TP 8
Pendule

On s'intéresse à l'équation du pendule. La variable α régie par l'équation différentielle est l'angle du pendule avec la verticale. On exprime alors l'accélération angulaire comme

$$\alpha''(t) = -\gamma\alpha'(t) - \sin(\alpha(t)) + a\cos(\omega_0 t).$$

Dans cette équation, γ est un coefficient de frottement. Le terme $a\cos(\omega_0 t)$, correspond à un forçage d'intensité a et de fréquence ω_0.

1 Mise sous forme de système

➽ En posant $x(t) = \alpha(t)$ et $y(t) = \alpha'(t)$, écrire cette équation du second degré sous la forme d'un système de degré un, que l'on écrira sous la forme $u'(t) = f(t, u(t))$, avec $u(t) = (x(t), y(t))$.

➽ Calculer la jacobienne de f par rapport aux variables x et y.

2 Pendule non amorti sans forçage

On commence par considérer le cas où $\gamma = 0$ et $a = 0$.

➽ Quels sont les états d'équilibre du système ?

➽ Montrer que la quantité

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + 1 - \cos(x(t))$$

est conservée au cours du temps. Que peut-on en déduire sur les trajectoires ?

➽ Implémenter une fonction python de signature `f0(u, gamma)` qui réalise la fonction $f(t, u)$ dans le cadre du pendule sans forçage.

➽ Utiliser `plt.streamplot` et `f0` pour tracer le diagramme de phase du système pour $(x, y) \in [-2\pi, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$. Coloriser les trajectoires en utilisant $\mathcal{E}$. Assortir le tracé d'une échelle de couleurs.

➽ Décrire les trajectoires.

➽ Tracer en pointillés noirs la séparatrice entre les deux comportements possibles de trajectoires.

3 Pendule amorti sans forçage

On considère maintenant qu'on a un amortissement γ non nul.

➽ Que peut-on dire de la quantité $\mathcal{E}(t)$?

➽ Tracer le nouveau diagramme de phase du système pour $\gamma = 0.5$.

➽ Décrire le comportement des trajectoires.

➽ Proposer une autre valeur de γ qui donnerait un portrait de phase de nature différente.

➽ Tracer le diagramme de phase du système pour cette valeur de γ.

4 Pendule amorti avec forçage

➽ Implémenter une fonction python de signature `f(t, u, gamma, a, omega)` réalise la fonction $f(t, u)$ dans le cadre du pendule avec forçage.

➽ Utiliser `odeint` et `f` pour tracer les trajectoires du système correspondant à $\gamma = 0.5$ et $\omega = 2/3$ et respectivement pour

- $(x(0), y(0)) = (0, 1.5)$ et $a = 0.9$,
- $(x(0), y(0)) = (-2, 0)$ et $a = 1.07$,
- $(x(0), y(0)) = (-2, 0)$ et $a = 1.15$.

On considèrera un pas de temps de $\delta t = 0.01$. On prendra d'abord $t \in [0, 30000]$. Pour chaque courbe, travailler le cadre et ne tracer la courbe que pour des temps suffisamment grands pour ne montrer que la trajectoire limite.

➽ En utilisant une projection 3D, tracer des courbes $(x(t), y(t), \mathcal{E}(t))$ dans les trois situations précédentes.

➽ Commenter ces courbes.