Московский Государственный Университет имени М. В.
Ломоносова

Механико-математический факультет

Отчёт по численному решению краевой задачи для уравнения четвёртого порядка

Выполнил:
студент 411 группы
Орлов Михаил

Москва, 2024

Содержание

1 Постановка задачи

Построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и найти её решение при различных значениях h:

$$u^{(4)} + u^{(3)} + \sin x \cdot u = e^{x^2},$$

с граничными условиями:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad u'(1) = 0.$$

2 Метод решения

Для решения данной краевой задачи четвертого порядка мы используем метод стрельбы в сочетании с численным методом Рунге-Кутты второго порядка. Основная идея состоит в том, чтобы преобразовать исходное дифференциальное уравнение четвертого порядка в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка и затем решить эту систему с учетом граничных условий.

2.1 Преобразование уравнения четвертого порядка в систему ОДУ первого порядка

Исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$u^{(4)}(x) + u^{(3)}(x) + \sin(x) \cdot u(x) = e^{x^2}. \tag{1}$$

Для преобразования этого уравнения в систему ОДУ первого порядка введем новые переменные:

$$y_0 = u(x), \tag{2}$$
$$y_1 = u'(x), \tag{3}$$
$$y_2 = u''(x), \tag{4}$$
$$y_3 = u'''(x). \tag{5}$$

Тогда система ОДУ примет вид:

$$y_0' = y_1, \tag{6}$$
$$y_1' = y_2, \tag{7}$$
$$y_2' = y_3, \tag{8}$$
$$y_3' = -y_3 - \sin(x) \cdot y_0 + e^{x^2}. \tag{9}$$

2.2 Метод стрельбы

Метод стрельбы заключается в следующем:

1. **Решение однородной системы ОДУ с разными начальными условиями для получения фундаментальных решений**.

- Первое фундаментальное решение $\phi_1(x)$ удовлетворяет условиям:

$$y_0(0) = 0, \tag{10}$$
$$y_1(0) = 0, \tag{11}$$
$$y_2(0) = 1, \tag{12}$$
$$y_3(0) = 0. \tag{13}$$

- Второе фундаментальное решение $\phi_2(x)$ удовлетворяет условиям:

$$y_0(0) = 0, \tag{14}$$
$$y_1(0) = 0, \tag{15}$$
$$y_2(0) = 0, \tag{16}$$
$$y_3(0) = 1. \tag{17}$$

2. **Решение неоднородной системы ОДУ для получения частного решения** $\psi(x)$ с начальными условиями:

$$y_0(0) = 0, \tag{18}$$
$$y_1(0) = 0, \tag{19}$$
$$y_2(0) = 0, \tag{20}$$
$$y_3(0) = 0. \tag{21}$$

3. **Комбинация решений с учетом граничных условий на правой границе** $x = 1$:

$$u(1) = 1, \tag{22}$$
$$u'(1) = 0. \tag{23}$$

Общее решение имеет вид:

$$u(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \psi(x), \tag{24}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из граничных условий на $x = 1$.

2.3 Определение коэффициентов C_1 и C_2

Подставляя общее решение в граничные условия, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$C_1\phi_1(1) + C_2\phi_2(1) + \psi(1) = 1, \tag{25}$$

$$C_1\phi_1'(1) + C_2\phi_2'(1) + \psi'(1) = 0. \tag{26}$$

Решая эту систему методом Крамера, находим значения C_1 и C_2.

2.4 Численное интегрирование методом Рунге-Кутты второго порядка

Для численного решения системы ОДУ используем метод Рунге-Кутты второго порядка с шагом интегрирования h. На каждом шаге n вычисляем значения:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \tag{27}$$

$$y_{\text{temp}} = y_n + hk_1, \tag{28}$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_{\text{temp}}), \tag{29}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \tag{30}$$

где $f(x, y)$ — правая часть системы ОДУ.

2.5 Реализация алгоритма

1. **Инициализация**:

- Задаем начальные условия и параметры интегрирования. - Выделяем память для массивов значений переменных.

2. **Вычисление фундаментальных и частного решений**:

- Последовательно интегрируем системы ОДУ для $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ и $\psi(x)$.

3. **Определение коэффициентов**:

- Вычисляем значения $\phi_1(1)$, $\phi_1'(1)$, $\phi_2(1)$, $\phi_2'(1)$, $\psi(1)$ и $\psi'(1)$. - Решаем систему линейных уравнений для C_1 и C_2.

4. **Построение общего решения**:

- Для каждого x_i на сетке вычисляем $u(x_i)$ по формуле общего решения.

5. **Запись результатов и анализ**:

- Сохраняем результаты в файл для последующей визуализации. - Анализируем поведение решения при различных значениях шага h.

2.6 Исследование устойчивости и сходимости

Для оценки устойчивости и сходимости численного метода проводим эксперимент с различными значениями шага h и анализируем погрешности:

$$E_\infty = \max_i |u_{\text{числ}}(x_i) - u_{\text{точн}}(x_i)|, \tag{31}$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |u_{\text{числ}}(x_i) - u_{\text{точн}}(x_i)|^2}. \tag{32}$$

Строим графики зависимости погрешностей E_∞ и E_2 от шага h в логарифмическом масштабе и определяем порядок сходимости метода.

2.7 Доказательство второго порядка точности метода Рунге-Кутты второго порядка

Рассмотрим решение обыкновенного дифференциального уравнения в точке x_{n+1} с использованием метода Рунге-Кутты второго порядка. Разложим y в ряд Тейлора в окрестности x_n до члена порядка h^2:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\frac{dy}{dx}\Big|_{x_n} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x_n} + O(h^3). \tag{33}$$

Так как из уравнения Коши мы знаем, что $\frac{dy}{dx} = f(y,x)$, то для второй производной по x получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df(y,x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{34}$$

Таким образом, подставляя выражение для второй производной в разложение Тейлора, получаем:

$$y(x_{n+1}) = y_n + hf(y_n, x_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(y_n, x_n)} + O(h^3). \tag{35}$$

В методе Рунге-Кутты второго порядка мы вводим промежуточный шаг k_2, который можно разложить с точностью до $O(h^3)$ следующим образом:

$$k_2 = hf(y_n+\beta k_1, x_n+\alpha h) = h\left(f(y_n, x_n) + \alpha h\frac{\partial f}{\partial x}(y_n, x_n) + \beta k_1\frac{\partial f}{\partial y}(y_n, x_n)\right) + O(h^3). \tag{36}$$

Теперь, подставляя k_2 из этого разложения в основное выражение метода Рунге-Кутты:

$$y_{n+1} = y_n + (a+b)hf(y_n, x_n) + bh^2\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta f\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(y_n, x_n)} + O(h^3). \tag{37}$$

Для того чтобы метод был точным до второго порядка, необходимо, чтобы коэффициенты удовлетворяли следующим условиям:

$$a + b = 1, \tag{38}$$

$$ab = \frac{1}{2}, \tag{39}$$

$$\beta b = \frac{1}{2}. \tag{40}$$

Существует бесконечно много значений параметров a, α, и β, которые удовлетворяют этим условиям. Одним из возможных выборов является $\alpha = \beta = 1$ и $a = b = \frac{1}{2}$. С этим выбором мы получаем классический метод Рунге-Кутты второго порядка, который формулируется следующим образом:

$$k_1 = hf(y_n, x_n), \tag{41}$$

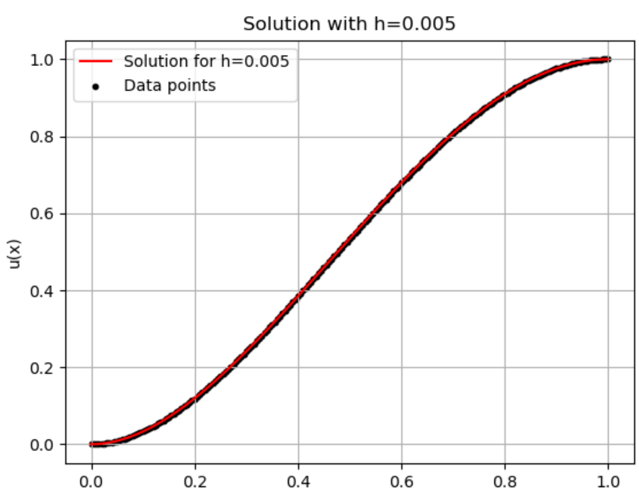
$$k_2 = hf(y_n + k_1, x_n + h), \tag{42}$$

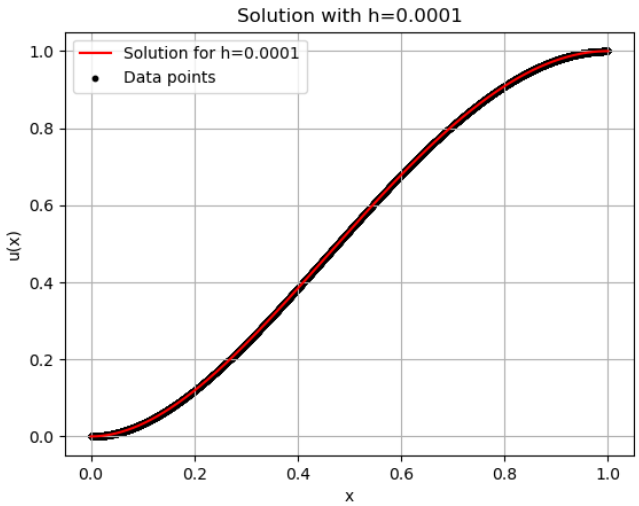
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \tag{43}$$

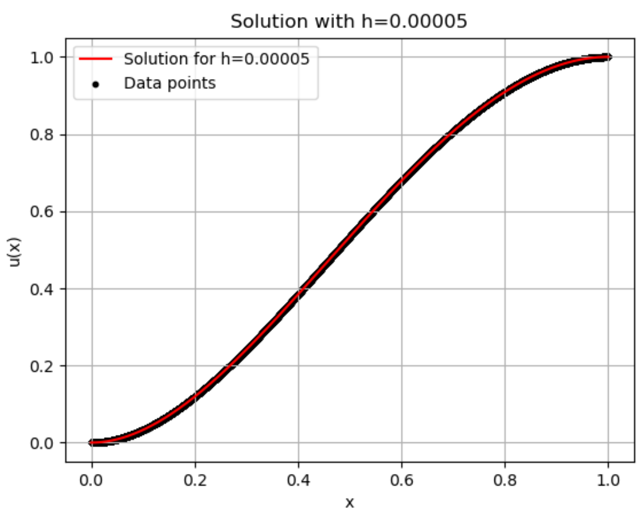
Этот метод имеет глобальную погрешность порядка $O(h^2)$, что и подтверждает его второй порядок точности.

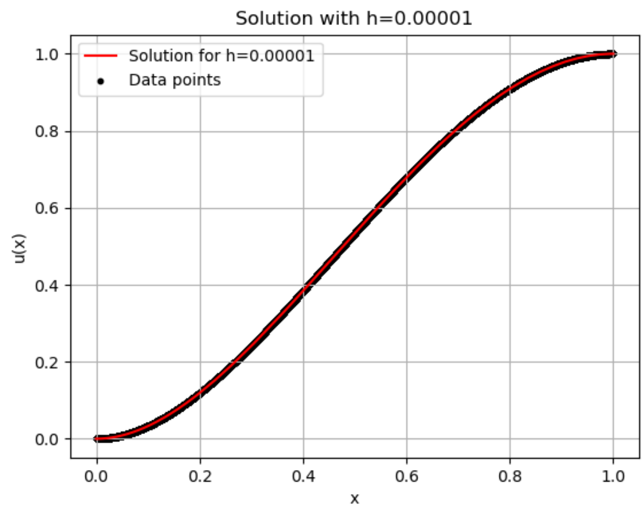
3 Графики зависимости $u(x)$ от h

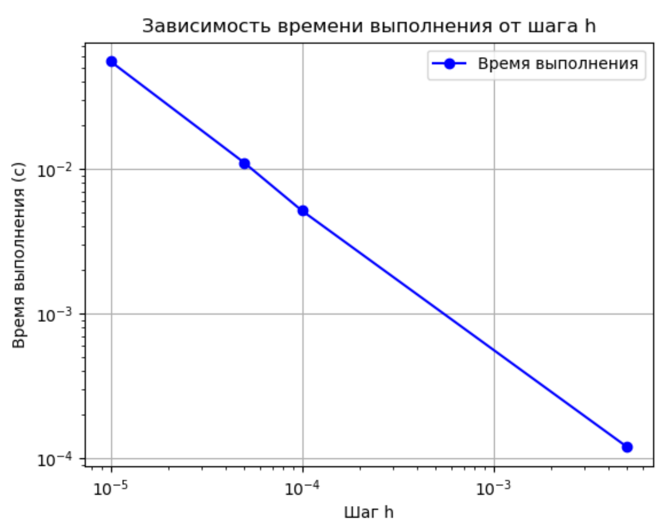
Ниже приведены графики зависимости решения $u(x)$ для различных значений шага h.




Solution with h=0.0001
Solution for h=0.0001
Data points
u(x)
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Solution with h=0.00005
Solution for h=0.00005
Data points
u(x)
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0





4 Проверка корректности программы

Для проверки корректности реализации численного метода мы используем известное аналитическое решение:

$$u(x) = \sin(x \cdot \pi) - 2x^3 + (3 + \pi)x^2 - \pi x \tag{44}$$

Проверка заключается в подстановке этого аналитического выражения в нашу программу и сравнении результатов численного решения с точным значением функции $u(x)$ в различных точках отрезка $[0, 1]$.

4.1 Методика проверки

1. **Вычисление аналитического решения**: В точках сетки x_i на отрезке $[0, 1]$ аналитическое значение функции $u(x)$ вычисляется по формуле:
$u_{\text{exact}}(x_i) = \sin(x_i \cdot \pi) - 2x_i^3 + (3 + \pi)x_i^2 - \pi x_i$

2. **Сравнение с численным решением**: Запускается программа для расчёта численного решения $u_{\text{num}}(x)$ в тех же точках x_i. Для каждой точки вычисляется абсолютная погрешность:

$$\text{Error}(x_i) = |u_{\text{num}}(x_i) - u_{\text{exact}}(x_i)|.$$

3. **Анализ результатов**: Если значения погрешности в точках x_i малы и находятся в пределах допустимой численной погрешности метода, можно считать, что программа работает корректно.

4.2 Критерии успешности проверки

Для того чтобы подтвердить корректность программы, рассчитываем нормы погрешности:

- **Максимальная погрешность**:

$$E_\infty = \max_{x_i} \text{Error}(x_i).$$

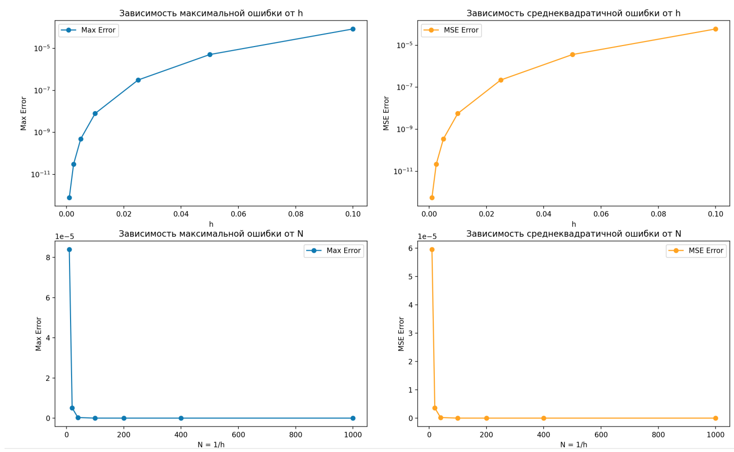
- **Среднеквадратичная погрешность**:

$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{Error}(x_i)^2},$$

где N — количество точек на сетке.

Если значения E_∞ и E_2 малы и соответствуют ожидаемому порядку точности метода (например, $O(h^2)$ для метода второго порядка), то это подтверждает корректность программы.

4.3 Графики проверки



5 Анализ графиков на устойчивость и сходимость

5.1 Метод определения порядка сходимости

Для оценки порядка сходимости численного метода мы используем значения ошибки для различных шагов h. Пусть $O(h)$ обозначает погрешность численного метода при шаге h. Если метод имеет порядок сходимости p, то уменьшение шага в два раза должно привести к уменьшению погрешности примерно в 2^p раз. Это позволяет выразить порядок сходимости p через логарифмы:

Для последовательности значений шага h_i и ошибок $O(h_i)$ можно обобщить эту формулу следующим образом:

$$p = \frac{\log\left(\frac{O(h_i)}{O(h_{i+1})}\right)}{\log\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)},$$

где $O(h_i)$ и $O(h_{i+1})$ — ошибки при последовательных шагах h_i и h_{i+1} соответственно.

5.2 Таблицы данных

h	MSE Error	Order of Convergence (MSE Error)
0.1	5.9578256922408815e-05	4.047903593457339
0.05	3.602030548814704e-06	4.023713929318254
0.025	2.2145669030800062e-07	4.01068480636798
0.01	5.614057525831094e-09	4.00468406505628
0.005	3.4974122888689213e-10	4.002326366022702
0.0025	2.1823607543507316e-11	4.000921503150408
0.001	5.582128188154e-13	-

Таблица 1: Значения h, MSE Error, и Order of Convergence

h	Max Error	Order of Convergence (Max Error)
0.1	8.394076967965791e-05	4.048166794007503
0.05	5.074033317953308e-06	4.023847004253997
0.025	3.119282210306551e-07	4.010746061694546
0.01	7.907120291861247e-09	4.004543652160212
0.005	4.926410390737601e-10	4.002333703470704
0.0025	3.0740299195031184e-11	4.002347508590003
0.001	7.852607453173732e-13	-

Таблица 2: Значения h, Max Error,и Order of Convergence

5.3 Зависимость максимальной ошибки от шага h

На верхнем левом графике представлена зависимость максимальной ошибки от шага h. Из графика видно, что при уменьшении шага h максимальная ошибка сначала снижается, а затем начинает постепенно увеличиваться с увеличением h. Это поведение типично для численных методов, где при уменьшении шага h численное решение приближается к точному. Теоретические рассчеты сходятся с практическими, так как был посчитан порядок сходимости по формуле выше.

- **Сходимость:** Уменьшение ошибки при уменьшении шага h подтверждает, что метод является сходящимся. Этот результат соответствует ожидаемому порядку точности для метода Рунге-Кутты четвертого порядка, где погрешность должна уменьшаться как $O(h^4)$.
- **Устойчивость:** График показывает, что для малых значений h метод остаётся устойчивым, так как ошибка остаётся в пределах допустимого уровня и не демонстрирует резких скачков.

5.4 Зависимость среднеквадратичной ошибки от шага h

На верхнем правом графике представлена зависимость среднеквадратичной ошибки (MSE) от шага h. График показывает, что при уменьшении шага h среднеквадратичная ошибка также уменьшается, но при увеличении шага она возрастает.

- **Сходимость:** Плавное уменьшение среднеквадратичной ошибки при уменьшении h подтверждает, что численный метод сходится к точному решению при уменьшении шага, что соответствует второму порядку точности метода.
- **Устойчивость:** Увеличение среднеквадратичной ошибки при увеличении шага h указывает на то, что большие значения шага могут приводить к увеличению ошибок и потенциальной потере устойчивости метода. Однако для малых значений h метод остаётся устойчивым.

5.5 Выводы

Анализ графиков подтверждает, что используемый численный метод обладает не менее чем вторым порядком точности и является устойчивым при малых значениях шага h. Уменьшение шага h приводит к уменьшению как максимальной, так и среднеквадратичной ошибок, что свидетельствует о сходимости метода к точному решению.

6 Используемые языки и библиотеки

Для решения задачи, автоматизации вычислений и построения графиков использован следующий стек технологий:

6.1 C++

Основная часть программы, решающая задачу методом конечных разностей, написана на языке C++.

C++ используется для:

- Выполнения численных расчетов методом Рунге-Кутта.
- Применение метода стрельбы.
- Измерения времени выполнения программы для каждого значения шага h.
- Сохранения решений в текстовые файлы для дальнейшего анализа и построения графиков.

6.2 Python

Для построения графиков решения и анализа времени выполнения программы используется Python. Ключевые библиотеки:

- **matplotlib** — используется для построения графиков решений системы и зависимости времени выполнения от значения шага h.

- **sys** — для работы с аргументами командной строки, передаваемыми из Makefile.

Python используется для:

- Построения графиков решений уравнения для каждого значения h.

- Построения графика зависимости времени выполнения программы от значения h.

6.3 Makefile

Makefile автоматизирует процесс компиляции, запуска программы с различными значениями h, построения графиков и записи времени выполнения. Makefile работает следующим образом:

- **Компиляция** — Makefile компилирует все необходимые файлы на C++ и создает исполняемый файл.

- **Запуск программы с разными значениями** h — Makefile запускает программу для каждого значения h, передавая аргументы в программу. Решения сохраняются в текстовые файлы.

- **Построение графиков** — после каждого запуска программы Makefile вызывает Python-скрипт, который строит график решения и сохраняет его в папку с изображениями.

- **Замер времени выполнения** — Makefile записывает время выполнения программы для каждого значения h в текстовый файл.

- **Построение графика времени выполнения** — после выполнения всех вычислений Python-скрипт строит график зависимости времени выполнения от значения h и сохраняет его в файл.