Теория Колебаний

April 3-8, 2023

Содержание

1 Гармонический осциллятор

1.1 Гармонический осциллятор

1.1.1 Груз на пружине

Гармонический осциллятор описывается линейным дифференциальным уравнением (ЛОДУ).

Простейший пример такой системы, груз массы m на пружинке.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad (21.2)$$

Функция $x = \cos(t)$ является решением данного уравнения если положить k/m $= 1$. Но каким образом мы можем все же учесть коэфициенты k и m?

Попробуем $x = A\cos(t)$ и откроем важное свойство ЛОДУ: решение умноженное на *константу* также является решением. Но мы по-прежнему не можем выразить коэфициенты k и m.

Попробуем $x = \cos(\omega_0 t)$ и найдем $\omega_0^2 = k/m$. Велечину $\omega_0 t$ часто называют *фазой* движения.

Период полного колебания t_0, время за которое фаза изменяеися на 2π или $\omega_0 t_0 =$ 2π

$$t_0 = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (21.5)$$

Уравнение (21.2) определяет *период* колебаний, но ничего не говорит нам о том *как* началось движение, насколько мы оттянули пружинку, а также об амплитуде колабаний. Для этого нужно задать *начальные условия.*

1.1.2 Общее решение

Нужно найти более общее решение уравнения (21.2). Общее решение должно допускать изменение начала отсчета времени, например

$$x = a\cos(\omega_0(t - t_1)) \quad (21.6a)$$

или

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta) \quad (21.6b)$$

Можно разложить $\cos(\omega_0 t + \Delta) = \cos\omega_0 t\cos\Delta - \sin\omega_0 t\sin\Delta$ и записать:

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad (21.6c)$$

где $A = a\cos\Delta$, а $B = -a\sin\Delta$

Рассмотрим некоторые величины в уравнениях (21.6)
ω_0 - угловая частота, число радианов на которое фаза изменится за одну секунду, определяется дифференциальным уравнением (21.2)
Другие величины не определяются дифференциальным уравнением, а зависят от начальных условий
a - амплитуда колебаний
Δ - сдвиг фазы, иногда называют фазой
Все вместе $\omega_0 t + \Delta$ - удобно называть фазой

1.2 Начальные условия

A и B или a и Δ, показывают как началось движение. Эти значения можно определить из начальных условий, например, пусть в начальный момент времени $t = 0$ грузик смещен от положения равновесия на велечину x_0 и имеет скорость v_0.

Для получения коэфициентов A и B (а затем a и Δ) удобно пользоваться формулой (21.6c)

Для задания начальных условия для ЛОДУ второго порядка, мы должны задать значение самой функции во время $t = 0$ и значение ее первой производной (скорости).

Мы не можем задать начальное значение второй производной или *ускорения*, так как оно зависит от свойств пружины. Почему? Как это объясняется математически?

Посмотрим на (21.2)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

Из решения (21.2) получаются формулы

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta)$$

$$v = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta)$$

$$acc = -\omega_0^2 a \cos(\omega_0 t + \Delta) = -\omega_0^2 x$$

1.3 Энергия осциллятора

Если нет трения то в такой системе должна сохраняться энергия. Проверим это, для этого удобно воспользовать формулами:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta)$$

$$v = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta)$$

Найдем потенциальную энергию U

$$U = 1/2kx^2 = 1/2ka^2\cos^2(\omega_0 t + \Delta)$$

Найдем кинетическую энергию T

$$T = 1/2mv^2 = 1/2m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \Delta)$$

Изменение кинетической энергии противоположно изменению потенциальной энергии и наоброт, следовательно полная энерния должна быть постоянна. Запишем суммартную энергию помня о том что $\omega_0^2 = k/m$, откуда $k = \omega_0^2 m$

$$T + U = 1/2m\omega_0^2 a^2(\cos^2(\omega_0 t + \Delta) + \sin^2(\omega_0 t + \Delta) = 1/2m\omega_0^2 a^2$$

Средняя потенциальная энергия равна половине максимально и следовательно половине полной.

2 Резонанс

2.1 Комплексные числа

Формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Функцию $F = F_0 \cos(\omega t - \Delta)$ будем рассматривать как действительную часть комплексного числа $F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t}$. В физике не бывает комплексных сил, однако мы будет пользоваться данной записью для удобства

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}$$

Шляпка над буквой будет указывать что мы имеем дело с комплексным числом, в таком виде можно сразу описать амплитуду и сдвиг по фазе колебаний

$$\hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}$$

Будем решать уравнение, где на наш осциллятор действует внешняя сила F

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F$$

Будем предпологать что внешняя сила также осциллирует

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (23.2)$$

Перепишем уравнение сделав подстановку с комплексными числами, такую подстановку можно сделать не всегда, а только для *линейных* уравнений содержащих x в первой или нулевой степени. В таком случае можно выделить в исходном уравнении действительную и мнимую часть, при этом действительная часть будет в точности совпадать с исходным уравнением.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{kx}{m} = \frac{\hat{F} e^{i\omega t}}{m}$$

в этом уравнении x также комплексное число $x = \hat{x} e^{i\omega t}$, а каждое дифференцирование по времени равно умножению на $(i\omega)$. Мы применяем тут форму решения x в виде $x = x_0 \cos(\omega t + \Delta)$ или в комплексной форме $x = e^{i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{x} e^{i\omega t}$ - грузик начинает колебаться с частотой действующей силы.

После дифференцирования и сокращения $e^{i\omega t}$ получаем

$$(i\omega)^2 \hat{x} + \frac{k\hat{x}}{m} = \frac{\hat{F}}{m}$$

откуда легко получить

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (23.5)$$

Грузик колеблется с частотой действующей силы, а амплитуда колебаний зависит от соотношения ω и ω_0. Когда ω очень мала, грузик движется вслед за силой, если слишком быстро менять направление толчков, то грузик начинает двигаться в противоположном по отношению к силе направлению. При очень высокой частоте внешней силы грузик практически не двигается.

Так как $m(\omega_0^2 - \omega^2)$ действительное число, *фазовые углы* F и x совпадают(или отличаются на 180 градусов если $\omega^2 > \omega_0^2$).

2.1.1 Вопросы

Вопрос: Какого вида числа $\hat{F}$ и $\hat{x}$? $\hat{F} = F_0 e^{i\Delta_1}$ и $\hat{x} = x_0 e^{i\Delta_2}$ или это просто комплексные числа так как нет смысла говорить о фазе в данном случае? *Ответ*: Решая эту же задачу в Главе 21, без использования комплексных чисел, мы не учитывали сдвиг по фазе в решении x и получили:

$$x_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

теперь мы имеем:

$$x_0 e^{i\Delta_1} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\Delta_2}$$

Вопрос: Что имеется в виде под термином *фазовый угол*, величина $\omega t + \Delta$ или просто Δ? *Ответ*: Под фазовыми углами имеется ввиду величины Δ_1 и Δ_2, если они отличаются на 180 градусов, то $e^{i(\Delta+\pi)} = e^{i(\Delta)} e^{i(\pi)} = -e^{i(\Delta)}$

Вопрос: Значит ли это что мы всегда получаем положительную амплитуду из уравнения (23.5)?

Вопрос: Имеет ли тут вообще смысл говорить о сдвиге фазы Δ так как данные уравнения описывают уже устроявшийся процесс и нам не важно какая фаза была в начале? *Ответ*: Δ описывает устоявшуюся разницу в фазах между двумя уравнениями колебаний.

Упражение: Попробовать представить как такое возможно, что *если слишком быстро менять направление толчков, то грузик начинает двигаться в противоположном по отношению к силе направлению.*

2.2 Вынужденные колебания с торможением

Изменим формулу (23.2) так чтобы учесть трение

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F \quad (23.6)$$

если положить $c = m\gamma$ и $k = m\omega_0^2$ и поделить обе части на m то получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (23.6a)$$

применим комплексные числа:

$$e^{i\omega t}[(i\omega)^2\hat{x} + \gamma(i\omega)\hat{x} + \omega_0^2\hat{x}] = \frac{\hat{F}}{m} e^{i\omega t} \quad (23.7)$$

откуда легко найдем *отклик* осциллятора

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (23.8)$$

формулу (23.8) иногда называют "резонансной"

Обозначим множитель перед $\hat{F}$ через R

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

тогда

$$\hat{x} = \hat{F}R \quad (23.9)$$

Множитель R можно записать в виде $p + iq$ или $\rho e^{i\theta}$. Запишем в виде $\rho e^{i\theta}$ и посмотрим к чему это приведет.

$$\hat{x} = R\hat{F} = \rho e^{i\theta} F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta+\Delta)}$$

Помня что $x = \hat{x}e^{i\omega t}$ найдем:

$$x = \rho F_0 \cos(\omega t + \Delta + \theta) \quad (23.10)$$

из этой формулы видно что ρ и θ - это величина и фазовый сдвиг отклика.

Найдем значение ρ и θ. Из свойств комплексных чисел мы значем что если r модуль комплексного числа $a = x + iy = re^{i\theta}$, то $r^2 = aa^*$, а $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$

Вычислим ρ

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} =$$

$$= \frac{1}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \quad (23.11)$$

Вычислим θ

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} = m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

заметим что перед θ появился знак минус, а $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$, тогда

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (23.12)$$

Из (23.12) видно что угол θ отрицательный при любых значениях ω, то есть смещение x отстает по фазе от силы F

График зависимости ρ^2 от частоты ω называют *резонансной* кривой. ρ^2 в физике интереснее чем ρ, так как ρ^2 пропорционально квадрату амплитуды, а значит той *энергии* которую передает осциллятору внешняя сила.

Иногда удобней работать с упрощенной версией формулы (23.8). При малых γ наиболее интересная область резонансной кривой находится около частоты $\omega = \omega_0$. Если $\gamma << \omega_0$ и $\omega \approx \omega_0$

$$\hat{x} \approx \frac{\hat{F}}{2m\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)}$$

$$\rho^2 \approx \frac{1}{4m\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4]}$$

Интресен следующий вопрос: при каком расстоянии от ω_0 на резонансной кривой расположены частоты которым соответствует ρ^2 вдвое меньше максимального? Можно показать что при очень малом γ эти точки отстоят друг от друга на расстоянии $\Delta\omega = \gamma$. Это значит что резонанс становится все более острым по мере того как влияние трения становится все слабее и слабее.

Другой мерой ширины резонанса можется служить *добротность* $Q = \omega_0/\gamma$

3 Переходные решения

Transients

3.1 Энергия осциллятора (2)

При изучении энергии нам часто необходимо рассмотреть квадрат какой-либо величины. Если мы работаем с этой величиной A как с действительной частью комплексного числа $A = \hat{A}e^{i\omega t}$, то мы не можем возводить в квадрат комплексное число, так как действительная составляющая квадрата комплексного числа не равна квадрату самого действительного числа. Таким образом если мы захотим найти энергию и посмотреть на ее превращения, нам придется на время забыть о комплексных числах.

Сама действительная величина изменяется по закону $A = A_0 \cos(\omega t + \Delta)$, а квадрат этой велечины равен $A^2 = A_0^2 \cos^2(\omega t + \Delta)$. Зачастую нам совсем не обязательно знать энергию в каждый определенный момент времени, во многих случаях достаточно знать лишь среднее значение величины A^2 за какой-то промежуток времени много больший периода колебаний.

Можно усреднить квадрат косинуса и доказать следущую **теорему**: если A представляется комплексным числом, то среднее значение A^2 равно $1/2A_0^2$, где A_0 это модуль комплесного числа $\hat{A} = A_0 e^{i\Delta}$

$$\langle A^2 \rangle = 1/2A_0^2 = 1/2\hat{A}\hat{A}^*$$

Будем рассматривать осциллятор на который дейстует внешняя сила, мы также предполагаем что эта сила пропорциональна $\cos \omega t$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (24.1)$$

Выясним много ли приходится этой силе работать, сначала найдем мощность:

$$P = F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) + \omega_0^2 x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + m\gamma\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Как легко проверить простым дифференицированием, первые два члена можно переписать в виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right]$$

выражение в квадратных скобках это сумма кинетической и потенциальной энергии, будем называть эту велечину *запасенной энергией*. Если сила работает уже давно, то запасенная энергия не изменяется и ее производная по времени равна нулю. Тогда получается что если усреднять по многим циклам, вся энергия поглощается из-за *сопротивления*, описываемого членом $m\gamma(dx/dt)^2$. При этом в начале действия силы осциллятор накапливает определенную часть энергиии.

Запишем среднюю мощность

$$\langle P \rangle = \langle m\gamma(dx/dt)^2 \rangle$$

Так как $x = \hat{x}e^{i\omega t} = x_0 e^{i\Delta} e^{i\omega t}$, то $(dx/dt)^2 = i\omega\hat{x}e^{i\omega t}$. А теперь применим нашу **теорему** о том что $\langle A^2 \rangle = 1/2 A_0^2$ и вычислим среднюю мощность:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m\gamma\omega^2 x_0^2$$

не потреряли ли мы минус когда возводили в квадрат $(i\omega x_0)^2$?

Интересен также вопрос о том сколько энергии может *накопить* осциллятор. В каждый момент времени осциллятор обладает вполне определенной энергией, поэтому можно вычислить среднюю *запасенную* энергию.

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle (dx/dt)^2 \rangle + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle$$

мы уже вычислили $\langle (dx/dt)^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2$, а $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} x_0^2$, таким образом

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m(\omega^2 + \omega_0^2)\frac{1}{2} x_0^2$$

3.1.1 Добротность

The efficiency of an oscillator

Добротность осциллятора можно измерить как отношение запасенной энергии к работе совершенной силой за один период. Эту велечину обозначают Q - умноженное на 2π отношение средней запасенной энергии к работе за один период.

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle \frac{2\pi}{\omega}} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m(\omega^2 + \omega_0^2)\frac{1}{2} x_0^2}{\frac{1}{2} m\gamma\omega^2 x_0^2 \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}$$

Величина Q не несет много смысла пока она не достаточно велика. Когда Q достаточно велика, она может служать характристикой того насколько хорошим является осциллятор, насколько эффективно он запасает энергию.

Если мы имеет дело с хорошим осциллятором вблизи резонансной частоты $\omega \approx \omega_0$ то

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

такое определение мы уже давали раньше.

Вопрос: Если будет рассматриваться работа за один *радиан* то откуда уйдет множитель 2π? В чем смысл умножения Q на 2π?