



Functions and Graphs

Zhafir Aglna Tijani

Jadug Norach Agna Parusa



FUNCTIONS, INVERSE, AND COMPOSITE

Objektif

- ✓ Mengenal konsep dan notasi dari fungsi, domain, dan range
- ✓ Menentukan invers dan komposisi dari fungsi beserta persyaratannya



Function

Basic Concept

Fungsi:

pemetaan elemen dari sebuah himpunan (domain / D_f) tepat ke satu elemen pada himpunan lain (range / R_f).

Domain : himpunan nilai input dimana fungsi didefinisikan

Range : himpunan nilai output (bayangan) dari fungsi

Umumnya bila tidak didefinisikan, domain x dapat ditemukan sedemikian sehingga nilai $f(x)$ menjadi real. Misalnya,

$$f : x \rightarrow x^3 + 3x - 4 \text{ (berarti } x \in \textit{real})$$

$$f(x) = \log_{10}(x-1) \quad \text{(berarti } x > 1)$$



fungsi dapat memiliki dua bentuk notasi yang berbeda



Function

Inverse

Fungsi Satu-satu:

bila setiap elemen range hanya memiliki 1 pasangan di domain.

Invers Fungsi:

pemetaan balik, dari range menuju domain.

Hanya fungsi satu-satu yang memiliki invers, dinyatakan dengan f^{-1} .

Contoh: $f(x) = 11x-1$. Invers dari fungsi tersebut adalah

$$\left. \begin{array}{l} x = 11 \cdot f^{-1}(x) - 1 \\ x+1 = 11 \cdot f^{-1}(x) \end{array} \right\} f^{-1}(x) = \frac{x+1}{11}$$



Function

Composition

Komposisi Fungsi:

fungsi yang dipetakan kembali oleh fungsi lain; kombinasi dari dua fungsi atau lebih.

Contoh: $f(x) = 10x + 1$; $g(x) = x^2 + 2$

Komposisi dari kedua fungsi tersebut adalah

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 10(x^2+2) + 1 = 10x^2 + 21$$

atau

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (10x+1)^2 + 2 = 100x^2 + 20x + 3$$



komposisi fungsi
tidak komutatif



Example 1a

Inverse and Composite Function

Soal

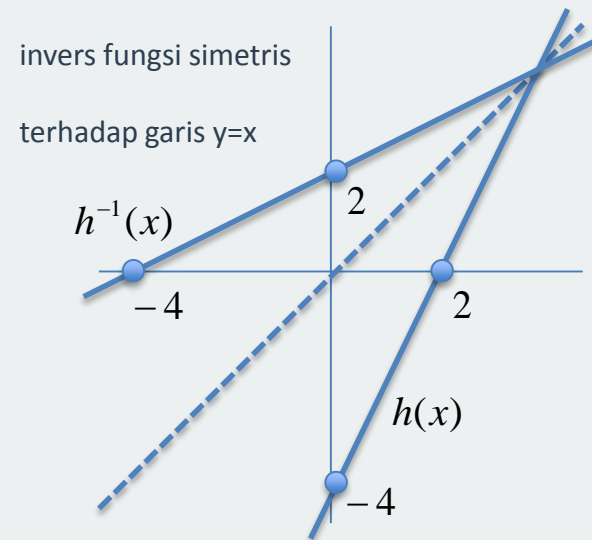
Jika diketahui bahwa $f(x) = x-3$; $g(x) = 2x+2$; dan $h(x) = (g \circ f)(x)$; tentukan fungsi $h(x)$, $h^{-1}(x)$, dan gambarkan grafik dari keduanya.

Solusi

$$h(x) = g(f(x)) = g(x-3) = 2x-4$$

$$x = 2 \cdot h^{-1}(x) - 4$$

$$x + 4 = 2 \cdot h^{-1}(x) \quad \rightarrow \quad h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$$





Example 1b

Composite Function

Soal

Jika $f(x) = \underline{x+2}$ dan $(g \circ f)(x) = \underline{2x^2}$, tentukan formula dari fungsi $g(x)$.

Solusi (2 cara)

$$\begin{aligned} (1) \quad g(f(x)) &= 2x^2 \\ &= 2(\underline{x^2+4x+4}) - 8x - 8 \quad \leftarrow \text{kondisikan agar fungsi memuat} \\ &\quad \underline{(x+2)} \end{aligned}$$

$$g(x+2) = 2(\underline{x+2})^2 - 8(\underline{x+2}) + 8$$

$$g(x) = \underline{2x^2 - 8x + 8}$$

$$(2) \quad g(x) = (g \circ f \circ f^{-1})(x) \quad \leftarrow \underline{f^{-1}(x) = x-2}$$

$$g(x) = (g \circ f)(x-2) = 2(x-2)^2$$

$$= \underline{2x^2 - 8x + 8}$$



Exercise 1

Composite Function

Soal

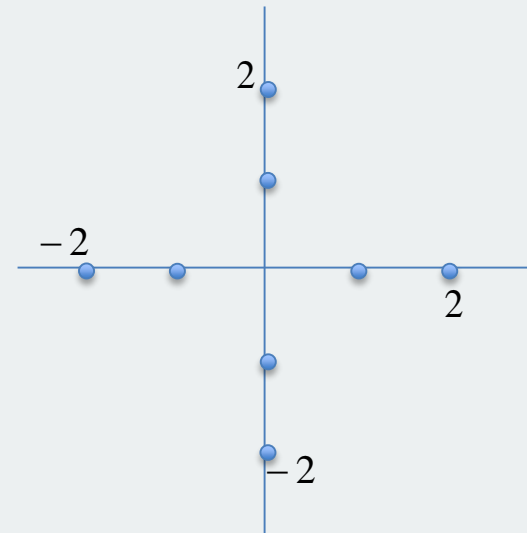
Gambarkan grafik dari fungsi $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$, jika diketahui bahwa $g(x) = \underline{3x+3}$ dan $(g \circ f)(x) = \underline{3x}$.

Solusi

$$g^{-1}(x) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$f(x) = (g^{-1})(\boxed{}) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

$$f^{-1}(x) = \boxed{}$$



Hint : $f(x) = (g^{-1} \circ g \circ f)(x)$, dan bukan $(g \circ f \circ g^{-1})(x)$!



GRAPHING TECHNIQUES

Objektif


- ✓ Menggambar sketsa kurva dari fungsi rasional dengan penyebut linear
- ✓ Menggambar sketsa kurva dari fungsi rasional dengan penyebut kuadrat
- ✓ Menggambar sketsa kurva dari fungsi elips dan hiperbola


Graph of Function


Dalam A-level Mathematics, kita dituntut untuk mengetahui cara membuat sketsa grafik sebuah fungsi.

Demi mendapatkan presisi, kalkulator grafik bisa digunakan. **TETAPI**, kalkulator grafik kurang membantu kita untuk mengetahui karakteristik (e.g asymptotes, intersections) dari fungsi itu sendiri.

Oleh karena itu, fokus kita adalah memahami cara menggambar grafik sekaligus karakteristik dari berbagai fungsi berikut:


$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$


$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$


$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Curve Sketching

Suggested General Steps

Berikut adalah langkah umum yang biasa ditempuh untuk menggambar sketsa grafik.

Find:

1. Axes of symmetry
2. Asymptotes
3. Intersections (x-intercept & y-intercept)
4. Stationery points
5. Restrictions on the possible values

Curve Sketching

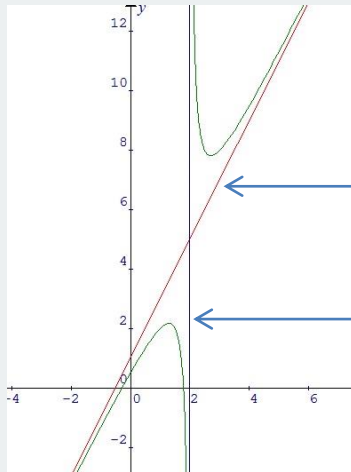
Suggested General Steps

1. Sumbu Simetri:

hanya dimiliki oleh beberapa fungsi tertentu, misalnya fungsi pangkat genap dan fungsi modulus.

2. Asimtot:

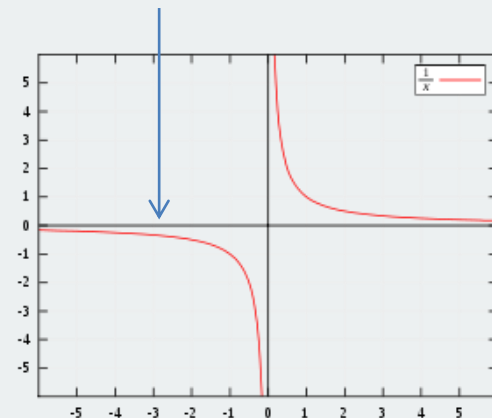
garis bayangan yang tidak akan pernah dilewati kurva.



Oblique Asymptote

Vertical Asymptote

Horizontal Asymptote



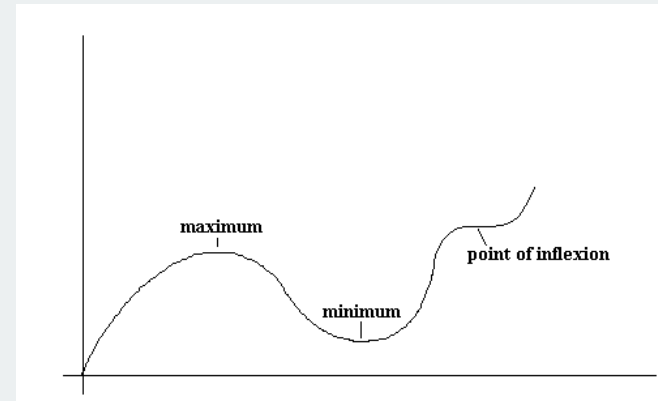
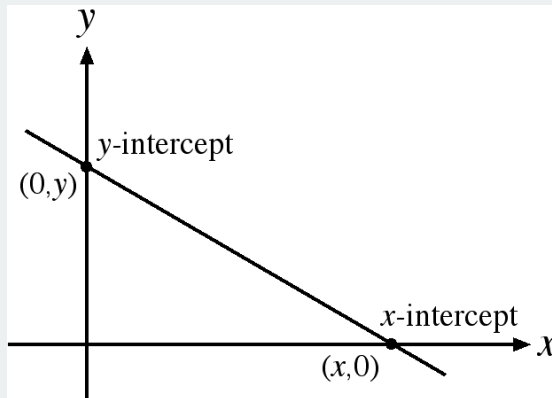


Curve Sketching

Suggested General Steps

3. Titik potong sumbu:

kurva memotong sumbu-x saat ($y=0$) dan sumbu-y saat ($x=0$).



4. Titik stasioner:

turunan pertama atau kedua dari fungsi pada titik tersebut bernilai 0, umumnya bermakna maksimum, minimum, atau titik belok.

5. Nilai terlarang:

range dari nilai x atau y yang menyebabkan fungsi bernilai tak berhingga atau tak terdefinisi, misalnya saat penyebut = 0.



Linear Rational Function

1

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Adalah fungsi rasional dengan penyebut linear

Steps:

1. Find x-intercept ($y = 0$) and y-intercept ($x = 0$);
2. Find vertical asymptote ($y \rightarrow \infty$) \rightarrow denominator = 0 ;
3. Find horizontal asymptote ($x \rightarrow \infty$) \rightarrow $y = a/c$;
4. Find additional points for ease of sketching.



Example 2

Linear Rational Function

Soal

Gambarkan sketsa kurva dari fungsi $y = \frac{2x+1}{x-2}$, dan tentukan nilai y pada saat $x = \{-3, 1, 1.5, 2.5, 3, 7\}$.

Solusi

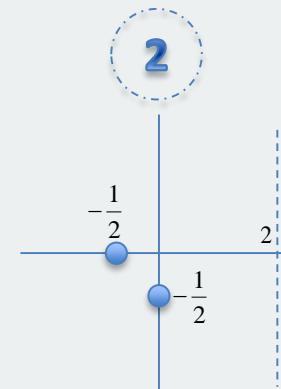
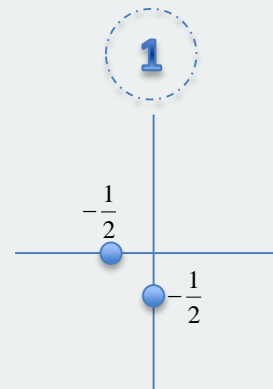
Step 1: Titik potong sumbu

$$x = 0 \rightarrow y = \underline{-0.5}$$

$$y = 0 \rightarrow x = \underline{-0.5}$$

Step 2: Asimtot vertikal

$$\text{saat } y \rightarrow \infty, \underline{x = 2}$$



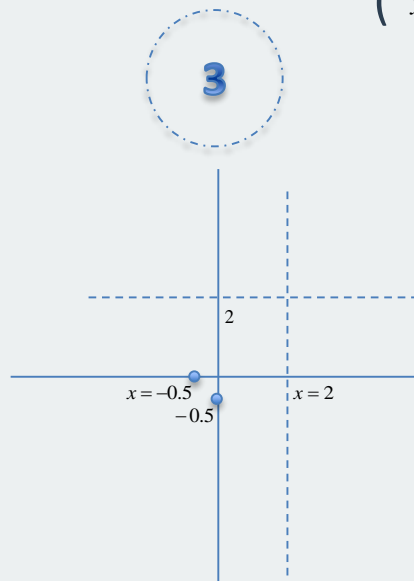
Example 2

Linear Rational Function

Solusi $\left(y = \frac{2x+1}{x-2} \right)$

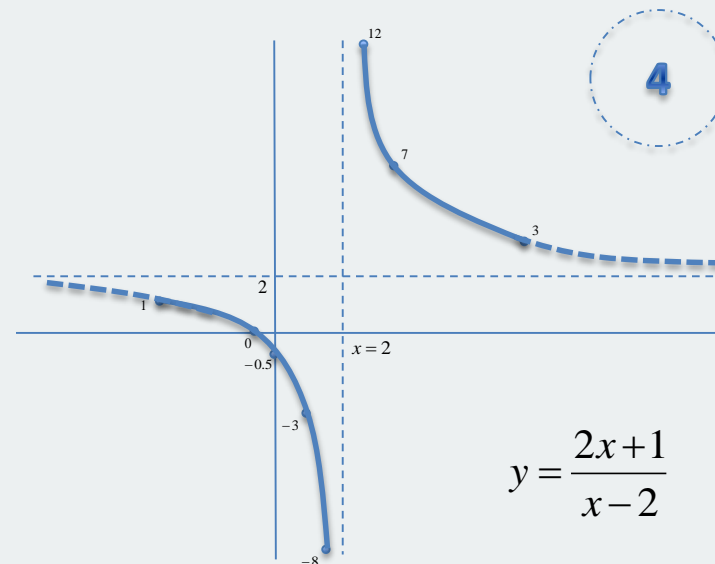
Step 3: Asimtot horizontal

saat $x \rightarrow \infty$, $y = 2$
 $\left(y = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \right)$



Step 4:

x	-3	1	1.5	2.5	3	7
y	1	-3	-8	12	7	3



$$y = \frac{2x+1}{x-2}$$



Exercise 2

Soal

Gambarkan sketsa kurva dari fungsi $y = \frac{-x+2}{2x-2}$.

Solusi

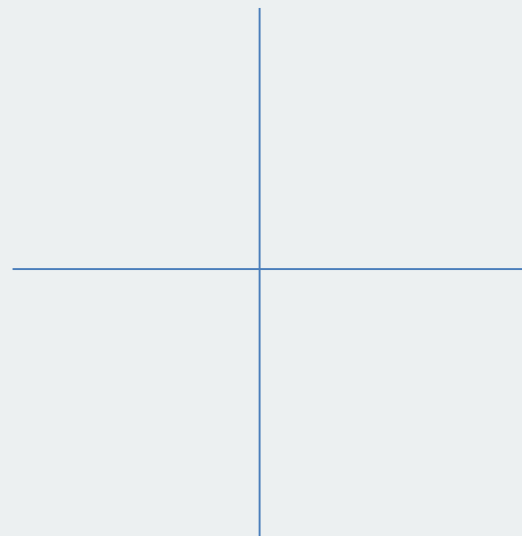
Step 1: Titik potong sumbu

$$x = 0 \rightarrow y = \boxed{}$$

$$y = 0 \rightarrow x = \boxed{}$$

Step 2: Asimtot vertikal

$$\text{saat } y \rightarrow \infty, x = \boxed{}$$



Exercise 2

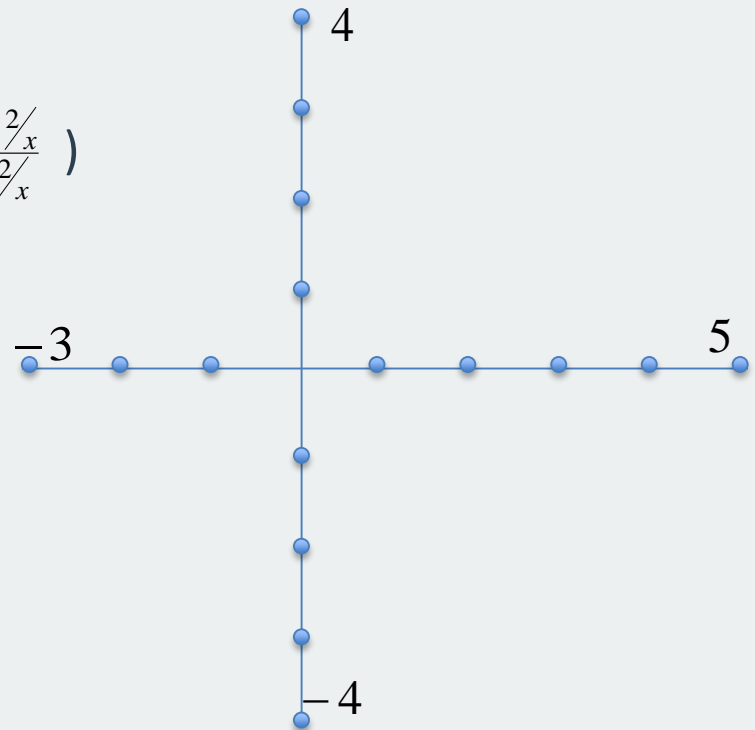
Solusi $\left(y = \frac{-x+2}{2x-2} \right)$

Step 3: Asimtot horizontal

saat $x \rightarrow \infty$, $y =$ $\left(y = \frac{-1+\frac{2}{x}}{2-\frac{2}{x}} \right)$

Step 4: Tentukan beberapa titik
yang dilewati kurva
(bebas menentukan nilai x)

x						
y						





Quadratic Rational Function

2

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

adalah fungsi rasional dengan penyebut kuadrat

Steps:

1. Find x-intercept ($y = 0$) and y-intercept ($x = 0$);
2. Find vertical ($y \rightarrow \infty$) and horizontal ($x \rightarrow \infty$) asymptotes;
(horizontal asymptote can be slant and crossed by the curve)
3. Find stationary points ($\frac{dy}{dx} = 0$);
4. Find additional points for ease of sketching.



Example 3

Quadratic Rational Function

Soal

Gambarkan sketsa kurva dari fungsi $y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$.

Solusi

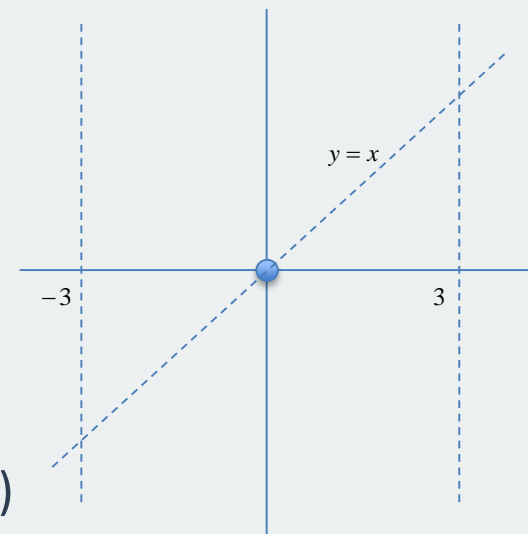
Step 1: Titik potong sumbu

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = \underline{0} \\ y = 0 \rightarrow x = \underline{0} \end{array} \right\} (0,0) \rightarrow \begin{array}{l} \text{nowhere} \\ \text{else} \end{array}$$

Step 2: Asimtot

saat $y \rightarrow \infty$, $x = -3$ (or) $x = 3$

saat $x \rightarrow \infty$, $y = x$ (slant asymptote)



Example 3

Quadratic Rational Function

Solusi

$$\left(y = \frac{x^3}{x^2 - 9} \right)$$

x	< -3	-3 to 0	0 to 3	> 3
y	(-) --- = (-) (+)	(-) --- = (+) (-)	(+) --- = (-) (-)	(+) --- = (+) (+)

Step 3: Titik stasioner

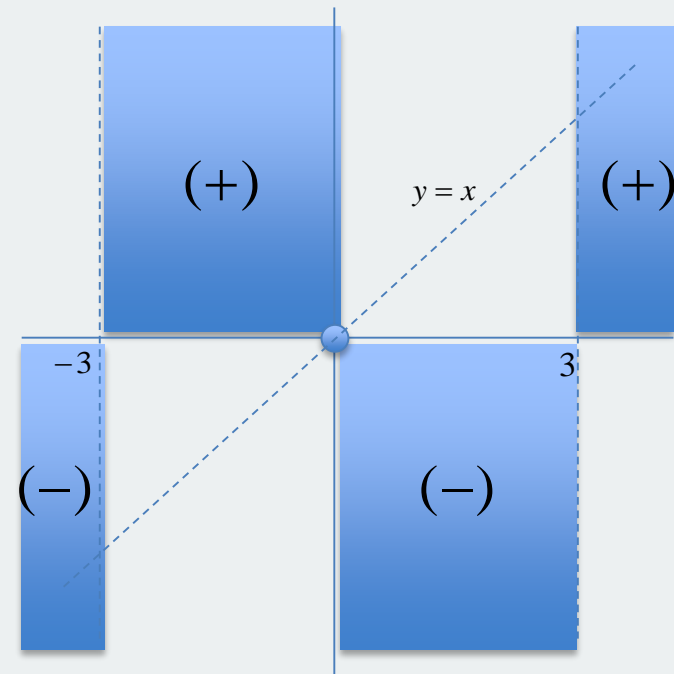
$$(1^{st}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2(x + \sqrt{27})(x - \sqrt{27})}{(x^2 - 9)^2} = 0$$

$$(2^{nd}) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3} = 0$$

$x = -5.2 \rightarrow$ local maximum ($y = -7.8$)

$x = 0 \rightarrow$ inflexion point ($y = 0$)

$x = 5.2 \rightarrow$ local minimum ($y = 7.8$)





Example 3

Quadratic Rational Function

Solusi

$$\left(y = \frac{x^3}{x^2 - 9} \right)$$

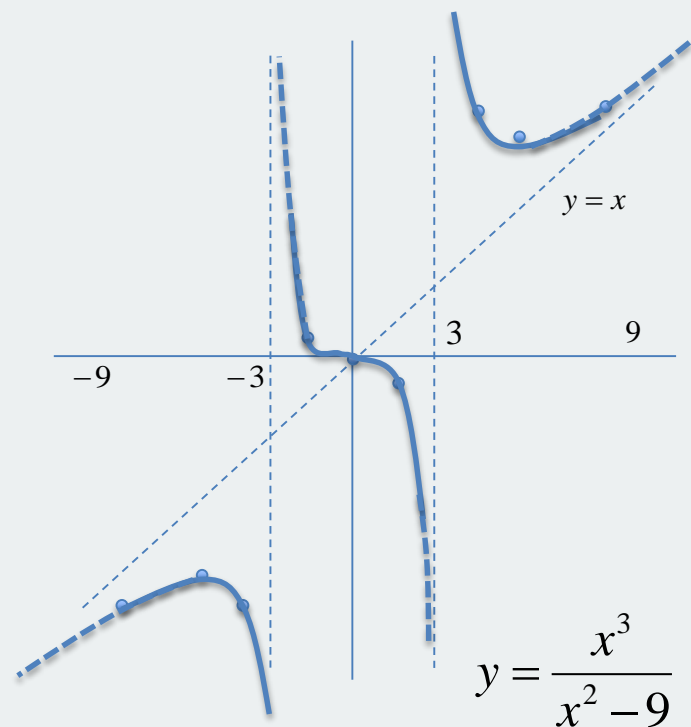
Step 4: Titik bantuan

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
y	-9.3	-9.1	1.6	0.1	-0.1	-1.6	9.1	9.3

$x = -5.2 \rightarrow$ local maximum ($y = -7.8$)

$x = 0 \rightarrow$ inflexion point ($y = 0$)

$x = 5.2 \rightarrow$ local minimum ($y = 7.8$)

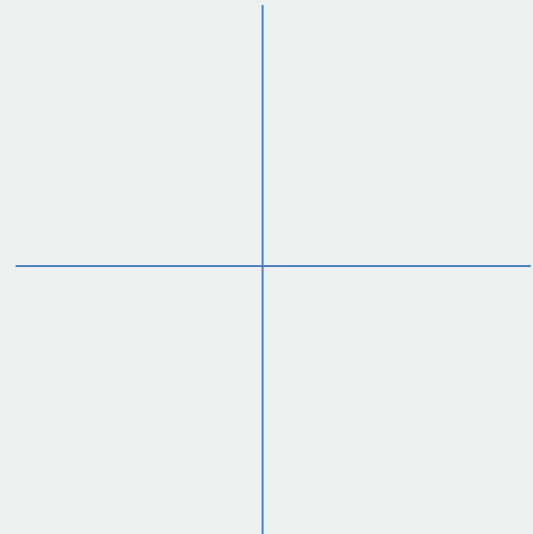


Exercise 3

Soal

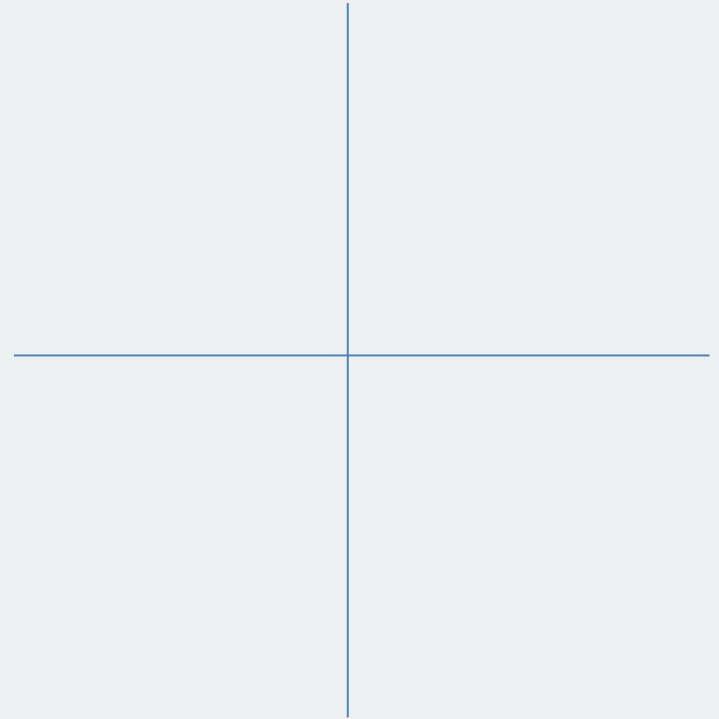
Gambarkan sketsa kurva dari fungsi $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Solusi



Exercise 3

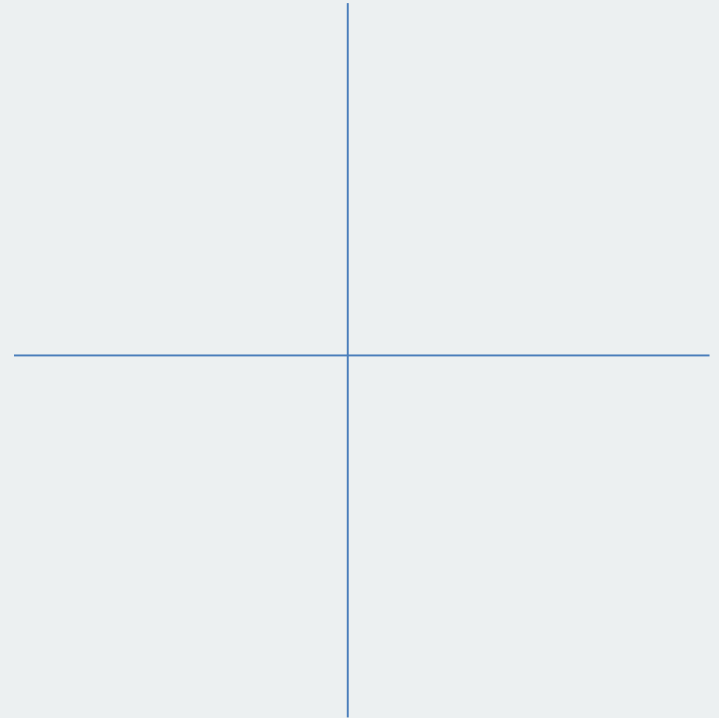
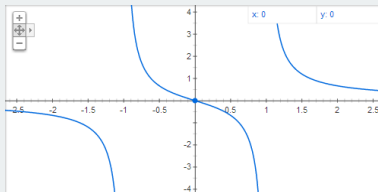
Solusi



Exercise 3

Solusi

Jawaban akhir:





Elliptic Function

3a

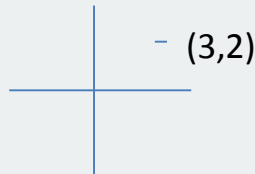
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Biasa disebut fungsi elips
- Artinya, elips ini berpusat di (x_0, y_0) .
- Nilai a dan b menggambarkan eccentricity elips.

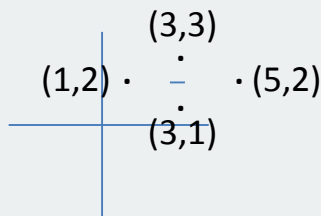
Example 4a

- Gambarlah grafik dari fungsi** $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$

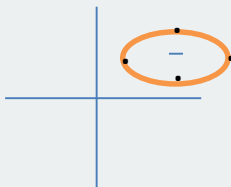
Step 1 : Tentukan titik pusat dari elips ini. (3, 2)



Step 2 : Tentukan eccentricity dari elips ini, lalu tandakan dengan menarik garis bayangan sepanjang eccentricity ellips. (2 for x axis and 1 for y axis)

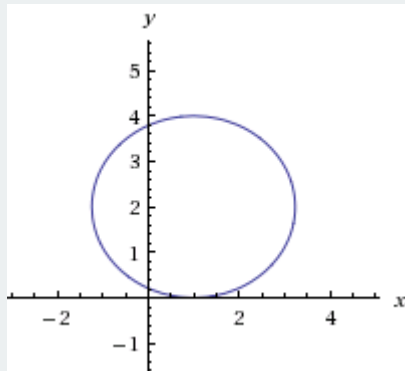


Step 3 : Sempurnakan gambar dengan membuat ellips

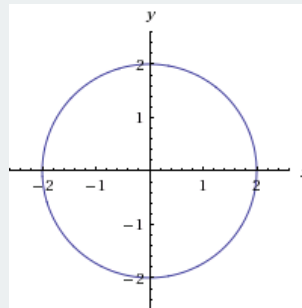


Elliptic Function

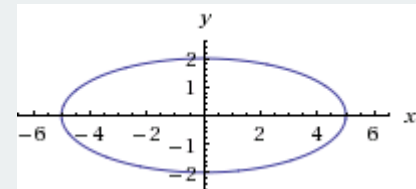
- More Examples



$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Elliptic Function

Some Important Notes

- Jika $a = b$, maka elips tersebut adalah fungsi lingkaran.
- Fungsi elips ini ditandai dengan adanya elemen x^2 dan y^2
- Hidup tidak semudah teori dasar, bisa saja fungsi tidak langsung diberikan dalam bentuk formal. Misalkan fungsi

$$x^2 - 6x + 4y^2 - 16y + 21 = 0$$

- Bentuk diatas sebenarnya ekuivalen dengan fungsi

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

- Intinya adalah penyederhanaan ke dalam bentuk formal. Jika sudah dalam bentuk formal, maka penggambaran grafik akan mudah.



Exercise 4

- Try it by yourself

Gambarlah grafik dari fungsi $4x^2 - 8x + 9y^2 = 32$

*Hint : Ubah ke bentuk formal KPK berguna untuk peyederhanaan

Hyperbolic Function

3b

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Biasa disebut fungsi hiperbola
- Artinya, hiperbola ini berpusat di (x_0, y_0)
- Nilai a dan b menggambarkan letak garis asimtot.
- Hiperbola selalu memiliki 2 garis asimtot miring (oblique) yang memiliki gradien

$$m = \frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad m = -\frac{b}{a}$$

- Nilai a juga menggambarkan jarak turning point hiperbola tersebut.

Example 4b

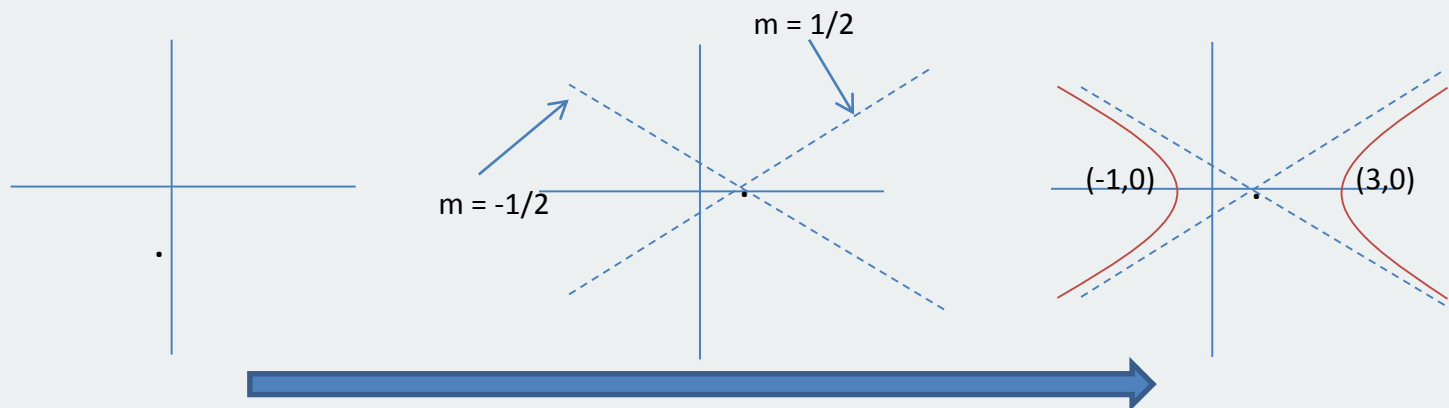
- Gambarlah grafik dari fungsi** $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y)^2}{1} = 1$

Step 1 : Tentukan titik pusat dari hiperbola ini. (1, 0)

Step 2 : Tentukan gradien dari asimtot miring . $m = \pm \frac{b}{a}$ berarti $m = \pm \frac{1}{2}$

Step 3 : Buatlah garis yang bergradien m dan melalui titik pusat hiperbola, dalam kasus ini (1, 0). E.g. Gunakan $y - y_0 = m(x - x_0)$ jika sulit membayangkan.

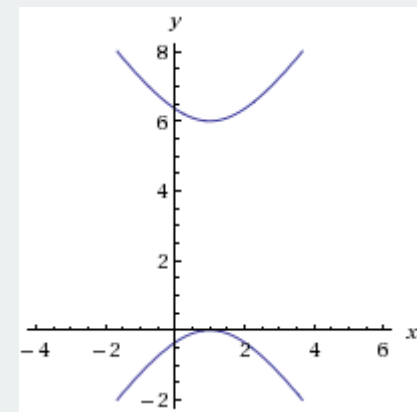
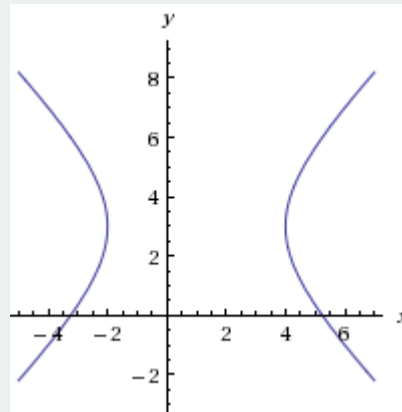
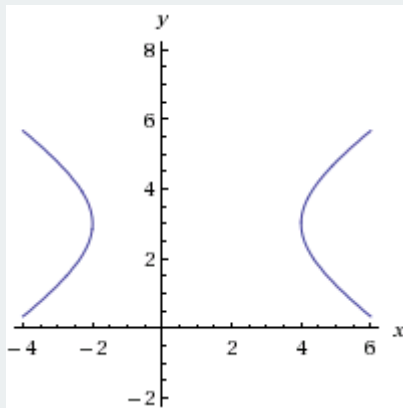
Step 4 : Sempurnakan garis hiperbola. Dimulai dari titik berjarak a= 2 dari hiperbola.





Hyperbolic Function

- More Examples



$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$



Hyperbolic Function

Some Important Notes

- Fungsi hiperbola juga merujuk pada bentuk

$$\frac{(y - y_o)^2}{b^2} - \frac{(x - x_o)^2}{a^2} = 1$$

- Cara menggambar dan karakteristik gradiennya sama, yang membedakan adalah bukan 'a', melainkan 'b' menjadi jarak ke titik pusat hiperbola (lihat contoh sebelumnya).
- Fungsi hiperbola mirip dengan elips, hanya berbeda tanda (+/-).
- Lagi-lagi, hidup tidak semudah teori dasar. Fungsi bisa juga dinyatakan dalam bentuk

$$4y^2 - 24y - 9x^2 + 18x - 9 = 0$$

Can you find
its equivalent
form ?