

TP 4

Intégrales multiples

1 Échauffement : intégrale simple, la spirale de Cornu

La spirale de Cornu est une courbe du plan, définie de manière paramétrique par

$$x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du.$$

► Tracer cette courbe pour $t \in [-10, 10]$ en calculant les intégrales grâce à `quad` de la librairie `scipy.integrate`.

2 Calcul de surface

On veut calculer la surface de la boucle délimitée par la courbe plane \mathcal{C} d'équation $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

► Pour un point de \mathcal{C} , déterminer y en fonction de x . Quelles sont les intersections de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses ?

► Tracer la courbe pour visualiser la boucle dont on veut calculer la surface.

► Caractériser la surface comme un domaine vertical.

► Calculer la surface grâce à `dblquad` de la librairie `scipy.integrate`.

3 Changement de variable

Soit $a > 0$ et le domaine $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x + y \leq 4a, xy \geq a^2, x \geq y\}$. On veut calculer les deux intégrales

$$I_1 = \int_{\mathcal{D}_2} (x^2 - y^2)xy \, dx dy, \text{ et } I_2 = \int_{\mathcal{D}_2} (x^2 - y^2) \cos(xy) \, dx dy.$$

► Tracer les courbes délimitant ce domaine. Pour ce graphe, on utilisera $a = 2$ et la même échelle sur les deux axes. Assortir d'une légende.

► Donner une représentation de \mathcal{D}_2 comme un domaine vertical.

► Soit le changement de variables $(x, y) = \varphi(u, v)$ où $x = u + v$ et $y = u - v$. Donner une description comme domaine vertical du domaine \mathcal{D}_1 décrit par les variables (u, v) dans ce changement de variable. Montrer qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme.

► Écrire les intégrales I_1 et I_2 en utilisant ce changement de variables.

➡ Définir une fonction `Ixy(f, a)`, qui calcule l'intégrale d'une fonction $f(x, y)$ sur \mathcal{D}_2 en utilisant `dblquad`. L'utiliser pour calculer I_1 et I_2 en les variables x et y , pour $a = 1, 2$ et 3 .

➡ Faire de même avec l'écriture en les variables u et v .

➡ Calculer (mathématiquement) I_1 et I_2 dans le jeu de variables qui vous semble le plus simple. Comparer avec les résultats obtenus numériquement.