21. Гармонический осциллятор

April 3-5, 2023

1 Гармонический осциллятор

1.1 Груз на пружине

Гармонический осциллятор описывается линейным дифференциальным уравнением (ЛОДУ).

Простейший пример такой системы, груз массы m на пружинке.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad (21.2)$$

Функция $x = \cos(t)$ является решением данного уравнения если положить $k/m = 1$. Но каким образом мы можем все же учесть коэфициенты k и m?

Попробуем $x = A\cos(t)$ и откроем важное свойство ЛОДУ: решение умноженное на *константу* также является решением. Но мы попрежнему не можем выразить коэфициенты k и m.

Попробуем $x = \cos(\omega_0 t)$ и найдем $\omega_0^2 = k/m$. Велечину $\omega_0 t$ часто называют *фазой* движения.

Период полного колебания t_0, время за которое фаза изменяеися на 2π или $\omega_0 t_0 = 2\pi$

$$t_0 = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (21.5)$$

Уравнение (21.2) определяет *период* колебаний, но ничего не говорит нам о том *как* началось движение, насколько мы оттянули пружинку, а также об амплитуде колабаний. Для этого нужно задать *начальные условия.*

1.2 Общее решение

Нужно найти более общее решение уравнения (21.2). Общее решение должно допускать изменение начала отсчета времени, например

$$x = a\cos(\omega_0(t - t_1)) \quad (21.6a)$$

или

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta) \quad (21.6b)$$

Можно разложить $\cos(\omega_0 t + \Delta) = \cos\omega_0 t \cos\Delta - \sin\omega_0 t \sin\Delta$ и записать:

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad (21.6c)$$

где $A = a\cos\Delta$, а $B = -a\sin\Delta$

Рассмотрим некоторые величины в уравнениях (21.6)
ω_0 - угловая частота, число радианов на которое фаза изменится за одну секунду, определяется дифференциальным уравнением (21.2)
Другие величины не определяются дифференциальным уравнением, а зависят от начальных условий
a - амплитуда колебаний
Δ - сдвиг фазы, иногда называют фазой
Все вместе $\omega_0 t + \Delta$ - удобно называть фазой

2 Начальные условия

A и B или a и Δ, показывают как началось движение. Эти значения можно определить из начальных условий, например, пусть в начальный момент времени $t = 0$ грузик смещен от положения равновесия на величину x_0 и имеет скорость v_0.

Для получения коэфициентов A и B (а затем a и Δ) удобно пользоваться формулой (21.6c)

Для задания начальных условия для ЛОДУ второго порядка, мы должны задать значение самой функции во время $t = 0$ и значение ее первой производной (скорости).

Мы не можем задать начальное значение второй производной или *ускорения*, так как оно зависит от свойств пружины. Почему? Как это объясняется математически?

Посмотрим на (21.2)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

Из решения (21.2) получаются формулы

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta)$$

$$v = -\omega_0 a\sin(\omega_0 t + \Delta)$$

$$acc = -\omega_0^2 a\cos(\omega_0 t + \Delta) = -\omega_0^2 x$$

3 Энергия осциллятора

Если нет трения то в такой системе должна сохраняться энергия. Проверим это, для этого удобно воспользовать формулами:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta)$$

$$v = -\omega_0 a\sin(\omega_0 t + \Delta)$$

Найдем потенциальную энергию U

$$U = 1/2kx^2 = 1/2ka^2\cos^2(\omega_0 t + \Delta)$$

Найдем кинетическую энергию T

$$T = 1/2mv^2 = 1/2m\omega_0^2a^2\sin^2(\omega_0 t + \Delta)$$

Изменение кинетической энергии противоположно изменению потенциальной энергии и наоброт, следовательно полная энерния должна быть постоянна. Запишем суммартную энергию помня о том что $\omega_0^2 = k/m$, откуда $k = \omega_0^2 m$

$$T + U = 1/2m\omega_0^2a^2(\cos^2(\omega_0 t + \Delta) + \sin^2(\omega_0 t + \Delta) = 1/2m\omega_0^2a^2$$

Средняя потенциальная энергия равна половине максимально и следовательно половине полной.