Week4 习题四

1. X 服从参数为λ的指数分布

$Y=[X]$

$Z=X-[X]$

求 Y 和 Z 各自的分布。

解：(1) 计算Y， $P(Y=y)=P(y\le X<y+1)$.

$$\Rightarrow P(y\le X<y+1)=\int_y^{y+1}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=e^{-\lambda y}-e^{-\lambda(y+1)}.$$

$$\therefore P(Y=n)=e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$$

计算Z $P(n\le X<n+z)=F(n+z)-F(n)$

$$=(1-e^{-\lambda(n+z)})-(1-e^{-\lambda n})$$

$$=\cancel{e^{-\lambda z}}$$

$$=(1-e^{-\lambda z})\cdot e^{-\lambda n}$$

$$P(0\le Z<z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n\le X<n+z).$$

$$=(1-e^{-\lambda z})\times\frac{1}{1-e^{-\lambda}}=\frac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}}$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}}$$

$P(Z\le z\mid Y=n)=\dfrac{\int_n^{n+z}\lambda e^{-\lambda x}dx}{e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})}=\dfrac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}}$，所以 Z，Y 相互独立

2.

F(x) 为严格单调

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=($$

pf：

Y=

G(y

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

由于

G(

1-

$\Rightarrow$ g

2.

$F(x)$为严格单调连续函数，证明：$Y=F(X)$服从区间$(0,1)$上的均匀分布。

pf:

$Y=F(X)$的累积分布函数设为$G(y)$

$$G(y)=P(y\le Y)$$

$$=P(y\le F(\cancel{x}))$$

由于F为严格单调函数，因此有反函数

$$G(y)=P(\cancel{F^{-1}}\ X\le F^{-1}(y))$$

$$=\cancel{P(F(F^{-1}}(y))\ F(F^{-1}(y))=y$$

$\Rightarrow g(y)=1$ 为$(0,1)$上的均匀分布，$g(y)$为$G(y)$的概率密度函数。

#

Y相互独立

3、设随机变量 $X\sim N(0,1)$ 证明：对 $\forall x>0$，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}\le P(X>x)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

解：设 $F(x)$ 为 X 的分布函数

则有 $P(X>x)=1-F(x)$.

整理不等式得到：

$$1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}\le F(x)\le 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

先左先证左边

令 $g(x)=F(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}-1$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-1}{x^2}<0 \text{. 恒成立}$$

则 $g(x)$ 在 $x>0$ 上单调递减

$$g(x)\ge g(+\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(F(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)=0$$

则 $\cancel{F(x)}\ \cancel{g(x)}\ g(x)\ge 0 \Rightarrow F(x)\ge 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}$

证右边

令 $h(x) = \bar{F}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-2}{(1+x^2)^2} \right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$$

恒成立.

因此 $h(x) \le h(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \bar{F}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 = 0.$

两个等号可在 $x \to +\infty$ 时同时成立

因此原不等式证毕。

并.

4. 硬币掷3次，以 X = 三次中出现正面的次数.

Y = 三次中出现的正面次数和出现的反面次数之差的绝对值

解：则 $X = 0,1,2,3$ $\quad Y=1,3$

有

$Y \backslash X$	0	1	2	3
$Y=1$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
$Y=3$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

5. $F(x,y) = a(b+\arctan x)(c+\arctan y)$.

(1)

由 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1$

$\cancel{F_1(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = a(b-\frac{\pi}{2})(c}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = a(b-\frac{\pi}{2})(c+\arctan y)=0$

对 $\forall y\in \mathbb{R}$ 成立

则

$a(b-\frac{\pi}{2})=0$

同理 $a(c-\frac{\pi}{2})=0$.

且 $a\neq 0$

$\Rightarrow b=c=\frac{\pi}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{\pi^2}$

(2) $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$

$P(X<0, \cancel{\#}Y<0) = F(0,0) = \frac{1}{4}$

$P(X<0, \cancel{Y\le 0}\,Y>0) = \cancel{F+\infty0}\,P(X<0) - \cancel{F}\,P(X<0,Y<0)$

$= F(0,+\infty) - F(0,0) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(3).

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dv$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \cancel{\frac{1}{\pi^2}\cdots}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

同理 $f_2(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1+y^2}\right).$

6.

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos x\cos y, & 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\frac{\pi}{2}. \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1) 当 $x\le 0$, $y\le 0$ 时

$\cancel{f(x,y}$ $F(x,y)=0$

$\cancel{x\ge 0}$ 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $y\ge\frac{\pi}{2}$ 时

$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u,v)\,du\,dv = \sin x.$$

$0<y<\frac{\pi}{2}$, 当 $x\ge\frac{\pi}{2}$

$F(x,y) = \sin y$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$0<y<\frac{\pi}{2}$

有

$$\cancel{f(x,y)}\ F(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,du\,dv$$

$$=\sin x\cdot\sin y$$

(2)

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}<Y<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$$