



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

تمرین درس محاسبات نرم  
در رشته مهندسی برق گرایش مهندسی کنترل

عنوان

تمرین دوم: سیستم‌های فازی

نگارش

محمدجواد احمدی

استاد درس

دکتر مهدی علیاری شوره‌دلی

آبان‌ماه ۱۴۰۱

# فهرست مطالب

ب	فهرست شکل‌ها
۱	پاسخ سوالات
۱	سوال ۱۱-۲ . . . . .
۱	حلّ دستی . . . . .
۶	شبیه‌سازی . . . . .
۸	سوال ۱۱-۵ . . . . .
۱۴	سوال سوم - شبیه‌سازی شکل ۱۱.۲ از مثال‌های کتاب . . . . .
۱۴	حلّ دستی . . . . .
۱۶	شبیه‌سازی . . . . .
۱۸	سوال چهارم - شبیه‌سازی مثال کامیون . . . . .

# فهرست شکل‌ها

۶	..... دستورات متلب سوال ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها	۱
۷	..... دستورات پایتون سوال ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها	۲
۸	..... دستورات پایتون سوال ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی)	۳
۸	..... نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.	۴
۹	..... نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.	۵
۱۶	..... دستورات متلب مثال شکل ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها	۶
۱۷	..... دستورات پایتون مثال شکل ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی)	۷
۱۷	..... مقایسه شکل ۱۱-۲ کتاب مرجع با شماری از نتایج شبیه‌سازی	۸
۱۸	..... دستورات پایتون مثال شکل ۱۱-۲ (تعداد توابع بیش‌تر)	۹
۱۸	..... نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.	۱۰
۱۹	..... تصویری از مسأله در کتاب مرجع	۱۱
۲۱	..... جدول مربوط به آزمایش اول در کتاب مرجع	۱۲
۲۱	..... توابع تعلق در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی مسأله چهارم	۱۳
۲۴	..... جدول جستجو برای پایگاه قواعد	۱۴
۳۳	..... خروجی سیستم فازی بر حسب متغیرهای ورودی	۱۵
۳۴	..... مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه نزدیک	۱۶
۳۴	..... مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه دور	۱۷
۳۶	..... جدول جستجو برای پایگاه قواعد	۱۸
۴۰	..... خروجی سیستم فازی بر حسب متغیرهای ورودی	۱۹
۴۱	..... مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه نزدیک	۲۰
۴۱	..... مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه دور	۲۱

# پاسخ سوالات

## سوال ۲-۱۱

حلّ دستی:

در قسمت اول قصد داریم سیستم فازی  $f(x)$  را با استفاده از کران مرتبه اول طراحی کنیم. فرض می‌کنیم که تابع  $g(x_1, x_2)$  روی مجموعه  $U = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  تعریف شود. ما می‌خواهیم سیستم فازی  $f(x)$  را طوری طراحی کنیم که تابع  $g(x)$  را با دقت  $\epsilon$  تقریب بزنند. بیان ریاضیاتی این موضوع به شرح رابطه ۴ است.

$$\|g - f\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} h_2 \leq \epsilon \quad (1)$$

حال برای طراحی سیستم فازی به صورت گام به گام پیش می‌رویم:

**گام اول:** در این مثال، تعداد  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) مجموعه فازی در بازه  $U = [\alpha_i, \beta_i] = [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  به صورت  $A_i^1, \dots, A_i^{N_i}$  و با توابع تعلق مثلثی  $\mu_{A_i^1}(x_i; a_i^1, b_i^1, c_i^1), \dots, \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; a_i^{N_i}, b_i^{N_i}, c_i^{N_i})$  تعریف می‌کنیم. هم‌چنین در نظر داریم که:  $b_i^{N_i} = \beta_i = 1, b_i^1 = \alpha_i = -1, A_i^1 < A_i^2 < \dots < A_i^{N_i}$  از سوی دیگر، اگر مرکز مجموعه فازی  $A_i^1$  را با  $e_i^1$  نشان دهیم، خواهیم داشت:  $e_i^1 = \alpha_i = -1$ . هم‌چنین اگر مرکز مجموعه فازی  $A_i^{N_i}$  را با  $e_i^{N_i}$  نشان دهیم خواهیم داشت:  $e_i^{N_i} = \beta_i = 1$ . بقیه مراکز را هم به صورت  $e_i^j = \alpha_i + h_i(j-1)$  در نظر می‌گیریم. هم‌چنین از آن‌جا که نقطه شروع تابع بعدی، مرکز تابع قبلی است، فرض می‌کنیم که:  $a_i^{k+1} = b_i^k$ .

**گام دوم:** در ادامه،  $M = N_1 \times N_2$  قاعده اگر-آنگاه فازی را به صورت «اگر  $x_1, x_2$  و  $A_1^{i_1}, A_2^{i_2}$  باشد؛ آن‌گاه  $y, B^{i_1 i_2}$  است.» می‌سازیم. لازم به ذکر است که  $i_q = 1, 2, \dots, N_q$  ( $q = 1, 2$ ) بوده و مراکز مجموعه‌های فازی  $B^{i_1 i_2}$  را با  $\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$  نشان می‌دهیم. این مراکز با توجه به روابط اصلی مطرح شده در صورت

مسأله به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e^{i_1}, e^{i_2}) = \frac{1}{1 + (e^{i_1})^2 + (e^{i_2})^2} \quad (2)$$

**گام سوم:** سیستم فازی  $f(x)$  را از قواعد گام دوم و با بهره گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی ساز منفرد و غیرفازی ساز میانگین مراکز تشکیل می دهیم:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} [\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} [\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)]} = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} g(e^{i_1}, e^{i_2}) [\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} [\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)]} \quad (3)$$

دقت تقریب سیستم فازی بواسطه همان قضیه مطرح شده در قسمت های قبلی تعیین می شود و داریم:

$$\|g-f\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} h_2 \leq \epsilon, \begin{cases} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| \\ h_i = \max_{1 \leq j \leq N_{i-1}} |e_i^{j+1} - e_i^j| \end{cases} \quad (4)$$

با توجه به فرض دقت  $\epsilon = 0.1$  برای تقریب سیستم فازی و هم چنین فرض  $h_1 = h_2 = h$  داریم:

$$\epsilon > h \left( \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} \right) \rightarrow h < \frac{\epsilon}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty}} \quad (5)$$

بنابراین، برای محاسبه  $h$  کافیست بنویسیم:

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| = \sup_{x \in U} \left| \frac{-2x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right| \quad (6)$$

برای پیدا کردن  $x \in U = [-1, 1]$  به گونه ای که  $\left| \frac{-2x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right|$  را بیشینه کند می نویسیم:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \frac{-2(1 + x_1^2 + x_2^2)^2 + 8x_1^2(1 + x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^4} = \frac{2(-1 + 3x_1^2 - x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^3} = 0 \quad (7)$$

برای معادل صفر شدن  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}$  می‌بایست عبارت  $x_1^2 - 3x_1 - 1$  هم‌سنگ با صفر شود و از آن‌جا که عبارت  $x_1^2$  در مخرج رابطه ۶ وجود دارد، به‌ازای  $x_1^2 = 0$  عبارت  $\left| \frac{-2x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right|$  به‌ازای مقادیری از  $x_1$  بیشینه می‌شود. در نتیجه، می‌نویسیم:

$$(-1 + 3x_1 - x_1^2) = 0 \rightarrow -1 + 3x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0.577 \quad (8)$$

و:

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} \left| \frac{-2x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right| = \left| \frac{-2(\pm 0.577)}{(1+(0.577)^2)^2} \right| = 0.6495 \quad (9)$$

همین فرآیند محاسباتی را ادامه می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \sup_{x \in U} \left| \frac{-2x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right| = 0.6495 \quad (10)$$

در این حالت  $\sup_{x \in U} \left| \frac{-2x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right|$  در  $x = (0, \pm 0.577)$  رخ می‌دهد و بنابه رابطه ۹ و رابطه ۱۰ می‌نویسیم:

$$h_1 = h_2 = h < \frac{0.1}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty}} = \frac{0.1}{0.6495 + 0.6495} \quad (11)$$

$$h < 0.077$$

حال با محاسبه حدود  $h$  برای صحیح به‌دست‌آمدن  $n$  آن را معادل  $0.05$  در نظر می‌گیریم، و تعداد توابع تعلق را محاسبه خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n} = 0.05 \rightarrow n = 40 \quad (12)$$

$n$  تعداد تقسیمات بازه‌های  $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] = [-1, 1]$  بوده و در نتیجه  $41 = N_1 = N_2 = N = n + 1$  تابع تعلق روی متغیرهای  $X$  تعریف می‌شود. درواقع ما در نهایت ۴۱ مجموعه فازی با توابع تعلق مثلی

زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mu_{A^1}(x) &= \mu_{A^1}(x; a_1, b_1, c_1) = \mu_{A^1}(x; -1, -1, -1 + h) \\ \mu_{A^j}(x) &= \mu_{A^j}(x; a_j, b_j, c_j) = \mu_{A^j}(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}), \quad \begin{cases} j = 2, \dots, 40 \\ e^j = \alpha + h(j-1) = -1 + 0.05(j-1) \end{cases} \\ \mu_{A^{41}}(x) &= \mu_{A^{41}}(x; a_{41}, b_{41}, c_{41}) = \mu_{A^{41}}(x; 1-h, 1, 1)\end{aligned}\quad (13)$$

در مجموع  $1681 = 41 \times 41 = N_1 \times N_2$  قاعده اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت و در نهایت سیستم فازی  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{41} \sum_{i_2=1}^{41} g(e^{i_1}, e^{i_2}) \left[ \mu_{A^{i_1}}(x_1) \mu_{A^{i_2}}(x_2) \right]}{\sum_{i_1=1}^{41} \sum_{i_2=1}^{41} \left[ \mu_{A^{i_1}}(x_1) \mu_{A^{i_2}}(x_2) \right]} \quad (14)$$

در ادامه ضمن حفظ گام‌های طراحی مشترک، دقت تقریب سیستم فازی را بوسیله قضیه مربوط به کران مرتبه دوم تعیین می‌کنیم. این قضیه این‌گونه بیان می‌دارد که اگر فرض کنیم  $f(x)$  یک سیستم فازی مطابق رابطه ۳ باشد و  $g(x)$  روی بازه  $U = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$  تا دو مرتبه به صورت پیوسته مشتق پذیر باشد؛ آن‌گاه داریم:

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda} \left[ \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_\infty h_1^2 + \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_\infty h_2^2 \right] \leq \epsilon, \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right\|_\infty = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right| \\ h_i = \max_{1 \leq j \leq N_{i-1}} |e_i^{j+1} - e_i^j| \quad (i = 1, 2) \end{cases} \quad (15)$$

از آن‌جا که دقت تقریب  $\epsilon = 0.1$  ذکر شده و فرض شده که  $h_1 = h_2 = h$  می‌نویسیم:

$$h^2 < \frac{\lambda \epsilon}{\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_\infty} \rightarrow h < \sqrt{\frac{\lambda \epsilon}{\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_\infty}} \quad (16)$$

بنابراین، برای محاسبه  $h$  کافیت بنویسیم:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_{\infty} &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| = \sup_{x \in U} \left| \frac{2(-1 + 3x_1^2 - x_1^2)}{(1 + x_1^2 + x_1^2)^3} \right| = \left| \frac{2(-1)}{(1)^3} \right| = 2 \\ \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_{\infty} &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right| = \sup_{x \in U} \left| \frac{2(-1 + 3x_2^2 - x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^3} \right| = \left| \frac{2(-1)}{(1)^3} \right| = 2 \end{aligned} \quad (17)$$

از رابطه ۱۷ چنین فهم می‌شود که بیشینه عبارات  $\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_{\infty}$  و  $\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_{\infty}$  در نقطه مبدأ  $(0, 0)$  رخ می‌دهد. بنابراین داریم:

$$h < \sqrt{\frac{\lambda \varepsilon}{\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_{\infty}}} = \sqrt{\frac{\lambda \times 0.1}{2 + 2}} = 0.4472 \quad (18)$$

حال با محاسبه حدود  $h$  برای صحیح به‌دست آمدن  $n$  آن را معادل  $0.25$  در نظر می‌گیریم، و تعداد توابع تعلق را محاسبه خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n} = 0.25 \rightarrow n = 8 \quad (19)$$

$n$  تعداد تقسیمات بازه‌های  $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] = [-1, 1]$  بوده و در نتیجه  $N_1 = N_2 = N = n + 1 = 9$  تابع تعلق روی متغیرهای  $X$  تعریف می‌شود. درواقع ما در نهایت ۹ مجموعه فازی با توابع تعلق مثلی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mu_{A^1}(x) &= \mu_{A^1}(x; a_1, b_1, c_1) = \mu_{A^1}(x; -1, -1, -1 + h) \\ \mu_{A^j}(x) &= \mu_{A^j}(x; a_j, b_j, c_j) = \mu_A^j(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}), \quad \begin{cases} j = 2, \dots, 40 \\ e^j = \alpha + h(j-1) = -1 + 0.25(j-1) \end{cases} \\ \mu_{A^9}(x) &= \mu_{A^9}(x; a_9, b_9, c_9) = \mu_{A^9}(x; 1 - h, 1, 1) \end{aligned} \quad (20)$$

در مجموع  $N_1 \times N_2 = 9 \times 9 = 81$  قاعده اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت و در نهایت سیستم فازی  $f(x)$

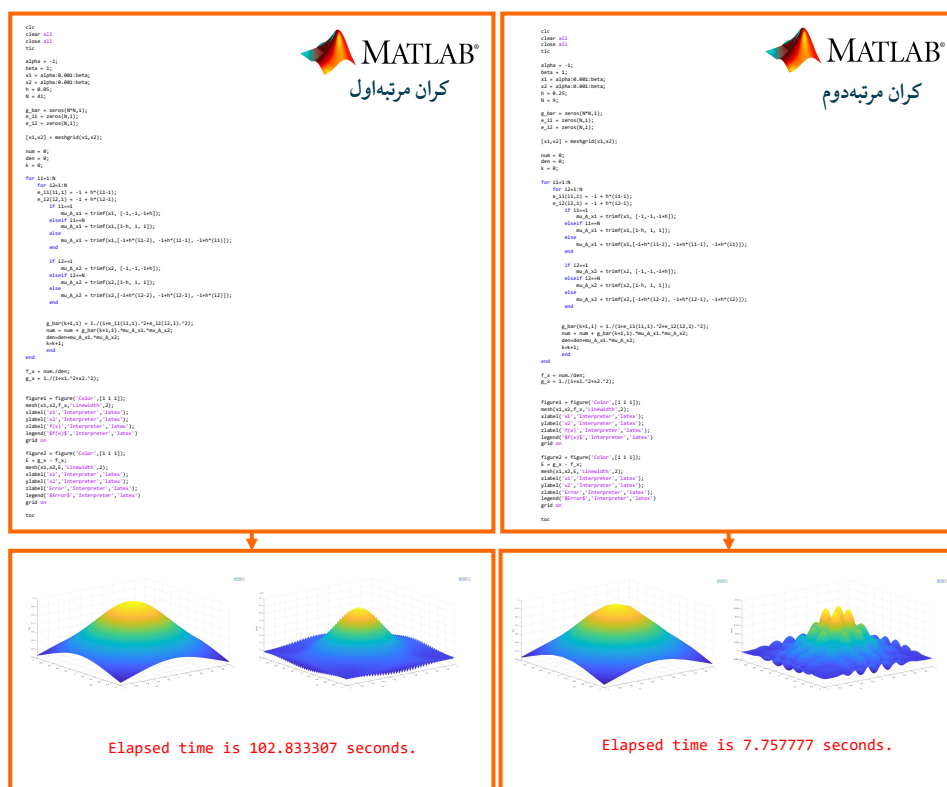


به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^9 \sum_{i_2=1}^9 g(e^{i_1}, e^{i_2}) \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right]}{\sum_{i_1=1}^9 \sum_{i_2=1}^9 \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right]} \quad (21)$$

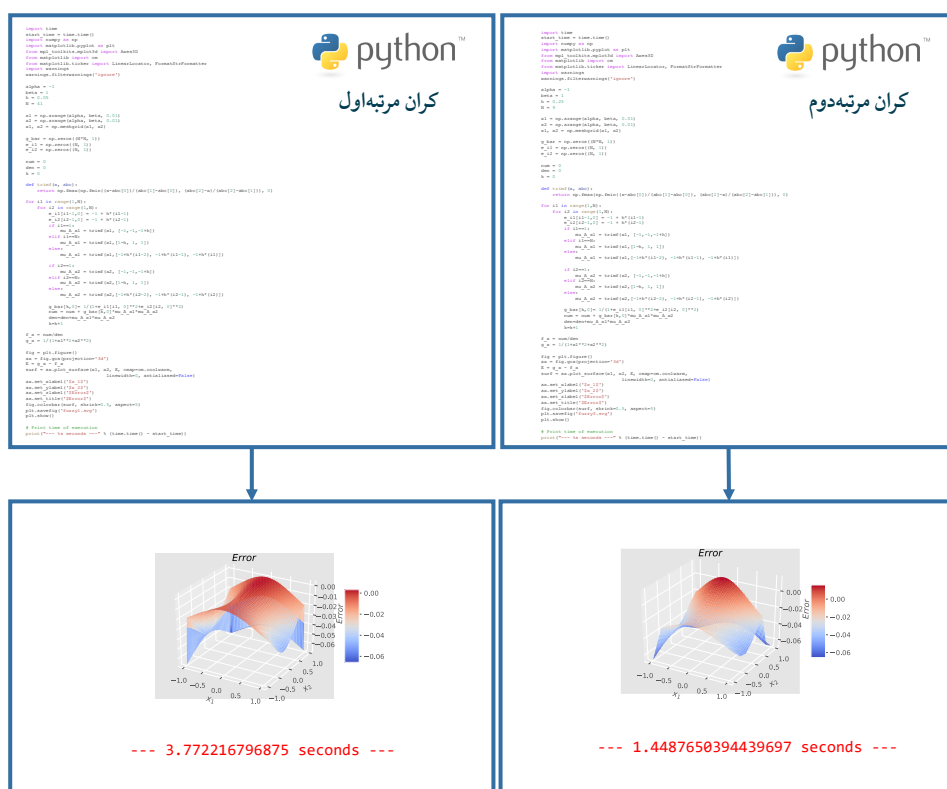
### شبیه سازی:

دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم  $g(x)$  و بررسی میزان خطای آن در محیط های متلب و پایتون نوشته ایم. نمایی از دستورات متلب و پایتون مربوط به حالات کران مرتبه اول و دوم به همراه نتایج آن ها به ترتیب در شکل ۱ و شکل ۲ آورده شده است. همان طور که مشاهده می شود، کران مورد نظر برای خطا کاملاً رعایت شده است. دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است. حال اگر تابع تعلق را به جای مثلی گاوسی در نظر بگیریم دستورات



شکل ۱: دستورات متلب سوال ۲-۱۱ و نتایج آن ها.

و نتایج مرتبط با آن به صورتی می شود که در شکل ۳ نشان داده شده است. علاوه بر این شبیه سازی ها، در یکی از شبیه سازی هایی که برای این سوال در محیط اینترنت پیدا شده است به طریقه ای دیگر عمل شده و



شکل ۲: دستورات پایتون سوال ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها.

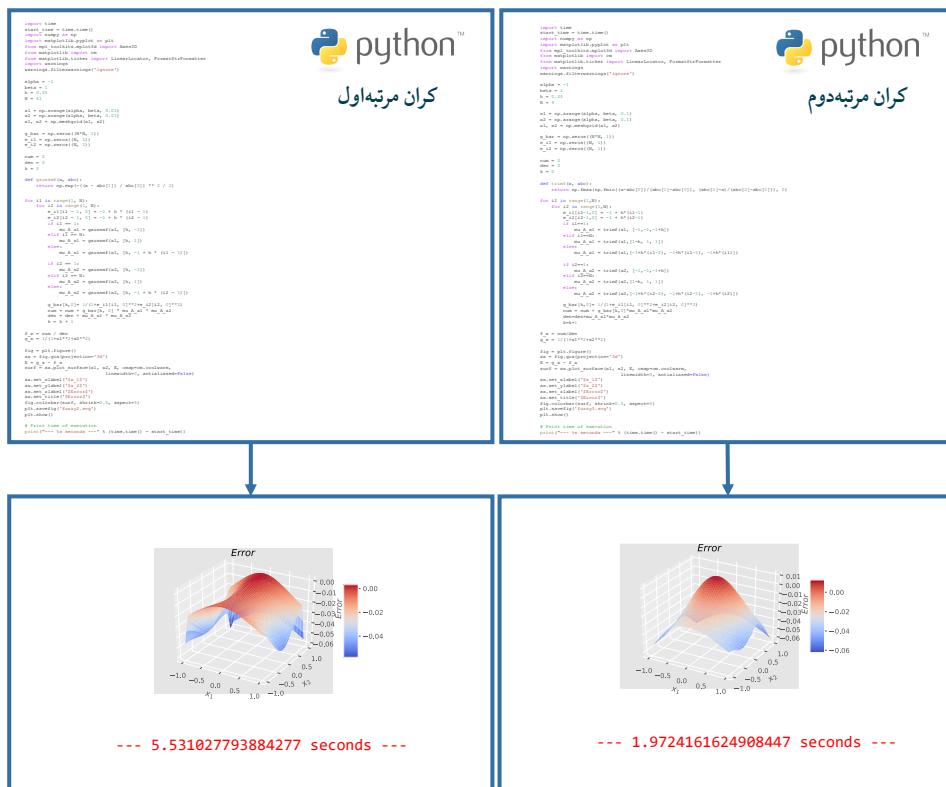
پارامترها (از جمله  $h$ ) کمی متفاوت از محاسبات بالاتر در نظر گرفته شده است که به نظر می‌رسد اشتباه باشد. با این وجود، به دلیل تفاوت و جالبی نحوه نگارش کد این شبیه‌سازی، آن را در پوشه Q1\_Others آورده‌ایم و نتایج آن با استفاده از پارامترهایی که بالاتر محاسبه شده‌اند به صورتی است که در شکل ۴ و شکل ۵ آورده شده است.

### توضیح پوشه کدها

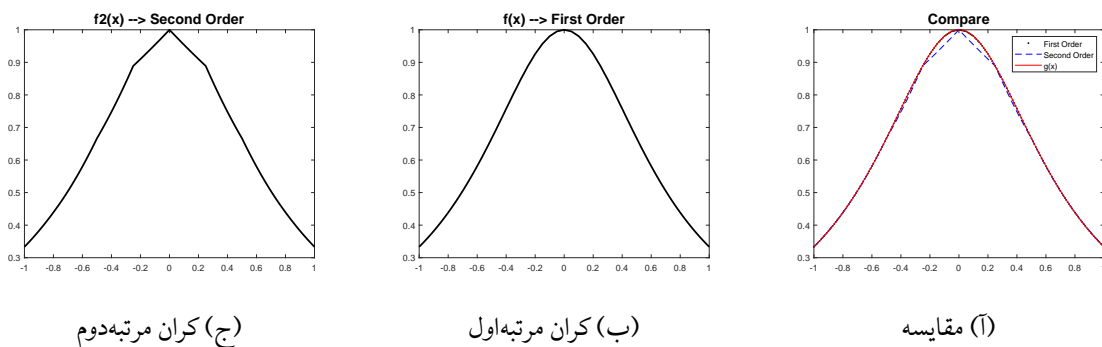
در پوشه اصلی این سوال (Q1)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند. دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است.

### جمع‌بندی

در هردو حالت کرات مرتبه اول و کران مرتبه دوم دقت مورنظر؛ یعنی،  $\epsilon = 1\%$  رعایت شده و در عین حال روش کران مرتبه دوم از قواعد فازی به مراتب کم‌تری استفاده می‌کند که این مسأله حجم محاسبات و زمان پیاده‌سازی را به صورت قابل توجهی کاهش داده است.



شکل ۳: دستورات پایتون سوال ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی).

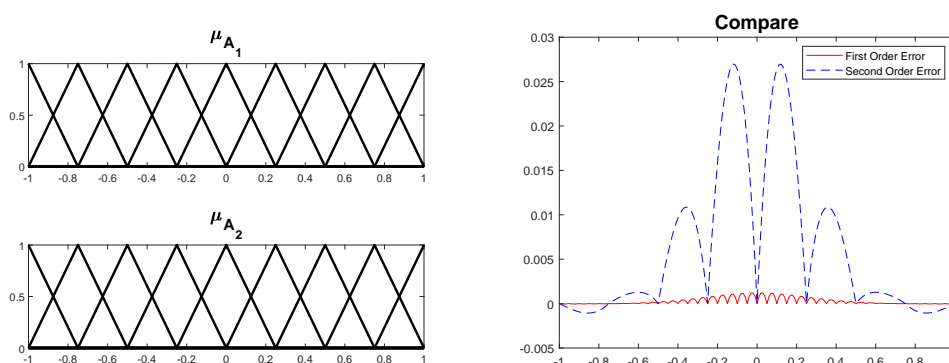


شکل ۴: نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.

سوال ۵-۱۱

در این سوال، سیستم فازی  $f(x)$  را با حالت مربوط به کران مرتبه دوم به صورت گام به گام طراحی می‌کنیم.

**گام اول:** در این مثال، تعداد  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 2$ ) مجموعه فازی در بازه  $U = [\alpha_i, \beta_i]$  به صورت  $A^1, \dots, A_i^N$



(ب) توابع تعلق

(آ) نتایج خطا

شکل ۵: نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.

و با توابع تعلق مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mu_{A_i^1}(x_i) &= \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2) \\ \mu_{A_i^j}(x_i) &= \mu_{A_i^j}(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}), \quad \begin{cases} j = 2, \dots, N_i - 1 \\ \alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \dots < e_i^{N_i} = \beta_i \end{cases} \\ \mu_{A_i N_i}(x_i) &= \mu_{A_i N_i}(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i}) \end{aligned} \quad (22)$$

**گام دوم:** در ادامه،  $M = N_1 \times \dots \times N_N$  قاعده اگر-آنگاه فازی را به صورت «اگر  $x_1, \dots, x_n$  و  $A_n^{i_n}$  باشد؛ آن گاه  $y, B^{i_1 \dots i_n}$  است.» می‌سازیم. لازم به ذکر است که  $i_q = 1, 2, \dots, N_q (q = 1, \dots, n)$  بوده و مراکز مجموعه‌های فازی  $B^{i_1 \dots i_n}$  را با  $g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, \dots, e_n^{i_n})$  نشان می‌دهیم.

**گام سوم:** سیستم فازی  $f(x)$  را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \bar{y}^{i_1 i_2 \dots i_n} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \dots \mu_{A_n^{i_n}}(x_n) \right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \dots \mu_{A_n^{i_n}}(x_n) \right]} \\ &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, \dots, e_n^{i_n}) \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \dots \mu_{A_n^{i_n}}(x_n) \right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \dots \mu_{A_n^{i_n}}(x_n) \right]} \end{aligned} \quad (23)$$

در ادامه دقت تقریب مرتبه دوم سیستم فازی را بایک قضیه تعیین می کنیم. یک سیستم فازی مطابق؟؟ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم  $g(x)$  روی  $U$  تا دو مرتبه به صورت پیوسته مشتق پذیر باشد؛ آن گاه می نویسیم:

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right\|_{\infty} h_i^2 \right], \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right| \\ h_i = \max_{1 \leq j \leq N_{i-1}} |e_i^{j+1} - e_i^j|, (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (24)$$

برای اثبات قضیه فرض می کنیم که  $U^{i_1 i_2 \dots i_n} = [e_1^{i_1}, e_1^{i_1+1}] \times [e_2^{i_2}, e_2^{i_2+1}] \times \dots \times [e_n^{i_n}, e_n^{i_n+1}]$  باشد که در آن  $i_q = 1, 2, \dots, N_q (q = 1, \dots, n)$  است. حال از آن جا که:

$$[\alpha_i, \beta_i] = [e_i^1, e_i^2] \cup [e_i^2, e_i^3] \cup \dots \cup [e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}] \quad (25)$$

بازه  $U$  را به این صورت تقسیم بندی می کنیم:

$$\begin{aligned} U &= [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n] \\ &= \cup_{i_1=1}^{N_1-1} \cup_{i_2=1}^{N_2-1} \dots \cup_{i_n=1}^{N_n-1} U^{i_1 i_2 \dots i_n} \end{aligned} \quad (26)$$

در نتیجه برای هر  $U^{i_1 \dots i_n}$  وجود دارد که  $x$  متعلق به آن باشد:

$$x_1 \in [e_1^{i_1}, e_1^{i_1+1}], x_2 \in [e_2^{i_2}, e_2^{i_2+1}], \dots, x_n \in [e_n^{i_n-1}, e_n^{N_n}] \quad (27)$$

به دلیل طبیعی، سازگار و کامل بودن مجموعه های فازی  $A^1, \dots, A_i^N$ ، بین یک تادو  $\mu_{A_q}^{j_q}(x_q)$  غیر صفر برای  $j_1 = 1, 2, \dots, N_1$  وجود دارد. بر مبنای تعریف  $e_1^{j_1}$ ، این دو توابع غیر صفر ممکن،  $\mu_{A_q^{i_q+1}}(x_q), \mu_{A_q^{j_1}}(x_q)$ ،

هستند. در نهایت، سیستم فازی به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \cdots \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \dots, e_n^{j_n}) \left[ \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \cdots \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right]}{\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \cdots \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left[ \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \cdots \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right]} \\
 &= \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \cdots \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left[ \frac{\mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \cdots \mu_{A_n^{j_n}}(x_n)}{\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \cdots \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left[ \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \cdots \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right]} \right] g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \dots, e_n^{j_n})
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

حال با توجه به توابع مثلثی تعریف شده در رابطه ۲۲، می نویسیم:

$$\begin{aligned}
 \mu_{A_i^{i_1}}(x_i) + \mu_{A_i^{i_1+1}}(x_i) &= 1 \\
 \mu_{A_i^{i_2}}(x_i) + \mu_{A_i^{i_2+1}}(x_i) &= 1 \\
 \mu_{A_i^{i_n}}(x_i) + \mu_{A_i^{i_n+1}}(x_i) &= 1
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \cdots \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left[ \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \cdots \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right] \\
 &= \left[ \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \right] \left[ \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \right] \cdots \left[ \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right] \\
 &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

حال رابطه ۲۸ را با توجه به رابطه ۳۰ به صورت زیر ساده سازی می کنیم:

$$f(x) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \cdots \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left[ \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \cdots \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right] g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \dots, e_n^{j_n}) \tag{31}$$

حال فرض می‌کنیم که  $C^n(U^{i_1 i_2 \dots i_n})$  فضای تمام توابع به صورت پیوسته مشتق‌پذیر روی  $U^{i_1 i_2 \dots i_n}$  باشد، و عمل‌گرهای خطی روی آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned} (L_1 g)(x) &= \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \left( \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \right) g(e_1^{j_1}, x_2, \dots, x_n) \\ (L_2 g)(x) &= \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left( \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \right) g(x_1, e_2^{j_2}, \dots, x_n) \\ (L_k g)(x) &= \sum_{j_k=i_k}^{i_k+1} \left( \mu_{A_k^{j_k}}(x_k) \right) g(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, e_k^{j_k}, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (32)$$

از آن جایی که توابع  $\mu_{A_k^{j_k}}(x_k), \dots, \mu_{A_2^{j_2}}(x_2), \mu_{A_1^{j_1}}(x_1)$  در  $U^{i_1 i_2 \dots i_n}$  خطی و به صورت پیوسته مشتق‌پذیر هستند،  $g \in C^n(U^{i_1 i_2 \dots i_n})$  نتیجه می‌دهد:  $L_1 g \in C^n(U^{i_1 i_2 \dots i_n}), \dots, L_2 g \in C^n(U^{i_1 i_2 \dots i_n}), L_k g \in C^n(U^{i_1 i_2 \dots i_n})$  حال با توجه به رابطه ۳۰ و رابطه ۳۲ می‌نویسیم:

$$\|L_1 g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left| \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \right| = \|g\|_\infty \quad (33)$$

با ترکیب رابطه ۳۲ و رابطه ۳۳ می‌نویسیم:

$$\|L_1 L_2 g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left| \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \right| \left| \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left( \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \right) g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}) \right| \leq \|g\|_\infty \quad (34)$$

حال اگر این فرآیند را ادامه دهیم داریم:

$$\|L_1 L_2 \dots L_n g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left| \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \right| \dots \left| \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left( \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right) g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \dots, e_n^{j_n}) \right| \leq \|g\|_\infty \quad (35)$$

با ترکیب روابط موجود در رابطه ۳۲ و مقایسه با رابطه ۳۱ می‌نویسیم:

$$(L_1 L_2 \dots L_n g)(x) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \left[ \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left( \mu_{A_2^{j_2}}(x_2) \right) \right] \dots \left[ \sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left( \mu_{A_n^{j_n}}(x_n) \right) g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \dots, e_n^{j_n}) \right] = f(x) \quad (36)$$

در نتیجه با توجه به  $g(x) - f(x) = g(x) - (L_1 L_2 \dots L_n g)(x)$  می نویسیم:

$$g(x) - L_1 L_2 \dots L_n g = (g - L_1 g) + (L_1 g - L_1 L_2 g) + \dots + (L_1 L_2 \dots L_{n-1} g - L_1 L_2 \dots L_n g) \quad (37)$$

به دلیل خطی بودن  $L_{i-1}$ ؛ می دانیم که:  $L_{i-1}(g - L_i g) = L_{i-1}g - L_{i-1}L_i g$ . هم چنین بر مبنای خطی بودن  $L_{i-2}$  داریم:

$$L_{i-2}L_{i-1}(g - L_i g) = L_{i-2}(L_{i-1}g - L_{i-1}L_i g) = L_{i-2}L_{i-1}g - L_{i-2}L_{i-1}L_i \quad (38)$$

با تکرار این فرآیند می نویسیم:

$$L_1 L_2 \dots L_{i-1}(g - L_i g) = L_1 L_2 \dots L_{i-1}g - L_1 L_2 \dots L_i g, i = 2, \dots, n \quad (39)$$

حال با توجه به رابطه ۳۵ و رابطه ۳۷ می نویسیم:

$$\begin{aligned} \|g - f\|_\infty &= \|g - L_1 L_2 \dots L_n g\|_\infty \leq \|g - L_1 g\|_\infty + \|(L_1(g - L_2 g))\|_\infty + \dots + \|L_1 L_2 \dots L_{n-1}(g - L_n g)\|_\infty \\ &\leq \|g - L_1 g\|_\infty + \|g - L_2 g\|_\infty + \dots + \|g - L_n g\|_\infty \end{aligned} \quad (40)$$

اگر تابع  $g(x)$  روی  $U$  تا دو مرتبه به صورت پیوسته مشتق پذیر باشد، بر اساس  $x \in U^{i_1 i_2 \dots i_n} = [e_{i_1}^{i_1}, e_{i_1}^{i_1+1}] \times \dots \times [e_{i_n}^{i_n}, e_{i_n}^{i_n+1}]$  و با استفاده از میان یابی خطی تک متغیره می نویسیم:

$$\begin{aligned} \|g - L_1 g\|_\infty &= \left\| \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_{i_1}^{j_1}}(x_1) [g(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(e_{i_1}^{j_1}, x_2, \dots, x_n)] \right\|_\infty \\ &\leq \|g(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(e_{i_1}^{j_1}, x_2, \dots, x_n)\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (e_{i_1}^{i_1+1} - e_{i_1}^{i_1})^2 \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_\infty \end{aligned} \quad (41)$$



$$\begin{aligned}
\|g - L_{\gamma}g\|_{\infty} &= \left\| \sum_{j_{\gamma}=i_{\gamma}}^{i_{\gamma}+1} (\mu_{A_{\gamma}}(x_{\gamma})) [g(x_1, x_{\gamma}, \dots, x_n) - g(x_1, e_{\gamma}^{j_{\gamma}}, \dots, x_n)] \right\|_{\infty} \\
&\leq \|g(x_1, x_{\gamma}, \dots, x_n) - g(x_1, e_{\gamma}^{j_{\gamma}}, \dots, x_n)\|_{\infty} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} (e_{\gamma}^{i_{\gamma}+1} - e_{\gamma}^{i_{\gamma}})^2 \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\gamma}^2} \right\|_{\infty}
\end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}
\|g - L_n g\|_{\infty} &= \left\| \sum_{i_n=i_n}^{i_n+1} \mu_{A_n^n}(x_n) [g(x_1, x_{\gamma}, \dots, x_n) - g(x_1, x_{\gamma}, \dots, e_n^{j_n})] \right\|_{\infty} \\
&\leq \|g(x_1, x_{\gamma}, \dots, x_n) - g(x_1, x_{\gamma}, \dots, e_n^{j_n})\|_{\infty} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} (e_n^{i_n+1} - e_n^{i_n})^2 \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \right\|_{\infty}
\end{aligned} \tag{۴۳}$$

با توجه به این روابط و جای گذاری در رابطه ۴۰ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\|g - f\|_{\infty} &\leq \|g - L_1 g\|_{\infty} + \|g - L_{\gamma}g\|_{\infty} + \dots + \|g - L_n g\|_{\infty} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} (e_1^{i_1+1} - e_1^{i_1})^2 \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_{\infty} + \frac{1}{\lambda} (e_{\gamma}^{i_{\gamma}+1} - e_{\gamma}^{i_{\gamma}})^2 \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\gamma}^2} \right\|_{\infty} + \dots + \frac{1}{\lambda} (e_n^{i_n+1} - e_n^{i_n})^2 \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \right\|_{\infty}
\end{aligned} \tag{۴۴}$$

$$\|g - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right\|_{\infty} h_i \right] \tag{۴۵}$$

## سوال سوم - شبیه سازی شکل ۱۱.۲ از مثال های کتاب

حل دستی:

مثال ۱۱.۱ کتاب مرجع که قصد شبیه سازی شکل ۱۱.۲ آن را داریم، از کران تعریف شده در رابطه ۴۸ استفاده می کند. حال از آن جایی که  $\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\gamma}^2} \right\|_{\infty} = 1$  است، از رابطه ۴۸ می بینیم که اگر  $h = 1$  انتخاب شود، داریم:

$$\|g - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\lambda} < \varepsilon$$

$$\|g - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\lambda} \left[ \left\| \frac{\partial^{\mathfrak{r}} g}{\partial x_{\mathfrak{r}}} \right\|_{\infty} h_{\mathfrak{r}} + \left\| \frac{\partial^{\mathfrak{r}} g}{\partial x_{\mathfrak{r}}} \right\|_{\infty} h_{\mathfrak{r}} + \dots \left\| \frac{\partial^{\mathfrak{r}} g}{\partial x_{\mathfrak{n}}} \right\|_{\infty} h_{\mathfrak{n}} \right]$$

$$g(x) = \sin(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos(x) \quad (46)$$

$$\frac{\partial^{\mathfrak{r}} g}{\partial x^{\mathfrak{r}}} = -\sin(x)$$

$$\left\| \frac{\partial^{\mathfrak{r}} g}{\partial x^{\mathfrak{r}}} \right\|_{\infty} = 1$$

$$\frac{1}{\lambda} (1 \times h^{\mathfrak{r}}) \leq \circ / \mathfrak{r} \rightarrow \circ / \mathfrak{r} \geq \frac{1}{\lambda} h^{\mathfrak{r}} \rightarrow h = 1 \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \|g - L_{\mathfrak{r}} g\|_{\infty} &= \left\| \sum_{j_{\mathfrak{r}}=i_{\mathfrak{r}}}^{i_{\mathfrak{r}}+1} A_{\mathfrak{r}}^{j_{\mathfrak{r}}} (x_{\mathfrak{r}}) g(x_{\mathfrak{r}}, x_{\mathfrak{r}}) - g(e_{\mathfrak{r}}^{j_{\mathfrak{r}}}, x_{\mathfrak{r}}) \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| g(x_{\mathfrak{r}}, x_{\mathfrak{r}}) - g(e_{\mathfrak{r}}^{j_{\mathfrak{r}}}, x_{\mathfrak{r}}) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\lambda} (e_{\mathfrak{r}}^{i_{\mathfrak{r}}+1} - e_{\mathfrak{r}}^{i_{\mathfrak{r}}}) \left\| \frac{\partial^{\mathfrak{r}} g}{\partial x_{\mathfrak{r}}} \right\|_{\infty} \end{aligned} \quad (48)$$

بنابراین هفت مجموعه فازی به صورت رابطه ۴۹ و با  $e^j = -3 + (j - 1)$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) خواهیم داشت.

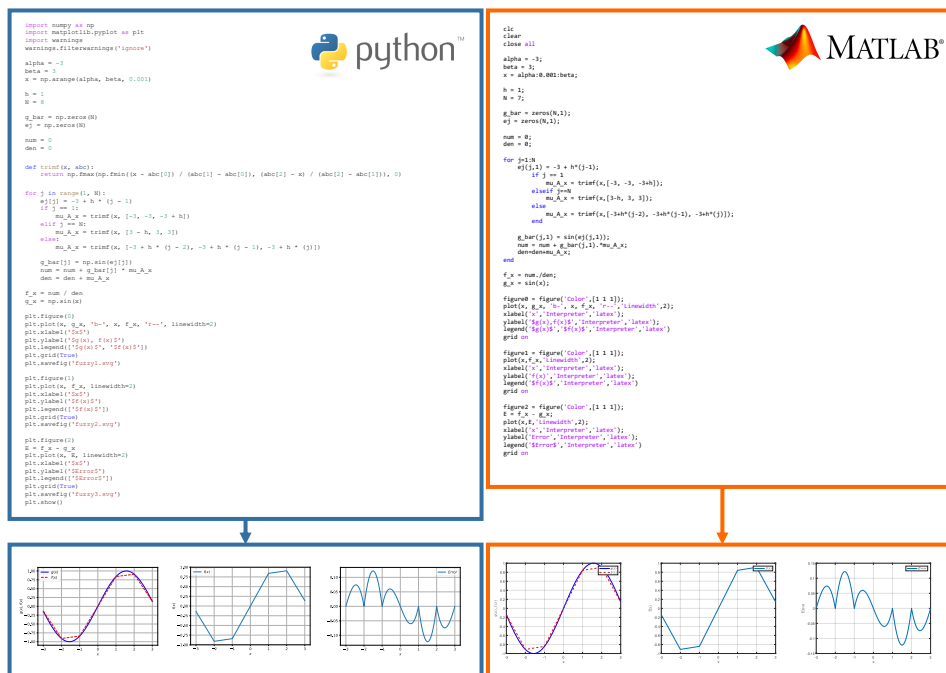
$$\begin{aligned} \mu_{A_i^1}(x_i) &= \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2) \\ \mu_{A_i^j}(x_i) &= \mu_{A_i^j}(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}) \\ \mu_{A_i^{N_i}}(x_i) &= \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i}) \end{aligned} \quad (49)$$

سیستم فازی طراحی شده نیز به این صورت خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^Y \sin(e^j) \mu_{A^j}(x)}{\sum_{j=1}^Y A^j(x)} \quad (50)$$

## شبیه‌سازی:

دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم  $g(x)$  و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های متلب و پایتون نوشته‌ایم. نمایی از دستورات متلب و پایتون به همراه نتایج در شکل ۶ آورده شده است که مشاهده می‌گردد شکل‌های شبیه‌سازی شده با شکل‌های کتاب یکسان هستند (شکل ۸). دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در **این پیوند** نیز قابل دسترسی است. حال اگر از تابع تعلق گاوسی استفاده کنیم نتایج به صورتی که در شکل ۷ آورده شده است خواهد بود. حال اگر تعداد توابع تعلق

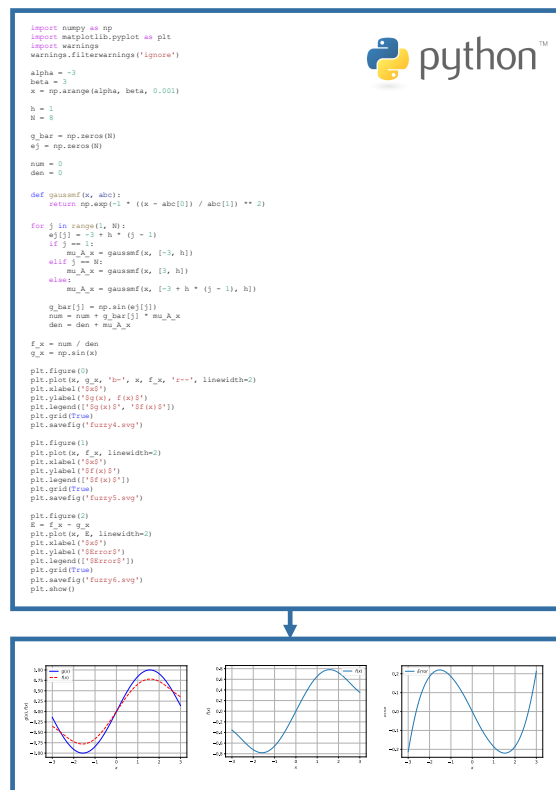


شکل ۶: دستورات متلب مثال شکل ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها.

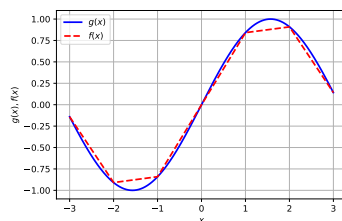
را بیش‌تر و سعی در تقریبی دقیق‌تر داشته باشیم نتایج به صورتی خواهد بود که در شکل ۹ آورده شده است. مشابه سوال اول علاوه بر این شبیه‌سازی‌ها، شبیه‌سازی دیگری برای این سوال در محیط اینترنت پیدا شده است که به دلیل تفاوت و جالبی نحوه نگارش کد این شبیه‌سازی، آن را در پوشه Q3\_Others آورده‌ایم و نتایج آن به صورتی است که در شکل ۱۰ آورده شده است.

## توضیح پوشه کدها

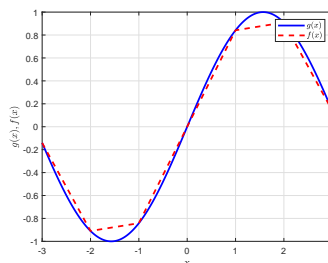
در پوشه اصلی این سوال (Q3)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند. دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در **این پیوند** نیز قابل دسترسی است.



شکل ۷: دستورات پایتون مثال شکل ۱۱-۲ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی).



(ج) نتیجه پایتون



(ب) نتیجه متلب

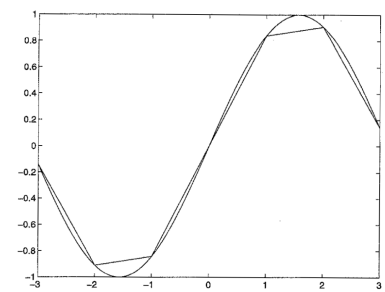
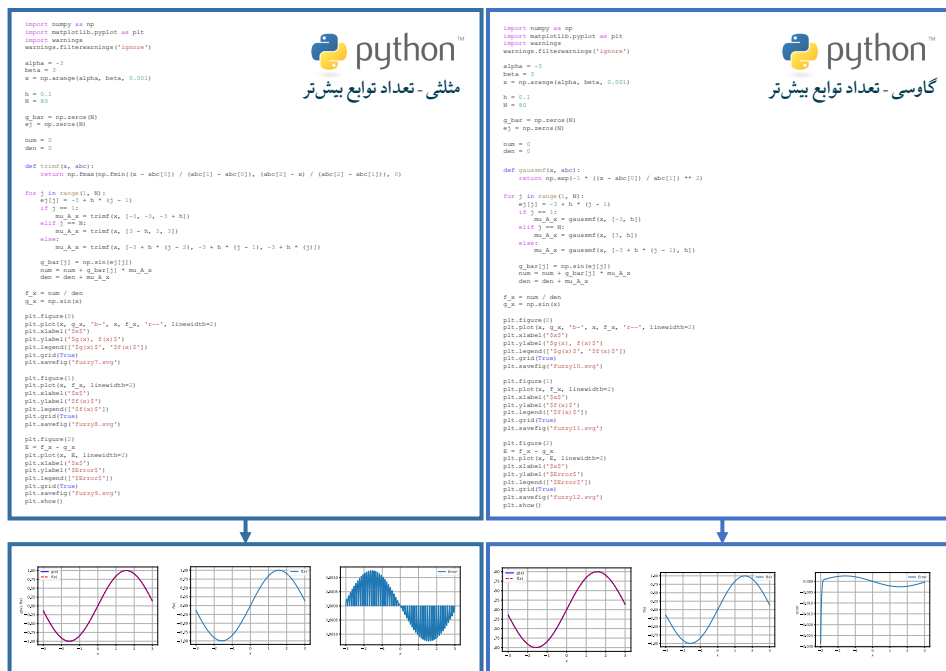


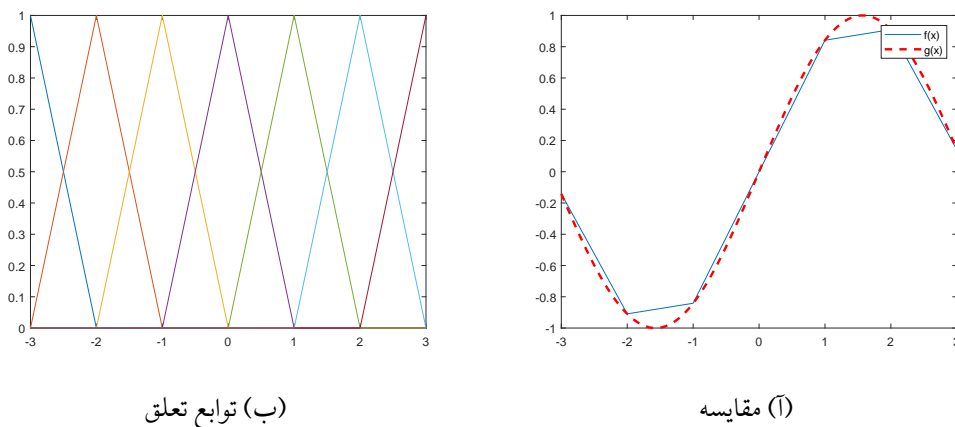
Figure 11.2. The designed fuzzy system  $f(x)$  of (11.16) and the function  $g(x) = \sin(x)$  to be approximated.

(آ) شکل ۱۱-۲ کتاب مرجع

شکل ۸: مقایسه شکل ۱۱-۲ کتاب مرجع با شماری از نتایج شبیه‌سازی.



شکل ۹: دستورات پایتون مثال شکل ۲-۱۱ (تعداد توابع بیشتر).

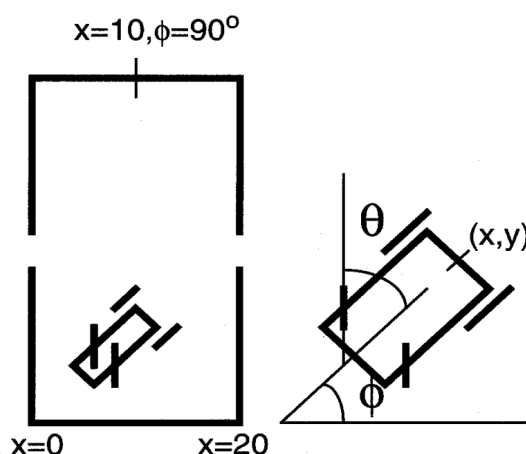


شکل ۱۰: نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.

## سوال چهارم - شبیه‌سازی مثال کامیون

هدف ما در این قسمت طراحی کنترل‌کننده‌ای است که رفتار راننده را در حرکت رو به عقب کامیون شبیه‌سازی کند. مکان کامیون توسط سه متغیر حالت  $x$ ،  $\phi$  و  $y$  تعیین می‌شود که همان‌طوری که در شکل ۱۱ آورده شده است، زاویه  $\phi$ ، زاویه کامیون نسبت به محور افق بوده و کنترل کامیون با استفاده

از زاویه فرمان یا متغیر  $\theta$  صورت می‌گیرد. علامت زاویه فرمان با توجه به شکل ۱۱ و حرکت با دنده عقب و به شکل ساعتگرد، مثبت تعیین شده است و اگر کامیون با دنده عقب و به شکل پادساعتگرد حرکت کند، منفی در نظر گرفته می‌شود هم‌چنین برای سادگی فرض می‌نماییم که فضای بین کامیون و محل بارگیری کافی است و نیازی به در نظر گرفتن  $y$  به عنوان یک متغیر حالت نیست. بنابراین، هدف غایی ما طراحی کنترل‌کننده‌ای با ورودی  $(x, \phi)$  و خروجی  $\theta$  است. فضای ورودی و خروجی را به ترتیب به صورت  $U = [x] \times [\phi] = [0, 20] \times [-90, 270]$  و  $V = [\theta] = [-40, 40]$  در نظر می‌گیریم. حال برای تولید داده،



شکل ۱۱: تصویری از مسأله در کتاب مرجع.

$N$  جفت داده ورودی-خروجی را به صورت  $(x_k, \phi_k, \theta_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$  تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که نقطه شروع کامیون از  $(x_0, \phi_0) = (1, 0)$  بوده است و نقطه هدف (نهایی) که قرار است یک راننده باتجربه با تنظیم متناسب  $\theta$  به آن برسد،  $(x_f, \phi_f) = (10, 90)$  است. با توجه به جدول آزمایش اول کتاب که در شکل ۱۲ آورده شده است، در آزمایش اول هجده نقطه داده داریم. هم‌چنین در این جدول دیده می‌شود که زاویه فرمان از ابتدا تا انتها تغییر علامت نمی‌دهد. حال فرض کنیم در آزمایش دوم از راننده خواسته شود که از نقطه  $(x_0, \phi_0) = (1, 90)$  شروع به حرکت کند و به نقطه هدف (نهایی)  $(x_f, \phi_f) = (10, 90)$  برسد. جدول آزمایش دوم با بیست و چهار نقطه داده در جدول ۱ آورده شده است. باید توجه داشت که جداول مربوط به آزمایش اول (شکل ۱۲) و آزمایش دوم (صفحه ۲۰) به ترتیب معرف ۱۸ و ۲۴ زوج ورودی-خروجی هستند و در حل این سوال و برای طراحی سیستم فازی به همین دو آزمایش بسنده می‌شود و تمامی ۴۲ زوج ورودی-خروجی در یک مجموعه جامع در نظر گرفته می‌شوند. بدیهی است که با انجام آزمایش‌های بیش‌تر دقت شبیه‌سازی‌ها بالاتر خواهد رفت.

در گام مهم بعدی، با طبقه‌بندی فضای ورودی و خروجی به صورت فازی، مجموعه‌هایی فازی برای پوشش دادن زوج‌های ورودی-خروجی تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های فازی را با توابع تعلق مثلثی و ذوزنقه‌ای

جدول ۱: جدول مربوط به آزمایش دوم

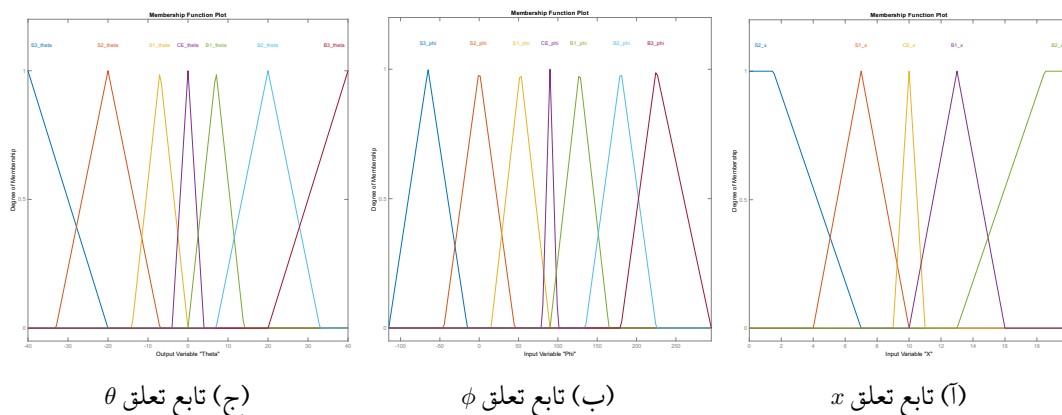
$t$	$x_t$	$\varphi_t$	$\theta_t$
۰	۱/۰۰	۹۰/۰۰	۱۱/۵
۱	۱/۱۰	۷۹/۰۸	۹/۴۰
۲	۱/۲۹	۷۴/۴	۸/۳۵
۳	۱/۵۶	۷۰/۲۴	۷/۳۰
۴	۱/۹۰	۶۶/۶۰	۶/۲۵
۵	۲/۲۹	۶۳/۴۸	۵/۲۰
۶	۲/۷۳	۶۰/۸۸	۴/۱۵
۷	۳/۲۲	۵۸/۸۱	۳/۱۰
۸	۳/۷۴	۵۷/۲۶	۲/۰۵
۹	۴/۸۴	۵۵/۷۴	-۰/۰۵
۱۰	۵/۹۶	۵۶/۳۱	-۲/۱۵
۱۱	۶/۵۱	۵۷/۳۸	-۳/۲۰
۱۲	۷/۰۵	۵۸/۹۸	-۴/۲۵
۱۳	۷/۵۶	۶۱/۱۰	-۵/۳۰
۱۴	۸/۰۴	۶۳/۷۵	-۶/۳۵
۱۵	۸/۴۸	۶۶/۹۲	-۷/۴۰
۱۶	۸/۸۷	۷۰/۶۱	-۸/۴۵
۱۷	۹/۲۰	۷۴/۸۲	-۷/۴۰
۱۸	۹/۴۶	۷۸/۵۱	-۶/۳۵
۱۹	۹/۶۶	۸۱/۶۸	-۵/۳۰
۲۰	۹/۸۰	۸۴/۳۳	-۴/۲۵
۲۱	۹/۹۰	۸۶/۴۵	-۳/۲۰
۲۲	۹/۹۶	۸۸/۰۵	-۲/۱۵
۲۳	۱۰/۰۱	۸۹/۶۷	۰/۰۰

**Table 12.1.** Ideal trajectory  $(x_t, \phi_t^o)$  and the corresponding control  $\theta_t^o$  starting from  $(x_0, \phi_0) = (1, 0^\circ)$ .

$t$	$x_t$	$\phi_t^o$	$\theta_t^o$
0	1.00	0.00	-19.00
1	1.95	9.37	-17.95
2	2.88	18.23	-16.90
3	3.79	26.57	-15.85
4	4.65	34.44	-14.80
5	5.45	41.78	-13.75
6	6.18	48.60	-12.70
7	7.48	54.91	-11.65
8	7.99	60.71	-10.60
9	8.72	65.99	-9.55
10	9.01	70.75	-8.50
11	9.28	74.98	-7.45
12	9.46	78.70	-6.40
13	9.59	81.90	-5.34
14	9.72	84.57	-4.30
15	9.81	86.72	-3.25
16	9.88	88.34	-2.20
17	9.91	89.44	0.00

شکل ۱۲: جدول مربوط به آزمایش اول در کتاب مرجع.

انتخاب و تعریف می‌کنیم. علاوه بر پیاده‌سازی این توابع در محیط متلب دستوراتی در این دستورات برای نمایش این توابع نوشته شده است. نمایی از این توابع تعلق در شکل ۱۳ آورده شده است. یکی از نکات خیلی مهم در تعریف مجموعه‌های فازی آن است که به‌ازای هر ورودی اندازه تابع تعلق غیرصفر باشد (یعنی مجموعه‌های فازی کامل باشند). تعداد این توابع تعلق به دست مسئول سیستم بوده و نه باید آنقدر کم باشد که عمل‌کرد ضعیف و خطا زیاد باشد و نه باید زیاد باشد که طراحی سیستم را گران سازد. در این مسأله به منظور طراحی بهتر، توابع تعلق نزدیک به محل بارگیری (نقطه نهایی)، باریک‌تر از مجموعه‌های فازی دورتر از این نقطه در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه قصد داریم تا قواعد را از روی زوج‌های



شکل ۱۳: توابع تعلق که برای شبیه‌سازی مسأله چهارم در نظر گرفته شده‌اند.

ورودی-خروجی به‌دست آوریم. برای این منظور، ابتدا تابع تعلق ورودی و خروجی را در مجموعه‌های



فازی تعریف شده در شکل ۱۳ تعیین می‌کنیم. آن‌گاه برای متغیرهای ورودی، مجموعه‌های فازی ای که متغیرهای ورودی بیش‌ترین میزان تعلق را به آن‌ها دارند تعیین می‌کنیم. با انجام این کار، برای هر زوج داده ورودی-خروجی یک قاعده اگر-آنگاه به دست می‌آید. برای مثال و با در نظر گرفتن زوج داده ورودی-خروجی اول، یعنی  $(x_1, \phi_1, \theta_1) = (1, 0, -19)$  مشاهده می‌کنیم که  $x_1$  دارای مقدار تعلق یک در مجموعه فازی  $S_2$  است،  $\phi_1$  دارای مقدار تعلق یک در مجموعه فازی  $S_2$  است، و  $\theta_1$  دارای مقدار تعلق  $0.9231$  در مجموعه فازی  $S_2$  است. با این شرح، قواعد اگر-آنگاه برای این جفت ورودی-خروجی به این صورت نوشته می‌شود: "اگر  $x, S_2$  و  $\phi, S_2$  باشد؛ آن‌گاه  $\theta, S_2$  است." برای زوج داده ورودی-خروجی دوم، یعنی  $(x_2, \phi_2, \theta_2) = (1.95, 9.37, -17.95)$  مشاهده می‌کنیم که  $x_2$  دارای مقدار تعلق  $0.9182$  در مجموعه فازی  $S_2$  است،  $\phi_2$  دارای مقدار تعلق  $0.7918$  در مجموعه فازی  $S_2$  است، و  $\theta_2$  دارای مقدار تعلق  $0.8423$  در مجموعه فازی  $S_2$  است. با این شرح، قواعد اگر-آنگاه برای این جفت ورودی-خروجی به این صورت نوشته می‌شود: "اگر  $x, S_2$  و  $\phi, S_2$  باشد؛ آن‌گاه  $\theta, S_2$  است." برای زوج داده ورودی-خروجی دوم، یعنی  $(x_3, \phi_3, \theta_3) = (2.88, 18.23, -16.90)$  مشاهده می‌کنیم که  $x_3$  دارای مقدار تعلق  $0.7491$  در مجموعه فازی  $S_2$  است،  $\phi_3$  دارای مقدار تعلق  $0.861$  در مجموعه فازی  $S_1$  و  $0.5949$  در مجموعه فازی  $S_2$  است (از بین این دو مقدار، مقدار بیش‌تر را انتخاب می‌کنیم)، و  $\theta_3$  دارای مقدار تعلق  $0.7615$  در مجموعه فازی  $S_2$  است. با این شرح، قواعد اگر-آنگاه برای این جفت ورودی-خروجی به این صورت نوشته می‌شود: "اگر  $x, S_2$  و  $\phi, S_2$  باشد؛ آن‌گاه  $\theta, S_2$  است." همین روند را برای تمامی ۴۲ جفت ورودی-خروجی ادامه می‌دهیم تا جدول قواعد به دست آید. به دلیل زیادبودن زوج‌های ورودی-خروجی برای آزمایش‌های مختلف احتمال وجود قواعد مشابه یا متداخل دور از انتظار نیست. برای حل این مشکل کافی است به هر قاعده تولیدشده یک درجه اهمیت نسبت دهیم و از میان قوانین یکسان و متضاد، قاعده‌های مهم‌تر را حفظ کنیم. یک راهکار برای به‌دست آوردن این مقدار اهمیت، از حاصل ضرب مقدار توابع تعلق ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌ازای هر زوج داده ورودی-خروجی استفاده می‌کنیم. برای مثال با انجام این کار، درجه اهمیت قاعده تولیدشده به‌ازای زوج ورودی-خروجی اول به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درجه اهمیت قاعده اول} = \mu_{S_2}(x_1) \mu_{S_2}(\phi_1) \mu_{S_2}(\theta_1) = 1 \times 1 \times 0.9231 = 0.9231 \quad (51)$$

با انجام همین فرآیند برای قاعده تولیدشده به‌ازای زوج دوم و سوم به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{درجه اهمیت قاعده دوم} = \mu_{S_2}(x_2) \mu_{S_2}(\phi_2) \mu_{S_2}(\theta_2) = 0.9182 \times 0.7918 \times 0.8423 = 0.6124$$

$$\text{درجه اهمیت قاعده سوم} = \mu_{S_2}(x_3) \mu_{S_2}(\phi_3) \mu_{S_2}(\theta_3) = 0.7491 \times 0.5949 \times 0.7615 = 0.3394$$

(۵۲)

قواعد به دست آمده به همراه درجه اهمیتشان در جدول ۲ آورده شده است. بر اساس این جدول، از میان قواعد ۱ تا ۴ که بخش اگر و آنگاه یکسانی دارند، قاعده شماره یک به دلیل درجه اهمیت بزرگ‌تر انتخاب می‌شود و بقیه حذف می‌شوند. از مینا قواعد ۶ تا ۸ هم، قاعده شماره هفت به دلیل درجه اهمیت بزرگ‌تر باقی می‌ماند. از میان قواعد ۹، ۱۰، ۱۱، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵ و ۳۶ هم قاعده شماره سی و یک انتخاب می‌گردد. قاعده سی و هفت هم به دلیل درجه اهمیت بزرگ‌تر به عنوان نماینده قواعد ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۳۷ و ۳۸ باقی می‌ماند. از میان مجموعه قواعد (۴۰-۳۹-۱۶-۱۵)، (۴۲-۴۱-۱۸-۱۷)، (۲۰ تا ۲۶) و (۲۸-۲۷) هم که از قواعد یکسان؛ یعنی دارای بخش اگر و آنگاه یکسان، محسوب می‌شوند، به ترتیب قاعده‌های ۴۰، ۴۲، ۲۳ و ۲۸ در نظر گرفته می‌شوند. در خصوص قواعد متضاد؛ یعنی قواعد دارای بخش اگر یکسان و بخش آنگاه متفاوت، هم همین روند را طی می‌کنیم و با این کار از میان مجموعه قواعد (۲۸-۲۳-۵)، (۳۱-۲۹-۷) و (۴۲-۴۰) به ترتیب قاعده‌های ۲۳، ۳۱ و ۴۲ در نظر گرفته می‌شوند. با حذف قواعد دارای درجه اهمیت پایین‌تر در نهایت تنها شش قاعده فازی باقی می‌مانند که در جدول ۳ آورده شده است.

با طی شدن این مراحل می‌توانیم پایگاه قواعد فازی را در حالتی دووردی به‌صورت جدول جستجوی آورده‌شده در شکل ۱۴ نشان دهیم. همان‌طور که در این جدول جستجو مشاهده می‌شود، تنها شش خانه تکمیل شده که نتیجه ۴۳ آزمایش انجام‌شده بوده است. برای تکمیل این جدول می‌توانیم آزمایش‌های بیش‌تری انجام دهیم و داده‌های بیش‌تری با شرایط اولیه متفاوت در نظر بگیریم. بدیهی است که با افزایش تعداد آزمایش‌ها ممکن است همین شش خانه هم به‌دلیل قواعد متضاد تولیدشده تغییر کنند. روند دستی تولید قواعد بسیار دشوار بوده و برای حل این مشکل دستوراتی در متلب نوشته‌ایم که جلوتر معرفی می‌شود. در گام آخر، سیستم فازی مبتنی بر پایگاه قواعد فازی را می‌سازیم. برای این منظور، برنامه‌ی متلبی را

$S_3$					
$S_2$	$S_2$				
$S_1$	$B_1$	$S_1$	$S_1$		
CE	$B_1$		CE		
$B_1$					
$B_2$					
$B_3$					
	$S_2$	$S_1$	CE	$B_1$	$B_2$

شکل ۱۴: جدول جستجو برای پایگاه قواعد.

در نظر گرفته‌ایم که بر مبنای آزمایش‌های معرفی‌شده طراحی شده است. مطابق این دستورات داده‌های آزمایش‌های اول و دوم را در مجموعه‌هایی با نام dataset\_1 و dataset\_2 ذخیره می‌کنیم و درنهایت این دو مجموعه‌داده را با نام dataset ذخیره می‌کنیم. در ادامه، در اولین حلقه‌ی برنامه برای هر ردیف از داده‌های ورودی-خروجی مجموعه‌داده‌ی نهایی، یک قانون فازی تخصیص می‌دهیم و با محاسبه‌ی وزن این ردیف‌ها، نتیجه را در متغیر Rules ذخیره می‌کنیم. در مرحله بعدی، در دومین و سومین حلقه تکرار برنامه که به‌صورت تودرتو نوشته شده، قواعد یکسان و متضاد حذف می‌گردند و قواعد نهایی در متغیری با نام Final\_Rules ذخیره می‌شود. همان‌گونه که از حل دستی نیز به‌دست آمد در نهایت شش قاعده فازی باقی می‌ماند که با اجرای برنامه به‌صورت زیر است:

```

1 Final_Rules =
2
3     1.0000    2.0000    2.0000    0.9231
4     1.0000    3.0000    5.0000    0.5166
5     2.0000    3.0000    3.0000    0.4939
6     3.0000    3.0000    3.0000    0.1279
7     3.0000    4.0000    4.0000    0.9573
8     1.0000    4.0000    5.0000    0.3571

```

که در آن ستون اول تا سوم به‌ترتیب بیانگر شماره تاییه تعلق در نظر گرفته‌شده برای  $x$ ،  $\phi$  و  $\theta$  است و ستون چهارم هم نشان‌گر میزان اهمیت آن قاعده. در ادامه، با کمک متلب و جعبه‌ابزار فازی آن یک سیستم فازی با

جدول ۲: قواعد تولیدشده و درجه اهمیت آن‌ها.

درجه اهمیت	آنگاه ( $\theta$ )	اگر ( $\phi$ )	اگر ( $x$ )	شماره
۰/۹۲۳۱	$S_2$	$S_2$	$S_2$	۱
۰/۶۱۲۴	$S_2$	$S_2$	$S_2$	۲
۰/۳۳۹۴	$S_2$	$S_2$	$S_2$	۳
۰/۱۶۲۷	$S_2$	$S_2$	$S_2$	۴
۰/۱۳۲۹	$S_2$	$S_1$	$S_2$	۵
۰/۱۷۹۲	$S_2$	$S_1$	$S_1$	۶
۰/۲۸۵۵	$S_2$	$S_1$	$S_1$	۷
۰/۲۸۱۲	$S_2$	$S_1$	$S_1$	۸
۰/۲۵۴۲	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۹
۰/۱۷۳۷	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۱۰
۰/۱۳۳۱	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۱۱
۰/۱۰۴۹	$S_1$	$S_1$	CE	۱۲
۰/۱۲۶۷	$S_1$	$S_1$	CE	۱۳
۰/۰۹۷۲	$S_1$	$S_1$	CE	۱۴
۰/۲۰۲۱	$S_1$	CE	CE	۱۵
۰/۲۵۲۷	$S_1$	CE	CE	۱۶
۰/۳۳۰۳	CE	CE	CE	۱۷
۰/۸۵۹۰	CE	CE	CE	۱۸
۰/۳۵۷۱	$B_1$	CE	$S_2$	۱۹
۰/۱۹۱۴	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۰
۰/۳۳۵۸	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۱
۰/۴۹۸۸	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۲
۰/۵۱۶۶	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۳
۰/۴۴۹۹	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۴
۰/۳۵۷۴	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۵
۰/۲۵۳۱	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۶
۰/۲۵۲۳	CE	$S_1$	$S_2$	۲۷
۰/۳۵۴۳	CE	$S_1$	$S_2$	۲۸
۰/۲۷۱۵	CE	$S_1$	$S_1$	۲۹
۰/۳۳۲۷	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۰
۰/۴۹۳۹	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۱
۰/۴۷۴۶	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۲
۰/۴۱۴۹	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۳
۰/۲۹۴۰	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۴
۰/۱۵۴۴	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۵
۰/۱۰۱۸	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۶
۰/۱۲۷۹	$S_1$	$S_1$	CE	۳۷
۰/۱۱۰۹	$S_1$	S	CE	۳۸
۰/۲۱۰۳	$S_1$	CE	CE	۳۹
۰/۲۶۵۴	$S_1$	CE	CE	۴۰
۰/۳۵۷۴	CE	CE	CE	۴۱
۰/۹۵۷۳	CE	CE	CE	۴۲

جدول ۳: قواعد باقی‌مانده و نهایی و درجه اهمیت آن‌ها.

درجه اهمیت	آنگاه ( $\theta$ )	اگر ( $\phi$ )	اگر ( $x$ )	شماره
۰.۹۲۳۱	$S_2$	$S_2$	$S_2$	۱
۰.۳۵۷۱	$B_1$	CE	$S_2$	۱۹
۰.۵۱۶۶	$B_1$	$S_1$	$S_2$	۲۳
۰.۴۹۳۹	$S_1$	$S_1$	$S_1$	۳۱
۰.۱۲۷۹	$S_1$	$S_1$	CE	۳۷
۰.۹۵۷۳	CE	CE	CE	۴۲

موتور استنتاج ضرب ممدانی و غیرفازی ساز مرکز ثقل ایجاد کرده و متغیرهای ورودی-خروجی، توابع تعلق و قواعد فازی را در ساختاری با نام *fis* ذخیره می‌کنیم. با ایجاد کنترل‌کننده فازی بر مبنای مجموعه داده‌های این دو آزمایش، این کنترلر را به کامیون اعمال می‌کنیم به صورتی که عمل کرد کنترل کامیون را با شروع از نقاط اولیه جدید مشاهده کنیم. برای این منظور حلقه تکرار آخر برنامه را نوشته‌ایم و از مدل تقریبی کامیون که در کتاب مرجع درس آورده شده است (رابطه ۵۳) استفاده کردیم که در آن تمامی زوایا بر حسب رادیان بیان می‌گردند و برای تبدیل آن‌ها به درجه در برنامه از ضرب آن‌ها در  $\pi/180$  استفاده شده است. هم‌چنین در این رابطه،  $b$  طول کامیون می‌باشد.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \cos[\phi(t) + \theta(t)] + \sin[\theta(t)] \sin[\phi(t)] \\ y(t+1) &= y(t) + \sin[\phi(t) + \theta(t)] - \sin[\theta(t)] \cos[\phi(t)] \\ \phi(t+1) &= \phi(t) - \sin^{-1} \left[ \frac{2 \sin(\theta(t))}{b} \right] \end{aligned} \quad (53)$$

در نهایت برنامه را به صورت یکپارچه در زیر (برنامه ۱) می‌آوریم و خروجی سیستم فازی بر حسب متغیرهای ورودی در شکل ۱۵ نمایش داده می‌شود.

```

1 clc;
2 clear;
3 close all
4 %% Generating Data
5 % First Dataset
6 dataset_1 = [0      1      0      -19.00; ...
7              1      1.95    9.37    -17.95; ...
8              2      2.88    18.23    -16.90; ...
9              3      3.79    26.57    -15.85; ...
10             4      4.65    34.44    -14.80; ...

```

```

11         5         5.45      41.78      -13.75;...
12         6         6.18      48.60      -12.70;...
13         7         7.48      54.91      -11.65;...
14         8         7.99      60.71      -10.60;...
15         9         8.72      65.99      -9.55;...
16        10         9.01      70.75      -8.50;...
17        11         9.28      74.98      -7.45;...
18        12         9.46      78.70      -6.40;...
19        13         9.59      81.90      -5.34;...
20        14         9.72      84.57      -4.30;...
21        15         9.81      86.72      -3.25;...
22        16         9.88      88.34      -2.20;...
23        17         9.91      89.44      0];

```

```

24
25 % Second Dataset

```

```

26 dataset_2 = [0         1         90         11.5;...
27              1         1.10      79.08         9.40;...
28              2         1.29      74.40         8.35;...
29              3         1.56      70.24         7.30;...
30              4         1.90      66.60         6.25;...
31              5         2.29      63.48         5.20;...
32              6         2.73      60.88         4.15;...
33              7         3.22      58.81         3.10;...
34              8         3.74      57.26         2.05;...
35              9         4.84      55.74        -0.05;...
36             10         5.96      56.31        -2.15;...
37             11         6.51      57.38        -3.20;...
38             12         7.05      58.98        -4.25;...
39             13         7.56      61.10        -5.30;...
40             14         8.04      63.75        -6.35;...
41             15         8.48      66.92        -7.40;...
42             16         8.87      70.61        -8.45;...
43             17         9.20      74.82        -7.40;...
44             18         9.46      78.51        -6.35;...
45             19         9.66      81.68        -5.30;...

```

```

46         20      9.80      84.33      -4.25;...
47         21      9.90      86.45      -3.20;...
48         22      9.96      88.05      -2.15;...
49         23      10.01     89.67       0];
50
51 [n1,~] = size(dataset_1);
52 [n2,~] = size(dataset_2);
53
54 n = n1 + n2;
55
56 dataset = zeros(n,5);
57 dataset(1:n1,2:4) = dataset_1(:,2:4);
58 dataset(n1+1:n,2:4) = dataset_2(:,2:4);
59
60 %% Asssign Degree to Each Rule
61 % Five Membership Functions for Iput x
62 N_Rule_x = 5;
63 S2_x = [0 0 1.5 7];
64 S1_x = [4 7 10];
65 CE_x = [9 10 11];
66 B1_x = [10 13 16];
67 B2_x = [13 18.5 20 20];
68
69 % Seven Membership Functions for Iput phi
70 N_Rule_phi = 7;
71 S3_phi = [-115 -65 -15];
72 S2_phi = [-45 0 45];
73 S1_phi = [15 52.5 90];
74 CE_phi = [80 90 100];
75 B1_phi = [90 127.5 165];
76 B2_phi = [135 180 225];
77 B3_phi = [180 225 295];
78
79 % Seven Membership Functions for Iput theta
80 N_Rule_theta = 7;

```

```

81 S3_theta = [-60 -40 -20];
82 S2_theta = [-33 -20 -7];
83 S1_theta = [-14 -7 0];
84 CE_theta = [-4 0 4];
85 B1_theta = [0 7 14];
86 B2_theta = [7 20 33];
87 B3_theta = [20 40 60];
88
89 %% Preallocations
90
91 Rules = zeros(n,4);
92 Rules_Total = zeros(n,4);
93 vec_x = zeros(1,N_Rule_x);
94 vec_phi = zeros(1,N_Rule_phi);
95 vec_theta = zeros(1,N_Rule_theta);
96
97 for k=1:n
98     dataset(k,1) = k;
99     x_k = dataset(k,2);
100     vec_x = [trapmf(x_k,S2_x) trimf(x_k,S1_x) trimf(x_k,CE_x) trimf(x_k,B1_x)
101             trapmf(x_k,B2_x)];
102     phi_k = dataset(k,3);
103     vec_phi = [trimf(phi_k,S3_phi) trimf(phi_k,S2_phi) trimf(phi_k,S1_phi)
104              trimf(phi_k,CE_phi) trimf(phi_k,B1_phi) trimf(phi_k,B2_phi) trimf(phi_k,
105              B3_phi)];
106     theta_k = dataset(k,4);
107     vec_theta = [trimf(theta_k,S3_theta) trimf(theta_k,S2_theta) trimf(theta_k,
108              S1_theta) trimf(theta_k,CE_theta) trimf(theta_k,B1_theta) trimf(theta_k,
109              B2_theta) trimf(theta_k,B3_theta)];
110     [value_x,column_x] = max(vec_x);
111     [value_phi,column_phi] = max(vec_phi);
112     [value_theta,column_theta] = max(vec_theta);
113
114     vec = [max(vec_x) max(vec_phi) max(vec_theta)];
115     dataset(k,5) = prod(vec);

```



```

111
112     Rules(k,1:4) = [column_x column_phi column_theta prod(vec)];
113 end
114
115 %% Delete Extra Rules
116
117 Rules_Total(1,1:4) = Rules(1,1:4);
118 i=1;
119 for t=2:n
120     m = zeros(1,i);
121     for j=1:i
122         m(1,j) = isequal(Rules(t,1:2),Rules_Total(j,1:2));
123         if m(1,j)==1 && Rules(t,4)>=Rules_Total(j,4)
124             Rules_Total(j,1:4) = Rules(t,1:4);
125         end
126     end
127     if sum(m) == 0
128         Rules_Total(i+1,1:4) = Rules(t,1:4);
129         i = i+1;
130     end
131 end
132
133 Final_Rules = Rules_Total(1:i,:);
134
135 %% Create Fuzzy Inference System
136
137 Fisname = 'Controller';
138 Fistype = 'mamdani';
139 Andmethod='prod';
140 Ormethod='max';
141 Impmethod='prod';
142 Aggmethod='max';
143 Defuzzmethod='centroid';
144
145 fis = newfis(Fisname,Fistype,Andmethod,Ormethod,Impmethod,Aggmethod,

```

```

        Defuzzmethod);
146
147 %% Add Variables
148
149 fis = addvar(fis,'input','x',[0 20]);
150 fis = addvar(fis,'input','phi',[-90 270]);
151 fis = addvar(fis,'output','theta',[-40 40]);
152
153 %% Add Membership Function
154
155 fis = addmf(fis,'input',1,'S2','trapmf',S2_x);
156 fis = addmf(fis,'input',1,'S1','trimf',S1_x);
157 fis = addmf(fis,'input',1,'CE','trimf',CE_x);
158 fis = addmf(fis,'input',1,'B1','trimf',B1_x);
159 fis = addmf(fis,'input',1,'B2','trapmf',B2_x);
160
161 fis = addmf(fis,'input',2,'S3','trimf',S3_phi);
162 fis = addmf(fis,'input',2,'S2','trimf',S2_phi);
163 fis = addmf(fis,'input',2,'S1','trimf',S1_phi);
164 fis = addmf(fis,'input',2,'CE','trimf',CE_phi);
165 fis = addmf(fis,'input',2,'B1','trimf',B1_phi);
166 fis = addmf(fis,'input',2,'B2','trimf',B2_phi);
167 fis = addmf(fis,'input',2,'B3','trimf',B3_phi);
168
169 fis = addmf(fis,'output',1,'S3','trimf',S3_theta);
170 fis = addmf(fis,'output',1,'S2','trimf',S2_theta);
171 fis = addmf(fis,'output',1,'S1','trimf',S1_theta);
172 fis = addmf(fis,'output',1,'CE','trimf',CE_theta);
173 fis = addmf(fis,'output',1,'B1','trimf',B1_theta);
174 fis = addmf(fis,'output',1,'B2','trimf',B2_theta);
175 fis = addmf(fis,'output',1,'B3','trimf',B3_theta);
176
177 %% Add Rules
178 fis_Rules = ones(i,5);
179 fis_Rules(1:i,1:3) = Rules_Total(1:i,1:3);

```

```

180 fis = addrule(fis,fis_Rules);
181
182 %% Plot & Analysis
183
184 % Plot Membership Function
185 figure(1)
186 plotmf(fis,'input',1)
187 figure(2)
188 plotmf(fis,'input',2)
189 figure(3)
190 plotmf(fis,'output',1)
191 figure(4)
192 gensurf(fis)
193
194 % Controlling the Truck from an Arbitrary Initial Point (x0,phi0)
195
196 % Truck Parameter
197 b = 4;
198 Data_Table = zeros(n,4);
199
200 x = zeros(1,n);
201 phi = zeros(1,n);
202 y = zeros(1,n);
203 y(1,1) = 2;
204
205 x(1,1) = input('Enter Initial Point for x(0<x<20) & Press Enter Key: ');
206 phi(1,1) = input('Enter Initial Point for phi(-90<phi<270 degree) and then
    Press Enter Key: ');
207
208 for t=1:n
209     theta = evalfis([x(1,t);phi(1,t)],fis);
210     Data_Table(t,:) = [t,x(1,t),phi(1,t),theta];
211     x(1,t+1) = x(1,t)+cos((phi(1,t)+theta).*pi/180)+sin(theta*pi/180)*sin(phi
        (1,t).*pi/180); ...
212     phi(1,t+1) = phi(1,t) - (asin(2*sin(theta*pi/180)/b))*180/pi;

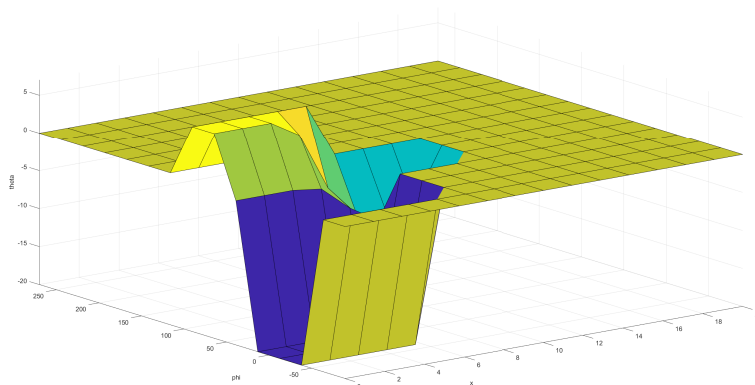
```

```

213     y(1,t+1) = y(1,t)+sin((phi(1,t)+theta)*pi/180)-sin(theta*pi/180)*cos(phi(1,
214         t)*pi/180);
215
216     disp('-----')
217     disp(['x_Final = ',num2str(x(end))])
218     disp(['phi_Final = ',num2str(phi(end))])
219     disp('-----')
220
221     figure(5) = figure('Color', [1 1 1]);
222     plot(x,y,'Linewidth',2)
223     xlabel('x')
224     ylabel('y');
225     axis([0 20 -10 50])
226     grid on

```

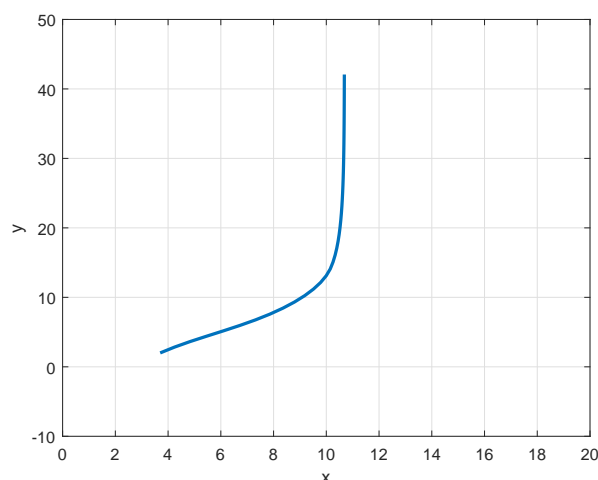
Listing 1: MATLAB Code 1



شکل ۱۵: خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی.

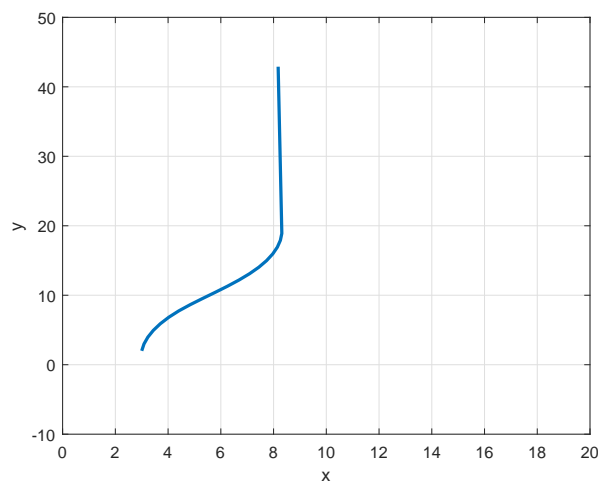
هم‌چنین این برنامه به صورتی نوشته شده است که مقادیر اولیه ورودی‌های  $x$  و  $\phi$  را در بازه‌های مجاز از کاربر بگیرد و مسیر حرکتی و موقعیت نهایی کامیون را برای کاربر نشان دهد. برای بررسی عمل‌کرد کنترل‌کننده دو حالت اولیه نزدیک به شرایط اولیه آزمایش و دور از آن را در نظر می‌گیریم. برای حالتی که نزدیک شرایط اولیه آزمایش‌ها هستیم مقدار  $(x_0, \phi_0) = (3.7, 57)$  را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطه نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده  $(x_{final}, \phi_{final}) = (10.6841, 89.9664)$  است، که این نشان می‌دهد کامیون بسیار نزدیک به نقطه نهایی مطلوب خود یعنی  $(10, 90)$  شده است. هم‌چنین مسیر

حرکتی در شکل ۱۶ نشان داده شده است. حال برای حالتی که دورتر از شرایط اولیه آزمایش‌ها هستیم



شکل ۱۶: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه نزدیک.

مقدار  $(x_0, \phi_0) = (3, 85)$  را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطه نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده  $(x_{final}, \phi_{final}) = (8.1738, 90.3329)$  است، که این نشان می‌دهد کامیون چندان به نقطه نهایی مطلوب خود یعنی  $(10, 90)$  نرسیده است. هم‌چنین مسیر حرکتی در شکل ۱۷ نشان داده شده است. مشاهده



شکل ۱۷: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه دور.

می‌شود که عمل‌کرد کنترل‌کننده جای بهبود دارد. برای بهبود عمل‌کرد کنترل‌کننده، باید داده‌برداری از کامیون با شرایط اولیه بیش‌تری انجام پذیرد و تعداد آزمایش‌ها بیش‌تر گردد. برای مثال در مقاله‌ای<sup>۱</sup> برای

<sup>1</sup> L.-X. Wang and J. M. Mendel, "Generating fuzzy rules by learning from examples," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 22, no. 6. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), pp. 1414-1427, 1992. doi: 10.1109/21.199466.

جدول ۴: قواعد تولیدشده تکمیلی.

شماره	اگر $(x)$	اگر $(\phi)$	آنگاه $(\theta)$
۱	$S_2$	$S_3$	$S_2$
۲	$S_2$	$S_2$	$S_2$
۳	$S_2$	$S_1$	$B_1$
۴	$S_2$	CE	$B_2$
۵	$S_2$	$B_1$	$B_2$
۶	$S_1$	$S_3$	$S_3$
۷	$S_1$	$S_2$	$S_3$
۸	$S_1$	$S_1$	$S_1$
۹	$S_1$	CE	$B_2$
۱۰	$S_1$	$B_1$	$B_3$
۱۱	$S_1$	$B_2$	$B_3$
۱۲	$CE_2$	$S_2$	$S_3$
۱۳	CE	$S_1$	$S_2$
۱۴	CE	CE	CE
۱۵	CE	$B_1$	$B_3$
۱۶	CE	$B_2$	$S_3$
۱۷	$B_1$	$S_2$	$S_3$
۱۸	$B_1$	$S_1$	$S_2$
۱۹	$B_1$	CE	$S_2$
۲۰	$B_1$	$B_1$	$B_1$
۲۱	$B_1$	$B_2$	$B_3$
۲۲	$B_1$	$B_3$	$B_3$
۲۳	$B_2$	$S_1$	$S_2$
۲۴	$B_2$	CE	$S_2$
۲۵	$B_2$	$B_1$	$S_1$
۲۶	$B_2$	$B_2$	$B_2$
۲۷	$B_2$	$B_3$	$B_2$

تولید ورودی-خروجی مطلوب، از ۱۴ حالت اولیه به شرح زیر استفاده شده است:

$$(x_0, \varphi_0) = (1, 0), (1, 90), (1, 270), (7, 0), (7, 90), (7, 180), (7, 270), (13, 0), \quad (54)$$

$$(13, 90), (13, 180), (13, 270), (19, 90), (19, 180), (19, 270)$$

با در نظر گرفتن این شرایط، از میان حدود ۲۵۰ زوج داده ورودی-خروجی، یک پایگاه قواعد فازی مطابق جدول ۴ به دست می‌آید. در نتیجه این پایگاه قواعد جدول جستجو به صورتی که در شکل ۱۸ آورده شده به روز می‌شود و با مقایسه آن با جدول آورده شده در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که سیستم فازی برآمده از پایگاه جدید دقت بیش‌تری خواهد داشت. در نهایت برنامه حالت توسعه داده شده را به صورت یکپارچه در

S <sub>3</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>			
S <sub>2</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>2</sub>
CE	B <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	CE	S <sub>2</sub>	S <sub>2</sub>
B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>
B <sub>2</sub>		B <sub>3</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>
B <sub>3</sub>				B <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>
	S <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	CE	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>

شکل ۱۸: جدول جستجو برای پایگاه قواعد.

زیر (برنامه ۲) می‌آوریم:

```

1  clc;
2  clear;
3  close all
4
5  %% Create Fuzzy Inference System
6
7  Fisname = 'Controller';
8  Fistype = 'mamdani';
9  Andmethod='prod';
10 Ormethod='max';
11 Impmethod='prod';
12 Aggmethod='max';
13 Defuzzmethod='centroid';
14 fis = newfis(Fisname,Fistype,Andmethod,Ormethod,Impmethod,Aggmethod,
    Defuzzmethod);
15
16 %% Add Variables
17
18 fis = addvar(fis,'input','x',[0 20]);
19 fis = addvar(fis,'input','phi',[-90 270]);
20 fis = addvar(fis,'output','theta',[-40 40]);
21
22 %% Add Membership Function
23
24 fis = addmf(fis,'input',1,'S2','trapmf',[0 0 1.5 7]);
25 fis = addmf(fis,'input',1,'S1','trimf',[4 7 10]);
26 fis = addmf(fis,'input',1,'CE','trimf',[9 10 11]);
27 fis = addmf(fis,'input',1,'B1','trimf',[10 13 16]);

```

```

28 fis = addmf(fis,'input',1,'B2','trapmf',[13 18.5 20 20]);
29
30 fis = addmf(fis,'input',2,'S3','trimf',[-115 -65 -15]);
31 fis = addmf(fis,'input',2,'S2','trimf',[-45 0 45]);
32 fis = addmf(fis,'input',2,'S1','trimf',[15 52.5 90]);
33 fis = addmf(fis,'input',2,'CE','trimf',[80 90 100]);
34 fis = addmf(fis,'input',2,'B1','trimf',[90 127.5 165]);
35 fis = addmf(fis,'input',2,'B2','trimf',[135 180 225]);
36 fis = addmf(fis,'input',2,'B3','trimf',[180 225 295]);
37
38 fis = addmf(fis,'output',1,'S3','trimf',[-60 -40 -20]);
39 fis = addmf(fis,'output',1,'S2','trimf',[-33 -20 -7]);
40 fis = addmf(fis,'output',1,'S1','trimf',[-14 -7 0]);
41 fis = addmf(fis,'output',1,'CE','trimf',[-4 0 4]);
42 fis = addmf(fis,'output',1,'B1','trimf',[0 7 14]);
43 fis = addmf(fis,'output',1,'B2','trimf',[7 20 33]);
44 fis = addmf(fis,'output',1,'B3','trimf',[20 40 60]);
45
46 %% Add Rules
47 Rules = [1 1 2 1 1;...
48           1 2 2 1 1;...
49           1 3 5 1 1;...
50           1 4 6 1 1;...
51           1 5 6 1 1;...
52           2 1 1 1 1;...
53           2 2 1 1 1;...
54           2 3 3 1 1;...
55           2 4 6 1 1;...
56           2 5 7 1 1;...
57           2 6 7 1 1;...
58           3 2 1 1 1;...
59           3 3 2 1 1;...
60           3 4 4 1 1;...
61           3 5 6 1 1;...
62           3 6 7 1 1;...

```



```

63         4 2 1 1 1;...
64         4 3 1 1 1;...
65         4 4 2 1 1;...
66         4 5 5 1 1;...
67         4 6 7 1 1;...
68         4 7 7 1 1;...
69         5 3 2 1 1;...
70         5 4 2 1 1;...
71         5 5 3 1 1;...
72         5 6 6 1 1;...
73         5 7 6 1 1]
74 fis = addrule(fis,Rules);
75
76 %% Plot & Analysis
77
78 % Plot Membership Function
79 figure(1)
80 plotmf(fis,'input',1)
81 figure(2)
82 plotmf(fis,'input',2)
83 figure(3)
84 plotmf(fis,'output',1)
85 figure(4)
86 gensurf(fis)
87
88 % Controlling the Truck from an Arbitrary Initial Point (x0,phi0)
89
90 % Truck Parameter
91 b = 4;
92 n = 250;
93 Data_Table = zeros(n,5);
94
95 x = zeros(1,n);
96 phi = zeros(1,n);
97 y = zeros(1,n);

```

```

98 y(1,1) = 2;
99
100 x(1,1) = input('Enter Initial Point for x(0<x<20) & Press Enter Key: ');
101 phi(1,1) = input('Enter Initial Point for phi(-90<phi<270 degree) and then
    Press Enter Key: ');
102
103 x_desired = 10;
104 phi_desired = 90;
105
106 % Cost Function
107 J = norm([x_desired-x(1,1) phi_desired-phi(1,1)])
108
109 t=1;
110 while(J>=0.01)
111     theta = evalfis([x(1,t);phi(1,t)],fis);
112     Data_Table(t,:) = [t-1,x(1,t),y(1,t),phi(1,t),theta];
113     x(1,t+1) = x(1,t)+cos((phi(1,t)+theta).*pi/180)+sin(theta*pi/180)*sin(phi
        (1,t).*pi/180); ...
114     phi(1,t+1) = phi(1,t) - (asin(2*sin(theta*pi/180)/b))*180/pi;
115     y(1,t+1) = y(1,t)+sin((phi(1,t)+theta)*pi/180)-sin(theta*pi/180)*cos(phi(1,
        t)*pi/180);
116
117     J = norm([x_desired-x(1,t+1) ...
118         phi_desired - phi(1,t+1)]);
119     t = t+1
120 end
121
122 x_truck(1,:) = x(1,1:t);
123 phi_truck(1,:) = phi(1,1:t);
124 y_truck(1,:) = y(1,1:t);
125
126 disp('-----')
127 disp(['x_Final = ',num2str(x_truck(end))])
128 disp(['phi_Final = ',num2str(phi_truck(end))])
129 disp(['y_Final = ',num2str(y_truck(end))])

```

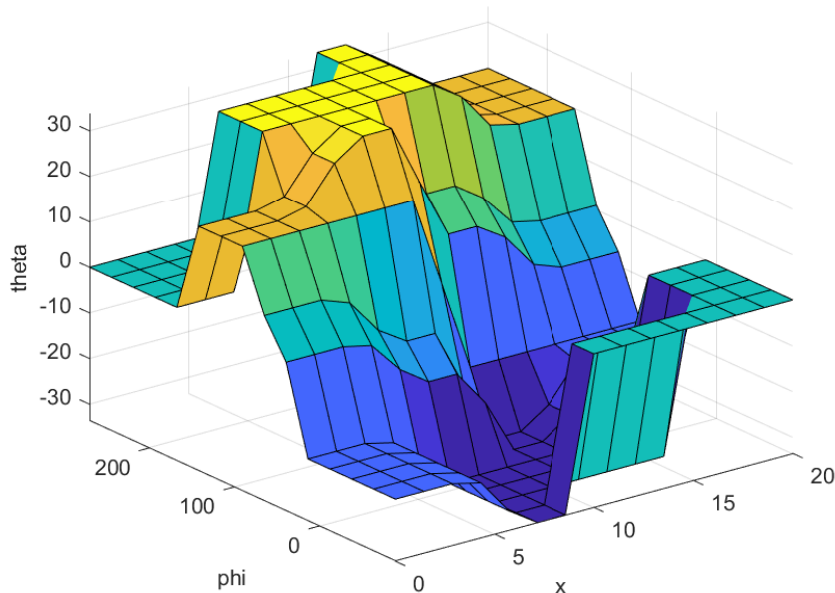
```

130 disp(' _ _ _ _ _ ')
131
132 figure(5) = figure('Color', [1 1 1]);
133 plot(x_truck,y_truck,'Linewidth',2)
134 xlabel('x')
135 ylabel('y');
136 axis([0 20 -10 50])
137 grid on

```

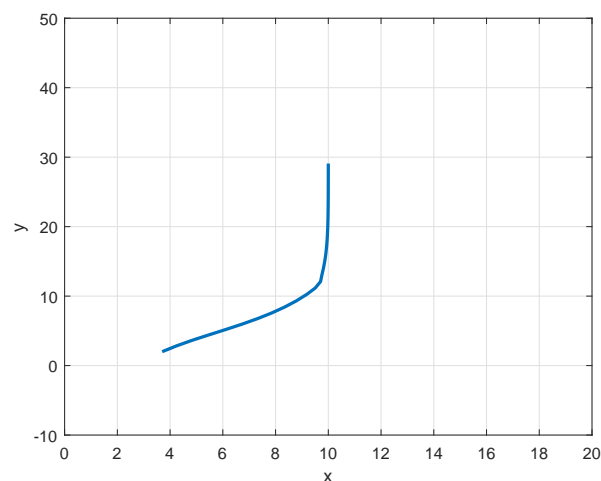
Listing 2: MATLAB Code 2

خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی در شکل ۱۹ نمایش داده می‌شود. هم‌چنین این برنامه



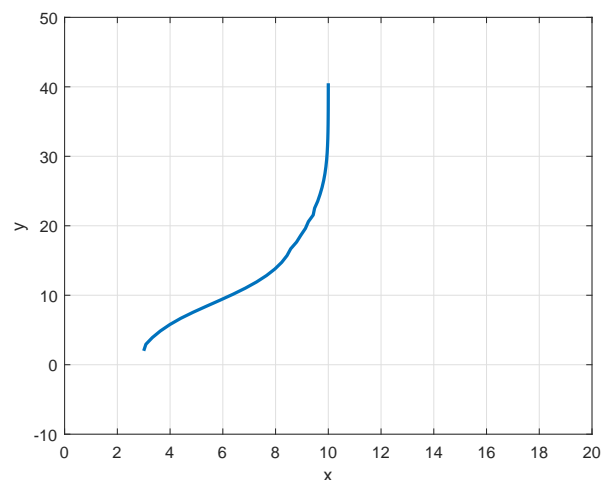
شکل ۱۹: خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی.

به صورتی نوشته شده است که مقادیر اولیه ورودی‌های  $x$  و  $\phi$  را در بازه‌های مجاز از کاربر بگیرد و مسیر حرکتی و موقعیت نهایی کامیون را برای کاربر نشان دهد. برای بررسی عمل کرد کنترل‌کننده دو حالت اولیه نزدیک به شرایط اولیه آزمایش و دور از آن را در نظر می‌گیریم. برای حالتی که نزدیک شرایط اولیه آزمایش‌ها هستیم مقدار  $(x_0, \phi_0) = (3/7, 57)$  را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطه نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده  $(x_{final}, \phi_{final}) = (9/9997, 89/9937)$  است، که این نشان می‌دهد کامیون بسیار نزدیک به نقطه نهایی مطلوب خود یعنی  $(10, 90)$  شده است. هم‌چنین مسیر حرکتی در شکل ۲۰ نشان داده شده است. حال برای حالتی که دورتر از شرایط اولیه آزمایش‌ها هستیم مقدار  $(x_0, \phi_0) = (3, 85)$  را در نظر



شکل ۲۰: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه نزدیک.

می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطه نهایی ای که کامیون به آن رسیده  $(x_{final}, \phi_{final}) = (9.9996, 89.9901)$  است، که این نشان می‌دهد کامیون در این حالت هم به نقطه نهایی مطلوب خود یعنی  $(10, 90)$  رسیده است. هم‌چنین مسیر حرکتی در شکل ۲۱ نشان داده شده است. در واقع، مشاهده می‌شود که عمل‌کرد



شکل ۲۱: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیه دور.

کنترل‌کننده بهبود به‌سزایی پیدا کرده است. در این سوال هم مشابه سوال‌های اول و سوم، یک شبیه‌سازی جالب در محیط اینترنت یافت شده است که آن را در پوشه Q4\_Others آورده‌ایم.