Week 5 3.28 四

1、 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + \prod_{i=1}^{n} x_i \quad -0.5 \le x_i \le 0.5$

解：(1) 求 f 和 X_k 的边缘分布.

$$F_k(x_k) = \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}_{n-1\text{个}} 1 + \prod_{i=1}^{n} x_i \, dx_1 x_2 \ldots x_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n$$

$$= 1 + 0 = 1$$

因此可知 每个 X_k 都服从均匀分布： $X_k \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(2)

$P(X_1 > 0, X_2 > 0, \ldots, X_n > 0)$.

$$= \underbrace{\int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{0}^{\frac{1}{2}}}_{n\text{个}} 1 + \prod_{i=1}^{n} \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{8^n} = \frac{4^n + 1}{8^n}$$

可分两两独立而不相互独立。(3) 与(1)类似 可求得 $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 的任意 k 个分量的密度函数满足 $f_{1,2,\ldots,k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_k}) = 1$，而 $f(x_1, x_2 \ldots x_n) \ne 1$

2.

证

解：设 $z = |Y|$，函数

则 $\begin{cases} u = \frac{1}{\sigma^2}(x^2+z^2) \\ v = \frac{z}{x} \end{cases}$ 且 $J^{-1} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)}\right|$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2x}{\sigma^2} & \frac{2z}{\sigma^2} \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sigma^2}\left(1+\frac{z^2}{x^2}\right) = \frac{2(1+v^2)}{\sigma^2}$$

$$f(x,z) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-(x^2+z^2)/2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow g(u,v) = f(x,z)|J| = \frac{1}{2\pi(1+v^2)} e^{-\frac{u}{2}}$$

$u > 0$, $-\infty < v < +\infty$

$\Rightarrow$ U 服从参数为 $1/2$ 的指数分布，

V 服从Cauchy分布，且两者相互独立。

三、判断

(1) 联合密度可唯一决定边缘密度，但反之不成立。

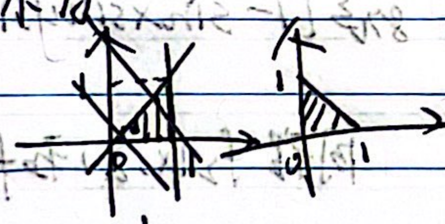
(2) 真。

4. 若 (X,Y) 服从以 $(0,0)$, $(0,1)$ 和 $(1,1)$ 为顶点的三角形区域上的均匀分布。

(1) 求随机向量 (X,Y) 的密度函数 $f(x,y)$

(2) 设随机变量 U, V 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布且相互独立，证明：X 与 $\min\{U,V\}$ 同分布，Y 与 $\max\{U,V\}$ 同分布。

解：(1) 图示为



则 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2, & \text{when } 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$F_X(z)=P(X\le z)=\int_0^z 2(1-x)dx$

$=2z-z^2$

$P(\min\{U,V\}\le z)=1-P(U>z,V>z)=2z-z^2$

$F_Y(z)=P(Y\le z)=P(\max\{U,V\}\le z)$

$=P(U\le z)\cdot P(V\le z)$

$=z^2$ 所以同分布。

(2) $\cancel{f_1(x)=\int_0^x 2\,dy = 2x \quad (0\le x\le 1)}$; $f_1(x)=\int_x^1 2\,dy=2(1-x) \quad (0\le x\le 1)$.

$f_2(y)=2y \quad (0\le y\le 1)$

$f_2(y)=\int_{\dots}^1 2\,dx=2(1-y) \quad (0\le y\le 1)$

5. 设随机向量 (X,Y,Z) 的联合密度为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(8\pi^3)^{-1}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\le x,y,z\le 2\pi\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

解：求 $f_1(x)$

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{8\pi^3}\cdot(1-\sin x\sin y\sin z)\,dy\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}$$

即 $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0\le x\le 2\pi\\ 0, & else\end{cases}$

x,y,z 三者与 x 相同，密度函数一致.

再求 $f_{12}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)\,dz$

$=\frac{1}{4\pi^2}$　　同理 $f_2(x,z)$ 和 $f_3(y,z)$

则显然 $f_1(x,y)=f_1(x)f_2(y)$

$f_2(x,z)=f_1(x)f_3(z)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{4\pi^2}$

同理

但 $f(x,y,z)=\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)\ne\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}$

$=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$

因此两两独立但相互不独立