

Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

19 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление	1
1.1 Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.	1
1.2 Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.	2
1.3 Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$. Формула трапеций.	3
1.4 Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).	4
1.5 Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^n k^p$ при различных p . Постоянная Эйлера.	5
1.6 Билет 6: Формула Стирлинга	5
1.7 Билет 7: ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры. . .	6
1.8 Билет 8: Свойства несобственных интегралов.	8
1.9 Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.	12
1.10 Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.	14
1.11 Билет 11: Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$	15
2. Метрические и нормированные пространства	19
2.1 Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.	19
2.2 Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.	20
2.3 Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.	21
2.4 Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.	22
2.5 Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества. .	24
2.6 Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.	27
2.7 Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.	28

2.8	Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.	31
2.9	Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.	32
2.10	Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота \mathbb{R}^d	34
2.11	Билет 22: Покрывтия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.	35
2.12	Билет 23: Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах.	36
2.13	Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.	37
2.14	Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью.	38
2.15	Билет 26: ε -сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^d . Теорема Больцано-Вейерштрасса.	38
2.16	Билет 27: Определения предела по Коши и по Гейне. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Критерий Коши.	39
2.17	Билет 28: Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.	41
2.18	Билет 29: Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.	42
2.19	Билет 30: Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.	43
2.20	Билет 31: Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в \mathbb{R}^d	44
2.21	Билет 32: NAME	45
2.22	Билет 33: NAME	45
2.23	Билет 34: NAME	45
2.24	Билет 35: NAME	45
2.25	Билет 36: NAME	45
2.26	Билет 37: NAME	45
2.27	Билет 38: NAME	45
2.28	Билет 39: NAME	45
3.	Числовые и функциональные ряды	46
3.1	Билет 40: Ряды в нормированных пространствах. Простейшие свойства. Покоординатная сходимость ряда в \mathbb{R}^d	46
3.2	Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда. Свойства	48
3.3	Билет 42: ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.	50
3.4	Билет 43: Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.	52

3.5	Билет 44: Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.	53
3.6	Билет 45: Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак.	55
3.7	Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.	57
3.8	Билет 47: Признак Лейбница. Оценка суммы знакопередающегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка)	58
3.9	Билет 48: Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда	59
3.10	Билет 49: Теорема Римана.	60
3.11	Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.	61
3.12	Билет 51: Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).	62
3.13	Билет 52: Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.	63
3.14	Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$	65
3.15	Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.	67
3.16	Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей. . .	68
3.17	Билет 56: Пространство ℓ^{∞} и его полнота	69
3.18	Билет 57: Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $C(K)$ и его полнота.	70
3.19	Билет 58: Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.	71
3.20	Билет 59: Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры. . . .	73
3.21	Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости	74
3.22	Билет 61: Признак Абеля	75
3.23	Билет 62: Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не сходится равномерно абсолютно. Признак Динни	76
3.24	Билет 63: Теорема о перестановке пределов и о перестановке предела и суммы. . .	76
3.25	Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.	78
3.26	Билет 65: Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.	79
3.27	Билет 66: NAME	79
3.28	Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.	79
3.29	Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.	80
3.30	Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда. .	81
3.31	Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.	82
3.32	Билет 71: NAME	83
3.33	Билет 72: NAME	83

4. Функции нескольких переменных	84
4.1 Билет 73: Дифференцируемость отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m . Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.	84
4.2 Билет 74: Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений	85
4.3 Билет 75: Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента	87
4.4 Билет 76: Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.	88
4.5 Билет 77: NAME	89
4.6 Билет 78: NAME	89
4.7 Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.	89
4.8 Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости.	90
4.9 Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство	91
4.10 Билет 82: Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в \mathbb{R}^2	92
4.11 Билет 83: NAME	93
4.12 Билет 84: NAME	93
4.13 Билет 85: ! Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.	93
4.14 Билет 86: Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.	95
4.15 Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения	96
4.16 Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым	98
4.17 Билет 89: NAME	100
4.18 Билет 90: NAME	100
4.19 Билет 91: Теорема о неявной функции	100
4.20 Билет 92: NAME	101
4.21 Билет 93: NAME	101
4.22 Билет 94: NAME	101
4.23 Билет 95: NAME	101
4.24 Билет 96: NAME	101
4.25 Билет 97: NAME	101
4.26 Билет 98: NAME	101
5. Теория меры	102
5.1 Билет 99: NAME	102
5.2 Билет 100: NAME	102
5.3 Билет 101: NAME	102

5.4	Билет 102: NAME	102
-----	---------------------------	-----

1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпением. А лучше корвалолом.

1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

Определение 1.1.

Дробление отрезка $[a, b]$ – это набор точек τ , такой что

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Ранг (мелкость) дробления – $\max_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Пара (τ, ξ) – оснащённое дробление

Определение 1.2.

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$ и оснащённое дробление (τ, ξ)

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 1.1.

$$|S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f| \leq (b-a)\omega_f(|\tau|)$$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)| dt \quad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < \omega_f(|\tau|) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \omega_f(|\tau|)(b-a) \end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a, b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau, \xi)_n$, такой что $|\tau_n| \rightarrow 0$, верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

Доказательство.

$$f \in C([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$$

□

Определение 1.3.

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau, \xi)_n$, такой что $|\tau_n| \rightarrow 0$, верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = I$$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана

1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

$$\text{Ограничим } S_n(p) \text{ сверху: } S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 f(t) dt$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = t^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n}$$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt$$

Доказательство.

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t) (t - \gamma)' dt = f(t) (t - \gamma) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = f(\beta) (\beta - \gamma) - f(\alpha) (\alpha - \gamma) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt \\ \gamma) dt &= \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} (\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left(t - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) dt \\ ((t - \alpha)(\beta - t))' &= \alpha + \beta - 2t = -2(t - \gamma) \\ \Delta &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left(-\frac{1}{2}\right) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t) (t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1.2 (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$ и τ - дробление. Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| S \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t) (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \\ |t - x_{k-1}| |x_k - t| &\leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leq \frac{|\tau|^2}{4} \\ |\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

□

1.4. Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

Теорема 1.3. (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$$f \in C^2[m, n] \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Доказательство.

Подставим в формулу $m = k, n = k + 1$. Получим:

$$f(k) + f(k+1) = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Выразим отсюда $f(k)$:

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(t) dt + \frac{f(k)-f(k+1)}{2} + \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Просуммируем от m до $n - 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1} f(k) &= \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt \\ f(n) + \sum_{k=m}^{n-1} f(k) &= f(n) + \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt = \\ &= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt \end{aligned}$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(k) = \dots$

Заметим, что выражение не зависит от k ($f(t+k) = g(t)$) \implies можно "сдвинуть". Будем считать, что $k = 0$. Тогда $\{t\} = t$.

$$f(0) = \int_0^1 f(t) dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(t) \cdot t(1-t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{f(0)+f(1)}{2} = -\frac{1}{2} \int_0^1 f''(t-0) \cdot t(1-t) dt$$

Верно по лемме из билета 3: $\alpha = 0, \beta = 1$.

□

1.5. Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^n k^p$ при различных p . Постоянная Эйлера.

Будем использовать формулу Эйлера-Маклорена

Пример.

$$1. S_p(n) := \sum_{k=1}^n k^p$$

Пусть $f(t) = t^p$, тогда $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

$$S_p(n) = \int_1^n t^p dt + \frac{1+n^p}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\}) dt$$

$$\int_1^n t^p dt = \left. \frac{t^{p+1}}{p+1} \right|_{t=1}^{t=n} = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}$$

Случай $-1 < p < 1$

$$0 \leq \int_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\}) dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} = \frac{1}{4} \left. \frac{t^{p-1}}{p-1} \right|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4(1-p)} \left(1 - \frac{1}{n^{1-p}} \right) \leq \frac{1}{4(1-p)}$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Случай $p > 1$

$$0 \leq \int_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\}) dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} = \frac{n^{p-1}-1}{4(p-1)} = O(n^{p-1})$$

2. Гармонический ряд

$$H_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Пусть $f(t) = \frac{1}{t}$, тогда $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

По формуле Эйлера-Маклорена

$$H_n = \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1+1/n}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\}) dt$$

$$a_n := \int_1^n \frac{1}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\}) dt$$

$$a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{1}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\}) dt \geq a_n \Rightarrow \text{это возрастающая последовательность.}$$

$$a_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \text{предел последовательности}$$

существует. $\Rightarrow a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow a_n = a + o(1)$

$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1)$ в пределе $\frac{1}{2n}$ сокращается $o(1)$, и все кроме логарифма – постоянная Эйлера-Маскерони.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.5772156649 \dots$$

1.6. Билет 6: Формула Стирлинга

Продолжаем примеры для формулы Эйлера-Маклорена

Пример.

3. Формула Стирлинга

Хотим найти $\ln(n!)$

Пусть $f(t) = \ln t$, тогда $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!) = \int_1^n \ln t \, dt + \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n -\frac{1}{t^2} \cdot \{t\}(1 - \{t\}) \, dt$$

$$b_n := \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} \, dt \leq b_{n+1} \Rightarrow b_n \text{ возрастает.}$$

$$b_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} \, dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow b_n \text{ сходятся.} \Rightarrow b := \lim b_n \Rightarrow b_n = b + o(1)$$

$$\ln(n!) = n \ln n + \frac{\ln n}{2} - n - \frac{b}{2} + o(1)$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{-\frac{b}{2}} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}, \text{ т.к. } e^{o(1)} \rightarrow 1$$

Хотим понять, что такое $c := e^{1-b}$.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2nc}}{n^{2n} e^{-2n} n c^2} = \frac{2^{2n} \sqrt{2n}}{n \cdot c} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n \cdot c}} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$$

Итого формула Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

1.7. Билет 7: ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.

Определение 1.4.

Если $-\infty < a < b \leq +\infty$ и $f \in C[a, b)$,

$$\text{Пусть } L := \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx.$$

Аналогично если $-\infty \leq a < b < +\infty$ и $f \in C(a, b]$,

$$\text{Пусть } L := \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx$$

Тогда если L существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int_a^b f(x) \, dx := L$

Если он конечен, скажем, что интеграл сходится, иначе – если предел не существует или бесконечен – интеграл расходится.

Определённый интеграл называется несобственным, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

- 1) Область интегрирования является бесконечной.
- 2) Функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Замечание.

Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового, потому что:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx$$

Доказательство: $\left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^b f \right| \leq \int_c^b |f| \leq \int_c^b M = M(b-c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow b-$

Теорема 1.4 (Критерий Коши сходимости интегралов).

$-\infty < a < b \leq +\infty$ $f \in C[a, b)$

$\int_a^b f$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) : \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \left| \int_c^d f \right| < \varepsilon$

Доказательство.

“ \implies ”

По определению интеграл сходится $\iff \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = \int_a^b f$ — существует и конечен.

Тогда $\lim_{d \rightarrow b-} \int_a^b f = \int_a^b f - \lim_{d \rightarrow b-} \int_a^d f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall d \in (b - \delta, b) \left| \int_d^b f \right| = \left| \int_a^b f - \int_a^d f \right| < \varepsilon$

Тогда наш $\left| \int_c^d f \right| = \left| \int_a^d f - \int_a^c f \right| \leq \left| \int_a^d f - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| < 2\varepsilon$

“ \impliedby ”

Обозначим $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

Переписанное условие: $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$

Пусть наша $\tilde{b} = b - \delta$

Тогда перепишем условие как $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c, d \in (b - \delta, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$

Это и есть критерий Коши для $\lim_{c \rightarrow b-} F(c)$. □

Следствие.

$-\infty < a < b \leq +\infty$ $f \in C[a, b)$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = b$

и $\int_{c_n}^{d_n} f \not\rightarrow 0$, то $\int_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \rightarrow b \implies \exists N \forall n > N \ c_n, d_n > \tilde{b}$

\implies по критерию Коши $\left| \int_{c_n}^{d_n} f \right| < \varepsilon$.

Значит, $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$, что противоречит условию. □

Замечание.

$f \in C[a, b)$ $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F .

Значит существование $\int_a^b f$ – это существование $\lim_{c \rightarrow b-} (F(c) - F(a)) = \lim_{c \rightarrow b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b (слева).

Соглашение: если F не определена в точке b , считать, что $F \Big|_a^b := \lim_{c \rightarrow b-} F(c) - F(a)$

Тогда если $\int_a^b f$ существует, то $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

Пример.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1} \Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$$

1) При $p = 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \rightarrow +\infty$$

Тогда интеграл расходится.

2) При $p \neq 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \rightarrow \frac{1}{p-1}, \text{ если } p > 1$$

Если же $p < 1$, то $\rightarrow +\infty$.

Получили, что $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p}$$

1) Если $p = 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \ln x \Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$$

Значит, интеграл расходится.

2) Если же $p \neq 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$$

Если $p > 1 \implies \rightarrow +\infty$

Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

Получили, что $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

1.8. Билет 8: Свойства несобственных интегралов.

Свойства.

Везде $-\infty < a < b \leq +\infty$ $f \in C[a, b]$

1. Аддитивность.

$$\int_a^b f \text{ сходится} \implies \forall c \in (a, b) \int_c^b f \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f - \text{сходится} \implies \exists \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f =: \int_a^b f$$

$$\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f \implies \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f = \int_a^c f + \lim_{B \rightarrow b-} \int_c^B f$$

Тогда $\lim_{B \rightarrow b-} \int_c^B f$ должен сходиться.

$$\text{Получили, что } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

$$2. \int_a^b f \text{ сходится} \implies \int_c^b f \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow b-.$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f$$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = \int_a^b f - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

$$3. \text{Линейность. } \int_a^b f \text{ и } \int_a^b g \text{ сходятся} \implies \int_a^b (\alpha f + \beta g) \text{ сходится тоже.}$$

$$\text{И } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g.$$

Перейдём к пределу $B \rightarrow b-$.

\implies предел существует, конечен \implies интеграл сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

□

Замечание.

$$\int_a^b f \text{ сходится } \int_a^b g \text{ расходится} \implies \int_a^b (f \pm g) \text{ расходится.}$$

Доказательство – от противного.

$$4. \text{Монотонность } f, g \in C[a, b] \quad f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$c \in [a, b) \implies f, g \in C[a, c]$$

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g$$

Переходим к пределу в неравенстве. $c \rightarrow b-$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

□

5. Интегрирование по частям.

$$f, g \in C^1[a, b)$$

Если $\int_a^b f g'$ сходится и $\exists \lim_{c \rightarrow b-} f(c) \cdot g(c)$, то $\int_a^b f' g$ сходится и

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

Доказательство.

$$c \in [a, b) \quad f, g \in C^1[a, c]$$

$$\int_a^c f g' = f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g$$

Теперь напишем предел $c \rightarrow b-$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f g' = \lim_{c \rightarrow b-} \left(f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g \right) = \lim_{c \rightarrow b-} f g \Big|_a^c - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f' g = \lim_{c \rightarrow b-} f(c) \cdot g(c) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f' g$$

$$\implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

при существовании $\lim_{c \rightarrow b-} f(c) \cdot g(c)$ и $\int_a^b f' g$, что есть в условии.

□

6. Замена переменной.

$f \in C[a, b)$ $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$ и φ непрерывна и дифференцируема

$$\varphi(\beta) := c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma)$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны.

Доказательство.

$$F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx \quad y \in [a, b)$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$$

Если существует предел в правой части. Т.е. $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

Тогда $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - \Phi(\alpha)$

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$

$a \leq \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$

Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

Если $c = b$, то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

Теперь надо понять, что $\lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$

Возьмем $\gamma_n \rightarrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow c$ оба стремятся слева

$F(c_n) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c} F(y)$

$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$

Случай второй. Существует $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$

Т.е. существует $\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$

Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$ существует и мы попали в первый случай.

Поэтому $c = b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n \rightarrow \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \rightarrow b$

Пусть $y_n \rightarrow b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta) \quad \varphi(\delta_n) = y_n$.

$\varphi(\alpha) \leq y_n \leq \varphi(\gamma_m)$

\implies по непрерывности φ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \rightarrow \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \rightarrow [a, b]$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$\varphi(\delta_{n_k}) \leq \varphi(p) < b$.

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \rightarrow b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Пример.

Замена $x = \sin t \implies dx = \cos t dt$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание.

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

1.9. Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

Теорема 1.5.

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b)$$

Тогда сходимость $\int_a^b f(x) dx$ равносильна ограниченности сверху первообразной F .

Доказательство.

$$F(y) := \int_a^y f$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} F(c) - F(a), \quad F(a) = 0 \quad (\text{из утверждения выше})$$

$$F(z) = F(y) + \int_y^z f \geq F(y), \quad \text{где } \int_y^z f \geq 0 \text{ при } y < z \implies F(y) \text{ монотонно возрастает.}$$

Итого, $F(y)$ имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

□

Следствие.

$$f, g \in C[a, b) \quad 0 \leq f \leq g$$

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.

2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство.

$$G(y) := \int_a^y g, \quad F(y) := \int_a^y f \implies F \leq G$$

1. $\int_a^b g$ сходится $\implies G$ ограничена сверху $\implies F$ ограничена сверху $\implies \int_a^b f$ сходится.

2. От противного. Пусть $\int_a^b g$ сходится, тогда и $\int_a^b f$ сходится по первому пункту. Противоречие.

□

Замечание. 1. Неравенству $f \leq g$ достаточно выполнения для аргументов, близких к b .

Доказательство.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Для второго слагаемого $f \leq g$, используем следствие. □

2. Вместо $f \leq g$ можно использовать и $f = O(g)$

Доказательство.

$$\int_a^b Cg = C \int_a^b g - \text{сходится.}$$

□

3. Если $f \geq 0$, $f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Доказательство.

$$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leq M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} g$ сходится.

$$\int_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} - \text{сходится.}$$

□

Следствие.

$f, g \geq 0$, $f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \rightarrow b-$

Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$f \sim g \implies$ найдется такое c , что $\frac{g}{2} \leq f \leq 2g$ при $x > c$

Если $\int_a^b g$ сходится, то $f \leq 2g \implies \int_a^b f$ сходится.

Если $\int_a^b f$ сходится, то $g \leq 2f \implies \int_a^b g$ сходится.

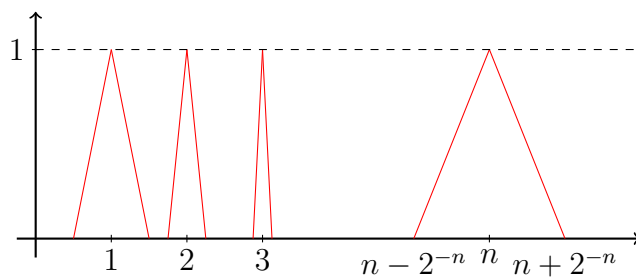
□

Замечание.

$f \geq 0$, $f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, ..., $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$



1.10. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

Определение 1.5 (Абсолютная сходимость.).

$$f \in C[a, b]$$

$\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.6.

Если $\int_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int_a^b f$ сходится.

Доказательство.

$$0 \leq f_{\pm} \leq |f|$$

$$\int_a^b f \text{ абсолютно сходится} \implies \int_a^b |f| \text{ сходится} \implies \int_a^b f_{\pm} \text{ сходится}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b (f_+ - f_-) = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \implies \int_a^b f \text{ сходится.}$$

□

Теорема 1.7 (признак Дирихле).

$$f, g \in C[a, +\infty)$$

$$1. \exists M : \left| \int_a^c f \right| \leq M \text{ при всех } c > a.$$

2. g – монотонная функция.

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Тогда $\int_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$.

$$\text{Пусть } F(y) := \int_a^y f$$

По условию $|F| \leq M$

$$\int_a^c fg = \int_a^c F'g = Fg|_a^c - \int_a^c Fg'$$

Надо доказать, что существует предел при $c \rightarrow +\infty$

Распишем первое слагаемое как: $F(c)g(c) - F(a)g(a)$. Тогда $F(c)g(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$, так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что $\int_a^c Fg'$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что $\int_a^c |F| \cdot |g'|$ сходится.

$$\int_a^c |F| \cdot |g'| \leq M \int_a^c |g'| = M \int_a^c g' = M |g|_a^c = M |g(c) - g(a)| \leq M |g(a)| \implies \int_a^{+\infty} |F'g| \text{ сходится.}$$

□

1.11. Билет 11: Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

Теорема 1.8 (признак Абеля).

$$f, g \in C[a, +\infty)$$

1. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – сходится
2. $|g(x)|$ – ограничена, то есть $|g(x)| \leq K \quad \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле, то есть заделаем себе такие функции из f, g , что они будут сходиться по признаку Дирихле.

Напомним его условия: у одной из функций интеграл должен быть ограничен, другая монотонно стремится к 0. С помощью $f(x)$ мы получим ограниченный интеграл, с помощью g – монотонно стремящуюся к 0 функцию.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то есть по определению получаем, что существует конечный предел: $\exists \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x) dx$.

Нам в определении нужно, чтобы $\exists C : \forall b : \left| \int_a^b f(x) \right| < C$, то есть ограниченность интеграла. Выберем какой-нибудь отрезок $[a, B]$.

1. $b \leq B$. То есть мы хотим ограничить интеграл на отрезке. Он на нём непрерывен (вроде очев, но допустим, потому что дифференцируем :), так что по т. Вейерштрасса, ограничен, что и хотели.
2. $b > B$. То есть b где-то в окрестности бесконечности. Но у нас есть предел интеграла на бесконечности – он достигается и конечный. Так что можно ограничить $\left| \int_a^b f(x) \right|$ через предел + константу при достаточно больших b .

Отсюда вроде получаем, что B надо брать достаточно большое, то есть чтобы можно было такую константу вообще найти.

(у Храброва и Ани так подробно про выбор отрезка не было, там просто говорилось, то на маленьких непрерывность даёт ограниченность, а на бесконечности предел, я попробовал раскрыть. Возможно, что так подробно не стоит рассказывать на экзе)

Далее: g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ и $|A| \leq K$. То есть возьмём и найдём её предел, он конечный.

$\tilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

Т.е. показали, что f и \tilde{g} удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$$\implies \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x) dx - \text{сходится}$$

$$fg = fA + f\tilde{g}. \text{ А в интеграле: } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} fA + \int_a^{+\infty} f\tilde{g}$$

$\int_a^{+\infty} fA$ сходится, так как A - константа и её можно вынести, а $\int_a^{+\infty} f$ сходится по условию признака.

А второго слагаемое сходится по доказанному выше. Итого оба слагаемых сходятся, то есть и интеграл сходится, ура. \square

Следствие (интеграл от произведения монотонной и периодической функции).

$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T , g - монотонна.

$$1. \int_a^{+\infty} g(x) dx - \text{сходится.}$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx - \text{сходится абсолютно.}$

$$2. \int_a^{+\infty} g(x) dx - \text{расходится. Дополнительное условие: } g(x) \rightarrow 0 \text{ на бесконечности.}$$

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx - \text{сходится} \iff \int_a^{a+T} f(x) dx = 0$$

(кстати, в этом условии хватит и того, что $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$ расходится абсолютно: об этом в доказательстве)

Это следствие из признака Дирихле (не Абеля)

Доказательство.

1. Первый случай: интеграл g сходится

$f \in C[a, a+T]$, то есть непрерывна на отрезке, то есть ограничена на нём по т. Вейерштрасса. При этом она периодическая, так что те же ограниченные значения будут и на всей прямой. То есть, она ограничена везде.

g монотонна, то есть только 1 раз может пересечь 0, а дальше она знакопостоянна. То есть на некоем луче $[b, +\infty)$ она знакопостоянна. Допустим, что она на нём положительна, отсюда $|g| = g$, пригодится ниже. Если же она отрицательна, то можем рассматривать $-g$ в условии, интеграл просто поменяет знак, то есть сходимости это не влияет.

Нам теперь интересно: $\int_b^{+\infty} |fg|$ - сходится? Но f ограничена, то есть не больше какой-то константы M ; а $|g| = g$, так что:

$$\int_b^{+\infty} |fg| \leq \int_b^{+\infty} Mg = M \int_b^{+\infty} g$$

По условию этого случая, интеграл g сходится, то есть получили, то и исходный интеграл $|fg|$ тоже сходится, ура.

Небольшое пояснение: мы же доказали сходимост на луче $[b, +\infty]$? Да, а на полуинтервале $[a, b)$ интеграл просто конечен и на сходимост на $[a, +\infty]$ не влияет.

2. Второй случай: интеграл g абсолютно расходится, $g \rightarrow 0$.

“ \Leftarrow ”

$$F(y) := \int_a^y f(x) dx = \underbrace{\int_a^{a+kT} f(x) dx}_{=0} + \int_{a+kT}^y f(x) dx = \int_{a+kT-kT}^{y-kT} f(x) dx = \int_a^{y-kT} f(x) dx$$

$$a \leq y - kT \leq a + T.$$

То есть мы хотим посчитать интеграл. Разобьём его на интеграл, который включает в себя целое число периодов: на каждом из таких периодов он 0 (интеграл по периоду 0, не забываем), так что и весь интеграл по целому числу периодов равен 0. Оставшийся интеграл - остаток от $a + kT$ до y . Так как функция у нас периодическая, то мы можем сдвинуть границы на T и ничего не изменится, так что можно сдвинуть и на kT влево, и получить интеграл от a до $y - kT \in [a, a + T]$.

То есть получили, что множество значений $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a + T]$ совпадает: $\forall y \in \mathbb{R}$ мы найдём значение функции, которая считалась только на отрезке $[a, a + T]$.

Но F непрерывна \implies ограничена на $[a, a + T]$ по т. Вейерштрасса $\implies F$ ограничена на \mathbb{R} , ведь множество значений совпадает, а значит максимальные значения функции и на $[a, a + T]$, и на \mathbb{R} совпадают, то есть максимум ограничен и там, и там. (и минимум тоже ограничен, если функция очень маленькая и в минус уходит)

\implies по принципу Дирихле $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ограничен, а g монотонна и стремится к 0.

“ \implies ”

От противного.

Докажем, что если $\int_a^{a+T} f(x) dx =: A \neq 0$, то $\int_a^{+\infty} fg$ расходится. (то есть если интеграл по периоду не 0, то расходится)

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ - периодическая, так как просто отняли константу (A, T - константы).

$$\int_a^{a+T} \tilde{f} = \int_a^{a+T} f - \int_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0. \text{ (просто } f(x) = \tilde{f}(x) + \frac{A}{T} \text{ и мы разбили интеграл)}$$

Значит, $\int_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится по следствию \Leftarrow , так как интеграл \tilde{f} равен 0 по периоду, а g монотонно стремится к 0.

$$\text{Но } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + A \int_a^{+\infty} g$$

Первое слагаемое сходится, как только что доказали. Второе слагаемое расходится - по условию, $\int_a^{+\infty} g$ расходится. То есть сходящийся интеграл = сходящийся + расходящийся, что невозможно, противоречие, что и нужно было.

Теперь о том, почему хватит расходимости $\int_a^{+\infty} |g|$, а не $\int_a^{+\infty} g$, как в условии.

Ну вообще, из расходимости интеграла следует и абсолютная расходимость: интеграл абсолютно сходится \implies интеграл сходится, и не может быть так, что интеграл не сходится просто, но сходится абсолютно

Но на самом деле, из абсолютной расходимости в данной задаче следует и обычная расходимость, потому что g монотонна. Она лишь 1 раз может пересечь 0 и поменять знак. И после пересечения 0 она будет знакопостоянна. То есть интеграл на хвосте будет совпадать с абсолютным интегралом в точности до знака. А значит, у них будет одновременная сходимость и расходимость

То есть если бы мы в условии написали абсолютную расходимость, то из неё бы мы получили и обычную расходимость, для которой мы теорему доказали.

□

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

Случай 1.

$$p > 1 \quad \frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится}$$

$$\implies \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx - \text{абсолютно сходится.}$$

Случай 2.

$$0 < p \leq 1$$

$$\sin x - \text{периодическая функция} \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$\frac{1}{x^p} \rightarrow 0 \text{ и монотонна.}$$

$$\implies \text{по следствию из признака Дирихле} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится.}$$

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$ – периодическая функция, $\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx \neq 0$, так что по тому же следствию, получаем, что интеграл расходится.

$$\implies \text{нет абсолютной сходимости.}$$

Случай 3.

$$p \leq 0$$

Воспользуемся критерием Коши.

$$\int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{3}$$

$$\implies \text{нет сходимости, так как не стремится к 0.}$$

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

Определение 2.1.

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, \triangle)

Пример.

Обычная метрика на \mathbb{R} : $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на \mathbb{R}^2 - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга между точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на \mathbb{R}^2 : $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французская железнодорожная метрика: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B, A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \iff AP, PB > 0.$$

$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A :

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = AC + (CP + PB) = (AC + CP) + PB \geq AP + PB = \rho(A, B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = (AP + PC) + (CP + PB) \geq AP + PB = \rho(A, B). \quad \square$$

Определение 2.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$.

Свойства.

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$$

Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$.

Доказательство.

Возьмём $r = \frac{\rho(a, b)}{2}$.

Пусть $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a, x) < \frac{\rho(a, b)}{2}$ и $\rho(x, b) < \frac{\rho(a, b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a, x) + \rho(x, b) < \rho(a, b)$, противоречие с Δ . \square

Аналогичная пара свойств есть и у \overline{B} .

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

Определение 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\text{Int } A$.

Определение 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. \emptyset, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

Доказательство.

Пусть $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$ - открытое множество. $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмём точку a , $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$.

Так-как A_β открытое, $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$. \square

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

*Доказательство.*Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.Пусть $r = \min_k r_k > 0$.Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$. □4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.*Доказательство.*Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned}
y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\
&\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\
&\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\
&\stackrel{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\
&\implies y \in B_r(a)
\end{aligned}$$
□

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.*Определение 2.5* (повтор).Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\text{Int } A$.*Свойства.*Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\text{Int } A \subset A$
2. $\text{Int } A$ - объединение всех открытых множеств содержащихся в A .

*Доказательство.*Пусть $G = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое. $G \subset \text{Int } A$:

$$\begin{aligned}
x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\
&\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\
&\implies x \in \text{Int } A
\end{aligned}$$

$\text{Int } A \subset G$: $x \in \text{Int } A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\text{Int } A$ - открытое множество

Доказательство.

A - объединение открытых множеств, значит открыто. □

4. $\text{Int } A = A \iff A$ - открыто

Доказательство.

Необходимость (\implies): $\text{Int } A$ открыто.

Достаточность (\impliedby): A открыто \implies все точки внутренние $\implies A = \text{Int } A$. □

5. $A \subset B \implies \text{Int } A \subset \text{Int } B$

6. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

Доказательство.

В сторону \subset :

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset A \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \\ A \cap B \subset B \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B \end{array} \right\} \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \cap \text{Int } B$$

В сторону \supset :

$$\begin{aligned} x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B &\implies \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{Int } A \implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \text{Int } B \implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{array} \right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies \\ &\implies x \in \text{Int}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

7. $\text{Int } \text{Int } A = \text{Int } A$

Доказательство.

Заметим, что $\text{Int } A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. □

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

Определение 2.6.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. \emptyset, X - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

□

Так как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^n A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

Доказательство.

Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.

Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset$:

Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) < r$.

$$\rho(x, a) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

Определение 2.7.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Обозначается $\text{Cl } A$ или \overline{A} .

Теорема 2.1.

$$\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.

Будем доказывать в виде $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ по всем U_{α} таким, что $U_{\alpha} \subset (X \setminus A)$ и U_{α} открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists \alpha \quad U_{\alpha} = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall \alpha \quad X \setminus U_{\alpha}$ - замкнутое надмножество A .

Пусть $C_{\alpha} = X \setminus U_{\alpha}$.

$$X \setminus \text{Cl } A = X \setminus \bigcap_{\alpha} C_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X \setminus C_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \text{Int}(X \setminus A).$$

□

2.5. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \text{Cl } A$
2. $\text{Cl } A$ - замкнутое множество

Доказательство.

По определению, $\text{Cl } A$ - пересечение замкнутых множеств. □

3. $\text{Cl } A = A \iff A$ замкнуто

Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \text{Cl } A &\iff X \setminus A = X \setminus \text{Cl } A \\ &\iff X \setminus A = \text{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned} \quad \square$$

4. $A \subset B \implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \text{Int}(X \setminus B) \subset \text{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B \end{aligned} \quad \square$$

5. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \text{Int}(X \setminus (A \cup B)) \\ &= X \setminus \text{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\text{Int}(X \setminus A) \cap \text{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \text{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \text{Int}(X \setminus B)) \\ &= \text{Cl } A \cup \text{Cl } B \end{aligned} \quad \square$$

6. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$

Доказательство.

$\text{Cl } A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

Теорема 2.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Доказательство.

Необходимость (\implies):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \emptyset$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \text{Cl } A$.

Достаточность (\impliedby):

Пусть $a \notin \text{Cl } A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A , такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$.
При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \emptyset$. □

Следствие.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множество. При этом $A \cap U = \emptyset$.

Тогда $\text{Cl } A \cap U = \emptyset$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \text{Cl } A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \emptyset \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

Определение 2.8.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

Определение 2.9.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$.

Множества предельных точек множества A обозначается A' .

Свойства.

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
a \in \text{Cl } A &\iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ a \in A' \end{cases}
\end{aligned}$$

□

$$2. A \subset B \implies A' \subset B'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \\
&\implies a \in B'
\end{aligned}$$

□

$$3. (A \cup B)' = A' \cup B'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\
B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\
&\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'
\end{aligned}$$

Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \emptyset$.

Заметим, что $\forall 0 < r \leq R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \emptyset$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \emptyset$.

Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Значит, $x \in B'$

□

$$4. A' \subset A \iff A - \text{замкнутое}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
A - \text{замкнутое} &\iff A = \text{Cl } A \\
&\iff A = A \cup A' \\
&\iff A' \subset A
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость (\Rightarrow):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность (\Leftarrow): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A'$. \square

2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

Определение 2.10.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \rangle$ называется метрическим подпространством X .

Далее, при разговоре о подпространствах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X , такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость (\Rightarrow):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Rightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B_{r_a}^Y(a) \subset A \\ &\Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(A) \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(a) = A.$$

Достаточность (\Leftarrow):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Rightarrow \exists r > 0 \quad B_r^X(a) \subset G \\ &\Rightarrow B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Rightarrow B_r^Y(a) \subset A \\ &\Rightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 2.5.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X , такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого эквивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A .

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

2.7. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

Определение 2.11.

Нормированным пространством над \mathbb{R} называется пара $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, где X - линейное пространство над \mathbb{R} (далее одно и то же обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ)

Пример.

$$X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^d |x_i|. \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}. \\ \|x\|_n &= \sqrt[n]{\sum_{i=1}^d |x_i|^n}. \\ \|x\|_\infty &= \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|. \end{aligned}$$

Пример.

$$X = C[a, b], \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \\
 &= |f(x_0) + g(x_0)| \\
 &\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \\
 &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \\
 &= \|f\| + \|g\|
 \end{aligned}$$

□

Определение 2.12.

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над \mathbb{C} , тогда надо ещё потребовать $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Пример.

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Пример.

Пусть $w_1, \dots, w_d > 0$, тогда

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d w_i x_i y_i$$

Пример.

$$X = C[a, b], \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Свойства.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ и $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

Доказательство.

Пусть $t \in \mathbb{R}$.

$$\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0.$$

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.$$

Это квадратное уравнение имеет корень только если $x + ty = 0$, значит не более одного корня. Его дискриминант ≤ 0 :

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

□

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма

Доказательство.

(а) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x \rangle$ и $\sqrt{\cdot}$.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = \lambda \|x\|$

(с)

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\stackrel{.2}{\iff} \langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\iff \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(а) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(с) $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ (Δ для нормы).

□

2. $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

□

2.8. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

Определение 2.13.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Определение 2.14.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственен

Доказательство.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, a \neq b$.

Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}, a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε .

Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

Но тогда $\rho(a, b) \overset{\Delta}{\leq} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$. Противоречие, значит предел единственен. \square

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$

Доказательство.

Определения посимвольно совпадают. \square

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0 \\ &\implies \rho(x_n, a) - \text{ограниченная последовательность вещественных чисел} \\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R \\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \end{aligned} \quad \square$$

4. Если a - предельная точка множества A , то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

Доказательство.

По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \dot{B}_r(a) \neq \emptyset$.

Пусть $r_1 = 1, r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}, x_n \in \dot{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. \square

5. $A \subset X$, $x_n \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies a \in A \cup A' = \text{Cl } A$.

Доказательство.

Если $a \notin A$:

Предположим что $a \notin A' \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset \implies \nexists x \in A \quad 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

Но, если подставить этот ε в определение предела, то получим что $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $x_N \in A \implies x_N \neq a \implies \rho(x_N, a) > 0$. Противоречие, значит $a \in A'$. \square

2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 2.6.

Пусть $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0.$$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0.$$

1. $x_n + y_n \rightarrow a + b$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\triangleq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

\square

2. $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a\| \\ &\leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\rightarrow |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$

\square

3. $x_n - y_n \rightarrow a - b$

Доказательство.

$$-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b, \quad x_n + (-y_n) \rightarrow a + (-b) = a - b.$$

\square

4. $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$

Доказательство.

$$0 \leq \|x\| - \|a\| \leq \|x - a\| \rightarrow 0.$$

□

5. Если задано скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, то $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$.

Доказательство.

Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) &= \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4\langle x, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned} \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle \\ &= \langle x_n, y_n - b \rangle - \langle x_n - a, y_n \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + y_n\|^2 + \|x_n - a - y_n\|^2) \\ &\rightarrow \frac{1}{4} (\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2) = 0 \end{aligned}$$

□

Определение 2.15.

Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$.

Тогда x_n покомпонентно сходится к x_0 , если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 2.7.

В \mathbb{R}^d с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.

Необходимость (норма \implies коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leq (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leq \sum_{j=1}^d (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0.$$

Достаточность (коорд \implies норма)

$$0 \leq \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0.$$

□

2.10. Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота \mathbb{R}^d

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

Определение 2.16.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Последовательность x_n называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма.

Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = 1$, получим $\forall n \geq N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(N)$, пусть

$$r = \max\{1, \max_{k < N} \{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$. □

TODO: Это все свойства фундаментальной последовательности?

Определение 2.17.

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Лемма.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Пусть $x_n \in X$ - фундаментальна, а $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n - \text{фундаментальна} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть $L = \max\{N, n_M\}$.

Тогда $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$.

Значит, $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies x_n \rightarrow a$. □

Следствие.

1. \mathbb{R}^d - полное

Доказательство.

Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$ - фундаментальная последовательность.

Тогда x_n ограничена $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся к точке из \mathbb{R}^d подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$. □

2. K - компакт в $\langle X, \rho \rangle \implies \langle K, \rho \rangle$ - полное.

Доказательство.

K - компакт, $x_n \in K$ - фундаментальна.

$$\exists x_{n_k} \in K \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in K. \quad \square$$

2.11. Билет 22: Покрывтия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

Определение 2.18.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

Определение 2.19.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого открытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 2.8.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Доказательство.

$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X .

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y .

Можем выбрать конечное U_{α_k} .

$$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k} - \text{конечное открытое покрытие.}$$

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y .

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

$$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha - \text{открытое покрытие } K \text{ в } X.$$

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k} . Тогда

$$\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y . □

Теорема 2.9.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

Доказательство.

Возьмём $a \in X \setminus K$.

Заметим, что $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}} \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \emptyset$.

Возьмём открытое покрытие K : $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

Тогда, при $r := \min_k \{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \emptyset \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \text{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$ открыто $\implies K$ замкнуто. \square

2. K - ограничено

Доказательство.

Возьмём $a \in K$.

Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^m B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max_k \{n_k\}$. \square

Следствие.

Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то \tilde{K} - компакт.

Доказательство.

Пусть U_{α} - открытое покрытие \tilde{K} .

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как \tilde{K} замкнуто), получится открытое покрытие K . Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \quad \square.$$

2.12. Билет 23: Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах.

Теорема 2.10.

Пусть K_{α} - семейство компактов, и для любого конечного набора компактов пересечение непусто.

Тогда $\bigcap_{\alpha \in I} K_{\alpha} \neq \emptyset$.

Доказательство.

Предположим $\bigcap_{\alpha \in I} K_{\alpha} = \emptyset$.

Тогда $\exists \alpha_0 \in I \quad K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} K_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_{\alpha})$ - получилось открытое покрытие.

Выберем конечное: $K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus K_{\alpha_k}) = X \setminus \bigcap_{k=1}^n K_{\alpha_k}$.

Но тогда $\bigcap_{k=0}^n K_{\alpha_k} = \emptyset$, противоречие. \square

Следствие.

Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3, \dots$ - непустые компакты.

Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset$.

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов - компакт с максимальным номером $\neq \emptyset$. \square

2.13. Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.

Определение 2.20.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность сходящуюся к точке из K .

Теорема 2.11.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ секвенциально компактно.

Тогда всякое бесконечное множество точек из K имеет хотя-бы одну предельную точку в K .

Доказательство.

Выберем последовательность x_n из этого подмножества, $x_n \in K$, значит можем выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходится она может только к предельной точке. \square

Теорема 2.12.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ - компакт.

Тогда K секвенциально компактно.

Доказательство.

Пусть $x_n \in K$ - последовательность. $D = \{x_n\}$ (множество элементов).

Если D конечно, то какая-то точка встречается в последовательности бесконечное количество раз, выберем подпоследовательность состоящую только из этой точки, она сходится.

Заметим, что в D обязательно есть предельная точка:

Пусть нету. Тогда $D = D \cup \emptyset = D \cup D' = \text{Cl } D \implies D$ замкнуто. Замкнутое подмножество компакт - компакт.

Так-как $\forall n \quad x_n$ не предельная в D , можем выбрать r_n , такие, что $\overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \emptyset \implies \overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \{x_n\}$.

Покроем D такими шарами. Каждый шар покрывает ровно одну точку и точек бесконечно \implies нельзя выбрать конечное покрытие. Противоречие.

Значит, $\exists a \in D'$.

Возьмём произвольную точку из последовательности x_{n_1} . Пусть $r_k := \min\{\frac{1}{k}, \min_{n < k} \{x_n\}\}$.

Будем брать x_{n_k} как произвольную точку из $\overset{\circ}{B}_{r_{k-1}}(a)$. Так-как он ближе к a чем все предыдущие, $n_k > n_{k-1}$, значит получится подпоследовательность.

При этом, $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k-1} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. При этом, $D \subset K \implies \text{Cl } D \subset \text{Cl } K = K$. А $a \in D' \subset \text{Cl } D \subset K \implies a \in K$. \square

2.14. Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью.

TODO: Не могу найти ни у себя ни у Ани ничего про это.

2.15. Билет 26: ε -сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^d . Теорема Больцано-Вейерштрасса.

TODO: Сети и Хаусдорфа опять не видно не у меня не у Ани.

Определение 2.21.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$.

Теорема 2.13 (О вложенных параллелепипедах).

Пусть $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ - замкнутые параллелепипеды.

Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$.

Доказательство.

Обозначим $P_n =: [a^{(n)}, b^{(n)}]$.

По теореме о вложенных отрезках:

$$\forall k \in [1, n] \quad \exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \quad .$$

Тогда, $c = (\forall n \quad c_1, \dots, c_d) \in P_n$

□

Теорема 2.14.

Замкнутый куб (замкнутый параллелепипед, все координаты углов которого равны для данного угла) в \mathbb{R}^d - компакт.

Доказательство.

Пусть K - замкнутый куб и U_α - его открытое покрытие. Предположим что выбрать конечное нельзя.

Разобьём K на 2^d кубов, со стороной равной половине стороны K . U_α - открытое покрытие каждого такого куба.

Хотя-бы один маленький куб нельзя будет покрыть конечным покрытием, назовём его K_1 , повторим для него, получим последовательность $K_1 \supset K_2 \supset \dots$

По теореме о вложенных параллелепипедах, $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

$\exists \alpha_0 \quad c \in U_{\alpha_0}, U_{\alpha_0}$ открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$.

Заметим, что длина ребра $K_n = \frac{l}{2^n} \rightarrow 0$ (l - длина ребра K) \implies максимальное расстояние между точками - $\sqrt{d} \frac{l}{2^n} \rightarrow 0$ (какой-то факт о евклидовой метрике).

Тогда, $\exists n \quad \sqrt{d} \frac{l}{2^n} < r$. Значит, $\exists n \quad K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$. Но это противоречит тому, что для K_n нельзя выбрать конечное покрытие. Значит K - компакт.

□

Теорема 2.15.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ с евклидовой метрикой. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. K - компакт
2. K - замкнуто и ограничено
3. K секвенциально компактно.

Доказательство.

$1 \implies 2$ и $1 \implies 3$ уже были.

$2 \implies 1$: K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset \text{куб}$. K - замкнутое подмножество компакта $\implies K$ - компакт.

$3 \implies 2$:

Пусть K не замкнуто. Тогда есть предельная точка не в K . Можем выбрать сходящуюся к ней последовательность, но тогда любая подпоследовательность сходится к ней \implies не можем выбрать сходящуюся к точке из K . Противоречие $\implies K$ замкнуто.

Пусть K не ограничено $\implies \forall n > 0 \quad K \not\subset B_n(0)$.

Тогда, можем выбрать последовательность вида $x_n \in K \setminus B_n(0)$. Тогда $\rho(0, x_n) \geq n$.

Выберем сходящуюся к $a \in K$ подпоследовательность x_{n_k} . Тогда x_{n_k} ограничена, причём ограничивающий шар с центром в a точно существует: $x_{n_k} \in B_r(a) \implies \rho(x_{n_k}, a) < r \xrightarrow{\Delta} \rho(x_{n_k}, 0) < r + \rho(0, a)$. Противоречие, значит K ограничено. □

Замечание.

$3 \implies 1$ верно для произвольного пространства, но доказательство сложное.

$2 \implies 1$ в общем случае неверно:

Рассмотрим \mathbb{R} с метрикой лентяя. $[0, 1] \subset B_2(0)$, и есть замкнутость.

Но из $\bigcup_{x \in [0, 1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$ нельзя выбрать конечное покрытие, так-как каждый шар содержит лишь одну точку.

Теорема 2.16 (Больцано-Вейерштрасса).

Из всякой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ - замкнуто и ограничено \implies компакт \implies секвенциально компактно \implies можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □

2.16. Билет 27: Определения предела по Коши и по Гейне. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Критерий Коши.

Определение 2.22 (Коши).

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда $(f(A) = \{f(x) \mid x \in A\})$ - образ функции).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(\overset{\circ}{B}_\delta^X(a) \cap E) \subset B_\varepsilon^Y(b).$$

Аналогичная формулировка (раскрыть образ):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\varepsilon^Y(b).$$

И ещё одна аналогичная формулировка (раскрыть шары):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon).$$

Определение 2.23 (Гёйне).

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \text{ последовательностей } x_n \in E \setminus \{a\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Теорема 2.17.

Определения по Коши и по Гёйне эквивалентны.

Доказательство.

Коши \implies Гёйне:

$$\text{Пусть } x_n \in E \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta.$$

В частности, у нас δ для ε из Коши. Выберем по нему N .

$$\text{Тогда } \forall n > N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Гёйне \implies Коши:

$$\text{От противного. Пусть } \delta \text{ не существует } \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \quad \exists x \in \overset{\circ}{B}_\delta^X(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) > \varepsilon.$$

В частности, можем взять $\delta = \frac{1}{n}$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \setminus a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, но $\rho_Y(f(x_n), b) > \varepsilon$. Получается, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq b$. Противоречие с Гёйне.

□

Следствие.

Предел единственен.

Доказательство.

Пусть предел не единственен. Тогда по Гёйне у любой последовательности должны быть оба предела, что невозможно так как предел последовательности единственный, а функция от последовательности - последовательность.

□

Теорема 2.18.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Тогда $\exists r > 0 \quad f|_{B_r(a) \cap E}$ - ограничена.

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = \rho_Y(f(a), b) + 1$ в Коши:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta^X(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) < \rho_Y(f(a), b) + 1.$$

Значит, все значения функции в $B_\delta^X(a) \cap E$ лежат в $B_{\rho_Y(f(a), b) + 1}^Y(b)$.

□

Теорема 2.19.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, Y - полное, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(y)).$$

Альтернативная формулировка (раскрытие шаров):

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \wedge \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Доказательство.

Необходимость (\implies):

$$\begin{cases} \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon \\ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(y), b) < \varepsilon \end{cases} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \rho(f(x), b) + \rho(b, f(y)) < 2\varepsilon$$

Достаточность (\leq):

Возьмём последовательность $x_n \in E \setminus \{a\}$, $x_n \rightarrow a$.

Проверим фундаментальность $f(x_n)$:

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \rho_Y(f(x_n), f(x_m)).$$

Для данного ε возьмём δ по критерию Коши, и по δ возьмём N такое, что $\forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$. Тогда критерий Коши даёт нам фундаментальность $f(x_n)$. Так-как Y - полное, фундаментальная последовательность будет сходиться к точке Y .

Пределы на последовательностях получатся одинаковыми: иначе, можем смешать их, получить сходящуюся к a последовательность которая также даст предел, но тогда у сходящейся последовательности есть подпоследовательности с разными пределами. Противоречие. \square

TODO: Нужна-ли арифметика и всё такое? Вроде в билете даже не сказано про «Основные свойства» итд...

2.17. Билет 28: Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

Определение 2.24.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется непрерывной в точке $a \in E$ если a - изолированная точка (**TODO:** не предельная? Или есть пустая проколота окрестность в X ?), либо $a \in E'$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Теорема 2.20.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle, \langle Z, \rho_Z \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$, $f(E) \subset \tilde{E} \subset Y$, $g : \tilde{E} \mapsto Z$.

Если f непрерывна в $a \in E$, а g непрерывна в $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в a .

Доказательство.

$$f \text{ непрерывна в } a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\lambda^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\delta^Y(f(a)) \cap \tilde{E}.$$

g непрерывна в $f(a) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta^Y(f(a)) \cap \tilde{E} \quad g(x) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$.

Комбинируем:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\lambda^X(a) \quad g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f$ непрерывна в a . \square

Теорема 2.21.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$.

f непрерывна на $X \iff \forall$ открытого $U \subset X \quad f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ открыт.

Доказательство.

Необходимость (\implies):

Пусть $V = f^{-1}(U)$.

Пусть $a \in V$. Так-как U открыто, $\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon^Y(f(a)) \subset U$.

По непрерывности $\exists \delta > 0 \quad f(B_\delta^X(a)) \subset B_\varepsilon^Y(f(a)) \subset U$.

$f(B_\delta^X(a)) \subset U \implies B_\delta^X(a) \subset V \implies a \in \text{Int } V \implies V$ - открытое.

Достаточность (\impliedby):

Проверим непрерывность в $a \in X$.

$U := B_\varepsilon^Y(f(a))$ - открытое множество.

Значит, $\exists \delta > 0 \quad B_\delta^X(a) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(a)))$

То есть, $f(B_\delta^X(a)) \subset B_\varepsilon^Y(f(a))$, а это и есть определение непрерывности в терминах шаров. \square

2.18. Билет 29: Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

Теорема 2.22.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $f(K)$ компакт.

Доказательство.

Возьмём открытое покрытие $f(K)$, назовём его U_α .

Тогда $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ - открытое покрытие K .

Выберем конечное V_{α_k} .

Тогда $K \subset \bigcup_{k=1}^n V_{\alpha_k} \implies f(K) \subset \bigcup_{k=1}^n f(V_{\alpha_k}) = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$. \square

Теорема 2.23 (Вейерштрасса).

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $\exists u, v \in K \quad \forall x \in K \quad f(u) \leq f(x) \leq f(v)$.

Доказательство.

$f(K)$ - компакт \implies замкнут и ограничен.

Ограничен $\implies \inf f$ и $\sup f$ - конечные.

Предположим что $b := \sup f \notin f(K)$.

Тогда можем взять последовательность $x_n \in f(K)$, $x_n \rightarrow b$. Тогда b - предельная точка $f(K)$. $b \in f(K)' \subset \text{Cl } f(K) = f(K)$. Противоречие. Значит $b \in f(K) \implies \exists v \in K \quad f(v) = b$. Аналогично для $\inf f$. \square

Теорема 2.24.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывная биекция, X - компакт.

Тогда f^{-1} непрерывна.

Доказательство.

Пусть $g := f^{-1}$.

Пусть $U \subset X$ - открытое множество.

Заметим, что $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$ (так-как биекция).

$X \setminus U$ - замкнутое подмножество компакт \implies компакт $\implies f(X \setminus U)$ замкнуто $\implies Y \setminus f(X \setminus U)$ - открыто.

$f(U) = g^{-1}(U)$, значит для g прообраз открытого открыт $\implies g$ непрерывно. \square

2.19. Билет 30: Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.

Определение 2.25.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется равномерно непрерывной если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad (\rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Лемма.

Если f равномерно непрерывна, то f непрерывна.

Доказательство.

Чтобы показать непрерывность в точке a подставим $x = a$ в определение. \square

Теорема 2.25 (Кантора).

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $K \subset X$ - компакт, $f : K \mapsto Y$ - непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

Пусть $\exists \varepsilon > 0$ для которого ни одно δ не подходит. Возьмём $\delta = \frac{1}{n}$.

Так-как δ не подошло, $\forall n \quad \exists x_n, y_n \in K \quad \rho_X(x_n, y_n) < \delta$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

x_n - последовательность из компакта $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся подпоследовательность.

Пусть $a := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$.

$$\rho(x_{n_k}, a) \rightarrow 0, \quad \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0.$$

$$\text{Тогда, по } \Delta, \quad \rho(y_{n_k}, a) \rightarrow 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a.$$

$$\text{По непрерывности, } \exists \lambda > 0 \quad \rho_X(x, a) < \lambda \implies \rho_Y(f(x), a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так-как подпоследовательности сходятся $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \lambda, \rho(y_N, a) < \lambda$ (тут нужен только один элемент каждой последовательности).

Тогда, $\rho(f(x_N), f(y_N)) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(f(x_N), a) + \rho(a, f(y_N)) < \varepsilon$. Противоречие с тем как брали x_n, y_n .
Значит f равномерно непрерывна. \square

2.20. Билет 31: Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в \mathbb{R}^d

Определение 2.26.

Пусть $\langle X, \|\cdot\|_1 \rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2 \rangle$ - нормированные пространства.

Их нормы называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1.$$

Замечание.

Сходимости по эквивалентным нормам равносильны

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|x_n\|_1 &\rightarrow 0. \\ C_1 \|x_n\|_1 \leq \|x_n\|_2 \leq C_2 \|x_n\|_1 \rightarrow 0 &\leq \|x_n\|_2 \leq 0 \implies \|x_n\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

\square

Замечание.

Эквивалентность норм - отношение эквивалентности.

Доказательство.

$$\|x\|_1 \text{ эквивалентна } \|x\|_2 \iff \|x\|_1 = \Theta(\|x\|_2).$$

\square

Теорема 2.26.

Все нормы на \mathbb{R}^d эквивалентны.

Доказательство.

Докажем эквивалентность всех норм Евклидовой $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}$.

Пусть $p(x)$ - произвольная норма. e_k - стандартный базис.

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^d p(e_k)^2} \text{ (по Коши-Буняковскому)} \\ &= C \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Получили одно неравенство.

Также, получили следующие (где метрика это $\|x - y\|$):

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad |p(x) - p(y)| \stackrel{\text{свойства нормы}}{\leq} p(x - y) \leq C \|x - y\| < \varepsilon.$$

Значит, $p(x)$ - непрерывная функция.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$. Оно замкнуто (у Ани без доказательства, набросок - если норма точка не 1, но к нельзя подойти оставив норму 1, значит не предельная) и ограничено $\implies S$ - компакт.

Тогда $p(x)$ принимает своё минимальное на S значение. Пусть $C_1 := \min_{x \in S} p(x)$.

Тогда

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq C_1 \|x\|.$$

Получили второе неравенство, значит нормы эквивалентны. □

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: Ряды в нормированных пространствах. Простейшие свойства. Покоординатная сходимость ряда в \mathbb{R}^d

Определение 3.1. X - нормированное пространство, $x_1, x_2, \dots \in X$ - вектора из пространства

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ - ряд}$$

Здесь и далее Храбров обозначал $x_n^{(i)}$ - i -ая координата n -ого члена ряда.

Определение 3.2. Частичная сумма ряда: $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$. $S_n \in X$

Определение 3.3. Ряд сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

То есть существует предел частичных сумм.

Теорема 3.1 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Доказательство. $x_n = S_n - S_{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

(оба предела существуют, так что можно разбивать предел разности на разность пределов)

□

Свойства.

1. Единственность суммы

Сумма - это предел, а предел единственен

2. Линейность суммы

Если $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$ сходится и равен $\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$

Доказательство. Расписать то же самое через частичные суммы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha S_{x,n} + \beta S_{y,n} = \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{x,n} + \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{y,n} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

□

3. Расстановка скобок

Если ряд сходиллся, то после расстановки скобок он тоже будет сходиться к той же сумме.

Было: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + \dots = S$

Стало: $x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + x_8 + (x_9 + x_{10}) + \dots = S$ равно той же сумме, если она была

Доказательство. Когда мы расставили скобки, мы от частичных сумм S_1, S_2, \dots , у которых был предел, перешли к частичным суммам $S_1, S_3, S_7, S_8, S_{10}$ (в примере выше), то есть взяли подпоследовательность частичных сумм, а она имеет тот же предел, что и сама последовательность, если он был \square

Замечание. Можно расставить скобки, чтобы ряд СТАЛ СХОДИТСЯ: пример для $X = \mathbb{R}$:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ – расходится

$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots = 0 + 0 + 0$ – сходится, равен 0

4. Можно выкинуть/добавить конечное число членов ряда, и это не повлияет на сходимость, но может изменить сумму

Доказательство. (очевидно, можно скипать, если понятно)

Добавление:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S_x$$

Тогда

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + y_k + x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n}_{S_y} + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S_y + S_x$$

Сумму конечного числа y_n можно посчитать, а сумма x_n существует по условию, так что и итоговая сумма тоже есть.

Убирание: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S$, $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = ?$

Частичные суммы первого: $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, второго: $S'_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} x_k$

Тогда: $S'_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}$

Притом S_{m-1} – какой-то элемент из X , фиксированный.

Но тогда, раз $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, то $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+m-1} - S_{m-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$ (сдвинули начало и вычли константу), \square

5. Покоординатная сходимость равносильна сходимости в \mathbb{R}^d

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ сходится} \iff \forall i : 0 \leq i \leq d, \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(i)} \text{ сходится}$$

Доказательство. Надо расписывать через частичные суммы.

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ x_k^{(3)} \\ \vdots \\ x_k^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^{(1)} \\ \sum_{k=1}^n x_k^{(2)} \\ \sum_{k=1}^n x_k^{(3)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n^{(1)} \\ S_n^{(2)} \\ S_n^{(3)} \\ \vdots \\ S_n^{(d)} \end{pmatrix}$$

Чтобы $\sum x_n$ сходилась, нужно, чтобы $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Чтобы была покоординатная сходимость, нужно, чтобы $\forall i : 0 \leq i \leq d, \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(i)}$.

Звучит тавтологично, если честно, но вообще, если бы у нас было не \mathbb{R}^d , то не всегда верно, что существование предела равносильно существованию предела координат. Но вот в \mathbb{R}^d у нас была отдельная теорема, по которой это верно.

В нашем конспекте [2.7](#)

В конспекте Ани она на странице 32, теорема 2.6

Думаю, на неё будет достаточно сослаться.

□

3.2. Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда. Свойства

Теорема 3.2 (Критерий Коши).

X – полное нормированное пространство.

$$\sum a_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N \quad \left\| \sum_{k=n}^m a_k \right\| < \varepsilon$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum a_n - \text{сходится} \iff \exists \text{ конечный } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\iff (\text{полнота } X) \quad S_n - \text{фундаментальная последовательность}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|S_m - S_n\| < \varepsilon$$

$$\|S_m - S_{n-1}\| = \left\| \sum_{k=n}^m a_k \right\|$$

□

Определение 3.4 (Абсолютная сходимость).

$x_n \in X$ – нормированное пространство

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n - \text{абсолютно сходится, если } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| - \text{сходится}$$

Теорема 3.3.

X – полное нормированное пространство

Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, то

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \text{сходится}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| - \text{сходится} \implies (\text{Критерий Коши для } \|x_n\|) \quad \forall \varepsilon \quad \exists N \quad m, n \geq N \quad \sum_{k=n}^m \|x_k\| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^m \|x_k\| \geq \left\| \sum_{k=n}^m x_k \right\|$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N \quad \left\| \sum_{k=n}^m x_k \right\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\text{Критерий Коши для } x_n) \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \text{сходится}$$

□

$$2. \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| &\leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \\ \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| &\rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \|x_k\| \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \\ &\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \end{aligned}$$

□

Определение 3.5 (Группировка членов ряда).

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + x_6 + (x_7 + x_8) + \dots$$

Замечание.

1. Если исходный ряд сходил, то ряд получившийся после группировки сходится к той же сумме.
2. В обратную сторону верно не всегда

Пример. $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ **Теорема 3.4** (Когда верно в обратную сторону).

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

1. Если $\lim x_n = 0$ и количество слагаемых в каждой группе $\leq M$

Доказательство.

$$S_{n_k} - \text{подпоследовательность частичных сумм} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S$$

(группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n_k}) + (x_{n_k+1} + \dots + x_{n_k+r} + \dots$$

$$\|S_{n_k+r} - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \dots + x_{n_k+r}\| \leq$$

$$\leq \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_{n_k+r}\|$$

Выберем K , т.ч. если $k \geq K$, то $\|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$

Выберем N , т.ч. если $n \geq N$, то $\|x_n\| < \varepsilon$

Если выполняется и то, и то, тогда:

$$\|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_{n_k+r}\| < \varepsilon(M+1)$$

Значит $\forall \varepsilon > 0$ мы можем выбрать N_1 , т.ч. $\forall n \geq N_1 \quad \|S_n - S\| < \varepsilon$

□

2. Для числовых рядов. Если все члены ряда в группе одного знака.

Доказательство.

$$S_{n_k} \rightarrow S$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geq K \quad |S_{n_k} - S| < \varepsilon$$

$$N := n_K$$

если $n \geq N$:

для некоторого k : $n_k \leq n < n_{k+1}$

$$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n$$

если в группе все члены ≥ 0 , то $S_n \geq S_{n_k}$

$$S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - \dots - x_{n+1}$$

$$S_{n_{k+1}} \geq S_n$$

$$\text{Тогда } |S_n - S| < \varepsilon$$

Если в группе отрицательные члены

$$S_{n_k} \geq S_n \geq S_{n_{k+1}}$$

Тогда в этом случае тот же вывод

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

□

3.3. Билет 42: ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

Теорема 3.5.

Если $a_n \geq 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \iff частичные суммы ограничены.

Доказательство.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1}$$

т.е. S_n монотонно возрастает.

$\implies S_n$ имеет конечный предел

\iff (свойство монотонно возрастающей последовательности) S_n – ограничена

□

Теорема 3.6 (Признак сравнения).

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ — сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сходится}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{расходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{расходится}$$

Доказательство.

$$1. A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq B_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

$$\implies B_n - \text{ограничены}$$

$$\implies A_n - \text{ограничены}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится}$$

2. От противного.

$$\text{Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится}$$

$$\implies \text{противоречие.}$$

□

Следствие.

$$a_n, b_n \geq 0$$

$$1. a_n = \mathcal{O}(b_n) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится.}$$

$$2. a_n \sim b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ведут себя одинаково.}$$

Доказательство.

$$1. 0 \leq a_n \leq Cb_n \text{ и } \sum Cb_n = C \sum b_n - \text{сходится} \\ \implies (\text{предыдущая теорема}) \sum a_n - \text{сходится}$$

$$2. \text{ При достаточно больших } n: \frac{b_n}{2} \leq a_n \leq 2b_n$$

$$\text{Из } a_n \leq 2b_n: \sum b_n - \text{сходится} \implies \sum a_n - \text{сходится}$$

$$\text{Из } \frac{b_n}{2} \leq a_n: \sum a_n - \text{сходится} \implies \sum b_n - \text{сходится}$$

□

3.4. Билет 43: Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

Теорема 3.7 (признак Коши).

$$a_n \geq 0$$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ начиная с некоторого места, то ряд расходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ начиная с некоторого места, то ряд сходится
3. $q' := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

Если $q' < 1$ сходится, то и ряд сходится.

Если $q' > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Судя по формулировке билета, первые два пункта доказывать не нужно, но доказательство у них быстрое, так что пусть тоже будет.

1. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0$, не выполняется необходимое условие. ‘

2. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies a_n \leq q^n$

Воспользуемся признаком сравнения с $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

3. (a) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q' > 1 \implies$ найдется подпоследовательность a_{n_k} , такая что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = q' > 1$

\implies найдется такая окрестность, что при достаточно больших k все $a_{n_k} \in (1, \dots)$ (важно, что промежуток точно больше 1)

$$\implies a_{n_k} > 1$$

$$\implies a_n \not\rightarrow 0, \text{ ряд расходится}$$

- (b) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q' < 1$

$$\implies (\text{по определению верхнего предела}) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} = q' < 1$$

\implies можно выбрать окрестность $(\dots, \frac{q'+1}{2}) \subset (\dots, 1)$, такую что начиная с некоторого момента все $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$ попадают в эту окрестность, то есть $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$

$\implies \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$ при достаточно больших k , тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по доказанному в пункте 2.

□

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ при } x > 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \rightarrow 0$$

\implies ряд сходится

Замечание.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n+1}} = 1$$

3.5. Билет 44: Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 3.8 (признак Даламбера).

$$a_n > 0$$

- Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.
- Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$, то ряд сходится.
- Пусть $d^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_n \leq a_{n+1}$
 \implies начиная с некоторого места члены ряда возрастают, $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots$
 $\implies a_n \not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d \implies a_{n+1} \leq d \cdot a_n$ начиная с некоторого места.
 $\implies a_{n+k} \leq d^k \cdot a_n$ при всех k
 \implies при всех $k \geq n$ $a_k \leq d^{k-n} \cdot a_n = d^k \cdot \frac{a_n}{d^n} = d^k \cdot \text{const}$
 $\implies a_k = \mathcal{O}(d^k)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} d^k$ – это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} d^k$ сходится, тогда по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.
- (а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1$
 $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$
 \implies начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится
- (б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1$
 \implies с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
 \implies ряд расходится.

□

Замечание.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ — сходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ при } x > 0$$

По Даламберу.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

\Rightarrow ряд сходится

По Коши.

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \rightarrow 0$$

\Rightarrow ряд сходится

Теорема 3.9 (Связь между признаками Коши и Даламбера).

$$a_n > 0$$

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d

Доказательство.

Будем рассматривать не сами выражения, а их логарифмы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln d$$

$$\text{Хотим доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d$$

Применяем Штольца!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln d$$

□

3.6. Билет 45: Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак.

Теорема 3.10.

Если $f : [m, n] \mapsto \mathbb{R}$ монотонна, то $|\sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x)dx| \leq \max\{|f(m)|, |f(n)|\}$

Доказательство.

Не умаляя общности $f \geq 0$ и монотонно убывает.

Здесь удобно нарисовать убывающий график и изобразить суммы двумя видами столбиков: когда начинаем от m и столбики вылезают над графиком, и когда от $m+1$ столбики под графиком.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1} f(k) &\geq \int_m^n f(x)dx \geq \sum_{k=m+1}^n f(k) \\ \int_m^n f(x)dx &\geq \sum_{k=m+1}^n f(k) \implies \int_m^n f(x)dx - \sum_{k=m+1}^n f(k) \geq -f(m) \\ \int_m^n f(x)dx - \sum_{k=m}^n f(k) &= -|\int_m^n f(x)dx - \sum_{k=m}^n f(k)| \geq -f(m) \implies \\ |\int_m^n f(x)dx - \sum_{k=m}^n f(k)| &\leq f(m) \\ \sum_{k=m}^{n-1} f(k) &\geq \int_m^n f(x)dx \implies \sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int_m^n f(x)dx \geq 0 \implies \\ \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x)dx &\geq f(n) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 3.11 (Интегральный признак сходимости).

$f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f \geq 0$ монотонно убывает.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \text{сходится} &\iff S_n := \sum_{k=1}^n f(k) \text{ ограничены.} \\ \int_1^{\infty} f(x)dx - \text{сходится} &\iff F(n) := \int_1^n f(x)dx \text{ ограничены.} \end{aligned}$$

По предыдущей теореме $|S_n - F(n)| \leq f(1)$

□

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Если $p \leq 0$, то $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится.

Если $p > 0$, то $f(x) = \frac{1}{x^p} \geq 0$ и монотонно убывает \implies по интегральному признаку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ (сходится } \iff p > 1) \text{ ведут себя одинаково.}$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится $\iff p > 1$.

Следствие.

Если $0 \leq a_n \leq \frac{c}{n^p}$ при $p > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(Следует из примера выше и признака сравнения.)

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \geq 0$ и монотонно убывает \implies по интегральному признаку

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ и $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ведут себя одинаково.

$$\int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \ln \ln b - \ln \ln 2 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty$$

Значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

3.7. Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

Определение 3.6.

$\sum a_n$ сходится абсолютно, если $\sum |a_n|$ – сходится.

$\sum a_n$ сходится условно, если $\sum a_n$ – сходится, но не абсолютно.

Теорема 3.12 (Преобразование Абеля).

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

где $A_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $A_0 := 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k b_k - A_k b_{k+1}) \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

□

Теорема 3.13 (Признак Дирихле).

Если:

1. $A_k = \sum_{k=1}^n a_k$ ограничены
2. b_n монотонны
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.

Доказательство.

$S_n := \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ имеет предел

$A_n b_n \rightarrow 0$, A_n – ограничены, $b_n \rightarrow 0$

$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ имеет предел – это частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$, то есть надо доказать, что этот ряд сходится.

Проверим, что он абсолютно сходится:

По условию $|A_n| \leq M$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \\ &= M \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} \right| \\ &= M |b_1 - b_{n+1}| \\ &\leq M (|b_1| + |b_{n+1}|) \leq 2M |b_1| \end{aligned}$$

□

Теорема 3.14 (Признак Абеля).

Если:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. b_n монотонны
3. b_n ограничены

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.**Доказательство.**Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$, $\tilde{b}_n = b_n - b$ монотонны и $\rightarrow 0$ $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$ – сходится $\implies A_n$ – ограничена.По признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ – сходится.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{b}_n + b) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n
 \end{aligned}$$

Оба ряда сходятся, значит, и их сумма тоже сходится.

□

3.8. Билет 47: Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка)Знакопередающийся ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$ **Теорема 3.15** (Признак Лейбница).

Если a_n монотонно убывают стремятся к 0, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится. Важно заметить, что условие стремления a_n к 0 важно (см. необходимое условие сходимости ряда). Данный признак можно так же вывести из признака Дирихле. Однако мы хотим произвести так же оценку на сумму знакочередующегося ряда: $S_{2n} \leq S_n \leq S_{2n+1}$

Доказательство.

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$ $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$. Получаем, что S с четными номерами растут, а с нечетными – убывают. Значит, мы можем расписать вложенную последовательность отрезков: $[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \dots \supset [S_{2n}, S_{2n+1}]$.

Теперь рассмотрим длины отрезков: $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$. Тогда последовательность отрезков стягивается. Тогда применим одноименную теорему: у этих отрезков есть общая точка S , которая является пределом их концов: $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$. Получили что частичные суммы сходятся к S , значит исходный ряд тоже сходится к S . Также можно заметить, что неравенство на сумму ряда выполняется, потому что точка S лежит во всех отрезках, в частности в отрезке

$[S_{2n}, S_{2n+1}]$

□

Пример.

В качестве примера рассмотрим ряд Лейбница: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
 $S_{2n} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n =$
(сложили все дроби и дважды вычли четные), где H_n - гармонический ряд (смотри билет 6).
Подставим все в формулу для гармонических чисел: $= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) =$
 $\ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Тогда $S_{2n} \rightarrow \ln 2$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
Рассмотрим перестановку ряда Лейбница: $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + \dots$
Будем считать $S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n}) = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}) =$
Последнее выражение в скобках это H_{2n} . Мы только что считали это в предыдущем примере.
Получаем: $= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{\ln 2}{2}$

3.9. Билет 48: Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда**Определение 3.7.**

Перестановка членов ряда: $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция и $\sum a_n$ - исходный ряд. Тогда $\sum a_{\varphi(n)}$ - перестановка члена ряда.

Теорема 3.16.

Если $\sum a_n$ абсолютно сходится к S , то перестановка ряда $\sum a_{\varphi(n)}$ сходится, причем, тоже к S .

Доказательство.

Случай 1 $a_n \geq 0$. Также введем обозначение $S' = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$, а $S = \sum_{k=1}^n a_k$. Тогда мы точно знаем, что $S'_n \geq S$, так как в сумме S' встречаются не все слагаемые, а те, которые отсутствуют ≥ 0 , поэтому сумму они только увеличивают. Тогда $\lim S'_n = S' \leq S$, то есть $S' \leq S$. Так как у нас биекция - мы можем сделать обратную перестановку, от которой сумма ряда не увеличится. Сделаем перестановку туда и обратно и получим, что каждая из них не увеличивает сумму ряда, ну значит эти суммы равны между собой: $S' = S$.

Случай 2: $a_n \in \mathbb{R}$: заведем $a_n(+) = \max\{a_n, 0\}$ и $a_n(-) = \max\{-a_n, 0\}$. $a_n(+) - a_n(-) = a_n$, $a_n(+) + a_n(-) = |a_n|$. Так как по условию $\sum |a_n|$ сходится абсолютно, то $\sum a_n(\pm)$ сходится. Более того ряды - с неотрицательными слагаемыми, значит, перестановка членов не меняет суммы ряда, значит $\sum a_{\varphi(n)}(\pm) = \sum a_n(\pm)$. Тогда $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_{\varphi(n)}(+) - \sum a_{\varphi(n)}(-) = \sum a_n(+) - \sum a_n(-) = \sum a_n$

□

Замечание.

1. Если $a_n \geq 0$ и ряд расходится, то перестановка ряда так же расходится. Это верно, так как если бы нашлась перестановка, дающая сходящийся ряд, тогда бы обратная перестановка тоже давала бы сходящийся ряд, а это противоречит тому, что исходный ряд расходится.
2. Другое замечание : если $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum a_n(\pm)$ расходятся. Так как $\sum a_n = \sum a_n(+) - \sum a_n(-)$. Если бы один из них сходил, то сходил бы и другой, так как один выражается через другой с помощью $\sum a_n$, который сходящийся. Ну тогда ряд $\sum |a_n| = \sum a_n(+) + \sum a_n(-)$ тоже бы сходил, как сумма сходящихся. Пришли к противоречию.

3.10. Билет 49: Теорема Римана.

Теорема 3.17 (Римана).

$a_n \in \mathbb{R}$ $\sum a_n$ условно сходится.

Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка φ , т.ч. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$. Также существует перестановка φ , для которой ряд не имеет суммы.

Доказательство.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – ряды $\sum (a_n)_{\pm}$, из которых выкинули все нули.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – расходятся (т.к. есть условная сходимости), Более того, $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$. При этом $\lim b_n = \lim c_n = 0$ (необходимое условие сходимости для ряда $\sum a_n$).

Пункты а), б), в) доказываются аналогично. Наверное, можно на экзамене расписать только пункт а), а про остальные сказать, что аналогично. Здесь на всякий случай расписаны все три пункта.

- а) Пусть $S \in \mathbb{R}$. Будем набирать частичную сумму так, чтобы она поочередно превышала S и наоборот была меньше S . Мы можем это сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \leq S < b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} < S \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1-1}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \leq S < b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2} < S \leq \\ \leq b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2-1}$$

И так далее.

$|\text{частичная сумма} - S| \leq |\text{последнего взятого элемента}| \rightarrow 0$. Значит частичная сумма построенного ряда $\rightarrow S$.

- б) Пусть $S = +\infty$. Мы знаем, что $\sum b_n = +\infty$. Поэтому мы можем нашу перестановку получить следующим образом:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} > 1 \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \text{ (раз } \sum b_n = +\infty, \text{ то в какой-то момент сумма превысит 1)}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 \text{ (добавили элемент из ряда } c_n)$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} > 2 \geq b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1}$$

И так далее.

- в) Пусть мы хотим получить перестановку φ , для которой ряд не имеет суммы. Будем набирать суммы так, чтобы она то была больше 1, то меньше -1. Это опять же можно сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \leq 1 < b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} < -1 \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1-1}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \leq 1 < b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2} < -1 \leq \\ \leq b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2-1}$$

И так далее.

□

3.11. Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

Теорема 3.18 (Коши).

Если ряды $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ – абсолютно сходятся, то ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна AB

Доказательство.

Сначала немного обозначений:

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad B_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\tilde{A}_n := \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \tilde{B}_n := \sum_{k=1}^n |b_k|$$

$$\tilde{A} := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \tilde{B} := \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

\tilde{S}_m – частичная сумма ряда из $|a_n b_k|$

$\tilde{S}_m \leq \sum_{i,j} |a_i b_j| = \sum_{i=1}^{\max i} |a_i| \sum_{j=1}^{\max j} |b_j| \leq \tilde{A} \tilde{B} < +\infty$, меньше бесконечности, т.к. ряды абсолютно сходятся.

Частичные суммы \tilde{S}_m ограничены \implies ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д. Т.е. $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \dots$

TODO: Табличка с квадратиками

S_m – частичная сумма такого ряда

$$S_{n^2} = \sum_{j,k=1}^n a_j b_k = A_n B_n \rightarrow AB$$

Пусть $n^2 \leq m \leq (n+1)^2$

$$S_m = S_{n^2} + \sum_{k=1}^{\dots} a_{n+1} b_k + \sum_{k=n}^{\dots} a_k b_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_{n+1} b_k| + \sum_{k=1}^n |a_k b_{n+1}| = |a_{n+1}| \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}| \tilde{A}_n \leq |a_{n+1}| \tilde{B} + |b_{n+1}| \tilde{A} \rightarrow 0, \text{ т.к. } \lim a_n = \lim b_n = 0$$

$$\implies S_n \rightarrow AB \quad \square$$

Определение 3.8.

$\sum a_n$ и $\sum b_n$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1$

Теорема 3.19 (Мертенса).

$\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся, причем один из них абсолютно, то произведение рядов сходится к AB .

Замечание.

Теорема идет без доказательства, но вот несколько замечаний по поводу нее.

- Здесь важен порядок, в котором мы складываем $a_i b_j$. В теореме Коши он был не важен, т.к. у обоих рядов была абсолютная сходимость, но здесь у обоих рядов абсолютная сходимость не гарантирована.

2. Просто сходимости рядов не хватает. Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ умножаем на } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + \dots + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$$

$$= (-1)^{n-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$$

$n-1$ слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n-1} \text{ (т.к. среднее арифметическое больше среднего геометрического)}$$

$$|c_{n-1}| \geq 1 \implies \text{ряд } \sum c_n \text{ расходится.}$$

3.12. Билет 51: Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

Теорема 3.20 (Абеля).

$$\sum a_n = A, \quad \sum b_n = B, \quad \sum c_n = C$$

И $\sum c_n$ – произведение $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Тогда $AB = C$.

Лемма.

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + x_3 y_{n-2} + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow xy$$

Доказательство.

Пусть $y = 0$. надо доказать, что $\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + x_3 y_{n-2} + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа M , что $|x_n| \leq M \quad |y_n| \leq M \quad \forall n$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \quad \forall n \geq N \quad |y_n| < \epsilon$$

Возьмем $n > N$.

$$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + \dots + |x_n y_1|$$

Первые $n - N$ слагаемых оценим сверху, как $(n - N)M\epsilon$. Оставшиеся оценим как $\leq M^2 N$

$$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + \dots + |x_n y_1| \leq M\epsilon(n - N) + M^2 N$$

$$\left| \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \right| \leq \frac{M\epsilon(n - N) + M^2 N}{n} < \epsilon M + \epsilon M$$

(Последнее – при достаточно больших n).

Пусть $y_n = y$

$$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} y \rightarrow xy$$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$$\tilde{y}_n := y_n - y \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1 \tilde{y}_n + x_2 \tilde{y}_{n-1} + \dots + x_n \tilde{y}_1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1 y + x_2 y + \dots + x_n y}{n} \rightarrow xy$$

И сложим. Получим ровно то, что надо.

□

Доказательство. (теоремы)

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \dots + A_n B_1}{n} \rightarrow AB \text{ по лемме.}$$

Но что же написано в числителе?

$$\begin{aligned} & a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b_1 = \\ &= na_1 b_1 + (n-1)(a_1 b_2 + a_2 b_2) + (n-2)(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots = \\ &= nc_1 + (n-1)c_2 + (n-2)c_3 + \dots + c_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n \end{aligned}$$

Получается, что знаем, что $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow AB$

Но с другой стороны, $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C$

$$\Rightarrow C = AB$$

□

3.13. Билет 52: Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.

Определение 3.9.

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$P_n := \prod_{k=1}^n p_k - \text{частичные произведения.}$$

Если $\exists P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, т.ч. $P \neq 0$ и $P \neq \infty$, то произведение сходится и $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = P$

Пример.

$$1. \prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$$

$$P_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdot \dots \cdot 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4n^2})$$

$$P_n = (1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{6^2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{(2n)^2}) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2 (2n+1)}{((2n)!!)^2} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}, \text{ при } 0 < x < 1$$

Свойства.

Считаем, что $p_n \neq 0 \quad \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} p_n - \text{сходится} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$$

Доказательство.

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$$

□

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

$$4. \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ и } p_n > 0 \quad \forall n$$

$$\text{Тогда } \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k$$

$$\ln P_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n p_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln p_k =: S_n$$

$$S_n \text{ имеет предел} \iff \ln P_n \text{ имеет предел} \iff P_n \text{ имеет предел.} \quad \square$$

Пример.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}, \text{ где } p_n - n\text{-ое простое число.}$$

$$\frac{p_n}{p_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$$P_n = \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geq \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

$$\text{Вывод: } \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} \text{ расходится.}$$

$$\text{Более того } P_n \geq \ln n + o(1)$$

Теорема 3.21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ расходится, где } p_n - n\text{-ое простое число.}$$

Доказательство.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} \text{ расходится}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right) - \text{расходится}$$

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq$$

$$-2t \leq \ln(1-t) \text{ при достаточно малых } t.$$

$$\leq -2\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1} \leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

$$\implies \sum \frac{1}{p_n} \text{ расходится.} \quad \square$$

Замечание.

На самом деле

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$$

3.14. Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$

Тут под p_n подразумевается n -ое простое число.

Утверждение 3.22.

Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

Доказательство.

Для начала проведу некие не совсем формальные рассуждения, далее их формализую. Итак, неформальная часть:

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

В начале просто несколько иначе переписал член произведения. Затем заметил, что это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда наше исходное произведение перепи-сывается в такое произведение сумм:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

«Раскроем» скобки в этом произведении и получим сумму всевозможных произведений выра-жений вида $\frac{1}{p_n^k}$, а именно:

$$\sum \frac{1}{\prod_k p_k^{\alpha_k}}$$

А с алгебры первого модуля нам известно, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде $\prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_k}$ и при этом единственным образом поэтому наша сумма это в точности это:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Получили гармонический ряд, а он, как известно, расходится. Почему же я написал слово «рас-кроем» в кавычках? Все потому, что раскрывать бесконечное произведение бесконечных сумм может быть не совсем законно, как минимум не ясно почему законно, поэтому пришло время формализовать всё то, что я напиал выше:

$$P_n := \prod_{t=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_t^k} \geq \prod_{t=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_t^k}$$

Раскроем скобки, получим суммы таких слагаемых $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots}$, где все $\alpha_i \leq n$, и все $p_i \leq n$, что означает, что там точно будут все дроби вида $\frac{1}{i}$, где $i \leq n$ (i - натуральное, если вдруг по каким-то причинам это неочевидно). Тогда для P_n имеем следующее неравенство (уже имеем все такие слагаемые, есть еще какие-то сверху, на них забьем):

$$P_n \geq \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}$$

Заметим, что этот ряд расходится, поэтому и произведение из условия расходится. □

Замечание.

$$P_n \geq \ln n + \mathcal{O}(1)$$

Доказательство.

Мы все прекрасно знаем, что гармонический ряд эквивалентен $\ln n + \gamma + o(1)$. Мы уже показали, что наш ряд больше гармонического ряда, а $\gamma + o(1)$ можно записать в виде $\mathcal{O}(1)$ (потому что постоянная Эйлера и $o(1)$ - какое-то ограниченное выражение). \square

Теорема 3.23.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится

Доказательство.

Из расходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ ряд из логарифмов $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1}$ тоже расходится. Посмотрим на один такой логарифм:

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$$

Первые два равенства - очевидные, последнее неравенство следует из следующего факта: $\ln(1-t) \geq -2t$ при достаточно маленьких t (не верите - дифференцируйте), поэтому выполняется при достаточно больших x . Значит, первые члены, для которых неравенство не выполняется, можем оценить какой-то константой C (их конечное число), а для остальных по неравенству:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} &\leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} - C &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \end{aligned}$$

Получилось, что подперли ряд из $\frac{2}{p_i}$ расходящимся рядом, отсюда следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$. \square

Замечание.

На самом деле

$$\ln \frac{x}{x-1} \sim \frac{1}{x}$$

(потому что $-\ln(1 - \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$), поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_k}{p_k-1}$$

(теорема Штольца утверждает (гугл в помощь, если что), что если каждое слагаемое (то есть $a_n - a_{n-1}$) эквивалентно, то и суммы (a_n) эквивалентны), то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \ln P_n \geq \ln(\ln n + \mathcal{O}(n)) \geq \ln \ln n + \mathcal{O}(n)$$

Утверждение 3.24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \sim \ln \ln n$$

Доказательство.

Без доказательства. \square

3.15. Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

Определение 3.10.

Пусть $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (тут можно и \mathbb{C}).

1. Последовательность f_n поточечно сходится к f на множестве E , если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in E$.
2. Последовательность f_n равномерно сходится к f на множестве E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Обозначение для равномерной сходимости: $f_n \rightrightarrows f$ (и как-то указывать на каком множестве эта равномерная сходимость: или словами после, или под стрелочками)

Замечание.

Запишем оба определения с помощью кванторов:

1. $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Получается, что в первом случае N зависит **и** от x , **и** от ε , а во втором - **только** от ε .

Замечание.

Из равномерной сходимости следует поточечная к той же функции. Действительно, если есть универсальный номер, зависящий только от ε , то он подходит и для конкретного x .

Пример.

Пусть $E = (0; 1)$ $f_n(x) = x^n$ $f(x) = 0$, тогда

f_n поточечно сходится к f (какое-то число из $(0, 1)$ в n -ной степени стремится к нулю), однако равномерной сходимости нет. Условие не выполняется даже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, поскольку $|x^n - 0| < \frac{1}{2}$ не может выполняться при все $x \in (0; 1)$ ни для какого n , поскольку x мы можем сколь угодно близко подвинуть к 1, и x^n будет сколь угодно близко к 1, в частности больше $\frac{1}{2}$. Мораль: из поточечной сходимости равномерная **не** следует.

Теорема 3.25 (Критерий равномерной сходимости).

Пусть $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Доказательство.

” \Leftarrow ” Запишем правый предел по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

А для супремума верно следующее: $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, поэтому:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ничего не напоминает? Мне вот определение равномерной сходимости напоминает.

” \Rightarrow ” Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Синее означает то, что ε является верхней границей для всех $|f_n(x) - f(x)|$, а значит, \sup таких разностей будет меньше или равен ε , отсюда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

А это означает то, что \sup стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (по определению). \square

Следствие.

1. Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ при любых $x \in E$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то $f_n \Rightarrow 0$ на E .

Доказательство.

Если разность меньше a_n во всех точках, то $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ \square

2. Если $\exists x_n \in E$ такие, что $f_n(x) - f(x)$ не стремится к нулю, то равномерной сходимости нет.

Доказательство.

Это означает, что $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)| \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит, нет стремления к нулю у супремума, критерий равномерной сходимости не выполняется, равномерной сходимости нет. \square

Пример.

Пусть $E = (0; 1)$ $f_n(x) = x^n$ $f(x) = 0$, возьмем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, но мы знаем это:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$

Раз предел не 0, то равномерной сходимости нет. (Предел может быть только нулем, потому что поточечный предел 0 (иначе пределов было бы несколько, так как равномерная сходимость влекла бы предел к другой функции)). Пример закончился, его явно в билете нет, но пусть будет.

3.16. Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 3.26. (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей)

Пусть $f_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E к некоторой функции

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.” \implies ”

Знаем, что $f_n \rightarrow f$ на E . Тогда возьмем $\frac{\varepsilon}{2}$ вместо ε в определение равномерной сходимости и найдем по нему соответствующее N .

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| =$
 $= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

” \Leftarrow ”

Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Зафиксируем некоторый произвольный $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

Замечание. Воспоминание из 1 семестра : последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$

Тогда $f_n(x)$ - фундаментальная последовательность. Тогда по критерию Коши для числовых последовательностей она имеет конечный предел : пусть $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Берем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и устремим m к ∞ . При переходе к пределу потеряется строгость знака $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Перебрав $\forall x \in E$ получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Это и есть определение равномерной сходимости $f_n \Rightarrow f$ на E \square

3.17. Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота

Определение 3.11. Пространство $\ell^\infty(E)$.

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \mapsto \mathbb{R} \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$$

с нормой $\|f\|_{\ell^\infty(E)} := \sup_{x \in E} |f(x)|$

Другими словами, нормированное пространство $\ell^\infty(E)$ состоит из ограниченных на E функций.

Замечание. $\sup_{x \in E} |f(x)|$ действительно норма

$$1. \|f\| \geq 0 \text{ и } \|f\| = 0 \iff \sup_{x \in E} |f(x)| \geq 0 \text{ и } \sup_{x \in E} |f(x)| = 0 \iff f \equiv 0$$

$$2. \sup_{x \in E} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in E} |f(x)| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E$$

3. Неравенство треугольника

$$\|f + g\| = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

В доказательстве нер-ва треугольника пользовались тем, что $|a + b| \leq |a| + |b|$ и $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$

Замечание. Связь нормы с равномерной сходимостью

$$f_n \Rightarrow f \text{ на } E \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0 \iff$$

f_n сходится к f в пространстве $\ell^\infty(E)$

То есть про равномерную сходимость можно думать как про сходимость в специальном нормированном пространстве.

Теорема 3.27.

$\ell^\infty(E)$ - полное нормированное пространство.

Доказательство.

Надо доказать, что каждая фундаментальная последовательность из ℓ^∞ сходится к элементу этого же пространства.

Пусть f_n фундаментальная последовательность из ℓ^∞ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Заметим, что $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|$ при $x \in E$.

То есть $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для равномерной сходимости $f_n \Rightarrow f$, где $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - некоторая функция.

Осталось понять, что $f \in \ell^\infty(E)$, т.е. что f - ограниченная функция.

Подставим $\varepsilon = 1$ в определение равномерной сходимости. Для него найдется N , т.ч. при $n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ при всех $x \in E$. Тогда по неравенству треугольника :

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < |f_n(x)| + 1 \leq \|f_n\| + 1$$

Но т.к. n - фиксированное число, то $|f(x)|$ не превосходит какого-то фиксированного выражения. Значит f - ограниченная функция. \square

3.18. Билет 57: Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{K})$ и его полнота.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be

Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

Теорема 3.28.

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

И f_n непрерывна в точке $a \in E$, $f_n \Rightarrow f$ на E

$\implies f$ непрерывна в точке a .

Доказательство.

Если a не предельная точка в E , то все функции там непрерывны.

Пусть a - предельная точка множества E .

Тогда надо проверить, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

По определению равномерной сходимости $\exists N \forall n > N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$

Зафиксируем $n > N$. Функция f_n непрерывна в точке a .

$\exists \delta > 0 \forall x \in E |x - a| < \delta |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$

Если $|x - a| < \delta$ и $x \in E$, то

$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ □

Следствие (теорема Стокса-Зайделя).

$f_n \in C(E)$ и $f_n \Rightarrow f$ на E

$\Rightarrow f \in C(E)$.

Определение 3.12.

Пусть K – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), \text{ непрерывные} \}$

$\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)|$.

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

Замечание.

$C(K)$ подпространство $l^\infty(K)$.

Теорема 3.29.

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

Доказательство.

$Y \subset X$ Y – замкнуто.

$\Rightarrow \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в Y .

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$

$\Rightarrow x$ – предельная точка множества Y .

И т.к. Y замкнуто, то $x \in Y$.

$\Rightarrow x_n$ сходится к x в пространстве Y . □

Следствие.

$C(K)$ – полное

Доказательство.

Надо доказать, что $C(K)$ замкнуто в $l^\infty(K)$.

Т.е. если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, где $f_n \in C(K)$, то $f \in C(K)$.

Но это теорема Стокса-Зайделя. □

3.19. Билет 58: Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Замечание. Момент с лекции: [youtu.be](https://youtu.be/...)

Записи Александра Игоревича с лекции: [drive.google](https://drive.google.com/...)

Определение 3.13.

$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд

$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$ – частичная сумма.

Если S_n поточечно сходится к S , то ряд поточечно сходится, если $S_n \Rightarrow S$, то ряд равномерно сходится.

Определение 3.14.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно

$r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – остаток функции ряда.

Теорема 3.30.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff r_n \Rightarrow 0$ на E .

Доказательство.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – равномерно сходится $\iff S_n \Rightarrow S$ на $E \iff r_n = S - S_n \Rightarrow 0$ □

Теорема 3.31 (Критерий Коши).

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \mid \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \mid < \epsilon$

Доказательство.

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff S_n \Rightarrow S$ на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \mid S_m - S_n \mid < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \mid S_{n+p} - S_n \mid < \epsilon$

$\mid \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \mid = \mid \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \mid = \mid S_{n+p} - S_n \mid$ □

Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \Rightarrow 0$.

Доказательство.

Возьмем критерий Коши и $p = 1$.

$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \mid u_{n+1}(x) \mid < \epsilon$

Это определение равномерной сходимости $u_n \Rightarrow 0$. □

Замечание.

1. Если $\exists x_n \in E$, для которой $u_n(x_n) \not\rightarrow 0$, то $\sum u_n(x)$ не сходится равномерно.

2. Из того, что ряд $\sum u_n(x_n)$ расходится ничего не следует

Пример.

$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.

3.20. Билет 59: Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры.

Теорема 3.32 (Признак сравнения).

$u_n, v_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\forall x \in E |u_n(x)| \leq v_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится, можно применить признак Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \text{ выполняется } \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$$

Из условия теоремы можно записать неравенство на частичные суммы.

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(n) \right| \geq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \geq \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right|$$

Получили, что критерий Коши выполняется для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, значит он сходится равномерно. □

Теорема 3.33 (Признак Вейерштрасса).

$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\exists \{a_n\} : |u_n(x)| \leq a_n \forall x \in E$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$v_n(x) := a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - равномерно сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - равномерно сходится по признаку сравнения. □

Следствие.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ - равномерно сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Воспользуемся признаком сравнения для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ □

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ - равномерно сходится на \mathbb{R}

Доказательство.

$\{a_n\} := \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся признаком Вейерштрасса для $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ и a_n □

Замечание.

Абсолютная и равномерная сходимости - разные вещи.

1. Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ на } (-1; 1)$$

Доказательство.

$\sum_{n=1}^{\infty} |x^n| = \frac{1}{1-|x|}$ - геометрическая прогрессия. Действительно, такой ряд сходится абсолютно. По критерию Коши докажем, что равномерной сходимости нет.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \exists p \in \mathbb{N} \exists \bar{x} \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(\bar{x}) \right| \geq \varepsilon$$

При выполнении такого условия равномерной сходимости не будет. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = 0$, $\bar{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. □

2. Ряд сходится равномерно, но не сходится абсолютно.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \text{сходится равномерно, но нет абсолютной сходимости.}$$

3. Также бывает, что ряд сходится абсолютно, равномерно, но ряд из модулей не сходится равномерно. Пример в следующем вопросе. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

3.21. Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости

Теорема 3.34 (Признак Дирихле (Дурихле)).

$$a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$$

1. $\left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq K \forall n \forall x \in E$
2. $b_n \Rightarrow 0$ на E
3. $\forall x \in E b_n(x)$ - монотонны по n

При выполнении этих условий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ - равномерно сходится на E .

Доказательство.

$A_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)$. $|A_n(x)| \leq K$, по условию. Воспользуемся преобразованием Абеля (если забыли доказательство - оно в вопросе 46). Его корректность для функциональных рядов можно проверить, повторив обычное доказательство с приписанным ' (x) '

$$\sum_{k=1}^n a_n(x)b_n(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

- $A_n(x)b_n(x) \Rightarrow 0$ - как произведение равномерно ограниченной на равномерно стремящуюся к нулю

- $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ - равномерно сходится. Воспользуемся для доказательства этого факта признаком сравнения.
 $u_k(x) := A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ и $v_n(x) := K|b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ Осталось доказать, что $v_n(x)$ - равномерно сходится. $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| \underbrace{=}_{b_n(x) - \text{монотонные}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) - b_{n+1}(x) \right|$. Посмотрим на частичные суммы:

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \Rightarrow |b_1(x)|$$

Докажем последний переход:

$$||b_1(x) - b_{n+1}(x)| - b_1(x)| \leq |b_1(x) - b_{n+1}(x) - b_1(x)| = |b_{n+1}(x)| \underbrace{\Rightarrow}_{\text{по условию}} 0$$

Так как частичные суммы равномерно сходятся, то и сам ряд равномерно сходится.

□

Теорема 3.35 (Признак Лейбница).

$$b_n : E \mapsto \mathbb{R}$$

1. $\forall x \in E \ b_n(x) \geq 0$ и монотонны
2. $b_n(x) \Rightarrow 0$ на E .

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$a_n(x) := (-1)^{n-1} b_n(x)$. И воспользуемся признаком Дирихле для $a_n(x)$ и $b_n(x)$. Частичные суммы $a_n(x)$ либо 1, либо 0 \Rightarrow ограничены. □

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ - равномерно сходятся на $(0; 1)$

Доказательство.

$\frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x^n}{n} \Rightarrow 0$, также $\frac{x^n}{n}$ монотонная. Получаем равномерную сходимость ряда по Лейбницу. Также ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}|$ - сходится, так как меньше геометрической прогрессии. **НО** такой ряд не сходится равномерно по критерию Коши. □

3.22. Билет 61: Признак Абеля

Утверждение 3.36 (Признак Абеля).

$$\begin{cases} \sum a_n(x) & \text{равномерно сходится} \\ |b_n(x)| \leq K & \forall n, \forall x \\ b_n(x) & \text{монотонны по } n \text{ при фиксированном } x \end{cases} \Rightarrow \sum a_n b_n - \text{равномерно сходится}$$

Доказательство.

*здесь все ряды - **функциональные**, просто писать каждый раз x не хочется*

Проверяем условие критерия Коши.

$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k}$ - заменили пределы суммы, перекинув n в индексы.

$\sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k} = (A_{n+p} - A_n) b_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1})$ - применили преобразование Абеля

$|A_{n+p} - A_n| |b_{n+p}| \leq K |A_{n+p} - A_n| = K |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon K, \forall x \in E, \forall n \geq N$ - критерий Коши для $\sum a_n$
 $\sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \leq \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k} - A_n| |b_{n+k} - b_{n+k+1}| < \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}|$ - т.к. первый модуль меньше ε при $n \geq N$

$\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}| = \varepsilon |\sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1})| = \varepsilon |b_{n+1} - b_{n+p}| \leq \varepsilon (|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) \leq 2K\varepsilon$

Условие критерия Коши выполняется, значит наш ряд равномерно сходится. \square

3.23. Билет 62: Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не сходится равномерно абсолютно. Признак Динни

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \text{ на } (0, 1).$$

Равномерная сходимость: по признаку Лейбница с $b_n(x) = \frac{x^n}{n}$

Абсолютная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Но этот ряд не сходится равномерно абсолютно.

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{10}$

$$\forall n \quad \exists x \in (0, 1) \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \geq n \left(\frac{x^{2n}}{2n} \right) = \frac{x^{2n}}{2} > \frac{1}{10}$$

Утверждение 3.37.

K - компакт.

$$\begin{cases} u_n \in C(K) & u_n \geq 0 \\ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) & u_n \in C(K) \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum u_n$ - равномерно сходится.

Доказательство.

*помним, все ряды - **функциональные***

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n$ - убывают по n при фиксированном x .

$r_n \Rightarrow 0$?

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \forall x \in K \quad r_n < \varepsilon$

Пусть такого n не существует. Тогда $\forall n \quad \exists x_n \in K : r_n(x_n) \geq \varepsilon$

x_n - последовательность K . Тогда у неё есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x_0$ (т.к. K - компакт)

Рассмотрим r_m .

$n_k \geq m \Rightarrow \varepsilon \leq r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k}) \rightarrow r_m(x_0) \geq \varepsilon$ - верно при всех m .

Значит, $\sum u_n$ - расходится, что неверно. Значит, наше предположение неверно, и $r_n \Rightarrow 0$. \square

3.24. Билет 63: Теорема о перестановке пределов и о перестановке предела и суммы.

Теорема 3.38 (О перестановке пределов).

$f_n, f : E \mapsto \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ на E , a – предельная точка E , $b_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Тогда существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и они равны.

Доказательство. Сначала докажем сходимость b_n . Проверим, что b_n фундаментальна.

По критерию Коши для равномерной сходимости имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Сделаем переход к пределу в неравенстве (устремим $x \rightarrow a$, строгое неравенство превратилось в нестрогое), получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N |b_n - b_m| \leq \varepsilon$$

А это и есть определение фундаментальной последовательности! Значит, b_n фундаментальна. Значит, по критерию Коши для последовательностей имеет конечный предел.

Пусть $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R}$. Осталось проверить, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда автоматически докажем существование и равенство.

Посмотрим на разность $|f(x) - b|$. Творчески оценим её по неравенству треугольника следующим образом:

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)|$$

Заметим, что это верно для любых n . Теперь посмотрим по отдельности на каждое слагаемое в правой части неравенства. По определению предела $\forall n \geq N_1 |b_n - b| < \varepsilon$. По определению равномерной сходимости $\forall n \geq N_2 \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем $\max(N_1, N_2)$. Теперь посмотрим на $|f_n(x) - b_n|$. Мы знаем, что $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$ (формулировка теоремы). Значит, мы можем сказать, что $|f_n(x) - b_n| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Получили

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Собирая всё в кучу, получим определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ если } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < 3\varepsilon.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Что и требовалось доказать.

□

Теорема 3.39 (О перестановке предела и суммы).

$$u_n : E \mapsto \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ равномерно сходится на } E \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = b_n$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$ и все эти пределы конечны.

Доказательство.

Посмотрим на частичные суммы $S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Так как сумма конечная, можно написать

$$\text{так: } \lim_{x \rightarrow a} S_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k := B_n. \text{ Мы также знаем, что } S_n \rightrightarrows S.$$

Тогда по предыдущей теореме $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{x \rightarrow a} S(x)$. А это как раз то, что нам нужно.

□

Следствие.

Если u_n непрерывны в точке a и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке a .

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = u_n(a) =: b_n \text{ (по непрерывности).}$$

По предыдущей теореме $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, а это и есть непрерывность.

□

3.25. Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности(ряда). Существенность равномерности.

Теорема 3.40 (О перестановке предела и суммы).

$$f_n \in C[a, b], f_n \Rightarrow f \text{ на } [a, b].$$

$$\text{Тогда } \int_a^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \\ &\leq (x - a) \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Почему последнее стремится к 0? Потому что была теорема про равномерную сходимость, только в той теореме был супремум. Более того, последнее выражение ещё и от x не зависит, значит

$$\max_x \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \rightarrow 0$$

Значит, по той же теореме, где был изначально супремум, получаем равномерную сходимость. Что и требовалось доказать. □

Следствие.

$$u_n \in C[a, b], \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ сходится равномерно на } [a, b].$$

$$\text{Тогда } \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt$$

Доказательство.

$S_n \Rightarrow S \Rightarrow \int_a^x S_n \Rightarrow \int_a^x S$. В то же время $\int_a^x S_n = \int_a^x \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(x)$. Мы знаем, что такая сумма интегралов имеет конечный предел, а такая сумма интегралов это просто частичная сумма ряда. Значит, мы знаем, что частичная сумма ряда имеет некоторый предел. Значит, просто сумма ряда это и есть тот самый предел.

$$\text{Значит, } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt = \int_a^x S = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt$$

□

Замечание.

Поточечной сходимости не хватает

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 nte^{-nt^2} dt = [s = nt^2] = \frac{1}{2} \int_0^n e^{-s} ds = -\frac{1}{2} e^{-s} \Big|_0^n = \frac{1 - e^{-n}}{2} \rightarrow 0$$

А предельная функция 0. Что-то не то...

3.26. Билет 65: Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существование равномерности.

Теорема 3.41.

$f_n \in C^1[a, b]$, $f_n(c) \rightarrow A$ и f'_n равномерно сходятся к g на $[a, b]$.

Тогда $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$, $f \in C^1[a, b]$ и $f' = g$.

В частности $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$.

Доказательство.

$$\int_c^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - A.$$

$f_n(x) \Rightarrow A + \int_c^x g(t) dt =: f(x)$ мы проверили равномерную сходимость. И $f(x)$ – дифференцируемая функция.

$f'(x) = g(x)$ – непрерывная функция, т.к. $f'_n \Rightarrow g$ и f_n непрерывные. □

Следствие.

$u_n \in C^1[a, b]$, $c \in [a, b]$, $\sum u'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$ и $\sum u_n(c)$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится к непрерывной дифференцируемой функции и $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

Доказательство.

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \Rightarrow S'_n = \sum_{k=1}^n u'_k$$

По условию $\sum_{k=1}^n u'_k \Rightarrow g$ и $S_n(c) \rightarrow A$.

И тогда по прошлой теореме

$$S_n \Rightarrow S, S \in C^1[a, b] \text{ и } S' = g \Rightarrow (\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x). \quad \square$$

Пример.

Равномерная сходимость ряда производной важна:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2})' \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ – расходится при $x = 2\pi k$

Т.е. равенства нет.

3.27. Билет 66: NAME

3.28. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 3.42.

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leq r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| \leq r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится \implies по признаку Вейерштрасса $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| \leq r$ сходится равномерно. \square

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

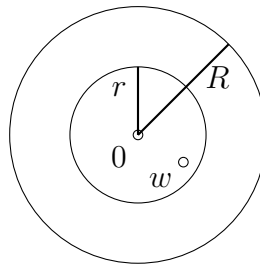
Контрпример $R = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightarrow 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаменатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окрестности. Берем r , т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция \implies в круге $|z| < r$ сумма непрерывна \implies есть непрерывность суммы и в w . В силу произвольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



\square

Теорема 3.43 (Абеля).

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (не зависит от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. \square

Следствие.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim} x_n y_n = \lim x_n \overline{\lim} y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim} y_n, C = \overline{\lim} x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow C$. $\lim x_{n_k} y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k} . Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leq B \implies C \leq AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{m_k} \rightarrow B$. $\lim x_{m_k} y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k} y_{m_k} = AB \leq C$.

Итого равенство. □

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n.$$

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 3.44 (Почленное интегрирование степенного ряда).

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Тогда при $|x - x_0| < R$

$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □

3.30. Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

Определение 3.15.

$f: E \mapsto \mathbb{C}, E \subset \mathbb{C}, z_0 \in \text{Int} E$. Если существует $k \in \mathbb{C}$, такое что $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \rightarrow z_0$, то f – **комплексно-дифференцируема в точке** z_0 и k – **производная** f в точке z_0 .

Замечание.

$$1. k = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

2. Существование производной равносильно дифференцированию

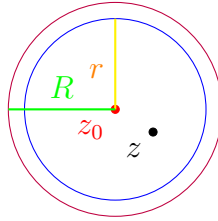
Теорема 3.45.

R – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Тогда f – бесконечно дифференцируема в круге $|z - z_0| < R$ и

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Доказательство.



Докажем индукцию по m . Рассмотрим $m = 1$ и $z_0 = 0$ (про z_0 для простоты). Возьмем $|z| < R$ и подберем такое r , что $|z| < r < R$ (картинка выше для пояснения). Возьмем $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n w^n - a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по $|w| < r$ последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leq |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \dots + |z|^{n-1}) \leq |a_n|nr^{n-1}$$

Второе неравенство, так как $|w| < r$ и $|z| < r$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|nr^{n-1}$ сходится, так как у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ радиус сходимости $R > r$. Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Если применить эту формулу m раз, то получим искомую формулу. □

3.31. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 3.46 (единственность разложения функции в степенной ряд).

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.

По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$. Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m = m!a_m$$

. Отсюда $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$. □

Определение 3.16.

Ряд Тейлора функции f в точке z_0 называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

Определение 3.17.

Функция называется **аналитической** в точке z_0 , если она является суммой своего ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности точки z_0 .

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифференцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции ($n \rightarrow n+1$), проверяем есть ли формула для разных производных:

База: Для $f: f = P_0 e^{-1/x^2}$, то есть $P_0 \equiv 1$

Переход:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = (P_n(x) x^{-3n} e^{-1/x^2})' = \\ &= P_n(x) x^{-3n} e^{-1/x^2} \frac{1}{x^3} + P_n'(x) x^{-3n} e^{-1/x^2} + P_n(x) (-3n) x^{-3n-1} e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}} P_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Найдем $f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ Докажем по индукции ($n-1 \rightarrow n$), что $f^{(n)}(0) = 0$.

Переход:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} = \lim_{y=1/x} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y^2} y^{3n+1} P_n\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$P_n\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} P_n(0) - \text{константа}$$

$$e^{-y^2} y^{3n+1} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0, \text{ так как } e^{-y^2} \text{ убывает быстрее.}$$

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках $x \neq 0$. Значит функция не аналитическая.

3.32. Билет 71: NAME

3.33. Билет 72: NAME

4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: Дифференцируемость отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m . Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.

Определение 4.1.

$$f : E \mapsto \mathbb{R}^m \quad a \in \text{Int } E, E \subset \mathbb{R}^n$$

f - дифференцируема в точке a , если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$,

такое что $f(a + h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

Замечание.

Заметим, что в нашем определении все 0 - векторы, ровно как и аргументы.

Например, $h \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(h) \in \mathbb{R}^m$

Замечание.

Несложно убедиться, что данное определение ровно такое же, как и определение, которое давалось, когда мы говорили про дифференцируемость функции одной переменной. С той лишь разницей, что тогда вместо T у нас было просто домножение на константу (тоже линейное отображение, но тривиальное), а добавкой была $o(\|h\|)$ (но у нас записано тоже самое, ведь по сути $\alpha(h) = o(\|h\|)$). Получается, что дифференцируемость функции от одной переменной, про которую мы говорили раньше - это частный случай при $n = m = 1$.

Определение 4.2.

T - дифференциал функции f в точке a . Обозначается чаще всего $d_a f$

Замечание.

Если T существует, то оно определено однозначно.

Зафиксируем $h \in \mathbb{R}^n$. $f(a + th) = f(a) + T(th) + \alpha(th)$, где $t \in \mathbb{R}$

Так как T - линейно, то $T(th) = tT(h)$

$$Th = \frac{f(a + th) - f(a)}{t} - \frac{\alpha(th)}{t} \quad \text{Перейдем к пределу при } t \rightarrow 0$$

Так можно сделать, потому что $\frac{\alpha(th)}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$,

поскольку это записано в определении дифференцируемости функции (фиксированное h).

Тогда получили:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = Th$$

Значит это отображение однозначно.

Определение 4.3.

Матрица линейного оператора T - матрица Якоби функции f в точке a

Обозначается матрица T : $f'(a)$

Данное обозначение намекает, что эта матрица - некий аналог производной

для функции одной переменной

Замечание.

Дифференцируемость функции f в точке a влечет непрерывность f в точке a .

$$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h).$$

Перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$, получим:

$$f(a) + Th + \alpha(h) \rightarrow f(a) + 0 + 0 = f(a),$$

так как $\alpha(h)$ при делении на $\|h\|$ уже будет стремиться к 0, здесь же тем более

Получили определение непрерывности

Пример Важный частный случай $m = 1$.

Получаем отображение $f : E \mapsto \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$

Мы из вектора сделали число. Это скалярное произведение на какой-то вектор.

Потому что можно представить, что умножаем матрицу на вектор и получаем вектор размера 1.

Откуда получаем, что эта матрица - это строчка размера n .

Ну а это - скалярное произведение.

$$f(a+h) = f(a) + \langle v, h \rangle + \alpha(h) \text{ для некоторого } v \in \mathbb{R}^n$$

Определение 4.4.

v - градиент функции f в точке a

Обозначается: $\text{grad } f$ или ∇f

4.2. Билет 74: Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений

Разберем несколько примеров дифференцируемых отображений.

Пример.

$$f(x) = \text{const} = c$$

$$f(a+h) = f(a)$$

$$T \equiv 0, \alpha \equiv 0$$

Пример.

f - линейное отображение

$$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + T(h)$$

$$T = f, \alpha \equiv 0$$

Определение 4.5.

$$f : E \mapsto \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad f_k : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ - координатные функции}$$

Теорема 4.1.

Дифференцируемость функции f в точке a равносильна дифференцируемости в точке a

всех ее координатных функций.

Доказательство.

$$f : E \mapsto R^m, E \subset \mathbb{R}^n$$

$$1. \Rightarrow f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h), \text{ где } \alpha(h) = o(\|h\|)$$

Распишем определение в виде векторного равенства:

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \\ \vdots \\ T_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \alpha_2(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим конкретную координату:

$$f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$$

$T_k h$ - произведение строки матрицы на вектор, поэтому - линейное отображение (по сути просто скалярное произведение).

Необходимо показать, что $\frac{\alpha_k(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

Достаточно заметить, что так как $\|\alpha(h)\| = \sqrt{\sum \alpha_k(h)^2}$, то $|\alpha_k(h)| \leq \|\alpha(h)\|$

$$\text{Но тогда } \frac{|\alpha_k(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$$

Отсюда получаем вывод, что $\frac{\alpha_k(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, получается,

что доказали для всех координатных функций.

2. \Leftarrow

Знаем, что $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$ и $\frac{\alpha_k(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

Соберем все это в один вектор, из строчек T получаем матрицу, тогда в результате:

$$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$$

Надо проверить, что $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, т. е. $\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$

$$\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} = \frac{\sqrt{\alpha_1(h)^2 + \dots + \alpha_m(h)^2}}{\|h\|} = \sqrt{\frac{\alpha_1(h)^2}{\|h\|^2} + \dots + \frac{\alpha_m(h)^2}{\|h\|^2}} \rightarrow 0$$

□

Следствие.

Строки матрицы Якоби - градиенты координатных функций.

Доказательство.

Строки матрицы Якоби - это те самые T_k , которые встречались в доказательстве теоремы.

Тогда можно заметить, что $T_k h = \langle T_k^T, h \rangle$

Отсюда получаем, что строки матрицы Якоби - градиенты координатных функций.

□

4.3. Билет 75: Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента

Определение 4.6 (Направление).

Это такой вектор, единичной длины, который смотрит в нужную нам сторону.

Определение 4.7 (Производная по направлению).

Имеем направление h . Также есть внутренняя точка a , то есть $a \in \text{Int}E$. И сама функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$. Напомню, что $E \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда следующая штука, это производная функции f по направлению h в точке a :

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Теорема 4.2 (Вспомогательная теорема).

Имеем направление h , $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \text{Int}E$ и f дифференцируема в точке a .

Тогда выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f, h \rangle$$

Доказательство.

Воспользуемся определением дифференцируемости функции f :

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + T(t \cdot h) + \alpha(t \cdot h)$$

Воспользуемся линейностью и получим:

$$\begin{aligned} f(a + t \cdot h) &= f(a) + t \cdot Th + \alpha(t \cdot h) \implies \\ \implies f(a + t \cdot h) - f(a) &= t \cdot Th + \alpha(t \cdot h) \end{aligned}$$

Теперь распишем производную по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Благодаря прошлым замечанием, можем заменить числитель:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot Th + \alpha(t \cdot h)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(Th + \frac{\alpha(t \cdot h)}{t} \right)$$

Заметим, что Th какая-то константа, поэтому можно вынести:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t}$$

Заметим, что $\|t \cdot h\| = t \cdot \|h\| = t$: норма направления равна единице. Следовательно $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t} = 0$: по определению α .
Получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th$$

Осталось вспомнить, что $Th = d_a f(h)$, просто альтернативная запись. Следовательно, первое равенство у нас есть.

Разберёмся со вторым. Но тут совсем всё просто, так как перед нами определение градиента. ()

□

Следствие Экстремальное свойство градиента.

Имеем направление h , $f : E \mapsto \mathbb{R}$, функция f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$.

Тогда для любого направления h выполнено следующее:

$$-\|\nabla f(a)\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\nabla f(a)\|$$

А равенство достигается, когда $h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

Смысл следствия. Оно объясняет физический смысл градиента. Градиент это вектор, в направлении которого функция меняется быстрее всего.

Доказательство.

Напишем равенство, которое мы вывели в прошлой теореме:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle \implies \left| \frac{\partial f}{\partial h}(a) \right| = |\langle \nabla f, h \rangle|$$

Напишем неравенство Коши-Буняковского.

$$|\langle \nabla f, h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\| \implies \left| \frac{\partial f}{\partial h}(a) \right| \leq \|\nabla f(a)\|$$

То есть неравенство мы уже доказали.

Далее осталось вспомнить, когда в неравенстве Коши-Буняковского, получается равенство. Это происходит тогда и только тогда, когда вектора являются пропорциональными. Осталось вспомнить, что норма h должна быть строго равна единице. Следовательно у нас есть два возможных выбора для h :

$$h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

□

4.4. Билет 76: Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.

Определение 4.8 (Частная производная).

Это просто производная по направлению от одного из базисных векторов. Определим её так:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a), \text{ где } e_k - k\text{-ый базисный вектор}$$

Давайте посмотрим на **пример**. Есть функция от двух переменных $f(x, y)$. Хотим узнать частную производную по направлению оси абсцисс в какой-то точке (a, b) . Вычислим её по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a, b) - t \cdot (1, 0)) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t}$$

Итак, что же здесь происходит. В данном случае мы зафиксировали второй координатный параметр. То есть функция стала зависеть только от значения первого аргумента. Иными словами, f превратилась в самую обыкновенную функцию от одной переменной, производную для которой мы отлично умеем считать.

Вывод, частная производная устроена следующим образом. Мы фиксируем все координаты кроме той, по которой мы хотим продифференцировать. В итоге рассматриваем функцию только от нужного нам аргумента, и считаем её производную.

Еще один пример. Дана функция $f(x, y) = x^y$. Посчитать две частные производные.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$$

В первом случае мы зафиксировали y – стали воспринимать его константой. Во втором случае аналогично для x .

Замечание Иное определение градиента.

Вспомним теорему из билета №75

$$\frac{\partial f}{\partial e_k} = \langle \nabla f(a), e_k \rangle \implies \frac{\partial f}{\partial x_k} = \langle \nabla f(a), e_k \rangle$$

Поймем, что представляет из себя это скалярное произведение – это просто k -ая координата вектора $\nabla f(a)$. Отсюда делаем вывод, что градиент – это вектор, которые состоит из частных производных.

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Замечание Элементы матрицы Якоби.

Пусть у нас есть $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$. Поймём, что такое матрица $f'(a)$. Знаем, что она составлена из градиентов координатных функций (смотреть следствие из теоремы о дифференцируемости координатных функций – билет №74). А мы уже знаем, как выглядит градиент (замечание выше). Поэтому матрица Якоби имеет следующий вид:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

4.5. Билет 77: NAME

4.6. Билет 78: NAME

4.7. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

Теорема 4.3.

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна и дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b)$, такая что $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a)$

Доказательство.

$$\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$$\exists c \in (a, b), \text{ т.ч. } \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a)$$

$$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle + \langle f(x), (f(b) - f(a))' \rangle = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a) \leq \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b - a) \quad (\text{Коши-Буняковский})$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a) \quad \square$$

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$f(0) = (1, 0) = f(2\pi)$$

$$f(2\pi) - f(0) = (0, 0) \implies \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$$

$$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\| (2\pi - 0) = 2\pi > \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

4.8. Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости.

Теорема 4.4.

$$f : E \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a \in \text{Int} E.$$

В окрестности точки a существуют все частные производные и они непрерывны в точке a .

Тогда f дифференцируема в точке a .

Доказательство.

По сути, мы знаем, как должно быть устроено линейное отображение из определения дифференцируемости, т.к. нам известны частные производные (подробнее об этом расписано в билете 76)

$$R(h) := f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(a) h_k$$

Надо доказать, что $\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

Заведём вспомогательные вектора: $b_k = (a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$, заметим, что тогда получается $b_0 = a, b_n = a + h$

Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной $F_k(t) := f(b_{k-1} + t h_k e_k)$, здесь e_k - это стандартный вектор

$$\text{Запишем в координатном виде: } F_k(t) := f(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + t h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$\text{Применим одномерную теорему Лагранжа: } \underbrace{F_k(1) - F_k(0)}_{f(b_k) - f(b_{k-1})} = F'_k(\Theta_k) = h_k f'_{x_k}(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} +$$

$$h_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = h_k f'_{x_k}(c_k) \text{ для некоторой } \Theta_k \in (0, 1)$$

$$\text{Получили, что } f(b_k) - f(b_{k-1}) = h_k f'_{x_k}(c_k). \text{ Сложим все получившиеся равенства: } f(b_n) - f(b_0) = f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(c_k) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(a) + \sum_{k=1}^n h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^n h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$ - формула для остатка $R(h)$

$$|R(h)| \leq \|h\| (\sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (КБШ)}$$

$$\iff \frac{R(h)}{\|h\|} \leq (\sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ по непрерывности частных производных}$$

□

Замечание 1. В формулировке теоремы интересуемся дифференцируемостью скалярной функции, но дифференцируемость векторнозначной функции равносильна дифференцируемости каждой ее координатной функции, которая есть скалярная функция.

Замечание 2. Можно не требовать непрерывность ровно одной из частных производных

Доказательство.

Не требуем непрерывность f'_{x_1} в точке a . Необходимо, чтобы $f'_{x_1}(c_1) - f'_{x_1}(a) \rightarrow 0$.

Нас интересует разность $f(b_1) - f(b_0) = f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$. То есть получили функцию, у которой последние координаты зафиксированы, а первую меняем. Такая функция дифференцируема в точке a_1 по определению частной производной.

$$f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) + f'_{x_1}(a_1, \dots, a_n)h_1 + o(h_1)$$

$$f(b_1) - f(b_0) = f'_{x_1}(a)h_1 + o(h_1)$$

□

Замечание 3. Дифференцируемость в точке не дает существование част.производных в окрестности и тем более их непрерывность

Пример.

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \text{ если ровно одно из чисел } x \text{ или } y \text{ рационально}$$

$$f(x, y) = 0 \text{ иначе}$$

f непрерывна только в точке $(0, 0)$, в остальных точках нет непрерывности ни по какому направлению

$$\text{Проверим дифференцируемость в } (0, 0): f(h, k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

$$f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2}), \text{ верно, т.к. } 0 \leq f(h, k) \leq h^2 + k^2$$

4.9. Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство

Определение 4.9.

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

f – непрерывно дифференцируема в точке a , если

f дифференцируема в окрестности точки a и

$$d_x f \text{ непрерывна в точке } a \quad (\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a)$$

Теорема 4.5.

$$f \text{ – непрерывно дифференцируема в точке } a \iff$$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a .

Доказательство.

“ \implies ” Разложим f на координатные функции, рассмотрим одну из них – f_k . Продифференцируем её по какому-то x_j . Рассмотрим модуль разности значений в точках x и a :

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right|$$

для доказательства оценим эту разность сверху чем-то стремящимся к 0.

$$\text{Так как } \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \langle d_x f(e_j), e_k \rangle, \text{ то}$$

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right| = |\langle d_x f(e_j) - d_a f(e_j), e_k \rangle| \leq \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \|e_k\| =$$

$$= \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \leq \|d_x f - d_a f\| \|e_j\| = \|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$$

“ \impliedby ”

$$\text{Рассмотрим } \|d_x f - d_a f\|^2$$

Воспользуемся ранее доказанной теоремой, что квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов её коэффициентов:

$$\|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right)^2 \rightarrow 0, \text{ так как}$$

из $x \rightarrow a$ и непрерывности частных производных следует, что каждое слагаемое стремится к 0, их конечное кол-во, значит, и сумма стремится к 0, поэтому $\|d_x f - d_a f\|^2 \rightarrow 0$, а тогда и $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$ \square

4.10. Билет 82: Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в \mathbb{R}^2

Определение 4.10.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открытое множество.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$$

Т.е. сначала фиксируем x_k (как будто параметр), считаем производную по x_j , затем наоборот.

Это частная производная второго порядка, можно писать и большие аналогично.

Пример.

$$f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$$

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4 - y^4) - 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} f(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x} f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

Но в силу антисимметричности x и y .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

Теорема 4.6.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in \text{Int } E$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ещё и непрерывна в ней

Тогда существует и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке (x_0, y_0) .

$$\text{Более того } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Доказательство.

Рассмотрим $\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$, где k – некоторое малое число. φ дифф. в окрестности точки x_0 (по условию теоремы), поэтому можем применить к ней т. Лагранжа (одномерную):

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \quad \theta_1 \in (0, 1)$$

Обозначим $\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$.

$$\Delta = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)\right) = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0)) = \\ = hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$$

$$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$$

$$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

Получили, что

$$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

(Последнее – в силу непрерывности этих производных, устремили $h, k \rightarrow 0$)

□

Определение 4.11.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ D – открыто

f – r раз непрерывно дифференцируема = r -гладкая,

если все частичные производные до r -ого порядка существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(D)$

Теорема 4.7.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ D – открыто $f \in C^r(D)$

i_1, i_2, \dots, i_r – перестановка j_1, j_2, \dots, j_r

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной. А значит, можем всегда переставить все в неубывающем порядке индексов. □

4.11. Билет 83: NAME

4.12. Билет 84: NAME

4.13. Билет 85: ! Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.

Теорема 4.8.

$D \in \mathbb{R}^n$, D – открытое множество. $f \in C^{r+1}(D)$ (функция f $r+1$ раз непр. дифференцируема на данном множестве), $[a, x] \in D$.

$$\text{Тогда } \exists \theta \in (0, 1) : f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta(x - a))}{k!} (x - a)^k$$

Доказательство.

$F(t) := f(a + th)$, где $h = x - a$. $F \in C^{r+1}[0, 1]$.

Запишем одномерную формулу Тейлора для F в нуле.

$$F(t) = \sum_{l=0}^r \frac{F^{(l)}(0)}{l!} t^l + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} t^{r+1}.$$

Теперь, исходя из леммы из предыдущего билета, подставим все производные F .

$$\text{Получается: } F(t) = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(a) h^k t^l + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|k|=r+1} \binom{r+1}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(a + \theta h) h^k t^{r+1}.$$

Осталось сделать небольшие преобразования.

Заметим, что $\binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{l!}{k!}$, $\binom{r+1}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{(r+1)!}{k!}$, где k - факториал мультииндекса.

Вспомним, что нас интересует значение функции f в точке x , это значит, что нас интересует значение F в точке 1.

$$\text{Итого: } f(x) = F(1) = \sum_{l=0}^r \sum_{|k|=l} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta h)}{k!} h^k.$$

А это и есть нужная нам формула, так как такая сумма $\sum_{l=0}^r \sum_{|k|=l} \dots = \sum_{|k| \leq r} \dots$, а это сумма по всем мультииндексам высоты $\leq r$. Все свернулось в обещанную формулу. \square

Пример.

Многочлен Тейлора степени r - "кусочек формулы, который не остаток".

Выглядит он так:

$$\sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Пример.

Пусть $r = 0$.

Получим аналог теоремы Лагранжа для функции от n переменных.

$$f(x) = f(a) + \sum_{|k|=1} \frac{f^{(k)}(a + \theta(x - a))}{k!} h^k, \text{ где } h = x - a.$$

Мультииндекс высоты 1 - это одна единица и остальные нули. Значит, все $k!$ под суммой = 1.

Производная по такому мультииндексу (пусть единица стоит на i -том месте) - это производная по i -той координате.

Потом мы умножаем на h^k , все координаты кроме i -той обнулятся, поэтому просто умножаем на h_i .

$$\text{Получаем такую запись: } f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta(x - a)) h_i$$

А это скалярное произведение градиента f , посчитанного в точке $(a + \theta(x - a))$ и вектора h . Итого получаем $f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a + \theta(x - a)), x - a \rangle$.

Пример.

Пусть $n = 2$.

Поймем, как будут выглядеть производные по мультииндексу, посчитанному в точке a . Мультииндекс для $n = 2$ будет равен $k = (i, j)$. Производная в точке $a = f^{(k)} = \frac{\delta^{i+j} f}{\delta^i x \delta^j y}$. Подставим это в формулу.

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\delta f}{\delta x}(a, b)(x - a) + \frac{\delta f}{\delta y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a, b)(y - b)^2 +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta^2 y}(a, b)(x - a)(y - b) + \dots$$

Расшифровка: к значению в фиксированной точке добавляем сумму по всем мультииндексам высоты 1 - это производная по x и по y в точке (a, b) . Далее добавляем вторые производные, производную по x и y и так далее.

Запишем производную l -того порядка.

$$\dots + \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \frac{\delta^l f}{\delta x^i \delta y^{l-i}}(a, b)(x - a)^i (y - b)^{l-i} + \dots$$

Данная формула даже при $n = 2$ имеет довольно много слагаемых, поэтому обычно ее используют при маленьких r , т.к. за счёт этого получается мало слагаемых.

4.14. Билет 86: Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.

Теорема 4.9. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$D \subset R^n$, D - открытое множество. $f \in C^r(D)$ $a \in D$. $h := x - a$

Тогда при $x \rightarrow a$ $f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(\|h\|^r)$.

Замечание. Данная формула является следствием из теоремы о многомерной формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа (см. билет 85).

Доказательство. Запишем формулу из теоремы о формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа для $r - 1$.

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a + \theta h)}{k!} h^k = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (h)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a + \theta h) - f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Осталось понять, что второе слагаемое и есть $o(\|h\|^r)$.

Наблюдение 1. $\frac{|h^k|}{\|h\|^r} \leq 1$.

Это верно, так как в числителе мы взяли какие-то координаты вектора h в количестве r штук и умножили друг на друга. В знаменателе мы взяли длину вектора в том же количестве и перемножили. Каждая координата меньше длины. $|h_i| \leq \|h\|$.

Наблюдение 2. Осталось доказать, что коэффициенты стремятся к нулю:

$f^{(k)}(a + \theta h) - f^{(k)}(a) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$. Это следует из непрерывности производной соответствующего порядка. А сама непрерывность выполняется по условию теоремы.

Замечание. "А на самом деле, если повозиться посильнее, то можно выкинуть требование непрерывности последней производной".

Это значит, что достаточно r -той дифференцируемости в точке a .

"Но мы не будем лезть в эти подробности (спасибо!)"

□

Следствие. (Полиномиальная формула)

Формула для возведения суммы в r -тую степень.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum_{|k|=r} \binom{r}{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Доказательство. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^r =: (g(x))^r$

Подставим это в формулу Тейлора. Для этого поймем, как выглядит производная.

$\frac{\delta f}{\delta x_i} = r g^{r-1}(x) \frac{\delta g}{\delta x_i} = r g^{r-1}(x)$ (так как производная g по x - единица). Получается, частная производная не зависит от координаты, по которой считаем и считается как обычная производная от функции g .

Значит, производная r -того порядка $= \frac{\delta^r f}{\delta x_{i_1} \dots \delta x_{i_r}} = r!$. А производная, например, $r+1$ -го порядка $= 0$.

Запишем формулу Тейлора с остатком в виде в форме Лагранжа для r . Сразу заметим, что остатка не будет, т.к. r -тая производная $= 0$.

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Заметим, что производная порядка $< r$ в нуле будет $= 0$, т.к. в формуле у нас останется g в какой-то ненулевой степени, а g в нуле $= 0 \Rightarrow$.

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} x^k. \text{ А это и есть то, что было обещано в начале. Доказали.}$$

□

4.15. Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения

Теорема 4.10 (Теорема Банаха о сжатии).

X – полное метрическое пространство. $f : X \mapsto X$, $0 < \lambda < 1$ и $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \forall x, y \in X$.

Тогда существует единственная неподвижная точка, такая что $f(x) = x$.

Доказательство.

- Единственность. От противного. Пусть неподвижных точек две: \tilde{x} и x . Тогда $\rho(x, \tilde{x}) = \rho(f(x), f(\tilde{x})) \leq \lambda \rho(x, \tilde{x})$. Но $\lambda < 1$. Противоречие.
- Существование.

Возьмем произвольную начальную точку $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что это фундаментальная последовательность.

$$\rho(x_n, x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_{n-1+k})) \leq \lambda \rho(x_{n-1}, x_{n-1+k}) \leq \dots \leq \lambda^n \rho(x_0, x_k)$$

Попытаемся оценить $\rho(x_0, x_k)$ по неравенству треугольника.

$$\rho(x_0, x_k) \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{k-1}, x_k) \leq \rho(x_0, x_1) + \lambda \rho(x_0, x_1) + \dots + \lambda^{k-1} \rho(x_0, x_1)$$

А это убывающая геометрическая прогрессия. Тогда,

$$\rho(x_0, x_k) < \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}. \text{ Вернемся к } \rho(x_n, x_{n+k}). \text{ Теперь мы можем это оценить:}$$

$$\rho(x_n, x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda} \longrightarrow 0$$

Значит, рассматриваемая последовательность фундаментальна. Значит, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x^*$.

$$f(x^*) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

По непрерывности функции f . Откуда непрерывность? Рассмотрим: $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$
 $\forall x, y \in X$. f это функция, уменьшающая расстояния. Поэтому, если $y \rightarrow x$, то $\rho(x, y) \rightarrow 0$.
 Тогда и $f(y) \rightarrow f(x)$. Значит, x^* и есть неподвижная точка. Что и требовалось доказать.

□

Утверждение 4.11.

$$\rho(x_n, x^*) \leq \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1 - \lambda}$$

Доказательство.

Это следует из $\rho(x_n, x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1 - \lambda}$. Возьмем и устремим k к бесконечности.

□

Следствие.

X - полное метрическое пространство, $f, g : X \mapsto X$ - сжатия с коэф. $\lambda \in (0, 1)$. $x = f(x)$ и $y = g(y)$ - неподвижные точки.

$$\text{Тогда } \rho(x, y) \leq \frac{\rho(f(x), g(x))}{1 - \lambda}$$

Доказательство.

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), g(y)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), g(y)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \lambda \rho(x, y).$$

Добавили и вычли $g(x)$, раскрыли по нер-ву треугольника, оценили расстояние через сжатие, получили то, что нам нужно.

□

Пример Метод касательных (метод Ньютона).

$f \in C^2[a, x_0]$, $f'(a) =: \mu > 0$, $f(a) = 0$ и f строго выпукла и строго монотонна. Хотим найти корень функции (быстрее чем бинпоиск).

$$\text{Рассмотрим вспомогательную функцию } g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} : [a, x_0] \mapsto [a, x_0].$$

Почему она действует в тот же самый отрезок?

Понятно, что $g(x) \leq x$, так как из x мы постоянно что-то вычитаем + f/f' не отрицательны. Более того:

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) < f'(x)(x - a), c \in [a, x_0]$$

* $f(a) = 0$ + теорема Лагранжа + монотонное убывание производной*

$$\text{Значит, } \frac{f(x)}{f'(x)} < x - a \implies g(x) > a$$

Далее докажем, что g - сжатие. Как это можно понять? По теореме Лагранжа. Мы знаем, что разность двух образов есть произведение производной в какой-либо точке t на разницу образов. Возьмем производную. Воспользуемся Лагранжем и тем, что производные возрастают. Пусть $M := \max(f''(t))$, $t \in [a, x_0]$

$$g'(t) = 1 - \frac{f'(t)f'(t) - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)f(t)}{(f'(t))^2} < \frac{f''(t)f'(t)(t - a)}{(f''(t))^2}$$

$$\frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f''(t))^2} = \frac{f''(t)(t-a)}{f'(t)} \leq \frac{f''(t)(t-a)}{\mu} \leq \frac{M}{\mu}(t-a) \leq \frac{M}{\mu}(x_0-a) < 1$$

Значит, нужно добавить в условие, что $\frac{M}{\mu} < 1$.

Запустим процесс из предыдущей теоремы о сжатии. Пусть $x_n := g(x_{n-1}) \implies \lim x_n =: x^*$ и x^* - неподвижная точка.

$$x^* = g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \implies f(x^*) = 0 \iff x^* = a$$

Вот мы и получили способ поиска корня a , причем у нас есть контроль скорости.

Замечание.

Откуда взялась функция g ? Пусть y - касательная графика в точке x_0 , тогда $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим точку, когда касательная пересечет ось абсцисс, то есть $y = 0$. Тогда $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \implies x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. А это и есть наша функция g .

4.16. Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым

Теорема 4.12 (Оценка на норму обратного отображения).

Если $A : R^n \mapsto R^n$ линейное, $\|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in R^n$ и $m > 0$, тогда A - обратим и $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$

Доказательство.

Нужно проверить инъективность (точки не склеиваются). Так как A линейно, нужно проверить, что A ничего не переводит в ноль, кроме нуля. То есть доказать, что $Ax = 0 \iff x = 0$.

Если $Ax = 0$, то $\|Ax\| = 0 \geq m\|x\| \implies x = 0$.

Раз точки не склеиваются, значит $\exists A^{-1}$. Осталось оценить ее норму. Пусть $y = A^{-1}x$, тогда...

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{m\|y\|} = \frac{1}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 4.13 (Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения).

$f : R^n \mapsto R^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leq \alpha \quad \forall x \in B_r(a)$, тогда $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|$

Доказательство.

$$\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x) \rangle.$$

Воспользуемся линейностью скалярного произведения. Далее применим формулу Лагранжа и возьмем $\xi \in (0, 1)$.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = \langle \dots \rangle' = \langle (f(x + t(y - x)))', f(y) - f(x) \rangle = \langle f'(x + t(y - x))(x + t(y - x))'_t, f(y) - f(x) \rangle =$$

$$= \langle f'(x + t(y - x))(y - x), f(y) - f(x) \rangle$$

Подставим функцию. Оценим скалярное произведение. Замечание: точка $(x + \xi(y - x))$ находится между x и y , а значит живет в шаре $B_r(a)$. Тогда $f'(x + \xi(y - x))$ - это произведение матрицы на вектор.

$$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x)), f(y) - f(x) \rangle \leq \|f'(x + \xi(y - x))\| \|f(y) - f(x)\| \leq \alpha \|y - x\| \|f(y) - f(x)\|$$

Вспомним, откуда мы начинали.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi'(\xi) \leq \alpha \|y - x\| \|f(y) - f(x)\|$$

Тогда можно сократить $\|f(y) - f(x)\|$ и теорема будет доказана. \square

Теорема 4.14 (Об обратимости оператора близкого к обратимому).

$A : R^n \mapsto R^n$ обратим и $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда B - обратим, $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\| - \|B - A\|}$ и $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|B - A\|}{\|A^{-1}\| - \|B - A\|}$

Доказательство.

Воспользуемся неравенством треугольника.

$$\|Bx\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \|x\| = \|x\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \right)$$

Откуда взялся предпоследний переход? Заметим, что $\|(B - A)x\| \leq \|B - A\| \|x\|$. Так же подметим, что

$$\|A^{-1}\| \|Ax\| \geq \|A^{-1}Ax\| = \|x\| \iff \|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

Пусть $m := (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)$. Тогда $\|Bx\| \geq m\|x\|, \forall x \in R^n \implies B$ - обратима и $B^{-1} \leq \frac{1}{m}$ по предыдущим теоремам.

Воспользуемся линейностью.

$$B^{-1} = B^{-1}(AA^{-1} - BA^{-1}) = B^{-1}(A - B)A^{-1}.$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|A - B\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A - B\| \|A^{-1}\|}{m}$$

Что и требовалось доказать. \square

Замечание.

Замечание: самое главное в этой формуле то, что $\|B - A\|$ находится в числителе. Это означает, что при $B \rightarrow A$ последовательность обратных будет стремиться к обратным. Остальное в этой формуле маловажно.

4.17. Билет 89: NAME**4.18. Билет 90: NAME****4.19. Билет 91: Теорема о неявной функции****Определение 4.12.**

Функции, задаваемые уравнениями – неявные функции.

Теорема 4.15 (о неявной функции).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad D \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

D – открытое, f – непрерывно дифференцируема. $f(a, b) = 0, (a, b) \in D$

$A = f'(a, b)$, и если $A(h, 0) = 0$, то $h = 0$.

Тогда $\exists W$ – окрестность точки b и единственная функция $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.ч. $g(b) = a$, g непрерывна дифференцируема, и $f(g(y), y) = 0 \quad \forall y \in W$

Доказательство.

$F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \quad F(x, y) = (f(x, y), y)$ – непрерывно дифференцируема.

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + A(h, k) + r(h, k) = A(h, k) + r(h, k)$$

$$F(a + h, b + k) = F(a, b) + (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) = (0, b) + (A(h, k), k) + (r(h, k), 0)$$

$$F(a + h, b + k) = (f(a + h, b + k), b + k)$$

$$F'(a, b)(h, k) = (A(h, k), k)$$

Поймем, что $F'(a, b)$ инъекция.

Пусть $(A(h, k), k) = (0, 0) \Rightarrow k = 0$ и $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$, значит $F'(a, b)$ инъекция.

F удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции, тогда $\exists U$ – окрестность точки (a, b) и V – окрестность точки $(0, b)$, т.ч. $F : U \rightarrow V$ биекция. $G = F^{-1} : V \rightarrow U$ непрерывно дифференцируема.

$G(z, w) = (\varphi(z, w), w)$, т.к. F сохраняет последнюю координату.

$$(z, w) = F(G(z, w)) = (f(\varphi(z, w), w), w) \Rightarrow f(\varphi(z, w), w) = z$$

Возьмем W – окрестность точки b , т.ч. $\{b\} \times W \subset V$

$$g(w) := \varphi(0, w) \quad g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(g(w), w) = f(\varphi(0, w), w) = 0$$

$$g(b) = \varphi(0, b) = a$$

Доказали существование.

Докажем единственность

Пусть $f(x, y) = f(x, y)$, тогда $F(x, y) = F(x, y)$, но F обратима, а значит F – биекция $\Rightarrow x = x$

□

4.20. Билет 92: NAME

4.21. Билет 93: NAME

4.22. Билет 94: NAME

4.23. Билет 95: NAME

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME