притурка

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

КАНДИДАТ-СТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ ПО МАТЕМАТИКА 2016 г.

Сава Гроздев   Цеца Байчева

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 20 март 2016 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $(x-3)(x-7)\sqrt{\dfrac{x-4}{x-5}} \le 0$.

Задача 2. В правоъгълния ΔABC ($BC > AC$), с прав ъгъл при върха C, радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е $r = 6$, а радиусът на описаната около него окръжност е $R = \dfrac{39}{2}$. Да се намерят страните на триъгълника.

Задача 3. Нека $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ и $tg\alpha = -\dfrac{7}{24}$. Да се намери $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 4. В трапеца $ABCD$, с основи $AB = 3\sqrt{39}$ и $CD = \sqrt{39}$, ъглите при голямата основа са $\angle ABC = 60^\circ$ и $\angle BAD = 30^\circ$, а точката $E \in AD$. Да се намери дължината на отсечката BE, ако тя разполовява лицето на трапеца.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1$.

Задача 6. В равнобедрения ΔABC, с бедра $AC = BC = 13$, точката $M \in AB$ е такава, че $CM = 5$. Да се намери основата на триъгълника, ако лицето му е възможно най-голямо.

Задача 7. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, със страна $AB = 2$, точката $M \in BC$ е такава, че равнината α определена от точките A, D_1 и M разделя куба на две части, отношението на обемите на които е 17:7. Да се намери лицето на сечението на α и куба.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $\left(x^2 + 2x + 3 - a\right)\left(a - |x-3|\right) = 0$ има точно три различни решения.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика второ равнище 19 юни 2016 г.

Задача 1. Да се реши неравенството $\left(x^{2016}-1\right)|x|<0$.

Задача 2. В окръжност с радиус 1 е вписан триъгълник. Върховете му разделят окръжността на три дъги, чиито дължини се отнасят както 1:2:9. Да се намери лицето на триъгълника

Задача 3. Първият член a_1, седмият и седемнадесетият член на растяща аритметична прогресия са последователни членове на геометрична прогресия. Да се намери частното на геометричната пргресия и разликата на аритметичната прогресия, ако $a_1^2=9$.

Задача 4. Даден е равнобедрен ΔABC ($AC=BC$), за който $AB<AC$. Окръжност с радиус $R=10\sqrt{10}$ се допира до правата AB в точка A, минава през точка C и пресича страната BC във вътрешна точка M така, че $BM:MC=2:3$. Да се намери лицето на ΔABC.

Задача 5. Да се реши неравенството $\sqrt{100-x^2}>x-2$.

Задача 6. Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната a. Да се намери дължината на най-късата отсеча, краищата на оято лежат върху контура на триъгълника и която разделя триъгълника на две равнолицеви части.

Задача 7. Основата на пирамида $EABCD$ е ромба $ABCD$, за който $BD=AB=AD=4$. Околният ръб ED е перпендикулярен на равнината на основата. Разстоянието от точката D до равнината BCE е 3. Да се намери големината на двустенния ъгъл φ между равнините BCE и $ABCD$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, при които уравнението $\left(x^2-(a+1)x+3(a-2)\right).\lg(2a-x-1)=0$ има поне един корен в интервала $[-1;2]$, а извън този интервал няма корени.

Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Математика първо равнище 27 март 2016 г.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайт в листа за отговори!

1. Най-голямото от посочените числа е:

А) 1,7 Б) $\sqrt[3]{5}$ В) $\sqrt[6]{26}$ Г) $\sqrt{3}$

2. Ако $a=3^{-1}$ и $b=-5$, то стойността на израза $\dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)$ е равна на:

А) $\dfrac{14}{5}$ Б) 3,5 В) $\dfrac{16}{5}$ Г) 5,3

3. Допустимите стойности на израза $\sqrt[4]{\dfrac{3-x}{(x-2)^2}}$ са:

А) $x\in(-\infty;3]$ Б) $x\in[2;3]$ В) $x\in(3;\infty)$ Г) $x\in(-\infty;2)\cup[2;3]$

4. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2-3x+2}{9-x^2}\le 0$ са:

А) $x \in [-3;1] \cup [2;3]$ Б) $x \in (-\infty;3) \cup [1;2] \cup (3;\infty)$

В) $x \in (-3;1] \cup [2;3)$ Г) $x \in (-\infty;-3] \cup [1;2] \cup [3;\infty)$

5. Стойността на израза $\dfrac{\log_7 40}{\log_7 8} + \log_8 0,2$ е равна на:

А) -1 **Б) 0** **В) 128** **Г) 1**

6. Броят на решенията на системата $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{vmatrix}$ е равен на:

А) 0 **Б) 1** **В) 2** **Г) 4**

7. Ако $\alpha + \beta = \dfrac{1}{2}$ и $\alpha\beta = -\dfrac{1}{3}$, то числата α и β са корени на уравнението:

А) $6t^2 - 3t - 2 = 0$ **Б)** $2t^2 - 3t - 6 = 0$ **В)** $6t^2 + 3t - 2 = 0$ **Г)** $2t^2 + 3t - 6 = 0$

8. Ако $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^2\alpha + 2\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)$ е равна на:

А) 1 **Б) 1,75** **В) -1.75** **Г) 1,5**

9. Върху раменете на ъгъл $\vec{p}O\vec{q}$ са взети съответно точките A, B, C и D, такива че $AC \parallel BD$, $OC = 6$, $CD = 10$ и $OB = 12$. Дължините на отсечките OA и AB са съответно равни на:

А) 4,5 и 7,5 **Б) 3,5 и 8,5** **В) 4 и 8** **Г) 5 и 7**

10. Ако основата и бедрото на равнобедрен триъгълник са съответно равни на 12 и 10, то радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е равен на:

А) 1 **Б) 2** **В) 3** **Г) 4**

11. На чертежа е изобразена графиката на функцията:

А) $f(x) = 4x + x^2$ Б) $f(x) = -4x + x^2$

В) $f(x) = -4x - x^2$ Г) $f(x) = 4x - x^2$

12. Ако редицата $\{b_n\}$, $n \in N$ е зададена с равенствата $b_1 = -3$, $b_n = b_{n-1} - 1$, то шестият и член е:

А) -6 **Б) -7** **В) -8** **Г) 4**

13. Дадена е геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$, за която $a_8 = 1$ и $\dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{1}{4}$. Първият член на прогресията е:

А) $a_1 = 128$ **Б)** $a_1 = 128$ или $a_1 = -128$ **В)** $a_1 = 256$ **Г)** $a_1 = 256$ или $a_1 = -256$

14. Ако $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то за стойностите на x е изпълнено:

А) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, където $k \in Z$

Б) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in Z$

В) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, където $k \in Z$

Г) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in Z$

15. В края на учебната година се оказало, че всички ученици от един клас са получили годишни оценки по математика –*Добър, Мн. Добър* или *Отличен*, по български език и литература – *Среден, Добър, Мн. Добър* или *Отличен*, а по физическо възпитание и спорт - *Мн. Добър* или *Отличен*. Група ученици от този клас, разглеждайки бележниците си забелязали, че няма двама от групата, които да имат едни и същи оценки и по трите предмета. Колко най-много ученици има в тази група?

А) 4 **Б) 24** **В) 3** **Г) 12**

16. На диаграмата са дадени резултатите от контролно по математика. Средното аритметично, модата и медианата са:

А) $3\frac{2}{3}$, 3, $3\frac{1}{2}$

Б) $3\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{2}{3}$

В) $3\frac{1}{3}$, 4, $3\frac{1}{2}$

Г) $3\frac{2}{3}$, 3, 4

17. Даден е ΔABC с ъгли 15°, 45° и 120°, който е вписан в окръжност с радиус $R = 19\sqrt{3}$. Дължината на най-голямата страна на ΔABC е равна на:

А) $19\sqrt{6}$ **Б) 57** В) $38\sqrt{3}$ Г) $38\sqrt{2}$

18. Даден е ΔABC, за който страната $AB = 4$, медианата $AM = 3$ и $\angle AMB = 135^\circ$. Дължината на страната BC е равна на:

А) $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{23} - 3\right)$ Б) $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3 + \sqrt{23}\right)$

В) $BC = \sqrt{2}\left(\sqrt{23} - 3\right)$ Г) $BC = \sqrt{2}\left(3 + \sqrt{23}\right)$

19. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), който е описан около окръжност k. Ако $AD = BC$, $\angle ABC = 30^\circ$ и $S_{ABCD} = 8$, то радиусът r на окръжността k е равен на:

А) $r = 1$ Б) $r = 2$ В) $r = 1,5$ Г) $r = \sqrt{2}$

20. Даден е четириъгълник $\boldsymbol{ABCD}$ със страни $\boldsymbol{AB}=4$, $\boldsymbol{BC}=6$, $\boldsymbol{CD}=5$ и диагонал $\boldsymbol{BD}=5$, в който може да се впише окръжност. Лицето $\boldsymbol{S}_{ABCD}$ и дължината на раиуса $\boldsymbol{r}$ на тази окръжност са съответно равни на:

А) $\boldsymbol{S}_{ABCD}=31,5$ или $\boldsymbol{r}=3,5$
Б) $\boldsymbol{S}_{ABCD}=27$ или $\boldsymbol{r}=3$
В) $\boldsymbol{S}_{ABCD}=22,5$ или $\boldsymbol{r}=2,5$
Г) $\boldsymbol{S}_{ABCD}=18$ или $\boldsymbol{r}=2$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запищете в листа за отговори!

21. Стойността на израза $\dfrac{3^{\frac{3}{4}}+5^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}-(3*5)^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}}-\left(\dfrac{3^{0.25}-5^{0.25}}{3^{\sqrt{0.25}}-5^{\sqrt{0.25}}}\right)^{-1}$ е равна на:

22. Решенията на уравнението $\boldsymbol{x}=\sqrt{16-6\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2}-2$ са:

23. Финансова институция предлага годишни влогове при 10% годишна лихва с планове както за просто, така и за сложно олихвяване на внесената сума, което се извършва в края на всеки период. Съпрузи едновременно открили два влога – единият на името на жената за 1010 лв. при проста лихва, а другият на името на мъжа за 1000 лв. при сложна лихва. След колко години сумата на мъжа ще стане по-голяма от сумата на жената (по тези конкретни влогове) и с колко лева?

24. В школа по математика учат 14 деца, средната възраст на коит е 12 години. След влизането на преподавателя, средната възраст на хората в стаята нарастнала с 3 години. На колко години е преподавателят?

25. Даден е $\Delta\boldsymbol{ABC}$ със страни $\boldsymbol{AB}=15$, $\boldsymbol{BC}=14$, $\boldsymbol{CA}=13$. Да се намери дължината на вписаната в триъгълника окръжност.

Пълните решения на задачите от 26. до 285. включително запищете в свитъка за решения!

26. Да се реши системата $\begin{cases}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{xy}^2=90\\(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{xy}^2=360\end{cases}$.

27. На щанд за сладолед с предлагат: ванилов, бананов, кокосов, шоколадов и сладолед с вкус на горски плодове, както и няколко вида сироп: ягодов, малинов, боровинков и карамелов. Колко възможности за избор има родител, който купува за детето си порция сладолед, включваща: по една топка от три различни вида сладолед, покрити с два различни вида сироп, поставени във вафлена фуния или в чашка с лъжичка? Каква е вероятността детето да получи бананов сладолед с карамелов сироп във вафлена фуния?

28. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$, със страни $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 3$, се пресичат в точка O. Да се намерят дължините на отсечките AO, BO, CO и DO.

Пловдивски университет „П. Хилендарски”
3 юни 2016 г.

ЧАСТ I. За верен отговор: 1 точка, иначе: 0 точки.

1. Числата $x_1 = 3$ и $x_2 = -17$ са корени на уравнението:

А) $x^2 - 14x - 51 = 0$ **Б)** $x^2 + 14x - 51 = 0$

В) $x^2 - 14x + 51 = 0$ **Г)** $x^2 + 51x - 14 = 0$

2. Числото със стойност $\frac{1}{2}$ е:

А) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ **Б)** $\log_{\sqrt{3}} 3$ **В)** $\log_3 \sqrt{3}$ **Г)** $\log_{\frac{1}{3}} 9$

3. След преработката на израза $\frac{|a-3|}{3-a} + \frac{a-2}{|a-2|}$ при $a < 2$ се получава:

А) 2 **Б) -2** **В) -1** **Г) 0**

4. Ако x е корен на уравнението $4x - 8 = 0$, то числената стойност на израза $\frac{3^x.27^{-x}.81}{9^x}$ е:

А) $\frac{1}{81}$ **Б)** $\frac{1}{9}$ **В)** $\frac{1}{3}$ **Г)** $\frac{1}{27}$

5. Най-малкото цяло число от дефиниционната област на функцията $f(x) = \frac{x+10}{x-5} + \log_7(3x - 12)$ е:

А) 3 **Б) 5** **В) 6** **Г) 4**

6. Стойностите на реалния параметър m, за които отношението на корените на уравнението $x^2 + mx - 16 = 0$ е -4 са:

А) -8 и **2** **Б)** само 6 **В)** само **-6** **Г) -6** и **6**

7. Решенията на системата $\left| \begin{array}{l} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{array} \right.$ са:

А) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\sqrt{2}\right)$ **Б)** $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$ **В)** $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right)$ **Г)** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\sqrt{2}\right)$

8. Биквадратното уравнение, което притежава само един реален корен е:

А) $x^4+5x^2-14=0$ Б) $x^4+3x^2=0$

В) $x^4-2x^2+32=0$ Г) $x^4-8x^2+15=0$

9. Изразът $\cos\alpha+\cos\left(120^\circ-\alpha\right)+\cos\left(120^\circ+\alpha\right)$ е равен на:

А) 2 **Б) -2** **В) 0** **Г) -1**

10. Равнобедрен и равностранен триъгълник имат обща основа. Периметърът на равностранния триъгълник е 36, а на равнобедрения – 40. Дължината на бедрото му е:

А) 14 **Б) 26** **В) 8** **Г) 16**

11. За правоъгълния ΔABC от чертежа е построена височината CD. Ако $\angle BAC=60$ и $AB=8$, то дължината на AD е:

А) 1 **Б) 3** **В) 2** **Г)** не може да се намери

12. Равнобедреният трапец $ABCD$ с бедро $BC=15$ *см* е описан около окръжност. Средната основа на трапеца е равна на:

А) 30 *см* **Б) 10** *см* **В) 5** *см* **Г) 15** *см*

ЧАСТ II. За верен отговор: 2 точки, иначе: 0 точки.

13. Решенията на неравенството $x^2+11+\sqrt{x^2+11}>42$ са:....

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25}$ е равна на:.....

15. Корените на уравнението $(x+3)^3-(x+1)^3=56$ са:...

16. В триъгълник със страни a, b, c е вписан полукръг с център лежащ върху страната c. Големината на диаметъра на този полукръг е:...

17. Височината на ромб разделя страната, към която е построена, в отношение 3:2 считано от връх на острия ъгъл. Синусът на този ъгъл е:....

ЧАСТ III. Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 18-20. Максимален брой точки за всяка задача: 6.

18. Решете уравнението $\dfrac{\log_2\left(9-2^x\right)}{3-x}=1$.

19. За правоъгълния ΔABC с катети $BC=a$ и $AC=b$ е построена права, която разделя ΔABC на ΔANM и четириъгълник $NBCM$. Ако $S_{ANM}=S_{NBCM}$, то намерете лицето на описания около четириъгълника $NBCM$ кръг.

20. Намерете стойностите на реалния параметър k от уравнението $x^2-(k+5)x+2k+3=0$, ако е изпълнено неравенството $\left(x_1-x_2\right)^2\geq 12$, където x_1 и x_2 са корените на даденото уравнение.