6+10=62; Мария Николаева Дренчева (София), 6+6+5+6+5+6+6+4+6+8=58; Ема Петрова Димова (Враца), 3+6+2+6+6+6+6+6+6+10=57; Лилия Николаева Симова (Враца), 4+6+2+5+4+6+6+6+6+8=53; Ясен Пламенов Пенчев (Габрово), 3+6+2+6+6+6+6+6+6+5=52; Магдалена Тонева Тонева (Монтана), 0+0+0+6+6+5+6+6+6+10=45; Цветомир Николаев Николов (Враца), 3+6+6+6+6+6+0+0+0+0=33; Надя Тихомирова Найденова (Враца), 3+6+5+5+6+5+0+0+0+0=30; Давид Радославов Бочев (Враца), 3+6+2+6+6+6+0+0+0+0=29; Александър Стефанов Стойчев (София), 2+6+1+5+4+4+0+0+0+0=22; Мира Ивайлова Ганчева(София), 2+6+2+0+0+0+0+0+0+0=10; Георги Митков Стратиев (Казанлък), 1+6+2+0+0+0+0+0+0+0=9; Цветина Димитрова Каменова (Мизия), 1+3+1+0+0+0+0+0+0+0=5.

Ш Е С Т И   К Л А С – УМ+ 2017 г.

Маргулан Ерланович Исмолдаев (Варна), 6+5+6+6+6+5+6+6+6+10=62; Георги Станимиров Тончев (Плевен), 5+5+6+6+5+6+6+6+6+10=61; Денис Мустафа Каим (Варна), 2+5+4+6+6+5+5+6+0+0=39; Мирослава Миросвавова Мирчева (Казанлък), 6+6+6+6+6+2+0+0+0+0=32; Никола Николаев Николов (Варна), 1+2+6+4+6+4+0+0+0+0=23; Николета Ценимирова Чапанова (София), 0+6+6+6+0+3+0+0+0+0=21; Огнян Боянов Арсов (Варна), 0+0+0+6+6+6+0+0+0+0=18; Борис Стоянов Стоянов (Варна), 0+0+0+6+6+6+0+0+0+0=18; Десислава Димитрова Димитрова (Димитровград), 6+6+6+0+0+0+0+0+0+0=18; Александър Ангелов Янев (Варна), 0+0+0+6+6+5+0+0+0+0=17; Кристиян Димитров Димитров (Хасково), 1+2+5+0+0+0+4+3+1+0=16; Симеон Ясенов Обретенов (Варна), 0+0+0+6+6+2+0+0+0+0=14; Генади Младенов Колев (Димитровград), 0+6+6+0+0+0+0+0+0+0=12; Мартин Валентинов Петров (Димитровград), 1+6+3+0+0+0+0+0+0+0=10; Анастасия Станиславова Людмилова (Варна), 2+2+6+0+0+0+0+0+0+0=10.

С Е Д М И   К Л А С – УМ+ 2017 г.

Александър Пламенов Проданов (Казанлък), 6+6+6+6+6+6+6+6+6+10=64; Елена Павлинова Вутова (Добрич), 6+6+6+6+6+5+6+6+6+10=63; Георги Цветелинов Игнатов (Враца), 6+6+6+6+6+6+0+0+0+0=36; Гергана Ивова Николаева (Враца), 6+6+6+6+5+6+0+0+0+0=35; Борислав Кирилов Кирилов (София), 6+6+6+0+0+0+0+0+0+0=18; Риаз Шагор Бхуян (София), 6+6+6+0+0+0+0+0+0+0=18.

МЕЖДУНАРОДНИ КОНКУРСИ
ЗА РАЗРАБОТВАНЕ НА ПРОЕКТИ (РЕФЕРАТИ)

(по математика, икономика, финанси, счетоводство, застраховане, осигуряване, бизнес)

В рамките на Международния проект **MITE** (**M**ethodology and **I**nformation **T**echnologies in **E**ducation – Методика и информационни технологии в образованието) през учебната 2017-2018 г. се организират два конкурса – единият за ученици, а вторият – за учители. Научната част на проекта има за цел разработването на методики и съвременни информационни технологии в образованието изобщо. Партньори по проекта са:

- Висше училище по застраховане и финанси (София, България)
- Академия за социално управление (Москва, Русия)
- Факултет по педагогическо образование при Московския държавен университет "М. Ломоносов" (Москва, Русия).
- Сдружение „Европейско кенгуру"

I. Международен конкурс за ученици

II. Международен конкурс за учители

Конкурсите се състоят в разработване на проекти (реферати). В първия конкурс могат да участват ученици (индивидуално или в екип до трима ученици, независимо в кое училище и клас учат) под ръководството на учители и преподаватели. Вторият конкурс е предназначен за учители (индивидуално). Проектите се представят в електронен вид. Те трябва да са оформени като мултимедийни презентации с обем до 20 Mb на MS Power Point или на друг софтуер, който се разпространява свободно. Бонусни точки се присъждат на проекти, в които информатиката и информационните технологии се използват не само в презентацията, а и по същество при решаването на съответната математическа или икономическа задача. Тематичните направления са:

1. Финанси и банково дело (за ученици и учители)
2. Счетоводство и контрол (за ученици и учители)
3. Застраховане и осигуряване (за ученици и учители)
4. Предприемачество (за ученици и учители)
5. История на математиката или икономиката (за ученици)
6. Математиката или икономиката като науки (за ученици)
7. Математика и изкуство (за ученици)
8. Организация на класната работа за повишаване на успеваемостта (за учители)
9. Организация на извънкласната работа на учениците (за учители)
10. Организация на проектната и изследователската дейност на учениците (за учители)

Състезателната част е организирана в три етапа:

- **Задочен** – краен срок за изпращане на разработките е 15 януари 2018 г.

- **Очен (национален)** – през м. февруари 2018 г. (точната дата и мястото на провеждане ще бъдат съобщени допълнително, а допуснатите до Националния кръг ще бъдат информирани в края на м. януари 2018 г.)

- **Международен** – в периода от 1 до 10 май 2018 г. в гр. Москва, Русия

Участието в конкурса става след предварително превеждане на такса правоучастие в размер на 25 (двадесет и пет) лева **на участник** (ако проектът е представен от повече от един участник, като научните ръководители са също участници) или 50 (петдесет) лева на проект (в случай на един участник) в срок до 8 януари 2018 г. по следната банкова сметка:

Математика плюс Х ЕООД
IBAN BG68STSA93 00000 168 3465
BIC STSABGSF
„БАНКА ДСК" ЕАД, клон Гео Милев

Участниците в конкурса (ученици) получават правото на преференциални условия при кандидатстване във ВУЗФ (Висше училище по застраховане и финанси) – Университет по финанси, бизнес и предприемачество. **Те получават и 20% отстъпка от семестриалната такса във ВУЗФ** (виж www.vuzf.bg).

ТАЛОН

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Ако желаете да ползвате правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса, изпратете този талон заедно с проекта.

Имена ....

Адрес ...., e-mail..........

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ....

<u>Изпращане на проектите с краен срок на получаване 15 януари 2017 г.</u>:
По пощата на *CD*, на адрес: ВУЗФ, За конкурса М+, ул. "Гусла" № 1, 1618 София

В придружаващото писмо напишете име на автора(ите), клас, училище, научен ръководител, заглавие на проекта и по кое от направленията е разработката, кратко описание на проекта и указания за работа с файловете (ако е необходимо), а също и възможни начини за връзка (за предпочитане e-mail адрес и мобилен телефон). Контакти и допълнителна информация можете да получите от г-жа Петрова на тел. 0888 438 437

По време на задочния етап ще бъдат избрани най-добрите разработки за участие в очния (национален) етап. Победителите в Националния етап ще бъдат поканени за участие в Международния етап. Националният и Международният етапи се състоят в представяне на всяка разработка в рамките на 10-15 минути (за международния етап на английски или руски език), след което в рамките на 5 минути състезателите отговарят на уточняващи въпроси (включително и по представяния материал). Критериите за оценка на ученическите проекти включват оригиналност, достоверност, атрактивност, ползваемост, оформление. Учителските проекти ще бъдат оценявани за ефективност на представяните идеи и методики, пълнота, дизайн, естетическо оформление, вътрешна съгласуваност и балансираност, стил на презентирането. **Класираните на първите три места в Националния етап на всеки от двата конкурса ще получат дипломи и награди, а останалите участници в Националния етап – грамоти. За първенеца при учениците е осигурен безплатен престой и културна програма по време на Международния етап в Москва.**

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие.
Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+577. Две от цифрите на седемцифреното число N са деветки, а останалите са различни от 9 и по между си. Да се намери най-малкото N, което се дели на всичките си цифри.

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+578. Дадени са четири поредни реда с нули и единици:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Да се определи правилото, по което всеки следващ ред се получава от предходния и да се запише петият ред.

(Росен Николаев, гр. Варна)

М+579. Реалните числа x и y са корени съответно на:

$$8x^5-60x^4+184x^3-288x^2+231x-84=0 \text{ и}$$
$$81y^5-270y^4+378y^3-276y^2+107y-8=0.$$

Да се намери стойността на израза $2x+3y$.

(Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм)

М+580. Точките M, N и P са среди съответно на страните AB, BC и CA на неравнобедрен триъгълник ABC. Ако O е центърът на описаната около ΔMNP окръжност, да се докаже, че O лежи върху ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ тогава и само тогава, когато $\sphericalangle ACB=60^\circ$.

(Тодор Митев, гр. Русе)

М+581. Точката X лежи в равнината на ΔABC, като $\sphericalangle BAC=\alpha$ и $\sphericalangle BXC=x$. Ако Y е точка, за която са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABY=\sphericalangle CBX$ и $\sphericalangle BCY=\sphericalangle ACX$, да се докаже, че $AY=\dfrac{\sin x}{\sin(x-\alpha)}AX$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+582. Основата на четириъгълна пирамида е правоъгълник с периметър $2{,}8\,дм$. Дължините на страните на основата в сантиметри са различни прости числа, а дължината на височината към основата в сантиметри е равна на най-малкото съставно число. В пирамидата са разположени 25 точки, като никои три от тях не лежат на една права и никои четири не лежат в една равнина. Да се докаже, че съществува тетраедър с върхове в някои от тези точки, чийто обем е не по-голям от $5{,}5\,см^3$.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Краен срок за изпращане на решения: 15.04.2018 г.

М + Р Е Ш Е Н И Я

М+556. В трапец $ABCD$ ($AB \| CD$) диагоналите AC и BD се пресичат в точка O, а лицата на триъгълниците ABO, CDO и BCO са съответно a, b и c. Ако е изпълнено равенството $c = a - 6b$, да се намери отношението на голямата основа към малката.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Тъй като $c = \sqrt{ab}$, то $\sqrt{ab} = a - 6b$. Следователно $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} - 6$. Ако $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$, то $x^2 - x - 6 = 0$. Следователно търсеното отношение е $x = 3$, т.е. $3:1$.

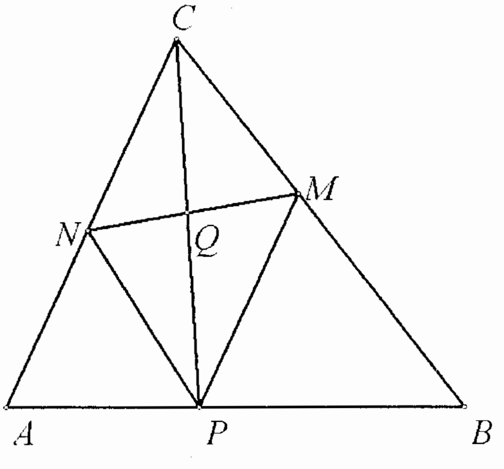
М+557. Точките M, N и P лежат съответно върху страните BC, CA и AB на ΔABC така, че $\sphericalangle ANP = \sphericalangle BMP = \sphericalangle MPN$.

а) Ако $CP \cap MN = Q$, да се намери геометричното място на точката Q, когато P описва страната AB.

б) Да се определи положението на точката P, при което $MN \perp CP$. Да се докаже, че при това положение на P периметърът на четириъгълника $CMPN$ е по-голям от удвоения диаметър на вписаната в ΔABC окръжност.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. От условието следва, че $AN \| PM$ и $BM \| PN$. Следователно четириъгълникът $CMPN$ е успоредник.



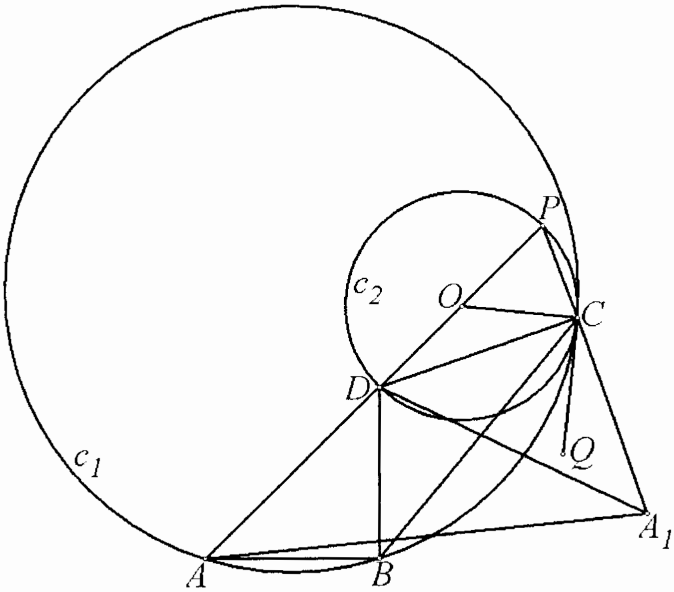
а) Диагоналите на успоредника $CMPN$ се разполовяват от точката Q. Затова, когато P се движи по страната AB, Q описва средната отсечка на ΔABC, която е успоредна на AB.

б) Ако $MN \perp CP$, успоредникът $CMPN$ е ромб, т.е. $CM = MP = PN = CN = x$ и диагоналът CP е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Тъй като $PN \| BC$ и $PM \| AC$, чрез теоремата на Талес изразяваме $\frac{PN}{BC} = \frac{AP}{AB}$ и $\frac{PM}{AC} = \frac{BP}{AB}$. След почленно събиране на тези равенства получаваме $\frac{x}{BC} + \frac{x}{AC} = 1$. Оттук $x = \frac{AC.BC}{AC + BC}$. За лицето S на ΔABC имаме $S = \frac{1}{2}.AC.BC.\sin\sphericalangle ACB$. Тъй като $0 < \sin\sphericalangle ACB \le 1$, то $S \le \frac{1}{2}.AC.BC$. Освен това $AC + BC < AC + BC + AB$. Затова $x > \frac{2S}{AC + BC + AB} = r$. Следователно за периметъра на ромба е изпълнено неравенството $4x > 4r$, което доказва твърдение б).

М+558. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ и $AC.BD = AD.BC$. Точката P лежи върху правата AD така, че D е между A и P и

$\sphericalangle DCP = 90°$. Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците ABC и DCP са допирателни.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)



Решение. Достатъчно е да докажем, че описаните окръжности c_1 и c_2 съответно около ΔABC и ΔDCP имат обща допирателна в точката C. Нека O е средата на PD, а Q е точка в полуравнината, определена от правата CD, съдържаща $ABCD$ така, че $\sphericalangle QCO = 90°$. Правата CQ е допирателна за c_2. Остава да се докаже, че тя се допира до c_1. От свойствата на периферните и вписаните ъгли следва, че е достатъчно да се докаже, че $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$. Тъй като $\sphericalangle DCO = \sphericalangle ODC = 180° - \sphericalangle ADC$, получаваме последователно

$\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCD - \sphericalangle DCB = 90° - (\sphericalangle DCO + \sphericalangle BCD) = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BCD - 90°$,

т.е. $\sphericalangle BCQ = (180° - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD) - \sphericalangle BCD - 90° = 90° - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD - \sphericalangle BCD$. Тогава желаното равенство $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$ е равносилно с равенството $90° - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD - \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC$, т.е (1) $90° - \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. Остава да докажем това равенство. Нека A_1 е точка от продължението на PC така, че $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle ADB$. Понеже $\sphericalangle A_1CD = \sphericalangle ABD = 90°$, то $\Delta ADB \sim \Delta A_1DC$. Оттук $\dfrac{AD}{A_1D} = \dfrac{DB}{DC}$.

От тази пропорция и равенството $\sphericalangle ADA_1 = \sphericalangle BDC$ следва, че $\Delta ADA_1 \sim \Delta BDC$. Затова $\dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$. Но по условие $BC.AD = AC.BD$, което е еквивалентно с $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC}{AD}$. Следователно $\dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{AC}{AD}$, т.е. $AA_1 = AC$. Оттук (2) $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle AA_1C$. Имаме $\sphericalangle ACA_1 = 90° - \sphericalangle ACD$. От друга страна $\Delta ADA_1 \sim \Delta BDC$ и $\Delta A_1DC \sim \Delta ADB$, $\sphericalangle AA_1D = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle DA_1C = \sphericalangle DAB$. Оттук $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle AA_1D + \sphericalangle DA_1C = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. От равенството (2) следва, че $90° - \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. Последното доказва (1). С това задачата е решена.

M+559. Да се реши уравнението $5x^2 + 6y^2 + z^2 - 2zy - 6x + 12y + 9 = 0$, където $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. Преобразуваме лявата страна на уравнението, като отделяме точни квадрати. Получаваме $(z-y)^2 + 5\left(x - \dfrac{3}{5}\right)^2 + 5\left(y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 0$. Следователно са изпълнени едновременно равенствата $z-y=0$, $x-\frac{3}{5}=0$ и $y+\frac{6}{5}=0$. Оттук получаваме, че уравнението има единствено решение $x=\frac{3}{5}$, $y=-\frac{6}{5}$, $z=-\frac{6}{5}$.

М+560. Нека $N=2000^{2000}+2001^{2001}+2002^{2002}+\cdots+2014^{2014}+2015^{2015}+2016^{2016}$. Редицата N, N_1, N_2, ..., N_k е образувана така, че всяко число след първото е получено като сума от цифрите на предишното. Ако k е най-малкото число, при което N_k е едноцифрено число, да се намерят k и N_k.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Първо ще определим стойността на N_k. Числото N_k е остатъкът, който се получава при делението на N с 9. Да отбележим, че ако a е цяло число, което не се дели на 3, то a^6 има остатък 1 при деление на 9. Наистина, тъй като $a^6-1=\left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right)$, то при $a=3n+1$ числото $a^3-1=9n\left(3n^2+3n+1\right)$ се дели на 9, а при $a=3n-1$ числото $a^3+1=9n\left(3n^2-3n+1\right)$ се дели на 9. Оттук следва, че при произволно естествено число u числото a^{6u} има остатък 1 при деление на 9. Освен това, ако $\overline{abcd}$ е произволно четирицифрено цяло число, то има остатък $a+b+c+d$ при деление на 9. Като използваме тези наблюдения получаваме:

$2001^{2001}\equiv 2004^{2004}\equiv 2007^{2007}\equiv 2010^{2010}\equiv 2013^{2013}\equiv 2016^{2016}\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$,

$2000^{2000}\equiv 2^2\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$, $2002^{2002}\equiv 4^4\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$, $2003^{2003}\equiv 5^5\equiv 2(\mathrm{mod}\,9)$,

$2005^{2005}\equiv 7^1\equiv -2(\mathrm{mod}\,9)$, $2006^{2006}\equiv 8^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$, $2008^{2008}\equiv 1^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$,

$2009^{2009}\equiv 2^5\equiv 5\equiv -4(\mathrm{mod}\,9)$, $2011^{2011}\equiv 4^1\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$, $2012^{2012}\equiv 5^2\equiv 7\equiv -2(\mathrm{mod}\,9)$,

$2014^{2014}\equiv 7^4\equiv 7\equiv -2(\mathrm{mod}\,9)$, $2015^{2015}\equiv 8^5\equiv 8\equiv -1(\mathrm{mod}\,9)$.

Следователно $N_k\equiv N\equiv 4+4+2-2+1+1-4+4-2-2-1\equiv 5(\mathrm{mod}\,9)$, т.е. $N_k=5$.

Сега ще намерим стойността на k. Тъй като за всяко четирицифрено число $\overline{abcd}$ е изпълнено $\overline{abcd}<10000$, то $\overline{abcd}^{2016}<10000^{2016}$. Броят на цифрите на 10000^{2016} е равен на $1+4.2016=8065$. Следователно броят на цифрите на $\overline{abcd}^{2016}$ не надминава 8065. Ако две числа имат по 8065 цифри, то сумата им е число с най-много 8066 цифри. Следователно сумата на четири числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8067 цифри. Оттук следва, че сумата на осем числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8068 цифри. Следователно сумата на шестнадесет числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8069 цифри. Накрая получаваме, че сумата на седемнадесет числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8070 цифри. Следователно числото N има не повече от 8070 цифри. Най-голямото число, което има 8070 цифри, е числото X, състоящо се от 8070 деветки. Сумата от цифрите на X е $8070.9=72630$. Следователно $N_1<72630$. Числото, което е по-малко от 72630 и има най-голяма сума на цифрите си, е 69999. Затова за сумата N_2 от цифрите на N_1 е изпълнено неравенството $N_2<6+4.9=42$. Числото, което е по-малко от 42 и има най-голяма сума на цифрите си, е 39. Затова за сумата N_3 от цифрите на N_2 е изпълнено неравенството $N_3\le 3+9=12$. Тъй като $5=N_k\le N_3$ и сумата от цифрите на всяко от числата 10, 11 и 12 е по-малка от 5, то $N_3=5$. Оттук следва и предположението, че $k=3$. Не е изключена обаче и възможността да е изпълнено равенството $k=2$. Тази възможност се отхвърля по следния начин: Нека

$$A=2001^{2001}+2004^{2004}+2007^{2007}+2010^{2010}+2013^{2013}+2016^{2016} \text{ и } B=N-A.$$

Числото A се дели на 9 и затова е изпълнено равенството $A=9.C$, където $C\geq 1$. Следователно сумата от цифрите на A е поне 9. Ако сумата от цифрите на B е равна на m, то за сумата от цифрите на N получаваме $N_1\geq 9+m$. Тъй като $m\geq 1$, то N_2 е двуцифрено число (както беше показано по-горе, то е по-малко от 42). Следователно $k=3$. Така окончателно получаваме, че $k=3$ и $N_3=5$.

M+561. Ако α_1, α_2 и α_3 са ъглите на триъгълник $A_1A_2A_3$, да се докаже неравенството:

$$3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)\geq$$

$$\geq\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)^2+3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)^2.$$

В кои случаи се достига равенство?

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. Разглеждаме матрицата $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3\\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и нейната транспонирана $A^T=\begin{pmatrix}\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 1\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 1\\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 1\end{pmatrix}$. За произведението на тези матрици получаваме

$$A.A^T=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\\ \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\\ \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i & \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i & 3\end{pmatrix}.$$

Тъй като $\det(A.A^T)=(\det A)^2\geq 0$, то след пресмятане на детерминантата на $A.A^T$ се получава

$$3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)^2-3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)^2\geq 0,$$

което е еквивалентно с желаното неравенство. Равенство се получава тогава и само тогава, когато $\det(A)=0$, т.е.

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_1\sin\alpha_2-\cos\alpha_2\sin\alpha_3-\cos\alpha_3\sin\alpha_1=0.$$

Това равенство е еквивалентно с $\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}=0$, което означава, че $\alpha_1=\alpha_2$, $\alpha_2=\alpha_3$ или $\alpha_3=\alpha_1$. Следователно в неравенството се достига равенство тогава и само тогава, когато $A_1A_2A_3$ е равнобедрен триъгълник.

М+562. В окръжност с диаметър d са построени n успоредни хорди A_kB_k $(k=1,2,\ldots,n)$, които пресичат диаметър PQ съответно в точките M_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Ако диаметърът PQ е такъв, че са изпълнени равенствата $A_kM_k^2+B_kM_k^2=S$ $(k=1,2,\ldots,n)$, да се намерят всички цели стойности на n и d, при които $n.S=2016$.

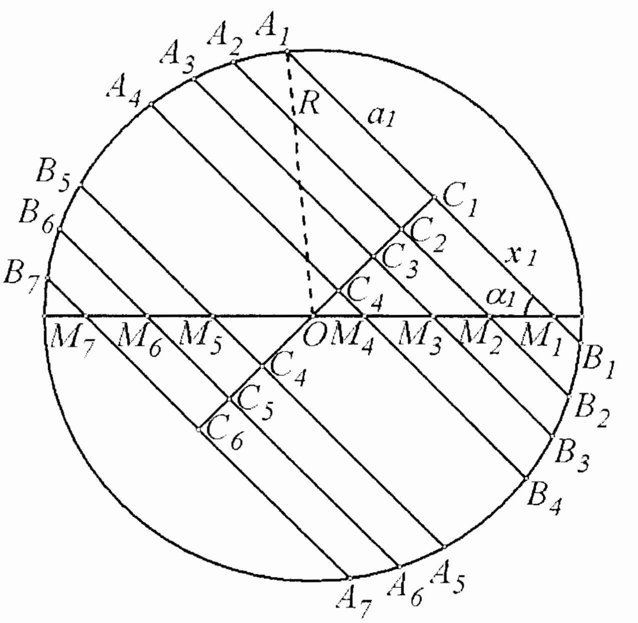
(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека дадената окръжност има център O и радиус R, а C_k е средата на A_kB_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Въвеждаме означенията $A_kC_k=a_k$, $OC_k=p_k$, $C_kM_k=x_k$ и $\sphericalangle A_kM_kO=\alpha_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Тогава

$$S=A_kM_k^2+B_kM_k^2=(a_k+x_k)^2+(a_k-x_k)^2=2(a_k^2+x_k^2).$$

Тъй като $a_k^2+p_k^2=R^2$ и $a_k=p_k ctg\alpha_k$, то $S=2\left[R^2+p_k^2\left(ctg^2\alpha_k-1\right)\right]$ $(k=1,2,\ldots,n)$. От последното равенство следва, че S е постоянна величина само когато $ctg^2\alpha_k-1=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Следователно $\alpha_k=45°$ или $\alpha_k=135°$. При такива ъгли имаме $S=2R^2=\frac{d^2}{2}$. Сега равенството $n.S=2016$ преминава в $n.d^2=4032$. Тъй като $4032=4032.1^2=1008.2^2=252.4^2=63.8^2=448.3^2=112.6^2=28.12^2=7.24^2$, то търсените целочислени решения са осем и те могат да се обобщят в следващата таблица:

d	1	2	3	4	6	8	12	24
n	4032	1008	448	252	112	63	28	7



М+563. Точката P лежи върху страната AB на остроъгълния триъгълник ABC, а M и N са петите на перпендикулярите, спуснати от P съответно към BC и AC. Да се определи положението на P, когато: а) MN има най-малка дължина; б) лицето на ΔMNP е най-голямо; в) сборът от квадратите на MP и NP е най-малък.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. а) От условието следва, че четириъгълникът $CMNP$ е вписан в окръжност с диаметър CP. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. От синусовата теорема за ΔCMN имаме $MN = CP.\sin\gamma$. Следователно MN има най-малка дължина, когато CP е с най-малка дължина. Това се случва, когато $CP \perp AB$, т.е. P е петата на височината през върха C върху страната AB.

б) Тъй като $\sphericalangle MPN = 180° - \gamma$, то $S_{MNP} = \frac{1}{2}MP.NP.\sin\gamma$. От друга страна $S_{BCP} + S_{ACP} = S_{ABC}$, т.е. $\frac{1}{2}BC.PM + \frac{1}{2}AC.PN = \frac{1}{2}BC.AC.\sin\gamma$. Сега от неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва

$$PM.PN = \frac{BC.PM.AC.PN}{BC.AC} \le \frac{1}{BC.AC}\left(\frac{BC.PM + AC.PN}{2}\right)^2 =$$

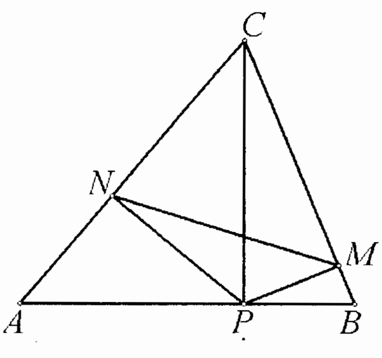
$$= \frac{1}{BC.AC}\left(\frac{1}{2}.BC.AC.\sin\gamma\right)^2 = \frac{1}{4}.BC.AC.\sin^2\gamma.$$

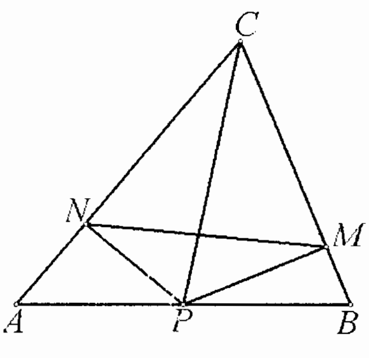
Оттук $S_{MNP} \le \frac{1}{8}MP.NP.\sin^3\gamma$. Следователно най-голямата стойност на S_{MNP} е равна на $MP.NP.\sin^3\gamma$ и се достига, когато $BC.PM = AC.PN$, т.е. $S_{BCP} = S_{ACP}$. Последното равенство показва, че най-голямата стойност на S_{MNP} се получава, когато P е средата на AB.

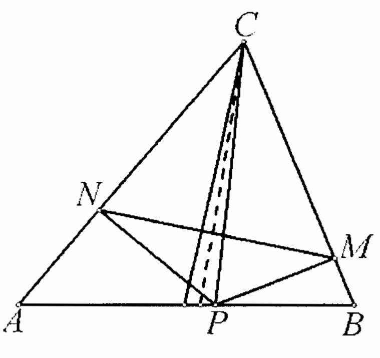
в) От неравенството но Коши-Буняковски-Шварц имаме

$$(BC^2 + AC^2)(MP^2 + NP^2) \ge (BC.MP + AC.NP)^2.$$

Оттук $MP^2 + NP^2 \ge \frac{4S_{ABC}^2}{BC^2 + AC^2}$. Следователно най-малката стойност на $MP^2 + NP^2$ се получава, когато $AC.MP = BC.NP$. Ако $CD \perp AB$ и $C \in AB$, то $S_{ACP} = \frac{1}{2}AC.MP = \frac{1}{2}AP.CD$ и $S_{BCP} = \frac{1}{2}BC.MP = \frac{1}{2}BP.CD$. От тези равенства намираме $PN = \frac{AP.CD}{AC}$ и $PM = \frac{BP.CD}{BC}$. Следователно $\frac{BP}{AP} = \frac{BC^2}{AC^2}$. Последното равенство означава, че сумата $MP^2 + NP^2$ е най-малка, когато CP е симедианата на ΔABC през върха C.







M+564. Точките O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник ABC. Ако M и N са точки съответно от страните AC и BC, така че $\sphericalangle MHN = \sphericalangle ACB$, да се докаже, че ортогоналните проекции на O и H върху правата MN лежат върху Ойлеровата окръжност на ΔABC и е изпълнено равенството $\sphericalangle MON = 180° - 2\sphericalangle ACB$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. В решението на задачата ще използваме следната:

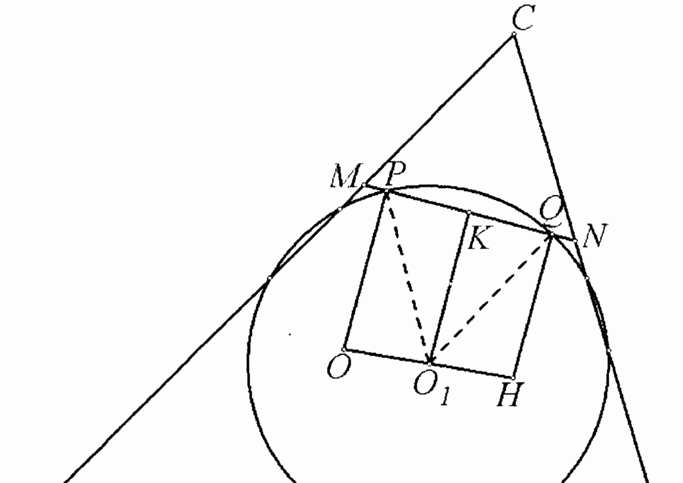
Лема. Ако X е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник $ABCD$, а H_1, H_2, H_3 и H_4 са ортогоналните проекции на X съответно върху AB, BC, CD и DA, то четириъгълникът $H_1H_2H_3H_4$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180°$.

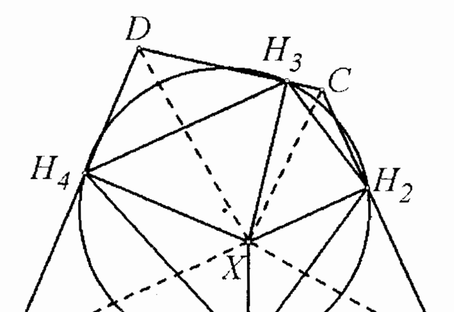
Доказателство. Тъй като четириъгълниците AH_1XH_4, H_4XH_3D, H_3XH_2C и H_2XH_1B са вписани, то $\sphericalangle H_4H_1X = \sphericalangle H_4AX$, $\sphericalangle H_2H_1X = \sphericalangle H_2BX$, $\sphericalangle H_4H_3X = \sphericalangle H_4DX$ и $\sphericalangle H_2H_3X = \sphericalangle H_2CX$. Оттук имаме

$$\sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 = (\sphericalangle H_4H_1X + \sphericalangle H_2H_1X) + (\sphericalangle H_4H_3X + \sphericalangle H_2H_3X) =$$
$$= (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_2BX) + (\sphericalangle H_4DX + \sphericalangle H_2CX) = (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_4DX) + (\sphericalangle H_2BX + \sphericalangle H_2CX) =$$
$$= (180° - \sphericalangle AXD) + (180° - \sphericalangle BXC) = \sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD.$$

Следователно условието $\sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 = 180°$ за вписаност на $H_1H_2H_3H_4$ е еквивалентно с $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180°$. С това лемата е доказана.

Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$, а P и Q са ортогоналните проекции съответно на M и N върху OH. От равенствата $\sphericalangle AHB = 180° - \gamma$ и $\sphericalangle MHN = \gamma$ следва, че $\sphericalangle AHB + \sphericalangle MHN = 180°$. Сега от лемата следва, че ортогоналните проекции на H върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на една окръжност k. Но тази окръжност минава през петите на височините на ΔABC. Следователно k е Ойлеровата окръжност на ΔABC. Оттук получаваме, че $Q \in k$. Нека O_1 е центърът на k, а K е ортогоналната проекция на O_1 върху OH. Тъй като O_1 е среда на OH, то O_1K е средна основа в правоъгълния трапец $HOPQ$. Затова $O_1P = O_1Q$. Но $Q \in k$ и следователно $P \in k$. Оттук следва, че ортогоналните проекции на O върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на k. Сега от лемата следва, че $\sphericalangle AOB + \sphericalangle MON = 180°$, т.е. $\sphericalangle MON = 180° - 2\gamma$. С това задачата е решена.





СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2017

Д-р М. Плюс

Поредната 58. международна олимпиада по математика се проведе в Рио де Жанейро, Бразилия от 12 до 23 юли 2017 г. В нея взеха участие 615 ученици (553 момчета и 62 момичета) от рекордните 111 държави (досегашният рекорд беше 109 държави през миналата година на олимпиадата в Хонг Конг). Както обикновено, регламентът предвиждаше приблизително половината състезатели да получат медали, като златните, сребърните и бронзовите да са (също приблизително) в отношение $1:2:3$. Журито на олимпиадата в Бразилия разпредели общо 291 медала, от които 48 златни с долна граница 25 точки вкл., 90 сребърни с граници от 19 до 24 точки вкл. и 153 бронзови с граници от 16 до 18 точки вкл. Българският отбор заслужи 4 сребърни и 2 бронзови медала, което е в рамките на незадоволителните представяния през последните 10 години. Той беше в състав: Иван Ганев (от Американски коллеж с учител д-р Борислава Кирилова), Виолета Найденова (от СМГ "П. Хилендарски" с учител Стойчо Стоев), Константин Гаров (от ПМГ „Н. Обрешков", Бургас с учител Магдалена Янева), Кирил Бангачев (от СМГ "П. Хилендарски" с учител Румяна Караджова), Атанас Динев (от ПМГ „Н. Обрешков", Бургас с учител Динко Раднев) и Христо Папазов (от Американски колеж с учител Десислава Йорданова). В отборното класиране по точки делим 18–21. място (миналата година 22–26. място) с Италия, Холандия и Сърбия, а по медали делим 25–26. място със Сърбия. Спечелените общо 116 точки характеризират един от най-слабите точкови резултати на българския отбор за всички негови участия в международни олимпиади. Дъното е през 2015 г. – 100 точки и през 2013 г. – 101 точки при същото "научно" ръководство на лаборантите от Лабораторията на Пазарджишкия доносник.

Победители в тазгодишната олимпиада са трима ученици, постигнали по 35 точки от максималните 42 – по един от Иран, Япония и Виетнам (и тримата с 0 точки на трета задача). По-долу са резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.

IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2017 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

Име	Място по точки	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Общо точки	Медал
Иван Ганев	64–71	7	7	0	7	0	2	23	сребърен
Виолета Найденова	82–102	7	7	0	7	0	0	21	сребърен
Константин Гаров	115–138	5	7	0	7	0	0	19	сребърен
Кирил Бангачев	115–138	7	4	0	7	1	0	19	сребърен
Атанас Динев	188–264	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
Христо Папазов	188–264	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
ОБЩО	18–21	40	31	0	42	1	2	116	

58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2017 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Южна Корея	6	42	39	1	42	22	24	170	1	6	0	0
Китай	6	42	25	0	42	19	31	159	2	5	1	0
Виетнам	6	42	36	0	42	21	14	155	3	4	1	1
САЩ	6	42	29	0	42	23	12	148	4	3	3	0
Иран	6	42	32	0	42	17	9	142	5	2	3	1
Япония	6	41	21	0	42	23	7	134	6	2	2	2
Сингапур	6	42	26	0	37	22	4	131	7-8	2	1	2
Тайланд	6	41	30	0	42	17	1	131	7-8	3	0	2
Тайван	6	40	31	0	42	7	10	130	9-10	1	4	1
Великобритания	6	42	17	5	42	8	16	130	9-10	3	0	2
Русия	6	42	26	7	37	8	8	128	11	1	3	2
Грузия	6	42	22	0	42	18	3	127	12-13	1	2	3
Гърция	6	42	33	0	42	9	1	127	12-13	1	4	1
Беларус	6	40	23	1	42	16	0	122	14-16	1	1	4

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Чехия	6	42	26	4	34	16	0	122	14-16	1	2	2
Украйна	6	42	30	0	36	10	4	122	14-16	1	2	2
Филипини	6	42	25	0	42	11	0	120	17	0	3	3
България	**6**	**40**	**31**	**0**	**42**	**1**	**2**	**116**	**18-21**	**0**	**4**	**2**
Италия	6	42	22	0	34	18	0	116	18-21	2	1	1
Холандия	6	41	21	0	39	15	0	116	18-21	1	2	1
Сърбия	6	40	30	0	42	4	0	116	18-21	0	4	2
Унгария	6	40	22	0	34	16	3	115	22-24	2	1	1
Полша	6	39	23	0	42	9	2	115	22-24	1	0	5
Румъния	6	42	17	0	42	9	5	115	22-24	0	3	2
Казахстан	6	40	18	0	35	15	5	113	25	1	2	1
Аржентина	6	40	20	0	42	9	0	111	26-28	1	2	1
Бангладеш	6	42	17	0	42	10	0	111	26-28	0	2	2
Хонг Конг	6	42	20	0	23	26	0	111	26-28	1	1	3
Канада	6	42	22	0	37	1	8	110	29	1	2	2
Перу	6	38	27	0	42	1	1	109	30	0	2	3
Индонезия	6	40	22	0	42	4	0	108	31	0	2	3
Израел	6	40	33	0	30	1	3	107	32	0	3	2
Германия	6	41	16	0	34	15	0	106	33	0	1	3
Австралия	6	42	10	8	31	11	1	103	34	0	3	2
Хърватия	6	38	25	0	37	2	0	102	35-36	0	2	3
Турция	6	40	15	0	42	4	1	102	35-36	0	1	3
Бразилия	6	40	17	0	37	6	1	101	37-38	0	2	1
Малайзия	6	40	17	0	42	2	0	101	37-38	0	2	2
Франция	6	41	11	0	32	16	0	100	39-40	0	2	2
Саудитска Арабия	6	40	17	0	36	7	0	100	39-40	0	2	2
Армения	6	41	18	0	38	2	0	99	41	0	2	2
Азербайджан	6	37	19	0	42	0	0	98	42	0	0	4
Мексико	6	42	13	0	39	2	0	96	43	0	1	2
Босна и Херцеговина	6	41	15	0	39	0	0	95	44-45	0	0	4
Таджикистан	6	40	13	0	42	0	0	95	44-45	0	0	3

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	об що	място	зл.	ср.	бр.
Макао	6	39	10	0	36	9	0	94	46-47	1	0	0
Нова Зеландия	6	42	8	0	42	2	0	94	46-47	0	0	3
Кипър	6	42	15	0	36	0	0	93	48-50	0	0	5
Монголия	6	37	12	0	42	1	1	93	48-50	0	1	2
Туркменистан	6	40	11	0	42	0	0	93	48-50	0	0	2
Швеция	6	42	13	0	27	8	1	91	51	0	1	2
Индия	6	42	18	0	30	0	0	90	52-53	0	0	3
Словения	6	42	16	0	32	0	0	90	52-53	0	0	2
Португалия	6	39	19	0	28	3	0	89	54	0	0	2
Испания	6	41	20	0	25	0	0	86	55	0	0	3
Сирия	6	33	10	0	42	0	0	85	56	0	1	0
Латвия	6	39	8	0	24	13	0	84	57	0	0	3
Молдова	6	38	11	0	27	7	0	83	58-59	0	1	0
Швейцария	6	42	9	0	22	10	0	83	58-59	0	0	1
Колумбия	6	41	2	0	35	3	0	81	60-61	0	0	1
Южна Африка	6	41	7	0	27	6	0	81	60-61	0	0	2
Белгия	6	39	14	0	23	3	1	80	62-64	0	1	2
Ирландия	6	36	8	0	34	2	0	80	62-64	0	0	2
Шри Ланка	6	42	8	0	30	0	0	80	62-64	0	0	3
Дания	6	41	5	0	27	4	0	77	65-66	0	0	1
Македония	6	35	6	0	36	0	0	77	65-66	0	0	1
Киргизстан	6	34	4	0	35	2	0	75	67-69	0	0	2
Мароко	6	37	13	0	25	0	0	75	67-69	0	0	1
Словакия	6	40	4	0	26	5	0	75	67-69	0	0	1
Австрия	6	40	5	0	15	14	0	74	70	0	2	0
Естония	6	40	14	0	16	2	0	72	71	0	1	0
Норвегия	6	38	11	0	17	5	0	71	72	0	0	2
Алжир	6	28	11	0	31	0	0	70	73	0	0	1
Литва	6	41	7	0	20	1	0	69	74-75	0	0	2
Узбекистан	5	16	18	0	35	0	0	69	74-75	0	1	0
Албания	6	41	4	0	22	0	0	67	76-77	0	0	1

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	об що	място	зл.	ср.	бр.
Чили	6	36	5	0	26	0	0	67	76-77	0	0	1
Еквадор	6	38	6	0	20	2	0	66	78	0	0	1
Тунис	5	28	3	0	28	0	0	59	79-80	0	0	1
Венецуела	5	29	4	0	24	2	0	59	79-80	0	0	2
Коста Рика	6	34	1	0	23	0	0	58	81-82	0	0	0
Пакистан	6	23	6	0	29	0	0	58	81-82	0	0	1
Ел Салвадор	4	25	5	0	25	2	0	57	83	0	0	1
Финландия	6	40	4	0	10	1	1	56	84	0	0	0
Косово	5	29	1	0	22	2	1	55	85-86	0	0	1
Пуерто Рико	5	33	3	0	19	0	0	55	85-86	0	0	0
Нигерия	4	21	5	0	25	0	0	51	87	0	0	0
Парагвай	6	35	1	0	12	0	0	48	88	0	0	0
Исландия	6	31	5	0	9	0	0	45	89-90	0	0	0
Люксембург	6	27	1	0	15	2	0	45	89-90	0	0	1
Никарагуа	4	17	4	0	22	1	0	44	91	0	0	1
Уругвай	6	37	0	0	6	0	0	43	92	0	0	0
Черна Гора	4	21	4	0	10	7	0	42	93	0	0	1
Боливия	6	24	0	0	17	0	0	41	94	0	0	0
Лихтенщайн	3	19	0	0	3	0	0	22	95-96	0	0	0
Уганда	6	6	5	0	11	0	0	22	95-96	0	0	0
Гватемала	4	12	0	0	6	2	0	20	97	0	0	0
Боствана	6	8	1	0	10	0	0	19	98	0	0	0
Мианмар	6	2	2	0	11	0	0	15	99-101	0	0	0
Панама	1	7	3	0	5	0	0	15	99-101	0	0	0
Тринидад и Тобаго	1	7	1	0	7	0	0	15	99-101	0	0	0
Куба	1	5	1	0	7	0	0	13	102-103	0	0	0
Ирак	4	11	0	0	2	0	0	13	102-103	0	0	0
Хондурас	2	6	0	0	6	0	0	12	104	0	0	0
Камбоджа	6	1	0	0	10	0	0	11	105-106	0	0	0
Кот д'Ивоар	6	2	2	0	7	0	0	11	105-106	0	0	0
Кения	6	3	0	0	3	2	0	8	107	0	0	0

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	об що	място	зл.	ср.	бр.
Гана	1	5	0	0	1	0	0	6	108	0	0	0
Танзания	2	4	0	0	1	0	0	5	109	0	0	0
Египет	3	2	0	0	1	0	0	3	110-111	0	0	0
Непал	6	0	1	0	2	0	0	3	110-111	0	0	0

Ето задачите от 58-ата международна олимпиада по математика:

Вторник, 18 юли 2017 г.

Задача 1. За всяко естествено число $a_0 > 1$ е дефинирана редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ по следния начин:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, \text{ ако } \sqrt{a_n} \text{ е цяло число} \\ a_n + 3 \quad \text{в противен случай} \end{cases}, \text{ където } n \geq 0 \text{ е цяло число.}$$

Да се намерят всички стойности на a_0, за които съществува такова число A, че $a_n = A$ за безброй много стойности на n.

(*предложена от Стефан Вагнер, Южна Африка*)

Задача 2. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които $f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$ за всеки две реални числа x и y.

(*предложена от Дорлир Ахмети, Албания*)

Задача 3. Ловец и невидим заек играят следната игра в равнината. Началните точки A_0 и B_0, съответно на заека и ловеца, съвпадат. Нека след n хода на играта заекът и ловецът се намират съответно в точките A_n и B_n. По време на $(n+1)$-ия ход се изпълняват последователно следните три условия:

(i) Заекът, оставайки невидим, се придвижва до точка A_{n+1}, разстоянието от която до A_n е точно 1.

(ii) Проследяващо устройство докладва на ловеца някаква точка P_{n+1}, за която гарантира, че е на разстояние най-много 1 от A_{n+1}.

(iii) Оставайки видим, ловецът се придвижва до точка B_{n+1}, разстоянието от която до B_n е точно 1.

Винаги ли е възможно ловецът, независимо как се движи заекът и независимо какви точки докладва проследяващото устройство, да избере своите ходове така, че да е сигурен , че след 10^9 хода разстоянието между него и заека да е най-много 100?

(*предложена от Герхард Воегингер, Австрия*)

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Сряда, 19 юли 2017 г.

Задача 4. Нека R и S са различни точки от окръжност Ω, като отсечката RS не е диаметър. Нека правата l се допира до Ω в точка R, а T е такава точка, че S е средата на отсечката TR. Точката J е избрана върху малката дъга $\overset{\frown}{RS}$ на Ω така, че описаната окръжност Γ около ΔJST пресича l в две различни точки, по-близката от които до R е означена с A. Ако K е втората обща точка на правата AJ и окръжността Ω, да се докаже, че правата KT се допира до Ω.

(предложена от Чарлз Лейтем, Люксембург)

Задача 5. Група от $N(N+1)$, $N \geq 2$, футболни играчи, никои двама от които не са еднакво високи, е подредена в редица. Сър Алекс иска да извади от редицата $N(N-1)$ играчи така, че за оставащите $2N$ играчи да са изпълнени следните N условия:

(1) няма играч между двамата най-високи;

(2) няма играч между третия и четвъртия по височина;

……..

(N) няма играч между двамата най-ниски.

Да се докаже, че това е винаги възможно.

(предложена от Григорий Челноков, Русия)

Задача 6. Наредената двойка от цели числа (x, y) е *примитивна*, ако най-големият общо делител на x и y е равен на 1. Дадено е крайно множество S от примитивни двойки. Да се докаже, че съществуват естествено число n и цели числа a_0, a_1, …, a_n така, че за всяка двойка (x, y) от S е изпълнено:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(предложена от Джон Берман, САЩ)

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Решение на задача 1.

Случай 1. $a_0 \equiv 0 (\bmod 3)$

Ще докажем, че ако k е произволно естествено число, то $a_0 = 3k$ е решение на задачата. Ще използваме индукция по k. Ако $k=1$, то $a_0 = 3$ и следващите членове на редицата са 6, 9, 3, 6, 9, …т.е. редицата е периодична с период 3. Следователно $a_0 = 3$ е решение на задачата. Забелязваме, че ако $k=1$, то всяко $a_0 \leq (3.1)^2 = 9$, което се дели на 3, е решение на задачата. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое k, т.е. всяко $a_0 \leq (3.k)^2$, което се дели на 3, е решение на задачата. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$, т.е. всяко $a_0 \leq (3.(k+1))^2$, което се дели на 3, е също решение на задачата. Нека a_0 се дели на 3 и $(3.k)^2 \leq a_0 \leq (3.(k+1))^2$. Ако $a_0 < (3.(k+1))^2$, прибавяме последователно тройки към a_0, докато стигнем до $(3.(k+1))^2$ и съгласно условието получаваме $3.(k+1)$ като член на редицата. Единственото, което трябва да проверим, е, че $3.(k+1) < (3.k)^2$, за да приложим индуктивното предположение. Последното е еквивалентно с $k+1<3k^2$, за което лесно се проверява, че е изпълнено при $k>1$.

Случай 2. $a_0 \equiv 2 \pmod 3$

Този случай не води до решение, защото точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 3. Това означава, че всеки член на редицата се получава от предходния с прибавянене на 3 и следователно редицата е строго монотонно растяща.

Случай 3. $a_0 \equiv 1 \pmod 3$

Ще докажем, че ако k е произволно естествено число, то $a_0 = 3k+1$ не е решение на задачата. Ще използваме индукция по k. Ако $k=1$, то $a_0 = 4$ и следващият член на редицата е 2, което води до случай 2. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое k, т.е. всяко $a_0 \le (3k+1)^2$, което дава остатък 1 при деление на 3, води до член на редицата a_n, който дава остатък 2 при деление на 3. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$, т.е. всяко $a_0 \le (3.(k+1)+1)^2 = (3k+4)^2$, което дава остатък 1 при деление на 3, води до член на редицата a_n, който дава остатък 2 при деление на 3. Нека a_0 дава остатък 1 при деление на 3 и $(3k+1)^2 \le a_0 \le (3k+4)^2$. Ако $a_0 < (3k+4)^2$, прибавяме последователно тройки към a_0, докато стигнем до $(3k+4)^2$ и съгласно условието получаваме $3k+4$ като член на редицата. Единственото, което трябва да проверим, е, че $3k+4 < (3k+1)^2$, за да приложим индуктивното предположение. Последното е еквивалентно с $3k^2+k-1>0$, за което (както и в случай 1) лесно се проверява, че е изпълнено при $k>1$.

Окончателно, решенията на задачата са всички a_0, които се делят на 3.

Решение на задача 2.

Случай 1. $f(0)=0$

Като положим $y=0$, получаваме $f\left(f(x)f(0)\right)+f(x+0)=f(0)$ и следователно $f(0)+f(x)=f(0)$, т.е. $f(x)=0$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. Обратно, директно се проверява, че функцията $f(x)=0$ е решение на задачата.

Случай 2. $f(0)\neq 0$

Като положим $x=y=0$, получаваме $f\left(f(0)f(0)\right)+f(0)=f(0)$, откъдето $f(f^2(0))=0$. Сега ще намерим корените на уравнението $f(x)=0$. Ще покажем, че $f(1)=0$. Да допуснем противното, т.е. $f(1)\neq 0$ и нека $c\neq 1$ е корен, т.е. $f(c)=0$. Като положим $x=\dfrac{c}{c-1}$ и $y=c$, получаваме $f\left(f\left(\dfrac{c}{c-1}\right)f(c)\right)+f\left(\dfrac{c}{c-1}+c\right)=f\left(\dfrac{c}{c-1}\cdot c\right)$, откъдето $f\left(f\left(\dfrac{c}{c-1}\right).0\right)+f\left(\dfrac{c^2}{c-1}\right)=f\left(\dfrac{c^2}{c-1}\right)$ и следователно $f(0)=0$, което е противоречие с разглеждания случай 2. Заключаваме, че наистина $f(1)=0$. Нещо повече, от доказаното следва, че $x=1$ е единственият корен на уравнението $f(x)=0$. Но по-горе показахме, че $f(f^2(0))=0$. Заключаваме, че $f^2(0)=1$ и следователно $f(0)=-1$ или $f(0)=1$.

Вариант 1. $f(0)=-1$

Най-напред ще покажем, че ако $c\neq 0$, то $f(c)\neq -1$. Да допуснем противното, т.е. $f(c)=-1$. Като положим $x=c$ и $y=1$, получаваме $f(f(c)f(1))+f(c+1)=f(c)$, откъдето

$-1+f(c+1)=-1$, т.е. $f(c+1)=0$ и следователно $c+1=1$, т.е. $c=0$, което е противоречие. Заключаваме, че във вариант 1 уравнението $f(x)+1=0$ има единствено решение $x=0$.

По-нататък, като положим $y=1$, получаваме $f(f(x)f(1))+f(x+1)=f(x)$, откъдето $f(0)+f(x+1)=f(x)$ и следователно $f(x+1)=f(x)+1$. Сега по индукция лесно следва, че $f(x+n)=f(x)+n$ за $\forall x\in\mathbb{R}$ и всяко естествено число *n*. Изпълнено е също $f(x-n)=f(x)-n$ за $\forall x\in\mathbb{R}$ и всяко естествено число *n*. Наистина, $f(x)=f(x-n+n)=f(x-n)+n$, т.е. $f(x)=f(x-n)+n$, откъдето $f(x-n)=f(x)-n$.

Ще докажем, че ако $f(x)$ е решение на задачата, то $f(x)$ е инективна функция. Нека $f(a)=f(b)$. Тогава $f(a)+n=f(b)+n$ и от доказаното по-горе следва, че $f(a+n)=f(b+n)$ за всяко естествено число *n*. Да разгледаме квадратното уравнение $x^2-(a+n)x+(b+n-1)=0$. Неговата дискриминанта е $D=(a+n)^2-4(b+n-1)$ и тя е очевидно по-голяма от нула за достатъчно големи стойности на *n*. Следователно, за достатъчно големи стойности на *n* разглежданото квадратно уравнение има два различни реални корени *r* и *s*. От формулите на Виет имаме $r+s=a+n$ и $rs=b+n-1$. Сега, като положим $x=r$ и $y=s$, получаваме $f(f(r)f(s))+f(r+s)=f(rs)$, откъдето $f(f(r)f(s))+f(a+n)=f(b+n-1)$, т.е. $f(f(r)f(s))+f(a)+n=f(b)+n-1$. Следователно $f(f(r)f(s))=-1$ и заключаваме, че $f(r)f(s)=0$, защото сме във вариант 1. Тогава $f(r)=0$ или $f(s)=0$, т.е. $r=1$ или $s=1$. Нека без ограничение $r=1$. Сега формулите на Виет дават $1+s=a+n$ и $1.s=b+n-1$. От тези две равенства следва, че $1+b+n-1=a+n$ и следователно $a=b$, което показва, че наистина функцията е инективна.

Да положим $y=-x$. Получаваме $f(f(x)f(-x))+f(0)=f(-x^2)=f(-x^2+1-1)$, т.е. $f(f(x)f(-x))-1=f(-x^2+1)-1$. Следователно $f(f(x)f(-x))=f(-x^2+1)$ и с помощта на инективността заключаваме, че $f(x)f(-x)=-x^2+1$. Но като положим $y=1-x$, получаваме $f(f(x)f(1-x))+f(1)=f(x(1-x))$, откъдето $f(f(x)f(1-x))=f(x(1-x))$ и $f(x)f(1-x)=x(1-x)$, т.е. $f(x)(f(-x)+1)=x-x^2$ и $f(x)+f(x)f(-x)=x-x^2$. Последното заедно с полученото по-горе дава $f(x)-x^2+1=x-x^2$, т.е. $f(x)=x-1$ за $\forall x\in\mathbb{R}$. Лесно се проверява, че получената функция е решение на задачата.

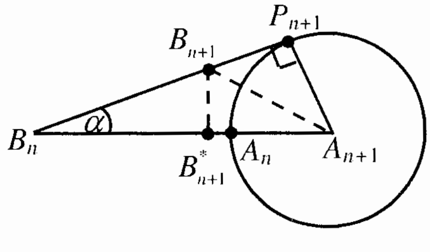
Вариант 2. $f(0)=1$

Този вариант може да се разгледа по аналогичен начин и той води до трето решение на задачата $f(x)=1-x$. До същия резултат достигаме и директно, като забележим, че ако $f(x)$ е решение на задачата, то и функцията $-f(x)$ е също решение.

Окончателно, задачата има 3 решения: $f(x)=0$, $f(x)=x-1$ и $f(x)=1-x$.

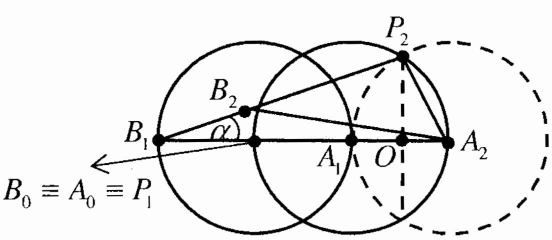
Решение на задача 3.

Да уточним, че при всеки ход най-напред се премества заекът, след това проследяващото устройство дава съответна информация и ходът завършва с преместване на ловеца. С P_n ще означаваме докладваната точка от проследяващото устройство при *n*-ия ход. Нека $d_n=B_nA_n$ е разстоянието между ловеца и заека след *n*-ия ход. Тъй като заекът се стреми да се отдалечава максимално от ловеца, той би следвало да се движи по правата между него и ловеца. В резултат на преместването на заека при $(n+1)$-ия ход до точка A_{n+1} ($A_nA_{n+1}=1$), проследяващото устройство посочва точка (съгласно условието на задачата) в затворен кръг с радиус 1 и център – местоположението A_{n+1} на заека. Ако стратегията на ловеца е да се движи по права линия по посока на посочената от проследяващото устройство точка P_{n+1}, то новото местоположение на ловеца е в точка $B_{n+1} \in B_n P_{n+1}$, за която $B_n B_{n+1} = 1$. Нека $B_n P_{n+1}$ е допирателна към кръга с радиус 1 и център A_{n+1}, а α е ъгълът между $B_n A_{n+1}$ и $B_n P_{n+1}$. От правоъгълния $\Delta B_n A_{n+1} P_{n+1}$ имаме $\sin\alpha = \frac{1}{d_n + 1}$. Ако B^*_{n+1} е проекцията на B_{n+1} върху $B_n A_{n+1}$, то



$B_n B^*_{n+1} = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{(d_n+1)^2}}$. Тогава $B^*_{n+1} A_{n+1} = d_n + 1 - \sqrt{1-\frac{1}{(d_n+1)^2}}$. От правоъгълния $\Delta A_{n+1} B_{n+1} B^*_{n+1}$ (хипотенузата е по-голяма от катета) заключаваме, че за новото разстояние d_{n+1} между ловеца и заека е изпълнено $d_{n+1} = B_{n+1} A_{n+1} \geq d_n + 1 - \sqrt{1-\frac{1}{(d_n+1)^2}}$. Това е възможно най-голямото разстояние между ловеца и заека след $(n+1)$ -ия ход при положение, че заекът следва най-добрата своя стратегия, защото стойността на α е възможно най-голяма именно в случая, когато $B_n P_{n+1}$ е допирателна към кръга. Тук отчитаме, че тогава стойността на $\cos\alpha$ е възможно най-малка, т.е. стойността на проекцията $B_n B^*_{n+1}$ е възможно най-малка и следователно $B^*_{n+1} A_{n+1}$, а оттук и стойността на d_{n+1} е възможно най-голяма.

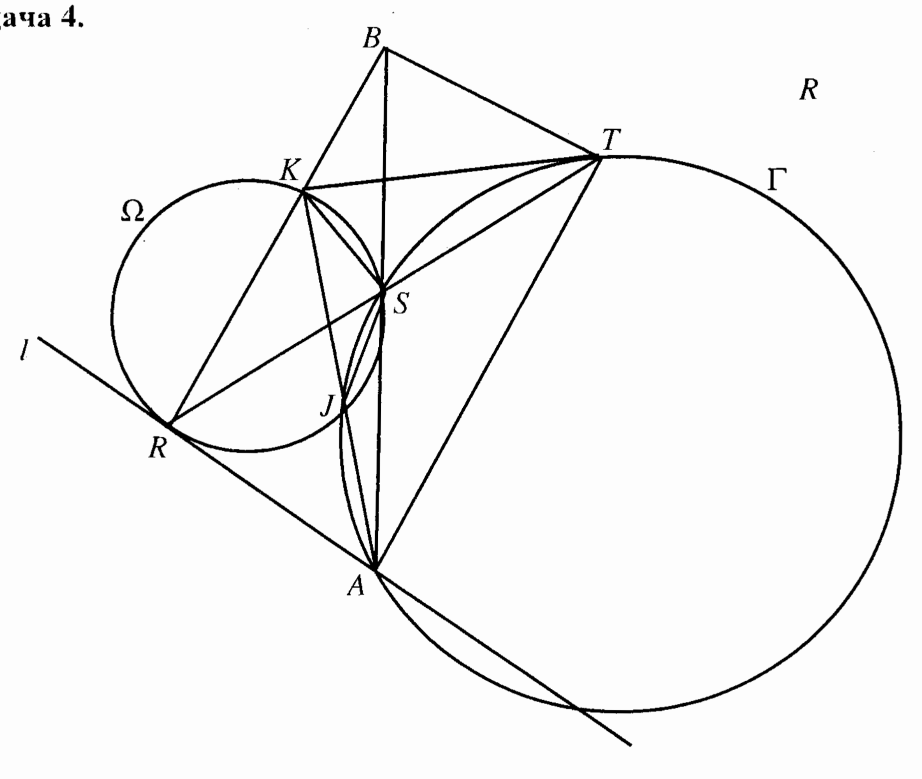
Интересно е да се съобрази какво би се случило при първия ход на заека и ловеца. В началния момент $A_0 \equiv B_0$. Най-неизгодно за ловеца е, ако той тръгне в посока, противна на посоката на заека. Тогава $d_1 = B_1 A_1 = 2$ и можем да считаме, че играта започва оттук. По отношение на проследяващото устройство най-неизгоден за ловеца е случаят, когато проследяващото устройство докладва точката P_1 така, че тя да съвпада с $A_0 \equiv B_0$.



Тъй като търсим стратегия за ловеца независимо от ходовете на проследяващото устройство, можем да считаме, че P_2 е върху симетралата на отсечката $A_1 A_2 = 1$. Ако O е средата на $A_1 A_2$, то $A_1 O = O A_2 = \frac{1}{2}$. От друга страна, P_2 трябва да лежи в кръг с радиус 1 и център A_2. Нека P_2 е пресечната точка на симетралата на A_1A_2 и окръжността с радиус 1 и център A_2. Пресечните точки са 2, но без ограничение разглеждаме отбелязаната точка P_2 на чертежа. Тогава $\Delta A_1A_2P_2$ е равностранен и следователно P_2 лежи и на окръжността с радиус 1 и център A_1. Запазваме означението α, както по-горе, за ъгъла между правата, определена от местоположението на ловеца и заека от една страна, както и правата, определена от местоположението на ловеца и точката P_2. Тъй като $OP_2 = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $B_1P_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(d_1+\frac{1}{2}\right)^2}$, от правоъгълния ΔB_1OP_2 намираме $\cos\alpha = \dfrac{d_1+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(d_1+\frac{1}{2}\right)^2}}$.

От косинусовата теорема за $\Delta B_1A_2B_2$ имаме $d_2 = B_2A_2 = \sqrt{1+(d_1+1)^2-2(d_1+1)\cos\alpha}$. Като използваме, че $d_1 = 2$, лесно стигаме, до $B_2A_2 \approx 2{,}081$. Ако на мястото на $d_1 = 2$ поставим $d_k = 100$, по аналогичен начин пресмятаме $d_k \approx 100{,}000037$, т.е. разстоянието между ловеца и заека нараства приблизително с 0,000037. Тогава $100:0{,}000037 \approx 2\ 700\ 000$, което е значително по-малко от 10^9. Заключаваме, че при повече от 2 700 000 хода разстоянието между ловеца и заека ще се увеличи още повече, което означава, че отговорът на задачата е отрицателен.

Решение на задача 4.



Ще докажем, че $RK \parallel AT$. Тъй като $\angle SJK = \angle STA$ (четириъгълникът $ATSJ$ е вписан в Γ) и $\angle SJK = \angle KRS$ (измерват се с една и съща дъга от Ω), то $\angle STA = \angle KRS$ и следователно наистина $RK \parallel AT$. Нека правата през T, която е успоредна на l, пресича RK в точка B. Тогава четириъгълникът $RATB$ е успоредник. Средата на диагонала AB е среда и на диагонала RT, откъдето следва, че точките A, S и B са колинеарни. Ще докажем, че около четириъгълника $KSTB$ може да се опише окръжност. Това следва от равенството на ъглите STB и RKS. Наистина, $\angle STB = \angle ARS$ (кръстни ъгли) и $\angle RKS = \angle ARS$ (измерват се с една и съща дъга от Ω). Имаме още, че $\angle ABK = \angle BAT$ (кръстни ъгли). Сега от факта, че четириъгълникът $KSTB$ е вписан, следва, че $\angle STK = \angle ABK$. Тогава $\angle STK = \angle BAT$ и получаваме, че дъгите от Γ, с които тези ъгли се измерват, са равни. Това е възможно само когато KT е допирателна към Γ, което трябваше да се докаже.

Решение на задача 5.

Да номерираме играчите с числата от 1 до N така, че на по-висок играч да съответства по-голям номер. Ще посочим индуктивен алгоритъм, който води до решение на задачата. Да разпределим играчите по произволен начин на N групи по $N+1$ играчи. От всяка група ще изберем по двама играчи така, че да са изпълнени исканите от сър Алекс условия:

1. Разглеждаме групата, която съдържа най-ниския играч и го отделяме от тази група заедно със следващия по височина играч в тази група. Това са двамата играчи от тази група. Изваждаме от редицата останалите в групата играчи и приключваме с тази група.
2. От всяка от останалите групи изваждаме най-ниския играч. По този начин получаваме $N-1$ групи с по N играчи и постъпваме по описания вече начин.

Ще проверим алгоритъма за конкретни стойности на N.

<u>Нека</u> $N=2$.

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5 и 6. По произволен начин разпределяме тези числа в 2 групи по трима, например така:

3	4	6

1	2	5

Дясната група съдържа най-малкото число 1 (най-ниския играч) и затова отделяме от нея двете най-малки числа **<u>1 и 2</u>**, а изваждаме оставащото 5 от редицата. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 3 от първата група. Оставащите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 4, 6, 1 и 2. Лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

<u>Нека</u> $N=3$.

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. По произволен начин разпределяме тези числа в 3 групи по четирима, например така:

2	5	7	8

1	6	9	12

3	4	10	11

Средната група съдържа най-малкото число 1 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **<u>1 и 6</u>**, а изваждаме оставащите две числа 9 и 12 от редицата. С това приключваме с втората група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 2 от първата група и най-малкото число 3 от третата група. Получаваме 2 групи с по трима играчи и свеждаме задачата до случая $N=2$. Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 5, 7, 8, 4, 10 и 11.

5	7	8

4	10	11

Втората група съдържа най-малкото число 4 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **4 и 10**, а изваждаме оставащото число 11 от редицата и приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 5 от първата група. Оставащите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 7, 8, 4 и 10. Тези числа, заедно с вече избраните 1 и 6, определят търсените числа 7, 8, 1, 6, 4 и 10, за които лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

Нека $N = 4$.

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20. Разпределяме тези числа в 4 групи по петима, например така:

1	4	5	16	19

3	7	10	17	18

2	9	12	13	14

6	8	11	15	20

Първата група съдържа най-малкото число 1 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **1 и 4**, а изваждаме оставащите 5, 16 и 19 от редицата, с което приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 3 от втората група, най-малкото число 2 от третата група и най-малкото число 6 от четвъртата група. Получаваме 3 групи с по четирима играчи и свеждаме задачата до случая $N = 3$. Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 7, 10, 17, 18; 9, 12, 13, 14; 8, 11, 15 и 20.

7	10	17	18

9	12	13	14

8	11	15	20

Първата група съдържа най-малкото число 7 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **7 и 10**, а изваждаме оставащите 17 и 18 от редицата. По този начин приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 9 от втората група и най-малкото число 8 от третата група. Получаваме 2 групи с по трима играчи и свеждаме задачата до случая $N = 2$. Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 12, 13, 14; 11, 15 и 20.

12	13	14

11	15	20

Втората група съдържа най-малкото число 11 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **11 и 15**, а изваждаме оставащото число 20 от редицата и приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 12 от първата група. Другите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 13, 14, 11 и 15. Тези числа, заедно с вече избраните 1, 4, 7 и 10 определят търсените числа 1, 4, 7, 10, 13, 14, 11 и 15, за които лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

Оставяме на читателя да обоснове алгоритъма при индуктивната стъпка в общия случай от N към $N-1$.

Решение на задача 6.

Да обърнем внимание, че търсеният полином е хомогенен, т.е. всеки едночлен в него е от степен n по отношение на променливите x и y. Най-напред ще разгледаме простия случай, когато множеството S съдържа само един елемент (x_1, y_1), за който НОД$(x_1, y_1) = 1$. От Лемата на Безу следва, че съществуват цели числа a_0 и a_1, за които $a_0x_1 + a_1y_1 = 1$. За хомогенен полином с цели коефициенти, който търсим, можем да вземем хомогенния полином от първа степен $g(x, y) = a_0x + a_1y$ и задачата е решена. За пълнота и за улеснение на читателя ще дадем общата формулировка на Лемата на Безу (Етиен Безу (1730–1783) е френски математик).

Лема на Безу. (известна още като *Тъждество на Безу*). Ако x и y са цели ненулеви числа, то съществуват цели числа a и b така, че $ax + by =$ НОД(x, y).

При това НОД(x, y) е най-малкото естествено число, което може да се представи във вида $ax + by$. Освен това, всяко цяло число от вида $ax + by$ е кратно на НОД(x, y). Важно е да се отбележи, че намирането на целите числа a и b (наричани *коефициенти на Безу*) може да стане с помощта на алгоритъма на Евклид за намиране на НОД, като в случая на коефициенти на Безу алгоритъмът е известен като *разширен алгоритъм на Евклид*. Например, да намерим най-напред НОД(17,12) с алгоритъма на Евклид:

Стъпка 1. Делим 17 (по-голямото число) на 12 (по-малкото) и получаваме $17 = 12.1 + 5$;

Стъпка 2. Делим делителя 12 от предната стъпка с остатъка 5 от предната стъпка и получаваме $12 = 5.2 + 2$;

Стъпка 3. Делим делителя 5 от предната стъпка с остатъка 2 от предната стъпка и получаваме $5 = 2.2 + 1$;

Стъпка 4. Делим делителя 2 от предната стъпка с остатъка 1 от предната стъпка и получаваме $2 = 2.1 + 0$.

Процесът спира до получаване на остатък 0, което в разглеждания пример се реализира в стъпка 4. Последният различен от нула остатък задава търсения НОД. В нашия случай НОД (17,12) = 1. Разширяването на алгоритъма на Евклид касае определянето на коефициентите на Безу, което става на ходове по следния начин:

Ход 1. Изразяваме последния различен от нула остатък от стъпка 3 и получаваме $1 = 5 - 2.2$;

Ход 2. Изразяваме остатъка 2 от предната стъпка 2 и го заместваме в предния ход. Получаваме $2 = 12 - 5.2$ и $1 = 5 - (12 - 5.2).2 = 5 - 12.2 + 5.4 = 5(1 + 4) - 12.2 = 2 = 5.5 - 12.2$.

Ход 3. Изразяваме остатъка 5 от предната стъпка 1 и го заместваме в предния ход. Получаваме $5 = 17 - 12.1$ и $1 = 5.5 - 12.2 = 5.(17 - 12.1) - 12.2 = 5.17 - 12.5 - 12.2 = 5.17 - 7.12$.

Окончателно тъждеството на Безу е $5.17 - 7.12 = 1$, а коефициентите на Безу са 5 и -7.

Приключваме с отклонението по Лемата на Безу и се връщаме към решението на задача 6. Ще използваме индукция по броя на елементите на S. Да допуснем, че за m двойки (x_i, y_i) $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$, за които НОД $(x_i, y_i) = 1$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$, съществува хомогенен полином $g(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$ от степен $n > 0$ така, че $g(x_i, y_i) = 1$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$. Ще докажем, че за всяко S с $m+1$ примитивни двойки съществува хомогенен полином $f(x, y)$, за който $f(x_i, y_i) = 1$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ m,\ m+1)$.

Нека $g(x,y)$ е хомогенният полином от степен $n>0$, който съществува съгласно индуктивното предположение за първите m примитивни двойки и нека

$$f(x,y)=\left(g(x,y)\right)^M-Cx^{Mn-m}\prod_{i=1}^{m}(y_ix-x_iy),$$

където M и C са подходящи константи. Да обърнем внимание, че $f(x,y)$ се състои от 2 части, всяка от които е хомогенен полином. Освен това, очевидно $f(x_i,y_i)=1$ ($i=1,\ 2,\ ...,\ m$), след като $g(x_i,y_i)=1$ ($i=1,\ 2,\ ...,\ m$).

Ще разгледаме два случая.

Случай 1. $(x_{m+1},y_{m+1})=(1,0)$, която е очевидно примитивна двойка.

Имаме $f(1,0)=\left(g(1,0)\right)^M-C\prod_{i=1}^{m}y_i$. Тъй като $g(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+...+a_ny^n$, то $f(1,0)=\left(a_0\right)^M-C\prod_{i=1}^{m}y_i$. Ако $a_0=1$, можем да вземем $M=1$, $C=0$ и очевидно $f(1,0)=1$, с което задачата е решена. Затова по-нататък в случай 1 ще считаме, че $a_0\neq 1$.

Да забележим, че $1=g(x_i,y_i)\equiv a_0x_i^n(\text{mod }y_i)$. Заключаваме, че съществува цяло число *k*, за което $a_0x_i^n=ky_i+1$. Оттук следва, че НОД $(a_0,y_i)=1$. Това дава възможност при търсене на константите M и C така,че $f(1,0)=\left(a_0\right)^M-C\prod_{i=1}^{m}y_i$, да използваме Ойлеровата функция φ, наричана още *тотиента*. Нека $M=\varphi\left(\prod_{i=1}^{m}y_i\right)$. От теоремата на Ойлер-Ферма следва, че $a_0^{\varphi\left(\prod_{i=1}^{m}y_i\right)}\equiv 1\left(\text{mod}\prod_{i=1}^{m}y_i\right)$, защото a_0 е взаимно просто с всички y_i, а следователно и с тяхното произведение. Сега за C е достатъчно да вземем $C=\dfrac{\left(a_0\right)^M-1}{\prod_{i=1}^{m}y_i}$. Тогава $f(1,0)=1$ и задачата е решена.

Разбира се, ако някоя от примитивните двойки (x_i,y_i) ($i=1,\ 2,\ ...,\ m,\ m+1$) е двойката $(1,0)$, можем да преномерираме двойките и да считаме, че $(x_{m+1},y_{m+1})=(1,0)$, така че задачата е решена. Остава да разгледаме случая, когато нито една от примитивните двойки не е двойката $(1,0)$, т.е.

Случай 2. $(x_i,y_i)\neq(1,0)$, ($i=1,\ 2,\ ...,\ m,\ m+1$).

За първите m примитивни двойки прилагаме отново индуктивното предположение и използваме споменатия по-горе хомогенен полином $g(x,y)$ от степен $n>0$. Тъй като НОД$(x_{m+1},y_{m+1})=1$, от Лемата на Безу следва, че съществуват цели числа t и s, за които $tx_{m+1}+sy_{m+1}=1$. Да разгледаме матрицата $\begin{pmatrix} t & s \\ -y_{m+1} & x_{m+1}\end{pmatrix}$. Нейната детерминанта е $tx_{m+1}+sy_{m+1}=1$ и е различна от 0, което означава, че матрицата е обратима, т.е. тя има обратна матрица. С помощта на горната матрица дефинираме трансформация T на точки от равнината (x,y) в точки от равнината (u,v). Обръщаме внимание, че T е изоморфизъм, т.е. T е взаимно еднозначно съответствие между двете равнини. Имаме

$$(u,v)=T(x,y)=\begin{pmatrix} t & s \\ -y_{m+1} & x_{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ където } u=tx+sy \text{ и } v=-y_{m+1}x+x_{m+1}y.$$

Образите се получават по правилото за умножаване на матрици. Трансформацията T преобразува хомогенния полином $g(x,y)$ в хомогенен полином $g^*(u,v)$ на променливите u и v. При това забелязваме, че $T(x_{m+1},y_{m+1})=(1,0)$. Използвайки доказаното по-горе, можем да конструираме хомогенен полином $f^*(u,v)$, който с обратната трансформация T^{-1} се преобразува в хомогенен полином $f(x,y)$, изпълняващ исканите условия. С това задачата е решена и в този случай.

Предлагаме упражнение върху описания алгоритъм с два типични примера в случая $m=2$.

Пример 1. $(x_1,y_1)=(17,12)$, $(x_2,y_2)=(1,0)$

При обсъждането на Лемата на Безу намерихме коефициентите на Безу за примитивната двойка $(17,12)$. По-точно видяхме, че $5.17-7.12=1$ и следователно коефициентите на Безу са $(5,-7)$. Можем да използваме линейния хомогенен полином $g(x,y)=5x-7y$ и да конструираме $f(x,y)=(5x-7y)^M-Cx^{M.1-1}(12x-17y)$. Имаме $f(17,12)=1$ и $f(1,0)=5^M-C.12$. От друга страна $\varphi(12)=\varphi(2^2.3)$ и като използваме правилото за пресмятане стойностите на Ойлеровата функция с помощта на каноничното разлагане на съответния аргумент, намираме $\varphi(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4$. Тогава $M=\varphi\left(\prod_{i=1}^{m}y_i\right)=\varphi(12)=4$ и $C=\frac{5^4-1}{12}=\frac{624}{12}=52$. Окончателно

$$f(x,y)=(5x-7y)^4-52x^3(12x-17y).$$

Пример 2. $(x_1,y_1)=(3,2)$, $(x_2,y_2)=(2,5)$.

Коефициентите на Безу за примитивната двойка $(3,2)$ са $(1,-1)$. Наистина $1.3-1.2=1$. Тогава линейният хомогенен полином от алгоритъма е $g(x,y)=x-y$ и очевидно $g(3,2)=1$. Тъй като втората примитивна двойка е различна от двойката $(1,2)$, съгласно алгоритъма (общата схема) ще използваме изоморфизма $T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Имаме $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е. $T(2,5)=(1,0)$. Също така $u=-2x+y$ и $v=-5x+2y$. От друга страна $T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, защото $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, което е единичната матрица и следователно $T.T^{-1}$ е идентитет.

Така $x=2u-v$ и $y=5u-2v$. Тогава $g(x,y)=x-y=2u-v-(5u-2v)=-3u+v$, т.е. $g^*(u,v)=-3u+v$. По-нататък $u_1=-2x_1+y_1=-2.3+2=-4$, $v_1=-5x_1+2y_1=-5.3+2.2=-11$,

$u_2 = -2x_2 + y_2 = -2.2 + 5 = 1$ и $v_2 = -5x_2 + 2y_2 = -5.2 + 2.5 = 0$. По този начин задачата се пренася в равнината (u, v) за примитивните двойки $(-4, -11)$ и $(1, 0)$. Тъй като 11 е просто число, то $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$ и следователно $M = 10$, $C = \dfrac{(-3)^{10} - 1}{-11} = -5368$. Тогава $f^*(u, v) = (-3u + v)^{10} + 5368u^9(-11u + 4v)$ и окончателно

$$f(x, y) = Tf^* = (x - y)^{10} = 5368(-2x + y)^9(2x - 3y).$$

Лесно се проверява, че са изпълнени условията на задачата, т.е. $f(3, 2) = f(2, 5) = 1$.

Естеството на задачите и резултатите на българските ученици са повод за някои изводи. Най-лесната задача в темата е задача 4. Това е осмокласна задача и подобни на нея се появяват доста често на контролни в 8. клас в математическите гимназии. Полученият тук максимален резултат е заслуга на българските учители, които са обучили нашите ученици да решават такива задачи и то не само тези, които са в националния отбор. Втората по трудност е задача 1. Решението й следва малко по-необичайна индукция и тази необичайност се е отразила на резултата, като отборът е загубил общо 2 точки. Третата по трудност е задача 2. Тук отборният резултат е 31 точки от възможните 42. Правилно е да се говори не за спечелени 31, а за загубени 11 точки предвид дългогодишните български традиции в областта на функционалните уравнения. Идва задача 5 по трудност, за която ще стане дума по-долу. Следващата е задача 3, която няма да коментираме, защото там всички участници в олимпиадата имат слаби резултати. Общо 615 ученици са получили 26 от възможните 4305 точки (българите са с 0 точки). Задачата е решена пълно само от двама участници – един от Австралия и един от Русия, един е с 5 точки, един с 4 и трима с по 1 точка. Основното затруднение идва от факта, че отговорът на задачата е отрицателен, а самото условие насочва по-скоро към търсене на положителен. Специално внимание заслужава най-трудната задача 6. По същество тя е обобщение на Лемата на Безу в случая на примитивни двойки, когато двойките са повече от една. Задачата има самостоятелно теоретично значение. Предизвикателство е да се намери пълно обобщение и за непримитивни двойки. Както се вижда от решението по-горе, задачата изисква сериозни познания по теория на числата (функция на Ойлер и теорема на Ойлер) и линейна алгебра (в двумерния случай). Жалко за българските ученици, между които има такива с доказани качества. Например Виолета Найденова и Кирил Бангачев са носители на златни и сребърни медали от балкански олимпиади за по-малки ученици, МВиолета е трикратен участник в международни олимпиади. Към това, на което са ги научили учителите в училище (то съвсем не е малко), „отговорните" фактори извън училище са проявили безотговорност и не са добавили почти нищо. Добри деца – слаби ръководители!

В заключение ще отбележим, че провалът на българските ученици е върху комбинаторната задача 5. А в „подготовката" са участвали професори и доктори на науките именно в областта на комбинаториката!!! Незадоволителен е резултатът на българите и върху функционалното уравнение, където за специалист се самоопределя друг професор и доктор на науките, участвал в подготовката. Оставяме читателят да съобрази що за професори и доктори на науките са лаборантите от Лабораторията на Пазарджишкия доносник. А някои от тях претендират и за по-високи звания в Българската академия на науките!!! Тежкò ни и горкò!

Следващата международна олимпиада ще се проведе в Клуж-Напока, Румъния от 3 до 14 юли 2018 г.

ДОСТОЙНО ПРЕДСТАВЯНЕ

(МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА)

Ирина Шаркова, научен ръководител на националния отбор

Двадесет и първата балканиада по математика за ученици до 15,5 години се проведе в гр. Варна в СОК "Камчия" от 24. до 29. юни 2017 г. В нея взеха участие ученици от 19 отбора от 17 държави: официалните страни-участници Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Македония, Молдова, Румъния, Сърбия и Черна гора, както и гостите Азербайджан, Казахстан, Саудитска Арабия, Таджикистан, Туркменистан, Филипини и Франция. България, като домакин на състезанието, се представи с три отбора, два национални (първи и втори) и един на града-домакин. След подбор, честта да представляват България на Балканиадата завоюваха учениците:

1. отбор: Светлин Красимиров Лалов (8 клас, София – СМГ), До Виет Кънг (8 клас, София – СМГ), Стефан Мартинов Хаджистойков (8 клас, София – СМГ), Матей Костадинов Петков (9 клас, София – НПМГ), Борислав Кирилов Кирилов (7 клас, София – ПЧМГ), Михаела Филипова Гледачева (8 клас, София – ПЧМГ);

2. отбор: Мартин Боянов Стефанов (8 клас, СМГ – София, Димитър Николов Николов (8 клас, Варна – МГ „Д-р П. Берон"), Галин Миленов Тотев (8 клас, Бургас – ПМГ), Диян Христинов Димитров (8 клас, София – СМГ), Мартин Даниел Копчев (7 клас, Габрово – ПМГ), Георги Стефанов Златинов (7 клас, Благоевград – ПМГ);

3. отбор (Варна – Бургас): Марк Киричев (8 клас), Калоян Христов Янчев (8 клас), Георги Георгиев Петков (7 клас), Веселина Николаева Иванова (7 клас), Марина Иванова Бояджиева (8 клас), Андрей ИвайловэЦочев (9 клас).

Двата национални отбори в посочените състави бяха избрани след контролни, проведени на 13 и 14 май в Центъра за подготовка на олимпийци, София. До контролните бяха допуснати общо 17 ученици с най-високи резултати от Националната олимпиада: 8 от 8. клас, 7 от 7. клас и 2 от 9. клас. Подготовката и на трите отбора бе проведена в София в Олимпийския център от 4 до 17 юни, в обичайния си формат: всеки ден учениците имаха занятия от 8 до 17 часа, които включваха по три лекции и един матбой или контролно.

Българските участници в Балканиадата се представиха достойно и спечелиха 1 златен, 11 сребърни и 6 бронзови медала. Тази година българският комитет по подбор на задачите беше съставил шортлист, по-труден от обичайното. В резултат на гласуването се получи трудна тема. Ето състезателната тема:

XXI МБОМ, България, 26.06.2017 г.

Задача 1. Намерете всички множества от шест последователни естествени числа такива, че произведението на две от числата, събрано с произведението на други две от тях, да е равно на произведението на останалите две числа.

Задача 2. Нека x, y, z са естествени числа такива, че $x \neq y \neq z \neq x$. Да се докаже, че $(x+y+z)(xy+yz+zx-2) \geq 9xyz$. Кога се достига равенство?

Задача 3. Нека $\triangle ABC$ е остроъгълен и $AB \neq AC$. Около него е описана окръжност k с център O. Точка M е средата на BC, а D е точка от k такава, че $AD \perp BC$. Точката T е такава, че $BDCT$ е успоредник, а точката Q е в една полуравнина с точката A спрямо BC и е такава, че $\measuredangle BQM = \measuredangle BCA$; $\measuredangle CQM = \measuredangle CBA$. Правата AO пресича окръжността k за втори път в точка E, а описаната около $\triangle ETQ$ окръжност пресича k в точка $X \neq E$. Да се докаже, че точките A, M и X лежат на една права.

Задача 4. В равнината е даден правилен $2n$-ъгълник $P - A_1A_2...A_{2n}$, където n е естествено число, по-голямо от 1. Казваме, че точката S от страна на P може да се види от точка E, външна за P, ако отсечката SE не съдържа друга точка от P освен S. Оцветяваме страните на P в три цвята (върховете не се оцветяват) така, че всяка страна да е оцветена в точно един цвят и всеки цвят да се използва поне веднъж. Изпълнено е още, че от всяка точка в равнината, външна за P, се виждат страни, оцветени в не повече от два различни цвята. Намерете броя на всички такива различни оцветявания на P (две оцветявания са различни, ако поне една от страните $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{2n}A_1$ е оцветена различно).

Ето кратки решения на задачите, в които са използвани идеи на състезателите от първи отбор.

Задача 1. Това е една лесна задача по теория на числата, на която нашият отбор очаквано завоюва пълните 60 точки. „Подводен камък” в задачата беше, че ако не се направят подходящи ограничения, трябва да се решават 45 квадратни уравнения. Предлагаме решение по идея на Светлин Лалов.

Да означим числата с a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ и $a+5$. Тогава минималната сума на две произведения е $2a^2+6a+2$ и най-голямото произведение на две от числата е $a^2+9a+20$. Имаме $a^2+9a+20 \geq 2a^2+6a+2 \Leftrightarrow (a-6)(a+3) \leq 0 \Rightarrow a \in [-3;6]$. Остава да проверим 6 групи от числа. За да намалим проверките, трябва да съобразим още, че точно две от числата се делят на 3 и следователно те трябва да са в едно и също произведение. Аналогично съобразяваме, че трите четни числа трябва да се комбинират с нечетни. След проверки получаваме следните три решения: 1.2 + 3.6 = 4.5; 2.5 + 3.6 = 4.7; 6.9 + 7.8 = 10.11.

Задача 2. Неравенството не затрудни участниците от 1. отбор. Те представиха 6 различни решения. За съжаление Къни (До Виет Кьонг) беше допуснал глупава техническа грешка, с което беше усложнил задачата. Михаела не беше отговорила точно кога се достига равенство и отборът загуби 8 точки. Предлагаме решение по идея на Михаела Гледачева.

$$x \le y \le z \Rightarrow y = x + a, z = x + a + b \text{ и } a, b \in \mathbb{N},$$

$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2) \ge 9xyz \Leftrightarrow$$

$$(3x+2a+b)(3x^2+4xa+2xb+a^2+ab-2) \ge 9x^3+18x^2a+9x^2b+9xa^2+9xab \Leftrightarrow$$

$$2xa^2+2xab+2a^3+2xb^2+3a^2b+ab^2 \ge 6x+4a+2b \Leftrightarrow$$

$$(2a^2+2ab+2b^2)x+(2a^2+2ab)a+(a^2+ab)b \ge 6x+4a+2b$$

Но числата са естествени и следователно $x \ge 1$, $a \ge 1$ и $b \ge 1$. Тогава

$$2a^2+2ab+2b^2 \ge 6, 2a^2+2ba \ge 4 \text{ и } a^2+ab \ge 2.$$

Равенство се достига, когато $a = b = 1$, т.е. когато трите числа са последователни.

Задача 3. Геометрията затрудни повечето участници (нещо, което се наблюдава през последните години). Решението изисква добро познаване на свойствата на забележителните точки в триъгълник, което е основен материал в 8. клас. Нашият отбор завоюва най-малко точки на тази задача. Пълно решение има само Светлин Лалов и то му осигури златния медал. Предлагаме решение по идея на Светлин.

Първо да отбележим, че точката D е симетрична на ортоцентъра H на триъгълника ABC относно правата BC, а точката E е симетрична на ортоцентъра H относно средата на BC (основно свойство на ортоцентъра). Следователно са изпълнени равенствата:

$$HB = BD = CE = CT \text{ и } \measuredangle TCB = \measuredangle ECB = \measuredangle CBD.$$

Това показва, че точките E и T са симетрични относно BC. Нека правата AM пресича окръжността k в точка X_1. Ще докажем, че тази точка съвпада с точка X. От свойствата на вписани ъгли знаем, че $\measuredangle AX_1B = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle AX_1C = \measuredangle ABC$. Нека точката Q_1 е симетрична на X_1 относно BC. От свойствата на симетрията получаваме, че точките Q_1 и A, са в една полуравнина относно правата BC, $\measuredangle CQ_1M = \measuredangle CX_1M = \measuredangle CBA$ и $\measuredangle MQ_1B = \measuredangle MX_1B = \measuredangle ACB$. Това показва, че $Q \equiv Q_1$, защото и двете точки лежат на окръжностите, описани около $\triangle CMQ$ и $\triangle BMQ$. От свойствата на симетрията имаме още, че четириъгълникът TQX_1E е равнобедрен трапец и следователно е вписан в окръжност. Така получихме, че точка X_1лежи на окръжността описана около $\triangle TQE$ и наk, следователно тя е точка X.

Задача 4. Тази комбинаторна задача, предложена от Македония, се оказан най-трудната в темата. Нито един участник не получи пълен брой точки. Затруднението идваше от това, че обща формула се получава за $n > 3$, а случаите $n = 2$ и $n = 3$ трябва да се разгледат отделно. Само двама от всички участници в Балканиадата получиха по 9 точки и това са нашите Борислав Кирилов и Георги Златинов. В решението тук щеследваме идеята на Борислав Кирилов.

Нека първо да разгледаме случая $n = 2$. Ясно е, че от всяка външна точка се виждат най-много две страни и всяко оцветяване в три цвята изпълнява условието. Ясно е още, че един цвят ще участва 2 пъти и него можем да изберем по 3 начина. Страната, оцветена във втория цвят, може да си избере по 4 начина, а страната в третия цвят – по 3 начина. Следователно оцветяването е по 3.4.3 = 36 начина.

В случая $n = 3$ първо трябва да се прецени колко най-много страни се виждат от външна точка. В правилния $2n$-ъгълник срещуположните страни са успоредни. За да виждаме едновременно две такива страни, не можем да гледаме от точка, която е между успоредните прави, определени от тях. Но ако сме извън тези успоредни прави, също няма как да виждаме и двете страни. Това показва, че от правилния шестоъгълник можем да виждаме едновременно най-много три последователни страни. Следователно всеки три последователни страни са оцветени в два цвята. Да разгледаме две съседни различно оцветени страни. Еедна от срещуположните им страни е в третия цвят. Ако тя е срещу цвят 1 имаме две възможности, а ако е срещу цвят 2, възможността е една. В първия случай имаме 3.2 начина за избор на двата начални цвята и 2 начина за останалите страни, а във втория имаме 6 начина да изберем първа страна и три начина за цвета й. Така получаваме $3.2.2+6.3=30$ начина.

Да разгледаме $n > 3$. Вече показахме, че няма точка, от която се виждат повече от n страни на многоъгълника. Всеки правилен $2n$-ъгълник е симетричен относно големите си диагонали, което показва, че има точка от симетралата на всеки голям диагонал, от която виждаме n последователни страни. Едно оцветяване ще изпълнява условието на задачата, ако всеки n последователни страни са оцветени в най-много 2 цвята. Нека, без ограничение, измежду страните A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_{n+1} не се среща без ограничение цвят 3. Нека първата страна в цвят 3 е $A_{n+k}A_{n+k+1}$ (по посока A_1, A_2,…A_{2n}). Тогава страните $A_{k+1}A_{k+2}$,…$A_{n+k-1}A_{n+k}$ са точно $n-1$ на брой и следователно са оцветени в най-много 2 цвята. Но $A_{n+k}A_{n+k+1}$ е първата в цвят 3 и следователно те всичките са в един и същи цвят, например в цвят 1. Ако направим същите разсъждения за цвят 2, започвайки от страната $A_{n+k}A_{n+k+1}$, ще получим, че има още $n-1$ еднакво оцветени страни. Не е трудно да съобразим, че ако $n-1$ от страните са в цвят 1, то в цвят 2 и цвят 3 са срещуположните страни от двата им края, а останалите $n-1$ страни са отново в цвят 1. Повтарящият се цвят може да се избере по 3 начина, а първата от $(n-1)$-те страни – по $2n$ начина, т.е. общият брой оцветявания е $3.2n = 6n$.

Ето резултатите на първи отбор:

БЪЛГАРИЯ – първи отбор	1	2	3	4	сбор	медал
Светлин Лалов	10	10	10	6	36	златен
Стефан Хаджистойков	10	10	4	7	31	сребърен
Борислав Кирилов	10	10	2	9	31	сребърен
Матей Петков	10	10	0	3	23	сребърен
Михаела Гледачева	10	9	0	3	21	сребърен
До ВиетКъонг	10	3	4	2	19	сребърен
общо	60	52	20	30	162	

Неофициалното отборно класиране се оглавява от:

1. Румъния 196 точки
2. България 1 162 точки
3. Сърбия 158 точки

Вторият български отбор е със 137 точки и се класира на 5. място, а третият отбор е на 10. място.

За доброто представяне на българските ученици трябва да БЛАГОДАРИМ на техните учители, които са ги мотивирали да се занимават сериозно с математика, както и на колегите, които участаха в подготовката на отборите. Предлагаме ви и задачите от двете контролни, с които бяха селектирани българските участници в 21. Младежка балканиада.

ПЪРВО КОНТРОЛНО ЗА МБОМ, 13.05.2017

Задача 1. В $\triangle ABC$ отсечките AA_1 $(A_1 \in BC)$ и BB_1 $(B_1 \in AC)$ са вътрешни ъглополовящи на ъглите с върхове съответно A и B. Да се намери отношението

$$\measuredangle BAC : \measuredangle ABC : \measuredangle ACB,$$

ако $\measuredangle AA_1B_1 = 24^\circ$ и $\measuredangle BB_1A_1 = 18^\circ$.

Задача 2. Да се реши в цели числа уравнението:

$$25x^2y^2 + 10x^2y + 25xy^2 + x^2 + 30xy + 2y^2 + 5x + 7y + 6 = 0.$$

Задача 3. 100 бланки с номера 00, 01, 02, …99 трябва да се поставят в 1000 кутии с номера 000, 001, 002, …999 (може и повече от една бланка в една кутия), като номерът на бланката трябва да се получава от номера на кутията, в която се поставя, чрез зачертаване на една цифра. В колко най-малко кутии могат да се поставят бланките?

Задача 4. Квадрат $n \times n$ е разделен на n^2 единични клетки и във всяка клетка е поставена по една пионка. В даден момент пионките се преместват едновременно в съседни клетки. (Две клетки са съседни, ако имат обща страна.) В една клетка могат да попаднат повече от една пионка. Колко най-много и колко най-малко са празните клетки след преместването, ако:

а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 7$?

ВТОРО КОНТРОЛНО ЗА МБОМ, 14.05.2017

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа a, b, c и d, които удовлетворяват равенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 13.4^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

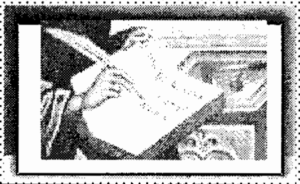
Задача 2. Вписаната окръжност k в $\triangle ABC$ със страни $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ се допира до страните AB, BC и AC съответно в точките C_1, A_1 и B_1. Точка K от k е диаметрално противоположна на точка C_1, а $C_1A_1 \cap KB_1 = N$ и $C_1B_1 \cap KA_1 = M$. Изразете отсечката MN чрез страните на триъгълника.

Задача 3. Да се докаже, че ако m, n, p и q са положителни числа, то

$$\frac{m}{t+n+p+q} + \frac{n}{t+p+q+m} + \frac{p}{t+q+m+n} + \frac{q}{t+m+n+p} \geq \frac{4}{5},$$

където $t = \dfrac{m+n+p+q}{2}$.

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа, които имат 6 делителя (без единицата и самото число) и сборът на тези делители е 14 133.



М + ХРОНИКА

На 5 май 2017 г. Министерството на образованието и науката публикува следната информация на своя сайт: РЕЗУЛТАТИ ОТ ОЛИМПИАДИ И СЪСТЕЗАНИЯ ЩЕ СЕ ОБЯВЯВАТ ПРИ ЗАЩИТЕНИ ЛИЧНИ ДАННИ. Резултатите ще се проверяват от участниците и техните родители по начин, който гарантира защита на личните данни на учениците и максимална прозрачност. Информация за класирането ще се получава чрез входящ или персонален код, с който всеки участник или родителите му да влизат в страницата на училището, на РУО или на МОН. Друг вариант е оповестяване на списъци с резултати и класиране чрез използване само на входящи или произволно избрани номера, без изписване на трите имена или друг вид идентификационни признаци на учениците. Допуска се и индивидуална проверка в списък, съхраняван от директора на съответното училище, но само срещу служебна бележка с входящия номер на ученика или след представяне на документ за самоличност. Възможно е и публично обявяване, но само ако има декларация за информирано съгласие на всеки участник или на неговия родител за оповестяване на личните данни, част от които са и резултатите. Оповестяване на списъци ще се допуска и ако това е изрично предвидено в регламента на съответното състезание.

Горното се препоръчва в писмо на министъра на образованието и науката до началниците на регионалните управления на образованието по повод многобройни запитвания за начина, по който може да се достигне до резултатите. Вариантите за информиране за резултатите от олимпиади и състезания през тази учебна година са посочени в становище на Комисията за защита на личните данни /КЗЛД/, според което публикуването трябва да съответства на общите принципи за достъп до информация и защита на личните данни, на предпочитанията на законните представители на учениците и на най-удобните за заинтересованите лица механизми. Няма пречка списъците с разпределението на явяващите се на изпит деца в училище да бъдат поставени на подходящо място в сградата на съответното учебно заведение. Заради съществуващите различни подходи и значителния обществен интерес, МОН ще регламентира реда, условията за създаването на организация за публичното оповестяване на резултати и класирания в подзаконов нормативен акт и в регламентите за олимпиадите и националните състезания през следващата учебна година.

Европейската олимпиада за момичета се проведе от 6 до 12 април 2017 г. в гр. Цюрих, Швейцария. В нея взеха участие 168 ученици (127 официални участници от Европа) от 44 държави (33 европейски). Журито предложи 6 задачи в 2 състезателни дни, като всяка задача се оценяваше със 7 точки. Общо бяха присъдени 16 (11 официални) златни медала за резултати над 30 точки включително, 27 (22 официални) сребърни медала за резултати от 19 до 29 точки включително и 43 (30 официални) за резултати от 11 до 18 точки включително. Българският отбор се представи слабо и зае място във втората половина на класирането.

РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ ДЕВОЙКИ

Място	Име	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Σ	Медал
73	Ирина Софронова	7	0	1	0	2	2	12	бронзов
78	Люба Конова	7	0	0	0	2	2	11	бронзов
78	Симона Кукова	7	0	0	1	1	2	11	бронзов
96	Златина Милева	7	0	0	1	1	0	9	
23-24	ОБЩО	28	0	1	2	6	6	43	

ОТБОРНО КЛАСИРАНЕ

Място	Държава	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Σ	Зл.	Ср.	Бр.
1	САЩ	4	28	28	15	28	27	22	148	4	0	0
2	Украйна	4	21	28	17	28	21	11	126	2	2	0
3	Русия	4	21	15	26	26	23	14	125	2	2	0
4	Унгария	4	28	11	22	24	17	4	106	2	2	0
5	Сърбия	4	28	24	6	17	11	10	96	1	2	1
6	Израел	4	22	15	11	26	14	0	88	0	3	0
7	Румъния	4	28	16	1	13	7	21	86	0	3	1
8-10	Казахстан	4	28	9	9	14	13	10	83	1	1	1
	Полша	4	28	12	16	7	18	2	83	0	4	0
	Великобритания	4	28	12	7	14	12	10	83	1	0	3
11	Саудитска Арабия	4	28	9	9	13	9	12	80	1	1	1
12	Босна и Херцеговина	4	28	8	8	14	3	13	74	1	1	0
13	Франция	4	28	11	3	14	9	7	72	1	0	3
14	Мексико	4	28	0	16	15	6	3	68	0	1	3
15	Чехия	4	28	2	8	9	5	6	58	0	1	1
16	Беларус	4	28	0	2	9	11	6	56	0	0	4
17-18	Холандия	4	23	12	3	7	10	0	55	0	1	1
	Турция	4	28	6	0	14	7	0	55	0	1	1
19	Италия	4	28	3	1	17	3	2	54	0	1	2
20	Ирландия	4	19	10	1	20	0	2	52	0	1	1
21	Япония	4	28	7	4	1	5	4	49	0	0	4
22	Грузия	4	22	3	6	8	5	3	47	0	0	2
23-24	**България**	**4**	**28**	**0**	**1**	**2**	**6**	**6**	**43**	**0**	**0**	**3**
	Литва	4	23	1	1	6	8	4	43	0	0	2
25	Швейцария А	4	23	0	2	8	5	0	38	0	0	1

Място	Държава	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Σ	Зл.	Ср.	Бр.
26	Бразилия	4	22	1	0	12	2	0	37	0	0	2
27	Молдова	3	21	3	0	0	2	7	33	0	0	1
28	Еквадор	4	28	0	0	0	2	0	30	0	0	0
29	Норвегия	4	12	1	0	9	6	0	28	0	0	1
30	Словения	4	17	0	0	7	3	0	27	0	0	1
31	Кипър	4	24	0	0	0	2	0	26	0	0	0
31	Швейцария В	3	16	3	3	0	2	2	26	0	0	2
33	Латвия	4	18	0	1	1	4	1	25	0	0	0
33	Македония	4	23	0	0	0	2	0	25	0	0	0
35	Белгия	4	19	0	0	1	1	0	21	0	0	0
35	Индия	2	14	0	1	1	3	2	21	0	0	1
37	Албания	4	17	0	0	0	3	0	20	0	0	0
37	Тунис	4	18	0	0	0	1	1	20	0	0	0
39	Азербайджан	4	16	1	0	0	2	0	19	0	0	0
40	Испания	4	8	0	2	0	8	0	18	0	0	0
40	Лихтенщайн	3	13	0	2	2	1	0	18	0	0	0
42	Коста Рика	4	5	0	0	0	2	0	7	0	0	0
43	Люксембург	3	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0
44	Финландия	2	2	0	0	0	1	0	3	0	0	0

Следващата олимпиада ще се проведе от 8 до 15 април 2018 г. в гр. Флоренция, Италия.

На 34-тата Балканска олимпиада по математика, която се проведе през м. май 2017 г. в гр. Охрид, Македония, българските участници спечелиха четири златни и два сребърни медала. Златни медалисти са Виолета Найденова (СМГ „Паисий Хилендарски", учител Стойчо Стоев), Кирил Бангачев (СМГ „Паисий Хилендарски" учител Румяна Караджова), Константин Гаров (ПМГ „Никола Обрешков", Бургас, учител Магдалена Янева) и Атанас Динев (ПМГ „Никола Обрешков", Бургас, учител Динко Раднев). Иван Ганев (Американски колеж, учител д-р Борислава Кирилова) и Борислав Антов (СМГ „Паисий Хилендарски", учител Петя Тодорова) са сребърни медалисти. В отборното класиране България е на първото място с 226 точки пред Сърбия (208 точки) и Румъния (182 точки). В Балканиадата участваха отбори от 19 страни: Албания, Азербайджан, Босна и Херцеговина, България, Великобритания, Гърция, Италия, Казахстан, Катар, Кипър, Киргизстан, Македония, Молдова, Румъния, Саудитска Арабия, Сърбия, Туркменистан, Турция и Черна гора.

Математическо състезание „Европейско кенгуру". Националният кръг на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру" се проведе на 3 юни 2017 г. Ето имената на всичките 38 лауреати: **1. клас:** Дамян Иванов Накев (Варна), Мартин Бориславов Ковачев (София), Мина Филипова Недева (София); **2. клас:** Деян Пламенов Георгиев (Монтана), Мартин Диянов Димитров (Варна), Андрей Здравков Стефанов (София), Мария Ивова Недкова (София); **3. клас:** Антон Иванов Кремов (София), Пресиян Ивайлов Георгиев (Габрово), Огнян Огнянов (София); **4. клас:** Мая Димитрова (Варна), Кристина Стоянова (София), Антон Георгиев (София); **5. клас:** Антон Георгиев Бресковски (София), Светослав Георгиев Развигоров (София), Недко Миленов Нанков (Варна); **6. клас:** Божидар Данчев Димитров (Силистра), Камелия Димитрова Димитрова (Пловдив), Иван Ивелинов Богданов (Силистра); **7. клас:** Борислав Кирилов Кирилов (София), Мартин Даниел Копчев (Габрово), Александър Христов Дойчинов (София); **8. клас:** Мартин Боянов Стефанов (София), Светлин Красимиров Лалов София), Иван Венциславов Георгиев (София); **9. клас:** Петър Емилов Лангов (София), Мартин Русланов Германов (София), Александър Живодаров Василев (София), Димитър Атанасов Чакъров (Пловдив); **10. клас:** Кирил Каменов Трифонов (София), Пламен Тодоров Иванов (София), Георги Мирославов Александров (София); **11. клас:** Георги Тошков Димитров (София), Ирина Юлиянова Софронова (София), Илия Лазаров Божинов (София); **12. клас:** Иван Иванов Ганев (София), Димитър Николаев Маркович (Варна), Дона-Мария Радославова Иванова (Русе).

Награждаването се проведе на 23 юни 2017 г. в Министерството на образованието и науката. Грамотите за победителите, подготвени от министерството, бяха връчени от г-жа Таня Михайлова – зам. министър. На тържеството присъства и г-жа Валери Дрейк – Аташе по образователно сътрудничество в Френския институт в София, която връчи грамоти на най-добре представилите се ученици в състезанието „Европейско кенгуру" на френски език: Надежда Димитрова (12 клас в 128. СУ „Алберт Айнщайн"), Христина Христова (6 клас в 17. СУ „Дамян Груев"), Виктория Цветкова (9 клас в 9. ФЕГ), Ванина Иванова (9 клас в 9. ФЕГ), Евгения Петрова (10 клас в 9. ФЕГ), Моника Караманова (10 клас в 9. ФЕГ) и Деян Барукчиев (11 клас в 9. ФЕГ). Наградени бяха и най-добре представилите се ученици със специални образователни потребности, всички от СУУНЗ "Луи Брайл": Светозара Ташева (12 клас), Петя Йорданова (11 клас), Галя Димитрова (10 клас), Илкай Осман (9 клас), Златина Рулева (7 клас), Виктория Дарвинова (7 клас) и Петър Георгиев (6 клас).

Повече подробности могат да се намерят на http://www.bulgarian-kangaroo.eu/

На 25-тата Балканиада по информатика, която се проведе от 2 до 8 юли 2017 г. в Кишинев, Молдова българският национален отбор по информатика завоюва един златен, един сребърен и два бронзови медала. В състезанието участваха отбори от 12 страни, като в неофициалното отборно класиране нашият отбор зае второ място след Румъния. Медалистите са: Радослав Димитров (X клас, МГ „Акад. Кирил Попов", Пловдив) – златен медал; Енчо Мишинев (XII клас, МГ „Атанас Радев", Ямбол) – сребърен медал; Виктор Терзиев (XI клас, СМГ „Паисий Хилендарски", София) – бронзов медал; Петър Няголов (X клас, ПМГ „Баба Тонка", Русе) – бронзов медал. Ръководители на отбора бяха главен асистент Емил Келеведжиев от Института по математика и

информатика на БАН и Павлин Пеев, преподавател по информатика в ПМГ „Гео Милев" в Стара Загора.

На международната олимпиада по математика в Сингапур (SIMOC) трима възпитаници на Математическата гимназия „Баба Тонка" в гр. Русе спечелиха 3 златни медала, 1 бронзов и Голямата купа. Състезанието се проведе от 14 до 17 юли 2017 г. Тримата шестокласници Йордан Петков, Константин Георгиев и Станислав Григоров получиха покана за участие в него благодарение на отличните си резултати и спечелените медали в предварителния кръг, в който участваха 22 000 ученици от 19 държави.

Константин Георгиев спечели 2 златни медала и Голямата купа на трибоя в надпреварата. Йордан Петков също е със златен медал, а Станислав Григоров – бронзов. Подготовката е проведена под научното ръководство на доц. д-р Илияна Раева от Русенския университет. Ръководител на екипа в Сингапур е бил директорът на математическата гимназия Митко Кунчев, който е дарил в подкрепа на участието на учениците в престижното състезание средствата, които е получил заедно с наградата „Русе" в навечерието на

Деня на българската просвета и култура и на славянската писменост – 24 май. Участието на русенските математици е станало възможно благодарение на Фонд „Математика на бъдещето" към училището. Това е първата изява на възпитаници на Русенската математическа гимназия в едно от най-трудните и престижни състезания по математика в света.

На Международната олимпиада по информатика, която се проведена от 28 юли до 4 август 2017 г. в г. Техеран, Иран, българските ученици спечелиха един златен и три бронзови медала: Енчо Мишинев – златен, Виктор Терзиев – бронзов, Радослав Димитров – бронзов и Петър Няголов – бронзов. Ръкодители на отбора бяха Емил Келеведжиев и Руско Шиков. В олимпиадата участваха отбори от 83 страни. В неофициалното отборно класиране по медали нашият отбор зае 16-то място. Запазваме 5-то място в класирането по медали за всички времена. От тази година България влезе в клуб 100 на страните, получили поне 100 медала от международните олимпиади по информатика. Само още 4 страни са постигали този успех.

Лагер „Кенгуру” в Румъния. От 8 до 15 август 2017 г. петима ученици от 5. клас (Александра Петрова, Виктория Латева, Виктор Терезов, Михаил Григоров и Ралица Ефтимова) на 12. СУ „Цар Иван Асен II“ в София, с ръководител д-р Маряна Кацарска бяха на Лятно училище „Кенгуру” в гр. Сулина, Румъния. Организацията от румънска страна беше много добра както по отношение на придвижването от автогара Филарет до Сулина, така и при настаняването (независимо от големия брой участници – около 200, на групи от 5 ученици с един ръководител с предварително разпределение). Всеки ден от 10 до 13 и от 15 до 17, 30 часа бяха организирани различни занимания по интереси. Учениците избираха измежду фотография, судоку, футбол, баскетбол, тенис на маса, латино-танци, дискусия, изработване на цветя от хартия. Българските участници имаха голямо желание да се включат в дискусията, но за съжаление не можаха да го сторят, защото работният език беше румънският. На 12 август преди обяд се проведе отборно състезание по математика и индивидуално по английски език. Партньор на България беше Казахстан (с 3 отбора), защото българските ученици бяха само от една възрастова група, а съгласно регламента в един отбор можеше да има най-много двама ученици на една и съща възраст. Част от задачите за 5. клас надхвърляха възможностите на българските петокласници, защото включваха степени и свойства на степените (всяка нерешена задача се оценяваше с „минус 2 точки”) и това не позволи класиране на отбора. Затруднения се получиха и по отношение на означенията, някои от които не са приети в българското училище. Например с N^* се означава множеството целите положителни числа и се различава от множеството на естествените числа, към което се причислява нулата съгласно румънските стандарти. Към непознатите за българските ученици означения е и означението A за лице. Организаторите не признаваха за верен и отговор, който не е записан като степен.

В състезанието „ Who asks, wins!“ поставените задачи бяха едни и същи за всички възрастови групи. Михаил Григоров от България спечели първо място, парична награда от 100 леи и паспорт „Европейско кенгуру“. Всички останали участници получиха грамоти. Като цяло българският отбор беше награден със специална грамота. В състезанието по английски език Виктория Латева се класира на 3. място, а Михаил Григоров получи награда в състезанието за изработване на цветя от хартия. Състезателната част на лагера се редуваше с разходки по морския бряг и в района на пристанището.

М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ПАРАЛЕЛЕПИПЕДИ И ПРИЗМИ

Христо Лесов, гр. Казанлък

Определение 1. Многостен, две от стените на който са еднакви n-ъгълници ($n \geq 3$), лежащи в успоредни равнини, а останалите стени са n на брой успоредници, се нарича n-ъгълна призма.

Определение 2. Призма, основите на която са успоредници, се нарича паралелепипед. Срещуположните стени на паралелепипеда са еднакви успоредници.

Определение 3. Височина на призма е отсечка с краища върху основите ѝ, която е перпендикулярна на тях. Дължината на височината на призма е равна на разстоянието между основите.

Определение 4. Призма, чиито околни ръбове са перпендикулярни на основите, се нарича права призма. Всеки околен ръб на права призма е нейна височина, а околните ѝ стени са правоъгълници.

Определение 5. Права призма с основи еднакви правилни n-ъгълници ($n \geq 3$), се нарича правилна n-ъгълна призма.

Определение 6. Прав паралелепипед с основи правоъгълници се нарича правоъгълен паралелепипед. Стените на правоъгълния паралелепипед са правоъгълници.

Определение 7. Правоъгълен паралелепипед, на който всички ръбове са равни, се нарича куб. Стените на куба са еднакви квадрати.

Задача 1. От всички правоъгълни паралелепипеди с даден обем V да се намери този, който има най-малко лице на повърхнината.

Задача 2. От всички правоъгълни паралелепипеди с дадено лице S на повърхнината да се намери този, който има най-голям обем.

Задача 3. От всички прави паралелепипеди с даден обем V да се намери този, който има най-малко лице на повърхнината.

Задача 4. От всички прави паралелепипеди с дадено лице S на повърхнината да се намери този, който има най-голям обем.

Задача 5. От всички триъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голям обем.

Задача 6. От всички триъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голямо лице на повърхнината.

Задача 7. От всички четириъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голям обем.

Задача 8. От всички четириъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голямо лице на повърхнината.

Задача 9. От всички n-ъгълни ($n \geq 3$) призми с дадени периметър P на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голям обем.

Задача 10. От всички n-ъгълни ($n \geq 3$) призми с дадени периметър P на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голямо лице на повърхнината.

Отговори, упътвания, решения

Задача 1. Нека измеренията на правоъгълен паралелепипед са a, b, c. Тогава обемът му е $V = abc$, а лицето на повърхнината е $S = 2(ab + bc + ca)$. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично за положителни числа a, b, c имаме:

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}\,,$$

като равенството се достига само когато $ab = bc = ca$, т.е. само при $a = b = c$. Така получаваме

$$S = 2(ab + bc + ca) \geq 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ или } S \geq 6\sqrt[3]{V^2}\,.$$

Оттук следва, че най-малката стойност на S е $6\sqrt[3]{V^2}$ и тя се достига само при $a = b = c = \sqrt[3]{V}$, т.е. само за куба с дължина $\sqrt[3]{V}$ на ръбовете.

Задача 2. От предната задача използваме означенията и неравенство $S \geq 6\sqrt[3]{V^2}$, което е равносилно на $V^2 \leq \dfrac{S^3}{216}$ или $V \leq \dfrac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$. Оттук вече следва, че най-голямата стойност на V е $\dfrac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ и тя се достига само при $a = b = c = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$, т.е. само за куба с дължина $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$ на ръбовете.

Задача 3. Означаваме с a и b дължините на ръбовете при основите на прав паралелепипед, с γ – мярката на ъгъла между тях, а с c дължините на околните ръбове. Тогава лицето на основата е $B = ab.\sin\gamma$, обемът е $V = B.c = ab.\sin\gamma.c$, а лицето на повърхнината е $S = 2(ab.\sin\gamma + bc + ca)$. Тъй като $0^{\circ} < \gamma < 180^{\circ}$, то $0 < \sin\gamma \leq 1$ и от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$ab.\sin\gamma + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab.\sin\gamma.bc.ca} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2.\sin^2\gamma.c^2}\text{, понеже } 1 \geq \sin\gamma \geq \sin^2\gamma > 0.$$

Така получаваме $S = 2(ab.\sin\gamma + bc + ca) \geq 6\sqrt[3]{V^2}$, като равенството се достига само когато $\sin\gamma = 1$, т.е. $\gamma = 90^{\circ}$ и $a = b = c = \sqrt[3]{V}$. Следователно най-малката стойност на S е $6\sqrt[3]{V^2}$ и тя се достига само за правоъгълен паралелепипед с дължина $\sqrt[3]{V}$ на ръбовете, т.е. само за куба с тези ръбове.

Задача 4. Както в решението на предната задача и при същите означения получаваме неравенството $S \geq 6\sqrt[3]{V^2}$. То е равносилно на $V^2 \leq \dfrac{S^3}{216}$ или $V \leq \dfrac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ и оттук следва, че най-голямата стойност на V е $\dfrac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ и тя се достига само за правоъгълен паралелепипед с дължина $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$ на ръбовете, т.е. само за куба с тези ръбове.

Задача 5. Означаваме с a, b, c дължините на страните на основите-триъгълници с даден периметър $2p$. За тяхното лице B е изпълнено неравенството $B \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}p^2$, доказано в [3] – задача 1, а за височината h на призмата имаме $h \leq l$. Обемът V на призмата се определя чрез формулата $V = B.h$ и за него е в сила неравенството $V \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}p^2 l$, като равенството се достига само когато $a = b = c = \dfrac{2}{3}p$ и $h = l$. Оттук следва, че най-голям обем има тази права триъгълна призма, чиито основи са равностранни триъгълници с дължини $\dfrac{2}{3}p$ на страните и дължина l на височината, т.е. търсената триъгълна призма е правилна.

Задача 6. Използваме означенията от решението на предната задача. Лицето S на повърхнината на призмата се определя по формулата $S = 2B + S_1 + S_2 + S_3$, където S_1, S_2, S_3 са лицата на околните стени-успоредници с дължини на страните съответно a и l, b и l, c и l.

Ако φ_1, φ_2, φ_3 са съответните ъгли между тях, то $0^0 < \varphi_1 < 180^0$, $0^0 < \varphi_2 < 180^0$, $0^0 < \varphi_3 < 180^0$, $0 < \sin\varphi_1 \le 1$, $0 < \sin\varphi_2 \le 1$, $0 < \sin\varphi_3 \le 1$ и имаме $S_1 = a.l.\sin\varphi_1 \le a.l$, $S_2 = b.l.\sin\varphi_2 \le b.l$, $S_3 = c.l.\sin\varphi_3 \le c.l$. Така получаваме неравенството $S \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.p^2 + (a + b + c).l$ или $S \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.p^2 + 2p.l$, като равенството се достига само когато $a = b = c = \frac{2}{3}p$ и $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = 1$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 90^0$ и околните ръбове са перпендикулярни на основите. Оттук следва, че най-голямо лице на повърхнината има същата правилна триъгълна призма от Задача 5.

Задача 7. Означаваме с a, b, c, d дължините на страните на основите, които са четириъгълници с даден периметър $2p$. За тяхното лице B е изпълнено неравенството $B \le \frac{1}{4}p^2$, доказано в [4] – задача 5, а за височината h на призмата имаме $h \le l$. Обемът V на призмата се определя чрез формулата $V = B.h$ и за него е в сила неравенството $V \le \frac{1}{4}p^2.\, l$, като равенството се достига само за права призма с основи квадрати с дължини на страните $a = b = c = d = \frac{1}{2}p$ и $h = l$. Оттук следва, че най-голям обем има тази права четириъгълна призма, чиито основи са квадрати с дължини $\frac{1}{2}p$ на страните и дължина l на височината, т.е. търсената четириъгълна призма е правилна.

Задача 8. Използваме означенията от решението на предната задача. Лицето S на повърхнината на призмата се определя по формулата $S = 2B + S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, където S_1, S_2, S_3, S_4 са лицата на околните стени-успоредници с дължини на страните съответно a и l, b и l, c и l, d и l. Ако φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 са съответните ъгли между тях, то $0^0 < \varphi_1 < 180^0$, $0^0 < \varphi_2 < 180^0$, $0^0 < \varphi_3 < 180^0$, $0^0 < \varphi_4 < 180^0$, $0 < \sin\varphi_1 \le 1$, $0 < \sin\varphi_2 \le 1$, $0 < \sin\varphi_3 \le 1$, $0 < \sin\varphi_4 \le 1$ и имаме $S_1 = a.l.\sin\varphi_1 \le a.l$, $S_2 = b.l.\sin\varphi_2 \le b.l$, $S_3 = c.l.\sin\varphi_3 \le c.l$, $S_4 = d.l.\sin\varphi_4 \le d.l$. Така получаваме следното неравенство:

$$S \le \frac{1}{2}p^2 + (a + b + c + d).l \text{ или } S \le \frac{1}{2}p^2 + 2p.l,$$

като равенството се достига само за призма с основи квадрати с дължини на страните $a = b = c = d = \frac{1}{2}p$ и $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = \sin\varphi_4 = 1$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 90^0$ и околните ръбове са перпендикулярни на основите. Оттук вече следва, че най-голямо лице на повърхнината има същата правилна четириъгълна призма от Задача 7.

Задача 9. Означаваме с a_1, $a_2, \ldots, a_n$ дължините на страните на основите, които са n-ъгълници ($n \ge 3$) с даден периметър P. За тяхното лице B е изпълнено неравенството

$$B \le \frac{1}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2, \text{ доказано в [5] – задача 7,}$$

а за височината h на призмата имаме $h \le l$. Обемът V на призмата се определя чрез формулата $V = B.h$ и за него е в сила неравенството $V \le \frac{1}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2.\ l$, като равенството се достига само за права призма с основи правилни n-ъгълници $(n \ge 3)$ с дължини на страните $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}P$ и $h = l$. Оттук вече следва, че най-голям обем има тази права n-ъгълна призма, чиито основи са правилни n-ъгълници $(n \ge 3)$ с дължини $\frac{1}{n}P$ на страните и дължина l на височината, т.е. търсената n-ъгълна призма е правилна.

Задача 10. Използваме означенията от решението на предната задача. Лицето S на повърхнината на призмата се определя по формулата $S = 2B + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, където S_1, $S_2, \ldots, S_n$ са лицата на околните стени-успоредници с дължини на страните съответно a_1 и l, a_2 и $l, \ldots,$ a_n и l. Ако $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са съответните ъгли между тях, то $0^0 < \varphi_1 < 180^0$, $0^0 < \varphi_2 < 180^0$, $0^0 < \varphi_3 < 180^0, \ldots,$ $0^0 < \varphi_n < 180^0$, $0 < \sin\varphi_1 \le 1$, $0 < \sin\varphi_2 \le 1, \ldots, 0 < \sin\varphi_n \le 1$ и имаме $S_1 = a_1.l.\sin\varphi_1 \le a_1.l$, $S_2 = a_2.l.\sin\varphi_2 \le a_2.l, \ldots,$ $S_n = a_n.l.\sin\varphi_n \le a_n.l$. Така получаваме следното неравенство:

$$S \le \frac{1}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).l \quad \text{или} \quad S \le \frac{1}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2 + P.l,$$

като равенството се достига само за призма с основи правилни n-ъгълници с дължини на страните $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}P$ и $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 =, \ldots, = \sin\varphi_n = 1$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 90^0$ и околните ръбове са перпендикулярни на основите. Оттук вече следва, че най-голямо лице на повърхнината има същата правилна n-ъгълна $(n \ge 3)$ призма от Задача 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Коларов, Хр. Лесов, Сборник от задачи по геометрия VII–XII клас, Част втора, Издателство „Интеграл", Добрич, 2015.

2. К. Коларов, Хр. Лесов, Сборник от задачи по стереометрия, Издателство „Интеграл", Добрич, 2017.

3. Хр. Лесов, Неравенства и екстремални задачи за триъгълник, списание „Математика плюс", кн. 4, 2013, стр. 48 – 51.

4. Хр. Лесов, Неравенства и екстремални задачи за четириъгълник, списание „Математика плюс", кн. 4, 2015, стр. 28 –32.

5. Хр. Лесов, Неравенства и екстремални задачи за многоъгълник, списание „Математика плюс", кн. 1, 2015, стр. 27–31.

$\overset{?}{1 = 4}$ M+ ЕДНА ЗАДАЧА + МНОГО РЕШЕНИЯ

РАЛЗАГАНЕ НА МНОЖИТЕЛИ НА ПОЛИНОМА $x^3+y^3+z^3-3xyz$

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката "Една задача + много решения", която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните ѝ приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в "мисловен алпинизъм", заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

Пожелаваме Ви приятни занимания!

Защо поставяме въпроса за разлагане на полинома $x^3+y^3+z^3-3xyz$? Първо, защото разлагането е изключително важна операция с многочислени приложения и второ, защото този полином се ползва със значителна популярност. Полиномът е свързан с полиномите x^3, $x^3 \pm y^3$, $x^3 \pm 1$, x^3+ax+b, а така също с формулата на Кардано за корените на уравнението $x^3+ax+b=0$, както и с корените на единицата, т.е с корените на уравнението $x^3-1=0$, които са $1, \omega$ и ω^2, където $\omega \neq 1 = \omega^3$.

Първоначално ще предложим евристика за разлагането на полинома $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Решение 1. (Частична „ евристика") Известно е разлагането

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right).$$

Разглеждаме множителите на това разлагане $x+y$ и x^2-xy+y^2. Забелязваме, че тези изрази са симетрични и са съответно от първа и втора степен относно променливите x и y. Естествен въпрос е как изглеждат аналогичните изрази за три променливи x, y и z, като се спазва симетричността и съответните степени относно променливите. Търсенето на аналогия води до изразите $x+y+z$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$. Остава да проверим дали тяхното произведение съвпада с разглеждания полином, т.е. умножаваме $x+y+z$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$, което организираме по следния начин:

$$x\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^3+xy^2+z^2x-x^2y-xyz-zx^2$$
$$y\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz$$
$$z\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=zx^2+y^2z+z^3-xyz-yz^2-z^2x$$

Събираме трите равенства и извършваме приведение на подобните членове:

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

По този начин доказахме, че $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Решение 2. (Още една частична „ евристика“)

Естествено е, че x^3, y^3 и z^3 са част от израза $(x+y+z)^3$. Затова започваме така:

$$(x+y+z)^3=x^3+(y+z)^3+3x.(y+z)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3yz(y+z)+3x.(y+z)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3yz(x+y+z)+3x.(y+z)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3yz(x+y+z)+3.(xy+zx)(x+y+z)$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3.(xy+yz+zx)(x+y+z)$$

Тогава $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3.(xy+yz+zx)(x+y+z)$

Изнасяйки общия множител $x+y+z$, окончателно получаваме

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right)$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)-3(xy+yz+zx)\right)$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Решение 3. („Добавяне“) Тук основната идея е да сведем разлагането до изследването на две възможности за променливата z:

Ако $z=0$, то $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ е позната формула и всичко е наред.

Ако $z\neq 0$, то разглеждаме $\left(\frac{x}{z}\right)^3+\left(\frac{y}{z}\right)^3+1-3\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right)$ или $p^3+q^3+1-3pq$, където $p=\frac{x}{z}$, $q=\frac{y}{z}$.

Ще използваме тъждеството $p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)$. Добавяме $1-3pq$ към двете му страни и продължаваме по следния начин:

$$p^3+q^3+1-3pq=(p+q)^3-3pq(p+q)+1-3pq$$

Но $(p+q)^3-3pq(p+q)+1-3pq=(p+q)^3+1-3pq(p+q+1)$

$$(p+q)^3+1-3pq(p+q+1)=(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1\right)-3pq(p+q+1)$$
$$(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1\right)-3pq(p+q+1)=(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1-3pq\right)$$
$$(p+q+1)\left((p+q)^2-(p+q)+1-3pq\right)=(p+q+1)\left(p^2+q^2+1-pq-p-q\right).$$

Следователно, $p^3+q^3+1-3pq=(p+q+1)\left(p^2+q^2+1-pq-p-q\right)$.

Заместваме $p=\frac{x}{z}$ и $q=\frac{y}{z}$ и опростявайки с умножение по z^3, получаваме

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right).$$

Решение 4. От формулата $x^3+y^3=-3xy(x+y)+(x+y)^3$ имаме

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-3xy(x+y)+(x+y)^3+z^3-3xyz=$$
$$=(x+y)^3+z^3-3xyz-3xy(x+y)=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$$
$$(x+y+z)\left((x+y)^2-(x+y)z+z^2\right)-3xy(x+y+z)=$$
$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+2xy-xz-yz+z^2\right)-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right).$$

Следователно, $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Решение 5. (Конструктивен подход)

Очевидно е, че $(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z).t^2+(xy+yz+zx).t-xyz$.

Тогава

$$x^3-(x+y+z)x^2+(xy+yz+zx).x-xyz=0 \text{ при } t=x$$
$$y^3-(x+y+z)y^2+(xy+yz+zx).y-xyz=0 \text{ при } t=y$$
$$z^3-(x+y+z)z^2+(xy+yz+zx).z-xyz=0 \text{ при } t=z$$

Събирайки горните равенства, получаваме

$\left(x^3+y^3+z^3\right)-(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)+(xy+yz+zx).(x+y+z)-3xyz=0$.

Следователно

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Решение 6. (Симетричен полином)

От теоремата за единственост на изразяване на симетричния полином $x^3+y^3+z^3$ чрез елементарните симетрични функции $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz имаме

$$x^3+y^3+z^3=A.(x+y+z)^3+B.\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)+C.xyz,$$

където A, B и C са константи, които могат са се определят по метода на неопределените кооефициенти.

При $x=y=z=1$ имаме $27A+9B+C=3$

При $x=y=1$ и $z=0$ имаме, $8A+2B=2$

При $x=y=1$ и $z=-1$ имаме $A-B-C=1$

Решавайки системата $27A+9B+C=3$, $8A+2B=2$, $A-B-C=1$, получаваме $A=1$, $B=-3$, $C=3$. Следователно

$$x^3+y^3+z^3=\left(x+y+z\right)^3-3\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)+3xyz$$

Изнасяйки в дясната част на горното тъждество общия множител $x+y+z$, окончателно получаваме $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Накрая да отбележим, че полиномът $x^3+y^3+z^3-3xyz$ може да бъде полезен инструмент в решенията на много задачи и затова заслужи нашето внимание.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007, ISBN978-954-92139-1-1.

? 1 = 4 M+ ЕДНА ЗАДАЧА + МНОГО РЕШЕНИЯ

ЕДНА ПОСТРОИТЕЛНА ЗАДАЧА

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката "Една задача + много решения", която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните ѝ приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в "мисловен алпинизъм", заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

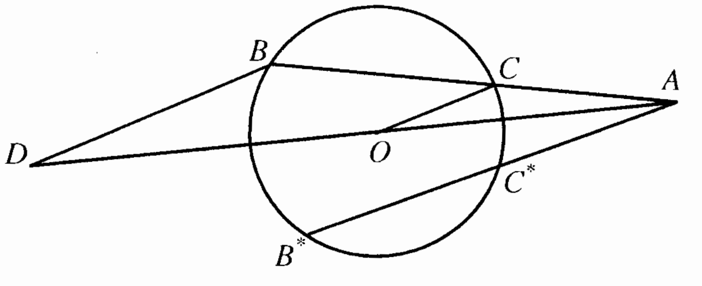
Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

Пожелаваме Ви приятни занимания!

Задача. [1] През точката A, външна за дадена окръжност, постройте секуща така, че нейната външна част да бъде равна на вътрешната ѝ. (Решете задачата по три начина.)

Решение 1. **Анализ.** Нека AB е исканата секуща на окръжност с център O (вж. чертежа), т.е. средата C на отсечката AB лежи върху окръжността.



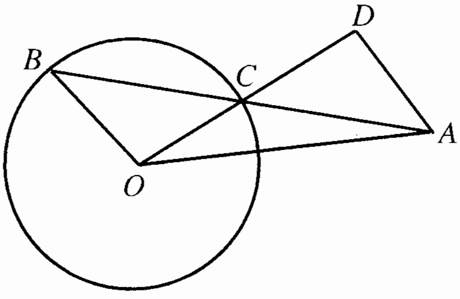
Нека D е точка върху лъча $\overrightarrow{AO}$ така, че $AD = 2AO$. Тогава CO е средна отсечка в ΔDAB и дължината на страната DB е равна на диаметъра на окръжността. Заключаваме, че точката В лежи на окръжност с център D и радиус, равен на диаметъра на дадената окръжност.

Построение. 1) От точката A построяваме лъч през центъра на кръга O. 2) Върху този лъч нанасяме отсечката AD, равна на удвоената отсечка AO. 3) От точката D с радиус, равен на диаметъра на окръжността, построяваме дъга, пресичаща дадената окръжност в точките B и B^*. 4) Съединяваме точките B и B^* с точката A. Отсечките AB и AB^* са исканите секущи.

Изследване. В общия случай задачата има две решения. Решението е единствено, ако AO пресича окръжността в точка, разстоянието от която до A е равно на диаметъра на окръжността. Задачата няма решение, ако това разстояние е по-голямо от диаметъра.

Решение 2. **Анализ.** Допускаме, че задачата е решена и $AC = BC$ (вж. чертежа). Ако съединим центъра O на дадената окръжност с точките A, B и C, получаваме триъгълника ABO, в който са известни две от страните (AO и OB) и медианата OC към третата страна. Ето защо задачата се свежда до построението на триъгълник по две страни и медиана към третата страна. Ако върху продължението на медианата OC нанесем отсечката CD, равна на OC и съединим точката D с A, получаваме, че

(*) $$\Delta ACD \cong \Delta BCO$$



по две страни ($AC = BC$, $OC = CD$) и ъгли между тях ($\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCO$ като връхни).

От (*) следва, че $AD = BO$. Следователно, за триъгълника AOD са известни всичките три страни, Ако R е радиусът на окръжността, то: $AD = BO = R$, $OD = 2OC = 2R$ и AO. Така, задачата се свежда до построяване на триъгълника ADO и на медианата AC към страната OD. можем да определим отсечката AC, която е външната част на исканата секуща.

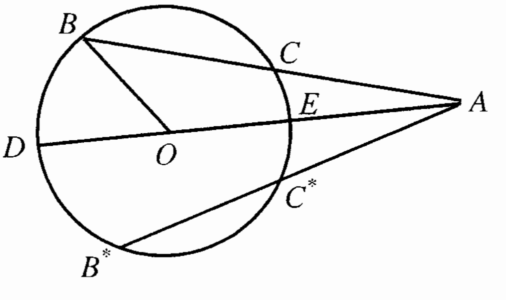
Построение. 1) Построяваме триъгълника ADO по три страни: $AD = R$, $DO = 2R$ и AO. 2) Намираме точка C, която разполовява отсечката DO. 3) Правата AC пресича окръжността за втори път в търсената точка B.

Изследване. Различните случаи са както в Решение 1.

Решение 3. **Анализ.** Допускаме, че секущата AB удовлетворява условието на задачата, т.е.

(1) $$AC = CB.$$

Нека AD е секущата от A, която минава през центъра O на окръжността. Тази секуща пресича окръжността за втори път в точката E (вж. чертежа).



Положението на точката A е дадено и затова са известни отсечките AE и AD. От теоремата за секущите имаме:

(2) $$AB.AC = AD.AE$$

Означавайки с x дължината на отсечката AC, т.е. $AC = x$. Тогава $AB = 2x$ и от (1) получаваме $AD.AE = 2x^2$, т.е.

(3) $$x = \sqrt{\frac{AD}{2}.AE}.$$

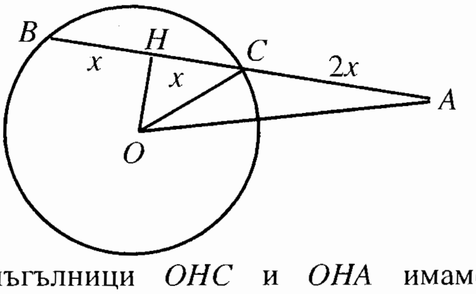
Така, задачата се свежда до построяване на отсечка x, която е средно пропорционална на известните отсечки $\frac{AD}{2}$ и AE [2].

Построение. 1) Построяваме отсечката x, определена по формулата (3) като средно пропорционална на отсечките $\frac{AD}{2}$ и AE. 2) С център точката A описваме дъга с радиус x до пресичане с дадената окръжност в точки C и C^*. 3) През точката A и точките C и C^* построяваме исканите секущи AB и AB^*.

Изследване. Различните случаи са както в Решение 1.

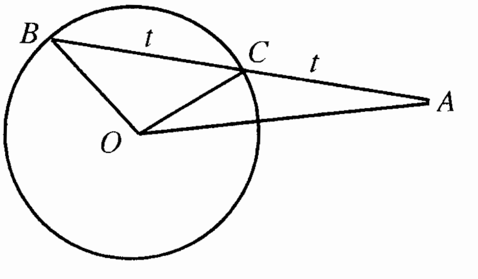
Ще опишем по-подробно изследването, което в сила и за трите решения. По условие частта от секущата, намираща се вътре в окръжността (която е хорда в окръжността), трябва да е равна на нейната външна част. Но хордата в една окръжност не може да надминава нейния диаметър. Оттук следва, че дължината на цялата секуща не може да надминава удвоения диаметър и затова решението на задачата е възможно само в случай, че най-късото разстояние от точката A до дадената окръжност е не по-голямо от диаметъра. Означавайки както по-горе центъра и радиуса на дадената окръжност съответно с O и R, можем да запишем резултатите от изследването по следния начин:

1) Задачата няма решение, ако $AO > 3R$;
2) Задачата има едно решение, ако $AO = 3R$;
3) Задачата има две решения, ако $AO < 3R$.



Решение 4. (Хари Алексиев) Нека $AC = CB = 2x$. Построяваме $OH \perp BC$ ($H \in AB$). Ясно е, че $BH = CH = x$, защото $OB = OC = R$ и значи ΔOCB е равнобедрен. От правоъгълните триъгълници OHC и OHA имаме: $OH^2 = R^2 - x^2$ и $OH^2 = OA^2 - 9x^2$. От първото равенство изваждаме второто и намираме $8x^2 = OA^2 - R^2$, т.е. $\left(2\sqrt{2}.x\right)^2 = OA^2 - R^2$ и следователно $2\sqrt{2}.x = \sqrt{OA^2 - R^2}$. Задачата се свежда до построяване на катет в правоъгълен триъгълник по дадени хипотенуза и другия катет. В крайна сметка стигаме до $AB = 4x$. Детайлите оставяме на читателя.

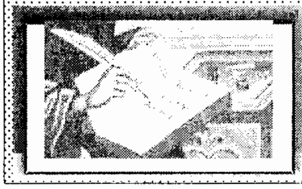
Решение 5. (Хари Алексиев) За триъгълника OAB имаме, че OC е медиана и затова $4.OC^2 = 2OB^2 + 2OA^2 - AB^2$. Ако $AC = BC = t$, то $4R^2 = 2R^2 + 2OA^2 - 4t^2$ и оттук $2t^2 = OA^2 + R^2$, т.е. $t\sqrt{2} = \sqrt{OA^2 + R^2}$. Задачата се свежда до построяване на хипотенуза в правоъгълен триъгълник по дадени катети OA и R.



ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Орленко, М. И. Решение геометрических задач на построение. Пособие для учителей средней школы, Государственое учебно-педагогическое издательство Министерство просвещения, БССР, Минск, 1958, 144-146.

2. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007, ISBN978-954-92139-1-1.



M+ СЕМИНАР

АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ БЕЗ ПРОИЗВОДНИ

проф. Сава Гроздев, доц. д-р Веселин Ненков

В тази бележка ще изложим няколко подхода за решаване на алгебрични уравнения с радикали без използване на производни. Разсъжденията се базират на интуитивната представа за непрекъсната функция, което означава, че графиката на такава функция може да се чертае без вдигане на молива от листа. Нека $f(x)$ е такава функция. Тя е монотонно растяща (съответно монотонно намаляваща), ако за всеки две точки от дефиниционното множество на функцията x_1 и x_2, за които $x_1 > x_2$, е изпълнено $f(x_1) \geq f(x_2)$ (съответно $f(x_1) \leq f(x_2)$). Функцията е строго монотонно растяща (съответно строго монотонно намаляваща), ако $f(x_1) > f(x_2)$ (съответно $f(x_1) < f(x_2)$).

Ще използваме следните свойства на монотонните функции:

Свойство 1. Ако функцията $f(x)$ е строго монотонна растяща, а функцията $g(x)$ е монотонно намаляваща, то уравнението $f(x) = g(x)$ има не повече от едно решение.

Доказателство: Да допуснем, че уравнението има две решения $x_1 > x_2$. Тогава $g(x_1) = f(x_1) > f(x_2) = g(x_2)$, т.е. $g(x_1) > g(x_2)$, което е невъзможно.

Свойство 2. Ако $f(x)$ е строго монотонна, то $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Доказателство: Без ограничение нека считаме, че функцията $f(x)$ е строго монотонна растяща. Ако $a = b$, то очевидно $f(a) = f(b)$. Обратно, нека $f(a) = f(b)$ и да допуснем, че $a > b$. Но тогава $f(a) > f(b)$, което е противоречие. Аналогично стигаме до противоречие, ако допуснем, че $a < b$. Заключаваме, че от $f(a) = f(b)$ следва $a = b$.

Свойство 3. Ако $f(x)$ е строго монотонно растяща функция, то уравненията $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ са еквивалентни.

Доказателство: Ако x е решение на $f(x) = x$, то очевидно $f(f(x)) = x$. Обратно, нека x е решение на $f(f(x)) = x$ и нека $f(x) = y$. Да допуснем, че $y > x$. Тогава $f(y) > f(x) = y$, т.е. $f(y) > y$. Но от $f(f(x)) = x$ следва, че $f(y) = x$ и заключаваме, че $x > y$, което е противоречие. Аналогично стигаме до противоречие, ако $y < x$. Остава единствената възможност $y = x$, т.е. $f(x) = x$.

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=5-x.$$

Решение: Задачата има смисъл при $x\geq -1$. Функцията $f\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)$ е строго монотонно растяща като сбор на строго монотонно растящи функции, а функцията $g(x)=5-x$ е монотонно намаляваща (дори строго монотонно намаляваща). Непосредствено се проверява, че $f(2)=g(2)=3$ и съгласно Свойство 1 уравнението от условието на задачата има единствено решение $x=2$.

Задача 2. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{3x^2-12x+16}=-2x^2+8x-5.$$

Решение: Тъй като дискриминантите на квадратните тричлени под двата радикала са отрицателни, задачата има смисъл за всяко реално число x. Нека $y=x^2-4x+5$. Тогава уравнението се записва във вида $\sqrt{z}+\sqrt{3z+1}=-2z+5$. Лявата страна на последното уравнение е строго монотонно растяща функция, а дясната е монотонно намаляваща функция (дори строго монотонно намаляваща). От друга страна $\sqrt{1}+\sqrt{3.1+1}=3=-2.1+5$ и с помощта на свойство 1 заключаваме, че задачата има единствено решение $x=1$.

Задача 3. Да се реши уравнението:

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Решение: Последователното повдигане в квадрат с цел освобождаване от радикалите не е подходящо. Вместо това, да разгледаме функцията $f(y)=y\left(2+\sqrt{y^2+3}\right)$. Тогава уравнението се записва във вида $f(2x+1)+f(3x)=0$. Ще докажем, че $f(x)$ е строго монотонно растяща функция. Нека $x_1>x_2$.

Случай 1. $x_1>x_2>0$. Имаме $x_1^2>x_2^2$, откъдето последователно $x_1^2+3>x_2^2+3$, $\sqrt{x_1^2+3}>\sqrt{x_2^2+3}$ и $2+\sqrt{x_1^2+3}>2+\sqrt{x_2^2+3}$. Заключаваме, че

(1) $$x_1\left(2+\sqrt{x_1^2+3}\right)>x_2\left(2+\sqrt{x_2^2+3}\right),$$

защото двата множителя вляво са по-големи от съответните множители вдясно. Следователно $f(x_1)>f(x_2)$.

Случай 2. $x_1>0$ и $x_2<0$. Сега в лявата страна на (1) стои положително число, а в дясната – отрицателно, т.е. неравенството е изпълнено и отново $f(x_1)>f(x_2)$.

Случай 3. $0>x_1>x_2$. Тогава $-x_2>-x_1>0$ и $x_2^2>x_1^2$. Пак последователно имаме $x_2^2+3>x_1^2+3$, $\sqrt{x_2^2+3}>\sqrt{x_1^2+3}$ и $2+\sqrt{x_2^2+3}>2+\sqrt{x_1^2+3}$. Оттук

$$(-x_2)\left(2+\sqrt{x_2^2+3}\right)>(-x_1)\left(2+\sqrt{x_1^2+3}\right)$$

и като умножим двете страни на последното с -1, получаваме (1), т.е. отново $f(x_1)>f(x_2)$.

Да забележим още, че $f(-y)=-y\left(2+\sqrt{y^2+3}\right)=-f(y)$, т.е. функцията е нечетна. Окончателно получаваме $f(2x+1)+f(3x)=0\Leftrightarrow f(2x+1)=-f(3x)=f(-3x)$, т.е. $f(2x+1)=f(-3x)$ и съгласно Свойство 2 стигаме до $2x+1=-3x$, т.е. $x=-\frac{1}{5}$.

Задача 4. Да се реши уравнението:

$$4x^3+1=5\sqrt[3]{\frac{5x-1}{4}}\ .$$

Решение: Като повдигнем двеше страни на уравнението на трета степен, получаваме $\left(4x^3+1\right)^3=5^3\cdot\frac{5x-1}{4}$, откъдето $x=\frac{4\left(\frac{4x^3+1}{5}\right)^3+1}{5}$. Да разгледаме функцията $f(y)=\frac{4y^3+1}{5}$. Лесно се проверява, че тя е строго монотонно растяща. Сега уравнението се записва във вида $f(f(x))=x$. Съгласно Свойство 3 това уравнение е еквивалентно с $f(x)=x$, т.е. с $\frac{4x^3+1}{5}=x$. Оттук $4x^3-5x+1=0$ и $(x-1)(4x^2+4x-1)=0$. Корените на последното уравнение са 1 и $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$, които са решения и на задачата.

За упражнение на читателите предлагаме следните задачи:

Задача 5. Да се реши уравнението:

$$1+\sqrt[3]{x+9}=-x+2\ .$$

Упътване. Функцията $f(x)=1+\sqrt[3]{x+9}$ е строго монотонно растяща, а функцията $g(x)=-x+2$ е строго монотонно намаляваща. Уравнението има единствено решение $x=-1$.

Задача 6. Да се реши уравнението:

$$x^2-4x+6+\sqrt[3]{2x^2-8x+9}=3-\sqrt{4x-8}\ .$$

Упътване. Задачата има смисъл при $x\geq 2$. Лявата страна на уравнението е строго монотонно растяща функция, а дясната страна е строго монотонно намаляваща функция. Задачата има единствено решение $x=2$.

Задача 7. Да се реши уравнението:

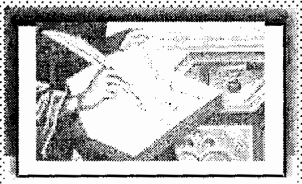
$$x^3+4=5\sqrt[3]{5x-4}\ .$$

Упътване. $x=\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5x-4}-4}$, $x=\sqrt[3]{5x-4}$, $x^3-5x+4=0$, $x=2$, $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

A MINIATURE ABOUT DISTANCES FROM A POINT TO THE VERTICES OF A SIMPLEX

Prof. Sava Grozdev. Assoc. prof. Dr. Veselin Nenkov

Abstract. Several algebraic equations and their solutions without derivatives are considered. Different approaches are proposed based on continuous and monotone functions.



М + СЕМИНАР

ЦЕНООБРАЗУВАНЕ (ВТОРА ЧАСТ). МАРЖИНАЛЕН ПОДХОД

д-р Асен Велчев, гр. София

Настоящата статия е продължение на [6]; като цел на сериятае запознаване с методи за ценообразуване в икономиката. Разглежданите задачи са на основата на [1].

1. ВИДОВЕ РАЗХОДИ. Разглеждането на повече видове и подвидове разходи, и класификацията им според повече различни признаци, дава възможност те да бъдат изучавани по-комплексно, многостранно и детайлното, а това облекчава ефективното им управление и дава допълнителни възможности за целта. Да означим с Q обема на дейността/производството - броя n (или N) на произведените изделия. Да припомним (от [6]) : разходи, **не**зависещи от $Q \setminus n \setminus N$, наричаме **постоянни (fixed costs -** ***FC*****)** / съотв. **total fixed costs –** ***TFC*** [3, p. 62]. Такъв разход е, например, първоначалният вложен капитал (за сгради, поточни линии, екипировка). Обикновено, той почти **не** зависи от това дали завода ще произвежда продукция и в какви количества. **Променливи разходи (variable costs -** ***VC*****)** / ***TVC*** **(total variable costs)** [3, p. 62] са тези, свързани с обема и структурата на производство (средства за вложени труд, суровини, материали, ток и вода за технологични нужди, и пр.). Всички брутни разходи за цялото производство (постоянни + променливи) бележим с ***TC*** **- total costs**, а усреднените брутни разходи за единица изделие – с ***ATC*** **(average total costs)** [3, p. 62], като $ATC = \frac{TC}{Q}$, а с $AVC = \frac{TVC}{Q}$ - усреднените променливи разходи (**average variable costs**), падащи се на една произведена бройка, където е обема производство а ***AC*** е **average costs**. TC, ATC, TVC и AVC се изменят при промяна обема на дейността. *Защо и само те ли? И винаги ли се променят?** Виж отг. тук, в края, в т. **6. БЕЛЕЖКИ**.

2. ВЪВЕДЕНИЕ В МЕТОДА. Задача 1. Приети са две паралелки ученици от по 25 души при такса за обучение 500 лв. Разходите за обучението са 10 000 лв. постоянни и променливи по 5 000 лв. на паралелка. Кандидатстват още 10 деца. Изгодно ли е за училището да ги приеме и да сформира трета паралелка за тях?

Решение 1.(1). При варианта без допълнителната група, TC = 20 000 лв., а брутният приход от такси TR (**total revenue**) = 50 . 500 = 25 000 лв, защото броят ученици е 2 . 25 = 50, а таксата – 500 лв./срок на ученик. **Печалбата** Pr (**profit**) е разликата между TR и TC, т.е., $Pr = TR - TC = 25\,000 - 20\,000 = 5\,000$ лв.

При прием на допълнителните деца, учениците биха били 60, разделени в три групи. Понеже VC се формират на група, а **не** на ученик, то значими за VC единици тук са групите (и техния брой, съотв.), откъдето $TC = TFC + TVC = TFC + n.AVC =$ $= 10\,000 + 3.AVC = 10\,000 + 3.5\,000 = 25\,000$ лв. За приходите е значим броя ученици, откъдето $TR = N.P = 30\,000$ лв., а $Pr = TR - TC = 30\,000 - 25\,000 = 5\,000$ лв.

Понеже и в двата случая $Pr = 5\,000$ лв., за училището е все едно дали ще приеме или **не** тези 10 деца. *Същият отговор може да се получи и с по-малко пресмятания*:

Решение 1.(2). При варианта да бъдат приети новите 10 деца, се появяват допълнителен разход 5 000 лв. за новата група и допълнителен приход 10.500 = 5 000лв. Нито TFC се променят за първите две групи, нито TVC, т.е., двата варианта са еднакво изгодни за училището и от 10-те деца няма да има нито загуба, нито печалба.

3. МАРЖИНАЛЕН / МАРГИНАЛЕН АНАЛИЗ (marginal analysis – *MA*) [4]. Чрез него ще търсим направо кратките решения. При *MA* разглеждаме **не** цялостното състояние на даден стопански обект (ферма, магазин, кафене и пр.) или система от обекти, а само *последиците* от дадени промени в него/нея. Постоянните разходи, например, **не** зависят от обема на дейността и затова, при решаване да бъдат ли произведени допълнителни единици продукт, е резонно да се отчитат само преките разходи (подобно на **Решение 1.(2)**). Т.е., *MA* е ***частичен анализ*** на системата (приложен в **Решение 1.(2)**, без това да е посочено явно) и затова Маржиналният подход при ценообразуване (виж **Задача 3, 4, 5**), базиран на *MA*, е целесъобразен и лек за прилагане. Чрез *MA* (за сведение) се изследва и „каскада” от последователни ефекти: при промяна *А* в икономически обект 1 (фирма, ведомство), възниква ефект *Б* в обект 2; той предизвиква ефект *В* в звено 3 и т.н.

Що е „маргинален”? Margin (англ.) - ръб, край, поле на страница, предел. Т.е., *MA* значи буквално „анализ на границите \ пределите”. Т.е., все едно, към „основното ядро” на дадено производство се добавят нови количества „по периферията”. Например, към *готовата структура* „училище с две паралелки” (**Задача 1**) се прибави трета паралелка, без промяна на първата; новост е само „периферията” (както в **Решение 1.(2)**). „Маржинален” и „пределен” имат еднакво значение, като второто е български превод на първото. С *MA* са свързани понятията:

- **Пределни разходи** (marginal cost - *MC*) - допълнителните разходи за още едно произведе изделие: $MC = \dfrac{dC}{dQ}$ (тук C - costs - разходи, dC – нарастване / изменение на C, а dQ - изменението на Q). dx е стандартно означение в дял „Диференциално смятане” в математиката, чете се „диференциал на x” и означава нарастване/изменение на x. Ако x е бил първо 5, а после - 7, изменението е 2 единици: разликата $7 - 5 = 2 = dx$

(в общия случай $dx = x_2 - x_1$ = *разликата* (***differen**ce* - оттам и „диференциал" - ***differen**tial*) между последната и първа стойности на x.

❖ **Пределни приходи** (marginal revenue - *MR*) - допълнителните приходи от увеличаването на продажбите с едно изделие. Изразете *MR* с диференциали**.

❖ **Пределна печалба** (marginal profit - *MP*) - допълнителната печалба от увеличаването на продажбите с единица изделие. Изразете *MP* с диференциали***. Какво представляват *MC*, *MP* и *MR*, щом се изразяват чрез диференциали****? (*Виж отговори на **, *** и **** в т.* **5. „БЕЛЕЖКИ"** *в края на настоящата статия*).

Решение 1.(2) с *MA в явен вид*: Пределният приход е $\mathrm{MR} = 10 * 500 = 5\,000$ лв., пределния разход (за допълнителната група) е *MC* = 5 000 лв., а пределната печалба е $\mathrm{MP} = \mathrm{MR} - \mathrm{MC} = 5\,000 - 5\,000 = 0$ лв. Т.е., нито е по-изгодно, нито по-**не**изгодно.

Задача 2. Брутните разходи (*TC*) за производство на три изделия са 900 лв., а за четири изделия – 1 000 лв. Три могат да се продадат за 1 500 лв., а четири – за 1 800 лв. Определете маржиналните (пределните) разход, приход и печалба.

Решение 2. Допълнителният (пределен) разход за четвъртото изделие е разликата между разходите при двата варианта, т.е., $\mathrm{MC} = 1000 - 900 = 100$ лв. Аналогично, $\mathrm{MR} = 1\,800 - 1\,500 = 300$ лв., а $\mathrm{MP} = \mathrm{MR} - \mathrm{MC} = 300 - 100 = 200$ лв.

Ползвайки *MA*, **не** се наложи да пресмятаме среден брутен разход на изделие (*ATC*) при никой от двата варианта, нито средна продажна цена.

4. МАРЖИНАЛЕН ПОДХОД ПРИ ЦЕНООБРАЗУВАНЕ (МЕТОД НА ПРЕКИТЕ РАЗХОДИ).

Преки разходи (direct costs - *DC*) са тези с изцяло производствен характер: вложени суровини, материали - познатите *VC*. **Косвени разходи** - възникващи при помощни за производството дейности: поддръжка на сгради, съоръжения, данъци, амортизации и пр. (познатите *FC*). **Маржинален подход**: към *AVC* се прибавя въпросната *MP*, за получаване офертната цена на стоката. **Пример:**

Задача 3. Фирма произвежда столове при *AVC* = 20 лв./бр., *TFC* = 20 000 лв. и *MP* = 60%. Намерете офертната цена за един стол, брутната печалба от продажбите и минималния обем производство, при който се покриват всички направени разходи.

Решение 3. (дадената методика се базира на [3, с. 95-96]). Офертна цена за стол: $P = \mathrm{AVC} + \mathrm{MP} = AVC + 60\%.AVC = 160\%.AVC = 1{,}6.20 = 32$ лв. (12 лв. *MP* от всеки). Бруто *MP**TMP* = 12.*n* лв. Чиста печалба $\mathrm{Pr} = TMP - TFC = 12n - 20\,000$ лв. Колко стола възвръщат само вложените *TFC*? Трябва нулева печалба (без загуба и печалба), т.е., $\mathrm{Pr} = 12n - 20\,000 = 0 \Leftrightarrow 12n = 20\,000 \Leftrightarrow n = 20000/12 \approx 1667$ (първите 1667 стола биха възвърнали *TFC*, следващите 1667 - средства за бъдещи инвестиции *в същия размер*, а всеки следващ – чиста печалба). Втората серия от 1667 стола също носи печалба, но при реинвестирането ѝ тя става от придобивка в **не**възвърнато вложение: вече **не** е печалба, но и разход **не** е, защото е *предварително спечелено от дейността*.

Броят продадени изделия n_1 = 1 667 е критичен – **не** се ли достигне, дейността е губеща; надвиши ли се: печалба. В икономически термини това е **критична точка** [3, с. 107]. При реинвестиране на средства *тя* ще е n_2 = 2.1667 = 3334. Намирането ѝ, вижда се, е лесно при маржиналния подход, а при методите на пълните и средни разходи – **не** толкова (повече по това – в следващ брой). При маргиналния подход *MP* се изчислява така, че да осигури: **1**) възвръщане на началните капиталовложения (*TFC*), **2**) средства за поддържане и разширяване на дейността, и **3**) чиста печалба. Как се постига това? Преценката за размера на *MP* е на база производствен и търговски опит, познания за отрасъла, статистически данни от скорошни проучвания и др. Ако се знае, например, че *TFC* и нужните бъдещи инвестиции са ниски, в сравнение с *n*, то *AFC* ще са ниски и **не** е нужен висок процент *MP*. Общо между методите на преките, пълни и средни разходи е вземането под внимание на *VC* и *FC*, което е резонно и **не**избежно, защото и двата вида са реален ценообразуващ фактор. Различава се начина на отчитане на *FC*: при методите на пълните и средни разходи те се отнасят към *TC*, а тук се покриват от *MP*.

Задача 4. Фирма произвежда ново изделие при *AVC* = 60 лв./бр., *n* = 3 000 бр., *TFC* = 2 500 лв. и *MP* = 55 %. **Определете:**

А) Равнището на фирмената офертна цена *P*;

Б) Очакваната печалба *Pr* при продажба на целия обем производство *n*.

Решение 4. А) Относителната MP е 55% (от *AVC\TVC*), а в абсолютно изражение тя е *MP* = 55 % . *AVC* ⇒ *P* = (100% + 55%). *AVC* = 1,55.60 = 93 лв./бр.;

Б) Брутната *MP* е 55% от брутните преки разходи *TVC*, а те са брой изделия *n* по *AVC*, т.е. *MP* = 55 % . *TVC* = 0,55 . *n*. *AVC* = 0,55 . 3 000 . 60 = 99 000 лв. Тя трябва да покрие *TFC* = 2 500 лв., т.е., *Pr* = *MP* – *TFC* = 99 000 – 2 500 = 96 500 лв.

Задача 5 (*Решете и сверете в следващия брой*). Фирма произвежда 50 тона ръж. Преките разходи за производство на 1 кг са 0,30 лв., а сумата на постоянните разходи е 7 300 лв. Размерът на *MP* е 60 % към преките разходи. **Определете:**

А) Равнището на фирмената офертна цена;

Б) Размера на очакваната печалба за тон и за целия обем производство.

5. РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИ И ОТГОВОР НА ВЪПРОС ОТ [6]. Подусловие ***Б***) на ***Зад. 1*** към ***т. 2*** бяхме решили <u>там</u> по два правдоподобни начина, с различни получени отговори и отворен въпрос допустими ли са и двата, имат ли приложения, кой кога, защо се различават и т.н. Ето въпросните задача и двете дадени <u>там</u> решения:

Задача 1. Фирма произвежда *n* = 6 000 бр. изделия с *DC* = 22 лв./бр., *TFC* = 18 000 лв. и необходима рентабилност 20% от сумарния вложен ресурс. Намерете:

А) Офертната цена на производителя (*оказва се 30 лв./бр.*);

Б) Фактически реализираната печалба и равнище на рентабилност, ако фирмата пласира 4 800 бр. изделия на цената от *А*).

Решение 1. Б) - Вариант 1: При 4 800 продадени изделия и цена 30 лв./бр., пълни: приход $TR = 30*4\ 800 = 144\ 000$ лв., разходи $TC = 18\ 000 + 22*4\ 800 = 123\ 600$ лв., печалба $TPr = TR - TC = 144\ 000 - 123\ 600 = 20\ 400$ лв. и рентабилност $R = 16{,}5\%$;

Вариант 2: $TR = 30 * 4\ 800 = 144\ 000$ лв., $TC = 18\ 000 + 22 * 6\ 000 = 150\ 000$ лв., $Pr = TR - TC = 144\ 000 - 150\ 000 = -6\ 000$ лв. и рентабилност $R = -4\%$.

Къде е разликата? В пресмятането на *TVC*, като част от *TC*. При ***Вариант 1*** те са $TC = 18\ 000 + 22*4\ 800$, а при ***Вариант 2***: $TC = 18\ 000 + 22*6\ 000$, т.е., *TVC* при ***Вариант 1*** са на основа на 4 800 произведени изделия, а при ***Вариант 2*** – за 6 000 изделия. Част от отговора на въпроса е в решението на задачата в [6], в ***т. 3***, по метода на средните разходи. Там казахме, че ако са произведени 6 000 бр. малотрайна стока, от които са продадени 4 800 бр., а 1 200 се изхвърлят, то трябва с първите 4 800 бр. да бъдат покрити разходите по всичките 6 000 ⇒ ***Вариант 2***. Ако е трайна стока, се иска обикновено да бъдат покрити *TFC* и *AVC* за тези 4 800 изделия, а после - само *AVC* за другите 1 200 изделия - при тяхната продажба ⇒ ***Вариант 1***. Логично е *AVC* за тези 1 200 бр. да бъдат покрити *от самите* 1 200 изделия. Т.е., все едно, че първите 4 800 единици са основния обем производство, а другите 1 200 – допълнителен (виж [6]).

И така, важно е дали са произведени 6 000 или 4 800 изделия (при втория вариант важи само Вариант 1), а при произведени 6 000 или: **1)** разходите за цялата серия се налага, по някаква причина, да бъдат покрити само от тези 4 800 изделия (Вариант 2), или **2)** може после да се продадат и другите 1 200 изделия: Вариант 1, като за последните 1 200 остават за покриване само техните *AVC*. Ако в учебна задача **не** е дадено дали е произведена цялата серия изделия (в случатукя 6 000), нито дали остатъкът (тук 1 200) подлежи на продажба или изхвърляне, *се подразбира Вариант 1* (остатъкът сам избива своите *AVC*). В реална икономическа задача се съобразява кой вариант е релевантен: 1 или 2.

Задача 2. от т. 2 (*метод на пълните разходи*). Фирма произвежда изделие с 10 лв./бр. *AVC*, обем производство $n = 10\ 000$ бр., 30 000 лв. *TFC* и 25% необходима рентабилност. Намерете:

А) Офертната цена на производителя;

Б) Фактическите печалба и рентабилност при реализирани 9 000 бр.

Решение 2.: *А*) $TC = TFC + TVC = 30\ 000 + 10*n = 30\ 000 + 10.10\ 000 = 130\ 000$ лв. При рентабилност 25% трябва брутните приходи от продажби да са 125% от разходите: самите разходи (100%) + още 25% приход. Т.е., тогава $TR = 1{,}25.TC = 1{,}25.130\ 000 = 162\ 500$ лв. От друга страна, $TR = np = 10\ 000.p$, т.е., бройката *n* по цената едно изделие *p*, откъдето $10\ 000.p = 162\ 500$, т.е., цената $p = 16{,}25$ лв./бр.;

<u>Решение 2. *Б*</u> – *Вариант 1*: $TC = TFC + TVC$ =30 000 + 10*n =30 000 + 10.9 000 = = 30 000 + 90 000 = 120 000 лв., т.е., <u>TC = 120 000 лв.</u>,

$TR = np$ = 9 000.16,25 = 146 250 лв.,

$Pr = TR - TC$ = 146 250 – 120 000 = 26 250 лв.,

рентабилност $R = \frac{Pr}{TC} \cdot 100 = \frac{26\,250}{130\,000} \cdot 100 = \frac{2625}{130} \approx 20{,}1923\,\%$;

<u>Решение 2. *Б*</u> – *Вариант 2*: $TC = TFC + TVC$ =30 000 +10*n =30 000 +10.10 000 = = 130 000 лв., т.е., <u>TC = 130 000 лв.</u>,

$TR = np$ = 9 000.16,25 = 146 250 лв.,

$Pr = TR - TC$ = 146 250 – 130 000 = 16 250 лв.,

и рентабилност $R = \frac{Pr}{TC} \cdot 100 = \frac{16\,250}{130\,000} \cdot 100 = \frac{1625}{130} = 12{,}5\,\%$.

***Задача 4** от т. 3* (метод на средните разходи). Фирма произвежда столове при 12 000 лв. TFC, 13 лв./бр. DC, обем производство n = 8 000 бр. и 18% рентабилност. Определете равнище на офертната цена на производителя за:

А) основния обем производство;

Б) основния обем производство, покриваща само пълните разходи;

В) допълнителен обем производство, осигуряваща същата печалба за единица продукция, както при основния обем производство.

<u>Решение 4.:</u> *А*) $TC = TFC + TVC$ = 12 000 + 13*n = 12 000 + 13.8 000 = 116 000 лв. За рентабилност 18% трябва брутните приходи от продажби да са в размер 118% от разходите: 100% разходи + 18% от тях горница. Тогава TR = 1,18.TC = 1,18*116 000 = 136 880лв., но $TR = np$ = 8 000.p, т.е., 8 000.p = 136 880, т.е., цената p = 17,11 лв./бр.;

<u>Решение 4.:</u> ***Б***) ТС = 116 000 = np = 8 000.p, т.е., p = 14,50 лв./бр.;

<u>Решение 4.:</u> ***В***) Не е посочен обема допълнително производство. Трябва ли? Не, понеже в това подусловие TFC са вече покрити и остават само AVC, които в тази задача и в останалите задачи в [6], **не** зависят от броя изделия. Тук AVC е твърдо 13 лв/бр. *А как да тълкуваме „същата печалба"?* Същата в абсолютен или в относителен размер? Т.е., пак по толкова лв./бр. печалба или тя пак да е 18% от разходите? Умишлено премълчахме това, за да постигнем 4 важни цели с читателя: 1) да се учи да разбира детайлно и задълбочено всичко: дума по дума, имайки усет къде нещо липсва или е казано в повече; 2) да е концентриран, внимателен, досетлив; 3) *да види слабо подозирана икономическа алтернатива* и 4) да прецени дали подобно детайлизиране е важно или излишно.

Тълкуване 1: Нека тук се има предвид същата *абсолютна* печалба за единица продукт, която е удачно да означим с *APr – average profit*. Лесно е да се съобрази защо $APr = p - ATC = p - (AFC + AVC)$ = 17,11 – (1,5 + 13) = 17,11 – 14,50 = 2,61 лв./бр.

А можеше и така: 17,11 лв./бр. е цената с печалбата (съгл. A)), а 14,50 лв./бр. – покриваща TC по основния обем производство, но без печалба. Печалбата, тогава, е разликата им: $APr = 17{,}11 - 14{,}50 = 2{,}61$ лв/бр., а офертната цена: разходите + печалбата, т.е., $p = ATC + APr = 13 + 2{,}61 = 15{,}61$ лв/бр.

Тълкувание 2: Нека *относителната* печалба е същата, т.е., 18%. За пълнота на наученото: ***всяка величина*** – обем, тегло, цена, ръст, темп и т.н., може да бъде разглеждана и като абсолютна (взета сама по себе си, измерена в някакви единици – литри, кг, $, см, бр./мес.), и като относителна (какъв дял/процент е тя от дадена базова величина). Печалбата тук трябва да е 18% от TC, но за допълнителния обем производство $ATC = AVC = 13 \Rightarrow p = 1{,}18.13 = 15{,}34$ лв./бр.

Относно цели 3) и 4) от премълчаването - за търговеца/инвеститора е добре вложените капитали да продължават да му носят същата рентабилност (процентна печалба), както при основния обем продукция. За допълнителния обем дейност са нужни вложения само за AVC и Тълкувание 2 е целесъобразно. Инвеститорът може, следователно, да направи пазарен „дъмпинг" (критично сваляне на цените) [5]. Ако конкурентите му **не** са с покрити TFC, няма да могат да отговорят на това му действие, а само ще търпят загуби и то големи. Замислянето в тази посока носи следваща полза: при бизнес-план за ново производство трябва да се разполага с информация за основните играчи на пазара: дали са покрили своите TFC или **не**, дали са задлъжнели и т.н., за да се предвиди имат ли силата да довеждат до фалити, чрез дъмпинг [5], особено ако разчитаме на кредити. „Акули", обаче, могат да правят дъмпинг, дори при **не**покрити за тяхното производство TFC, смъквайки цената дори под нивото на AVC. Те биха търпели тази временна загуба, за да разорят конкуренти, изкупят евтино базата им и установят монопол. Друг извод: при **не**покрити TFC да се пестеливи в „агресивния" маркетинг - много реклами, супер-промоции (дъмпинг, реално) и пр., за да **не** предизвикаме ответен удар! От казаното дотук следва, че е крайно желателно съответни държавни и общински органи да предприемат анти-дъмпингови политики, с цел протекционизъм (protect – запазвам, предпазвам), за да предотвратят възможности гиганти да рушат местни икономически структури. Спекулант-търговец сам би се сетил за много от тези ходове и факти, движен от „треска" за злато и себедоказване, но за други, чиято мисъл **не** е фокусирана едностранчиво върху „пазарен удар", а гледат „цялата картина", търсейки глобални решения и политики за всеобщ възход, е крайно полезно обучение в такава насока, вкл. чрез „премълчаване".

6. БЕЛЕЖКИ: * $MR = \dfrac{dR}{dQ}$, ** $MP = \dfrac{dP}{dQ}$, *** трите величини, а и всички, които са частни на два диференциала, се наричат „производни". Представляват скорости на изменение на величината, чийто диференциал е в числителя. Например,

$MP = \dfrac{dP}{dQ}$ е скорост на нарастване на печалбата относно нарастването на производството. Защо е скорост? Нека $dP = 300$, а $dQ = 5$, т.е., с 5 броя нараства продукцията, а печалбата - с 300 лв. Тогава $MP = \dfrac{300}{5} = 60$ лв./бр. печалба. Т.е., печалбата ще нараства с по 60лв. за всеки нов брой стока, т.е., това **не** е друго, а именно *скорост* на нарастване на печалбата. Ако кола се движи с 60км/ч, то за 5 ча́са тя ще измине $S = VT = 60.5 = 300$ км. Аналогично, брутното увеличение на печалбата dP е скоростта ѝ на нарастване MP по бройките увеличение на продукцията dQ, т.е., $dP = MP.dQ$, като в случая $MP.dQ = 60.5 = 300$ лв. Но защо тук за MP получаваме числена стойност, а в **Задача 3** и **Задача 4** MP е в проценти? Да припомним казаното в Тълкуване 2 към ***Решението на Задача 4 - В)*** в предходната т. 4: всяка величина може да се зададе в абсолютен или относителен размер, вкл. рентабилността.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Владимирова Й., Б. Атанасов, Н. Игнатова, Цени и ценообразуване, София, Университетско издателство на УНСС, 2016.

[2] Гроздев, С. Математика за икономисти, София, Издателство на ВУЗФ, 2010, ISBN 978-954-8590-06-8.

[3] Класова Своб., Й Владимирова, Приложно ценообразуване, Университетско издателство „Стопанство" към УНСС, София, 2004.

[4] http://www.investopedia.com/terms/m/marginal-analysis.asp

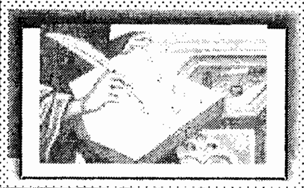
[5] http://www.investopedia.com/terms/d/dumping.asp

[6] Велчев Ас., Ценообразуване. Методи на пълните и средни разходи. Математика плюс, кн. 2/2017, с. 57 – 62.

MARGINAL ANALYSIS-BASED METHOD FOR CALCULATIVE PRICING

Dr. Asen Velchev, Sofia

Abstract. This is the second part of article series, devoted to introduce methods for pricing in economics. Two problems from the first part are solved, three new problems and another one are proposed, the last one remaining open for solving, yet not solved here.



М + СЕМИНАР

НОБЕЛОВИТЕ НАГРАДИ ЗА 2017 Г.

проф. Сава Гроздев, доц. д-р Веселин Ненков

На 14 септември 2017 г. Съветът на директорите на Нобеловия фонд реши на свое заседание, че Нобеловата премия за 2017 г. ще бъде в размер на 9 милиона шведски крони (939 145 евро) за всяка категория. Това представлява увеличение от 1 милион шведски крони спрямо предходната година. Освен парична премия, Нобеловата награда включва златен медал и диплом. Церемонията по награждаването е по традиция на 10 декември в Стокхолм. Това е датата, на която умира основателят на Нобеловата премия – шведският предприемач и изобретател Алфред Нобел (1833-1896).

Нобеловата награда за физиология или медицина за 2017 г. беше присъдена на Джефри Хол (Brandeis University), Майкъл Росбах (Brandeis University) и Майкъл Йънг (Rockefeller University) . Научните изследвания на тримата американци разкриват как телата ни разбират колко е часът. Те изясняват молекулярните механизми, които контролират *циркадния ритъм* или т. нар. *биологичен часовник*. Съгласно Нобеловия комитет на Каролинския медицинско-хирургически институт в Стокхолм, който присъжда отличията за физиология или медицина, откритията имат „огромни последици за нашето здраве и благополучие". Те обясняват „как растенията, животните и хората променят биологичния си ритъм така, че да го синхронизират с въртенето на Земята". Благодарение на научната дейност на тримата лауреати *хронобиологията* – науката за биологичните часовници, в момента е разрастваща се област в научните изследвания. На базата на циркадните ритми днес учените търсят иновативни подходи в лечението, в това число и чрез определяне на най-подходящото време за прием на лекарства. Същевременно нараства вниманието върху значението на здравословните навици за сън. Идеята за гени, които отговарят за работата на биологичния часовник, вълнува учените още от 60-те и 70-те години на миналия век. В средата на 80-те години тримата лауреати правят опити с плодови мушици, като успяват да изолират ген, който контролира нормалния дневен биологичен ритъм. Те показват как този ген кодира протеин, който се натрупва в клетките през нощта и се разгражда през деня. Последващи проучвания разкриват ролята и на други гени, които участват в тази сложна система

През миналата година наградата беше спечелена от японеца Йошинори Осуми. Той я получи за откриването и разясняването на механизми за така наречения процес „автофагия" (от гръцки *себеядство*). Процесът обяснява как клетките се „самопочистват", разграждайки бактерии, вируси и клетъчни компоненти. От 1901 г. насам са присъдени 107 нобелови награди в областта на медицината или физиологията. Лауреати са повече от 200 души, от които 13 жени, включително 6 жени през последното десетилетие. Средната възраст на победителите е 58 години.

<u>Нобеловата награда за физика за 2017 г</u>. беше присъдена на германеца Райнер Вайс (Масачузетски технологичен институт) и на американците Бари Бериш (Калифорнийски технологичен институт) и Кип Торн (Калифорнийски технологичен институт). Те имат решаващ принос към откритие, разтърсило света – наблюдението на гравитационни вълни, предречени от Алберт Айнщайн преди 100 години. Наблюдението е осъществено за първи път на 14 септември 2015 г. с помощта на 2 четири-километрови детектора на Лазерната интерферометрична обсерватория за гравитационни вълни LIGO. Причина за явлението е сблъсък между две черни дупки. Въпреки че сигналът е изключително слаб при пристигането си до Земята, той е обещание за революция в астрофизиката. Гравитационните вълни са изцяло нов начин за наблюдение на едни от най-бурните събития във Вселената и пореден тест за границите на човешкото познание. „Това е нещо напълно ново и различно, откриващо невиждани светове", заяви Йоран Хансен, генерален секретар на Кралската шведска академия на науките, който обяви лауреатите. „Изобилие от открития очакват тези, които успеят да уловят вълните и да интерпретират посланието им", допълни той.

Нобеловата награда за физика се присъжда от Кралската шведска академия на науките от 1901 г. насам. Първата награда получава немският физик Вилхелм Рьонтген за откриването на нов вид лъчи, наречени на негово име. Досега само две жени са ставали лауреати в тази категория – Мария Кюри през 1903 г. и Мария Гьоперт Майер през 1963 г. Миналата година наградата спечелиха четирима американци за разкриване на тайните на екзотична материя. В периода от 1901 – 2017 г. Нобелови награди за физика са присъждани 111 пъти на 206 учени. Награди не са присъждани през 1916 г., 1931 г., 1934 г., 1940 г., 1941 г. и 1942 г. Обикновено наградите се присъждат на повече от един учен, като в 47 от случаите награденият е бил само един. Джон Бардийн, американски физик и електроинженер, е единственият, удостоен с две Нобелови награди за физика – през 1956 г. и през 1972 г. Основните му заслуги са откритието на транзистора през 1947 г. в лабораториите Бел и поставяне основите на теорията за свръхпроводниците. Най-младият лауреат е Уилям Лорънс Брег от Великобритания. Заедно с баща си той получава Нобелова награда за физика през 1915 г., когато е бил само на 25 години. Най-възрастният е Реймънд Дейвис младши, който е на 88 години, когато я печели през 2002 г. заедно с Масатоши Кошиба. Средната възраст на учените по времето, когато са удостоени с Нобелова награда за физика, е 55 години. Най-често наградата е присъждана за физика на частиците. Нобеловият медал за физика е създаден от шведския скулптор и гравьор Ерик Линдберг. Той представя природата под формата на богиня, наподобяваща Изида, показваща се от облаци и държаща в ръце рога на изобилието. Геният на науката държи воал пред лицето ѝ.

<u>Нобеловата награда за химия за 2017 г</u>. получава екип от трима учени – Жак Дюбоше от Швейцария (Лозански университет), Йоахим Франк от САЩ (Колумбийски университет) и Ричард Хендерсън от Великобритания (Университет в Кеймбридж). Тримата са разработили криоелектронната микроскопия за определяне с висока резолюция на биомолекулярни структури в разтвор. Методът подобрява изобразяването на биомолекули и позволява проследяването на процеси в живи клетки. Учените вече могат да замразяват биомолекули по време на движение и да придобиват ясна представа за невиждани досега процеси. Разработките на лауреатите от 80-те и 90-те години на миналия век правят революция в биохимията. През последните години технологията е оптимизирана , като желаната резолюция на ниво атоми е постигната през 2013 г. и изследователите вече могат да получават рутинно триизмерни структури на биомолекулите.

Ето кои учени са печелили Нобеловата награда за химия през последните 10 години:

2007 г. – Герхард Ертъл, Германия – за изследване на химически процеси върху твърди повърхности.

2008 г. – Японецът Осаму Шимомура и американците Мартин Чалфи и Роджър Циен – за откриването и разработването на зеления флуоресциращ протеин (GFP), който за пръв път е наблюдаван при медузите Aequorea victoria през 1962 г.

2009 г. – Американците Венкатраман Рамакришнан и Томас Щайц, както и израелката Ада Йонат – за изследвания върху структурата и функциите на рибозомите.

2010 г. – Ричард Хек от САЩ, Ейичи Негиши и Акира Судзуки от Япония – за разработването на метод, известен като паладий-катализирано кръстосано свързване – реакция за кръстосано свързване при органичен синтез с помощта на паладиев катализатор. Той позволява да се създават толкова сложни химикали, колкото се срещат в природата. Учените са открили ефикасни начини за свързване на въглеродни атоми, изграждащи сложни молекули, които подобряват всекидневния ни живот. Благодарение на откритието са създадени уникални медицински препарати и революционни материали като пластмасата.

2011 г. – Даниел Шехтман от Израел – за откриването на квазикристалите.

2012 г. – Робърт Лефковиц и Брайън Кобилка от САЩ – за изследванията на G-протеин свързаните рецептори.

2013 г. – Мартин Карплус, Майкъл Левит и Ари Уоршъл – за развитие на мултимащабни модели на сложните химически системи.

2014 г. – Ерик Бетциг от САЩ, Уилям Мьорнер от САЩ и Щефан Хел от Германия – за това, че са преодолели ограниченията на светлинния микроскоп и са разработили флуоресцентна микроскопия със свръхвисока разделителна способност.

2015 г. – Томас Линдал от Швеция, Пол Модрич от САЩ и Азиз Санджар, който е турско-американски гражданин – за изследване на механизмите за „ремонт" на ДНК.

2016 г. – Жан-Пиер Соваж, Фрейзър Стодарт и Бернар Феринха за разработването и синтеза на молекулярни машини-молекули с контролируеми движения, които могат да изпълняват задача, когато им бъде подадена енергия.

<u>Нобеловата награда за литература за 2017 г</u>. получава английският писател от японски произход Казуо Ишигуро. Наградата му се присъжда за романите, които „с голяма емоционална сила разкриват бездната под нашето илюзорно чувство за връзка със света", отбелязват от Нобеловия комитет. Писателят е създател на романи, сценарии за филми и телевизия, както и на разкази. Автор е на 7 романа, от които на български език са издадени: „Остатъкът от деня" (1989 г.), „Погребаният великан" (2015 г.), „Никога не ме оставяй" (2005 г.) и „Когато бяхме сираци" (2000 г.). При обявяването на името на нобелиста постоянният секретар на Шведската академия Сара Даниус изтъкна, че Ишигуро е блестящ писател, който е развил собствена естетика на романа. „Той е велик художник на словото, който обединява Джейн Остин и Франц Кафка", уточнява г-жа Даниус.

Казуо Ишигуро е роден на 8 ноември 1954 г. в Нагасаки, Япония. От 1960 г. живее в Лондон. През 1978 г. завършва английска филология и философия в Университета на Кент. През 1980 г. защитава докторска дисертация в Университета на Източна Англия върху творчеството на Малкълм Бредбъри. Публикува за първи път през 1980 г. Живее в Лондон заедно с жена си и дъщеря си. Освен, че е писател, Ишигуро свири на китара и композира песни.

През 2008 г. вестник „Таймс" поставя Казуо Ишигуро на 32-ро място в класация на „50-те най-велики британски писатели от 1945 г. насам". Тазгодишният лауреат се нарежда сред единиците, удостоени с Ордена на Британската империя за особени заслуги към английската литература и Ордена за изкуство и литература на Министерството на културата на Република Франция. Той има 4 номинации за наградата „Ман Букър", като печели отличието веднъж за „Остатъкът от деня". През 1994 г. този роман е филмиран и се превръща в един от най-добрите филми на 90-те години. Главните роли във филма изпълняват Антъни Хопкинс и Ема Томпсън. Романът „Никога не ме оставяй" е включен в списъка на стоте най-велики романи на английски език, написани след 1923 г. Израстването на Ишигуро като писател е в Англия. Това е и причината да бъде цитиран като британски писател с японски произход. Всъщност, романът „Още веднъж в Нагасаки" (1982 г.), с който стана известен на света, красноречиво говори, че писателят, макар и да не е израстнал в родината си, е дълбоко свързан с нейната съдба и по-конкретно с жестоката трагедия във връзка с атомната бомба над родния му град Нагасаки. „Още веднъж в Нагасаки" е удостоен с наградата „Уинифрид Холтби".

Носител на Нобеловата награда за литература за 2016 г. е големият американски поет и музикант Боб Дилън. От 1901 г. до 2016 г. са връчени общо 109 Нобелови награди за литература, от които 14 на жени. Четири от наградите са поделени от по двама души. Средната възраст на удостоените е 65 години. Прави впечатление смазващата доминация на англоезичните автори. Общо те са 29 срещу 14 франкофонски.

Нобеловата награда за мир за 2017 г. получава Международната кампания за забрана на ядреното оръжие (ICAN). За девети път Нобеловата награда за мир се присъжда на личност или организация, бореща се срещу ядреното оръжие. Тазгодишната конкуренция е впечатляваща. Номинациите са общо 318, от които 103 на личности. Сред тях са Папа Франциск, Ангела Меркел и Владимир Путин. Измежду номинираните организации е Българската православна църква, за което ще стане дума по-долу. Норвежкият Нобелов комитет награждава базираната в Женева организация ICAN „за работата й за привличане вниманието върху катастрофалните хуманитарни последици от използването на ядрени оръжия и за упоритите й усилия да постигне основаваща се на споразумение забрана на този вид оръжия". „Тазгодишната награда за мир е също така призив към ядрените държави да започнат сериозни преговори с цел постепенно, балансирано и внимателно наблюдавано премахване на почти 15 хил. ядрени оръжия в света", заяви председателят на Нобеловия комитет Берит Райс-Андерсен. Да напомним, че ядрените държави са: Великобритания, Израел, Индия, Китай, Пакистан, Русия, САЩ, Северна Корея и Франция.

Първата Нобелова награда за мир е присъдена през 1901 г. Оттогава призът е връчван 98 пъти, като са пропускани общо 19 години – например годините на Първата и на Втората световни войни.

<u>Нобеловата награда за икономика за 2017 г.</u> получава американският икономист Ричард Талер. Той е отличен заради изследванията му в областта на т. нар. „икономика на поведението". „Изучавайки последиците от ограничената рационалност, социалните предпочитания и липсата на самоконтрол, Ричард Талер показва как тези човешки черти систематично засягат индивидуалните решения, както и резултатите от пазара", се казва в обосновката на Кралската шведска академия на науките. Лауреатът „е изградил мост между икономическия и психологическия анализ на индивидуалното вземане на решения". Той обяснява как побутването (термин, измислен от него) може да помогне на хората да упражняват по-добър самоконтрол, например когато спестяват за пенсия. Оказва се, че например глобите са по-малко ефикасни, отколкото да се въздейства върху склонността на хората да се сравняват с другите. Изпраща им се писмо, в което се посочва: *„Вие сте един от малкото хора от Вашия квартал, които още не са платили фактурата си."*

Смята се, че Ричард Талер е измежду пионерите в новата наука *икономика на поведението*, която комбинира психологията и икономическия анализ. За основател на поведенческата икономика се признава психологът Даниел Канеман, с когото Талър е работил. През 2002 г. Канеман получава Нобелова награда за икономика „за прилагането на психологическа методика в икономическата наука и по-специално при изследването на формирането на съждения и вземането на решения в условията на неопределеност". Според традиционната икономика, ако хората имат достъп до информация и я обработват добре, винаги ще могат да изпълнят качествено плановете си. Човек обаче често взема нелогични и нерационални решения, което може да има огромно значение, ако говорим за решения в сферата на икономиката и финансите. Именно с това се занимава поведенческата икономика. Тя е вдъхновена от психологията и изследва поведението на хората и институциите в икономическата сфера и последващия ефект върху пазарите. През 70-те години на миналия век Даниел Канеман и заедно с друг израелски психолог Амос Тверски съставят подробен каталог на познавателните отклонения, които деформират анализа на дадена ситуация и подтикват индивидите да взимат нерационални решения. Такъв е например „рамкиращият ефект", който подвежда участниците да достигат до различни заключения в зависимост от контекста на представената им ситуацията: „40% вероятност да спечелиш" не създава същия ефект като „60% вероятност да загубиш". Но възникването на поведенческата икономика като отделна дисциплина става възможно чак след установяването на сътрудничество на Даниел Канеман с младия американски икономист Ричард Талер през 80-те години на миналия век.

В продължение на десетилетия Ричард Талер изследва как психиката формира икономическите решения на всеки от нас. Той обяснява как хората правят дългосрочни и краткосрочни планове в зависимост от самоусъвършенстването, но и от удоволствията. Таклер разкрива, че индивидуалната психика определя липсата на самоконтрол при вземането на финансови решения, а отклоненията в човешкото поведение често водят до скъпоструващи финансови грешки. Ричард Талер преподава своята дисциплина в

Университета в Чикаго. „Неговите емпирични открития и теоретични прозрения са допринесли за създаването на новото и бързо разширяващо се поле на поведенческата икономика, което има дълбоко въздействие върху много области на икономическото изследване и политика", посочват още от Нобеловия комитет.

Ричард Талер е бил съветник на икономическия екип на американския президент Барак Обама и на правителството на Дейвид Камерън във Великобритания. Той би могъл да подшушне на двамата лидери, че регулирането на финансовите пазари е подходяща мярка за избягване на нови трусове. Но се оказва, че Талер е не само професор по икономика в Бизнес училището на Чикагския университет. Той също е начело на инвестиционен фонд, специализиран в областта на поведенческите финанси.

През миналата година Нобеловата награда за икономика беше спечелена от Оливър Харт и Бенгт Холмстрьом за техния принос към теорията на договорите и ролята на тази теория в оформянето на всичко – от заплатите на изпълнителите до приватизациите в публичния сектор. През 2015 г. пък бе отличен Ангъс Дийтън за неговия анализ на потреблението, бедността и благосъстоянието. САЩ доминират наградата за икономика, а американските икономисти са приблизително половината от лауреатите от първото връчване на наградата през 1969 г.

Наградата за икономика не е класическа Нобелова награда и все още е спорна, тъй като, за разлика от всички други лауреати на Нобеловата награда, не е свързана с наследството на Алфред Нобел, а с шведската Riksbank в Стокхолм. През 1968 г. банката обявява наградата „в памет на Алфред Нобел", а година след това я предоставя за първи път. Това означава, че не става дума за действителна Нобелова награда, въпреки че, както и останалите награди, тя се връчва от Шведската кралска академия на науките.

В цялата почти 50-годишна своя история Нобеловата награда за икономика е връчвана само веднъж на жена – през 2009 г. на Елинор Остром, американски политолог и икономист. Най-възрастният носител на отличието е Леонид Хурвич. Той е бил на 90 години, когато получава приза през 2007 г. Най-младият е Кенет Дж. Ароу, който е бил на 51 години, когато му присъждат наградата през 1972 г. Средната възраст на лауреатите е 67 години, а повечето от тях са били отличени заради изследванията си в областта на макроикономиката.

Номинации на българи за Нобелова награда. Българският класик Иван Вазов е бил предлаган за Нобелова награда за литература през 1916 г. Преди един век професор Иван Шишманов (според други източници това е направил председателят на БАН академик Иван Гешов) издига кандидатурата на Вазов за Нобелова награда за литература. Писателят вече е бил популярен в Швеция, защото през 1895 г. там е преведен романът „Под игото". Преводач от български на шведски е д-р Алфред Йенсен. През 1912 г. Йенсен е вече член на Нобеловия комитет, който го изпраща у нас с мисията да се срещне с български учени и писатели. В спомените си Йенсен, който е приятел на Иван Шишманов, пише, че когато е бил в България, хората от кръга „Мисъл" му говорили против Вазов. Смята се, че това може да е оказало влияние върху крайното решение на комисията.

Алфред Йенсен е преводач, журналист, кореспондент на шведски вестници в Европа, автор на многобройни пътеписи от пътуванията в славянските страни, експерт по славянските литератури към Нобеловия комитет, истински интелектуален посредник между

Швеция и славянския свят. В България Алфред Йенсен идва за първи път през 1890 г., когато пристига с кораб по Дунав. Още следващата година в Швеция излиза очеркът му за Христо Ботев, който съдържа, наред със спомени и разкази на съвременниците, и преводи на стихове на Ботев. Тази книга е едно явление, благодарение на което шведите се запознали с поетичното и революционното дело на Христо Ботев значително преди други европейски народи.

В първите години на XX в. Пенчо Славейков става любим български поет и приятел на Алфред Йенсен, за което говори кореспонденцията между двамата, намираща се в личния архив на Йенсен в Кралската библиотека в Стокхолм. Йенсен с тревога следи здравословните и други проблеми на Славейков, интригите в българските литературни и академични среди относно представянето на кандидатурата на Пенчо Славейков за Нобеловата литературна награда, напразно очаква от България да пристигне писмено предложение и подкрепа. Тогава „за първи и вероятно за последен път", както пише самият Йенсен, Нобеловият комитет решил да му бъде предоставено правото да предложи кандидат от свое име. Така се стига до предложението на Алфред Йенсен от 30 януари 1912 г., съпроводено от обширна мотивировка с анализ на творчеството на Пенчо Славейков. През същата година Алфред Йенсен издава в Швеция Славейковите стихосбирки „Коледари" и „Сълби и поети", превежда много други стихове, както и поемата „Кървава песен", за която пише: „Шведската академия се намира пред щастливи и съвсем необикновени обстоятелства да може да представи на Европа един безспорно голям поет, при когото се констатира наличието на поетически шедьовър – „Кървава песен". Заради преждевременната смърт на Славейков обаче предложението да бъде удостоен с Нобелова награда не е разглеждано от Нобеловия комитет.

През 2005 г. британският драматург Харолд Пинтър преборва българската кандидатура за Нобелова награда за литература на Антон Дончев с един глас. На следващата година процедурата се повтаря и тогава Антон Дончев е изместен от Ферит Орхан Памук – турският автор, който в романите си съчетава традициите на европейската литература и османската култура. В годините, освен Пенчо Славейков, Иван Вазов и Антон Дончев, номинирани са били още Елисавета Багряна, Йордан Радичков и Валери Петров.

Любопитно е, че през 2017 г. Българската православна църква е номинирана за Нобелова награда за мир заради спасяването на българските евреи през Втората световна война. Предложението е направено от спасените български евреи и техните деца, живеещи в Израел. Счита се, че това е по-скоро емоционално, отколкото добре обмислено предложение. То е израз на усещането за една неизказана благодарност към България. Приемане на това, което е направила българската църква през Холокоста, е доста трудно в международен план, защото тогава се поставя въпросът какво са правили другите държави и другите църкви. Другите църкви изпитват неудобство от това, че са мълчали или нещо повече, че някои от тях са сътрудничили в гоненията на евреите, както е случаят със Словакия. Именно затова църковната общност в Европа, а и по света не подкрепи тази номинация. Това не беше артикулирано публично, но е добре известно, че църквите имат своите механизми за влияние.

15
години

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

PhD
програми

vuzf.bg

М+ е одобрено от МОН
за класна и извънкласна работа
по математика и информатика

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
гр. София, 1618, кв. "Овча купел"
ул."Гусла" №1
тел: +359 2 401 58 12, факс: +359 2 401 58 21
e-mail: office@vuzf.bg
www.vuzf.bg

ISSN 0861-8321