دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق- گروه مهندسی کنترل

تمرین درس محاسبات نرم
در رشتهٔ مهندسی برق گرایش مهندسی کنترل

عنوان

تمرین اول: سیستم‌های فاری

نگارش

محمدجواد احمدی

استاد درس

دکتر مهدی علیاری شوره‌دلی

مهرماه ۱۴۰۱

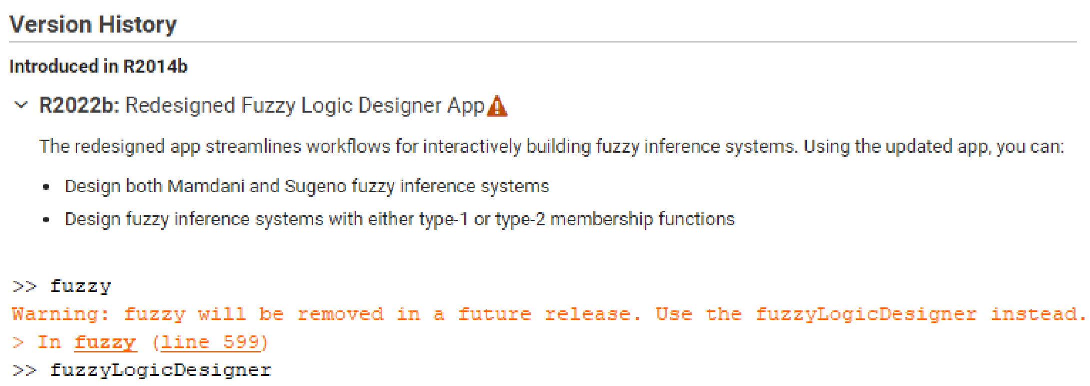
فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پاسخ سوالات

نکات قابل ذکر

نرم‌افزار متلب در آخرین نسخهٔ خود، محیطی جدید و با امکانات متنوع، برای منطق فازی بازطراحی کرده است که شرح آن در شکل ۱ آورده شده است. این محیط امکان پیاده‌سازی و تبدیل سیستم‌های استنتاج ممدانی و سوگنو و هم‌چنین فازی نوع یک و دو را به کاربر می‌دهد.



شکل ۱: محیط جدید فازی متلب.

سوال ۶-۹

حلّ دستی - قسمت اول:

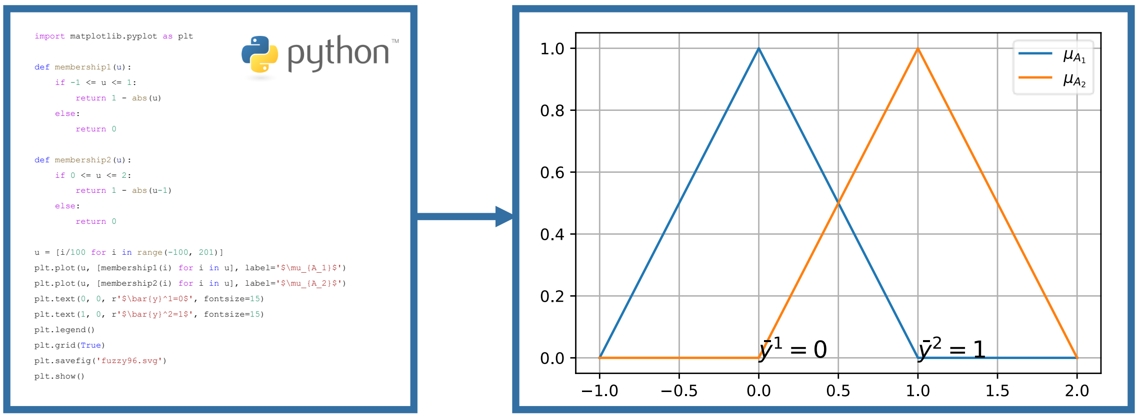
سیستمی فازی و دوورودی-تک‌خروجی را با دو قاعدهٔ اگر-آنگاه زیر در نظر می‌گیریم:

- اگر x_1، A_1 و x_2، A_2 باشد؛ آنگاه y، A_1 است.

- اگر $x_۱$، $A_۲$ و $x_۲$، $A_۱$ باشد؛ آنگاه y، $A_۲$ است.

که با توجه به روابط آورده‌شده ذیل پایگاه قواعد بالا در فصل هشتم کتاب، مراکز مجموعه‌های فازی $A_۱$ و $A_۲$ را به‌صورت $\bar{y}^۱ = ۰ ,\bar{y}^۲ = ۱$ در نظر می‌گیریم و توابع تعلقشان به‌صورت تعریف می‌کنیم. با استفاده از دستورات آورده‌شده در شکل ۲ توابع تعلق را رسم می‌کنیم و در همان شکل ۲ نشان می‌دهیم.

$$\mu_{A_۱}(u) = \begin{cases} ۱ - |u| & -۱ \leq u \leq ۱ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \mu_{A_۲}(u) = \begin{cases} ۱ - |u-۱| & ۰ \leq u \leq ۲ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases} \tag{۱}$$



شکل ۲: دستورات پایتون برای رسم توابع تعلق در سوال ۶-۹ و نتایج آن‌ها.

از طرف دیگر، موتور استنتاج حاصلضرب از رابطهٔ ۲ محاسبه می‌شود (M تعداد قواعد و n تعداد متغیرهای فازی ورودی به موتور استنتاج است). این رابطه به این معناست که با داشتن مجموعهٔ فازی A' در U، موتور استنتاج مجموعهٔ فازی B' را در V می‌دهد.

$$\mu_{B'}(y) = \max_{i=۱}^{M} \left[\sup_{x\in U} \left(\mu_{A'}(x) \prod_{l=۱}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\, \mu_{B^l}(y) \right) \right] \tag{۲}$$

در صورتی که مجموعهٔ فازی A' یک مجموعهٔ فازی منفرد با تابع تعلق موجود در رابطهٔ ۳ زیر تعریف شود که در آن x^* یک نقطه در $U = [-۱,۲]\times[-۱,۲]$ باشد، موتور استنتاج حاصل‌ضرب به شکلی که در رابطهٔ ۴

آورده شده است، ساده می‌شود.

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & x = x^* \\ 0 & x \neq x^* \end{cases} \tag{۳}$$

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right)\mu_{B^l}(y)\right] \tag{۴}$$

غیرفازی‌ساز ماکزیمم هم به‌صورت نقطه‌ای در $y' = hgt\left(B'\right)$ تعریف می‌شود که در آن $hgt\left(B'\right)$ مجموعهٔ تمام نقاطی از مجموعهٔ V است که در آن‌ها $\mu_{B'}(y)$ به بیشینهٔ مقدارش می‌رسد:

$$\operatorname{hgt}\left(B'\right) = \left\{y \in V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)\right\} \tag{۵}$$

این غیرفازی‌ساز، نقطهٔ y^* را به‌صورت عضوی دلخواه از $hgt\left(B'\right)$ تعریف می‌کند. در ادامه می‌نویسیم:

$$\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y) = \sup_{y\in V}\max_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right)\mu_B l(y)\right] \tag{۶}$$

برمبنای طبیعی‌بودن B^l و قابل تعویض بودن $\max_{l=1}^{M}$ و $\sup_{y\in V}$ می‌نویسیم (پایگاه قواعد فازی دو قانون دارد؛ پس $l^* \in \{1,2\}$ و $M = 2$):

$$\begin{aligned}\sup_{y\in V}\mu'_{B'}(y) &= \max_{l=1}^{M}\left[\sup_{y\in V}\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right)\mu_B^l(y)\right]\\ &= \max_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right)\right] = \prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^*}\left(x_i^*\right)\end{aligned} \tag{۷}$$

در این مسأله به ازای ورودی‌های مختلف از x_i^* پارامتر l^* بین یکی از مقادیر یک و دو تغییر می‌کند. می‌نویسیم:

$$\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^*}\left(x_i^*\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right) \tag{۸}$$

$$\mu_{B'}\left(\bar{y}^{l^*}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^{r^*}}\left(x_i^*\right) \tag{۹}$$

مشاهده می‌شود که $\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)$ در نقطهٔ $y=\bar{y}^{l^*}$ به دست می‌آید و با بهره‌گیری از غیرفازی‌ساز ماکزیمم سیستم فازی $f_1(x)$ به‌صورت $f_1(x)=\bar{y}^{l^*}$ خواهد بود. بنابراین، سیستم‌های فازی به‌صورت توابع تکه‌ای ثابت هستند و مقادیر ثابت، مراکز توابع تعلق در بخش «آنگاه» پایگاه قواعد فازی هستند.

شبیه‌سازی - قسمت اول:

در ادامه برای به‌وجودآمدن درکی بهتر و امکان شبیه‌سازی کارآمد فرض می‌کنیم ورودی سیستم فازی همان ورودی آورده‌شده در مثال ۲-۸؛ یعنی، $\left(x_1^*,x_2^*\right)=(0/3,0/6)$ باشد. درنتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)&=\max_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right)\right]\\&=\max\left[\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right),\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)\right]\end{aligned} \tag{۱۰}$$

طبق رابطهٔ ۱، داریم:

$$\begin{aligned}\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)&=\mu_{A_1}(0/3)=0/7\\\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right)&=\mu_{A_2}(0/6)=0/6\\\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)&=\mu_{A_2}(0/3)=0/3\\\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)&=\mu_{A_1}(0/6)=0/4\end{aligned} \tag{۱۱}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)&=\max\left[\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right),\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)\right]\\&=\max[0/7\times0/6,0/3\times0/4]=0/7\times0/6=0/42\end{aligned} \tag{۱۲}$$

از رابطهٔ ۱۲ نتیجه می‌شود که $\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)$ برابر با عبارت $\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right)$ می‌شود و بنابراین: $l'=1$.
در نتیجه سیستم فازی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(x)=\bar{y}^{l^*}=\bar{y}^1=0 \tag{13}$$

حال اگر فرض کنیم ورودی سیستم فازی $\left(x_1^*,x_2^*\right)=(1/2,-0/3)$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)&=\max_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right)\right]\\&=\max\left[\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right),\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)\right]\end{aligned} \tag{14}$$

طبق رابطهٔ ۱، داریم:

$$\begin{aligned}&\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)=\mu_{A_1}(1/2)=0\\&\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right)=\mu_{A_2}(-0/3)=0\\&\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)=\mu_{A_2}(1/2)=0/8\\&\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)=\mu_{A_1}(-0/3)=0/7\end{aligned} \tag{15}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)&=\max\left[\mu_{A_1^1}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^1}\left(x_2^*\right),\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)\right]\\&=\max[0\times 0,0/8\times 0/7]=0/8\times 0/7=0/56\end{aligned} \tag{16}$$

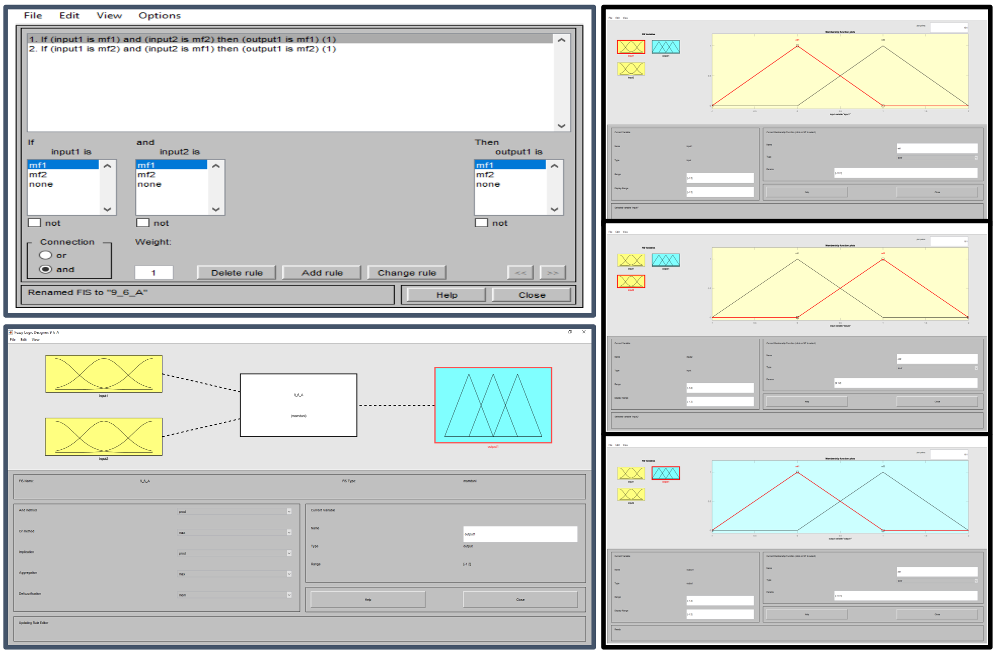
از رابطهٔ ۱۲ نتیجه می‌شود که $\sup_{y\in V}\mu_{B'}(y)$ برابر با عبارت $\mu_{A_1^2}\left(x_1^*\right)\mu_{A_2^2}\left(x_2^*\right)$ می‌شود و بنابراین: $l'=2$.
در نتیجه سیستم فازی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(x)=\bar{y}^{l^*}=\bar{y}^2=1 \tag{17}$$

بنابراین، همان‌طور که نشان داده شد، خروجی سیستم فازی با تغییر $l^*\in\{1,2\}$ از مقداری به مقدار دیگر، فقط بین مقادیر صفر و یک و به‌صورت گسسته تغییر می‌کند.

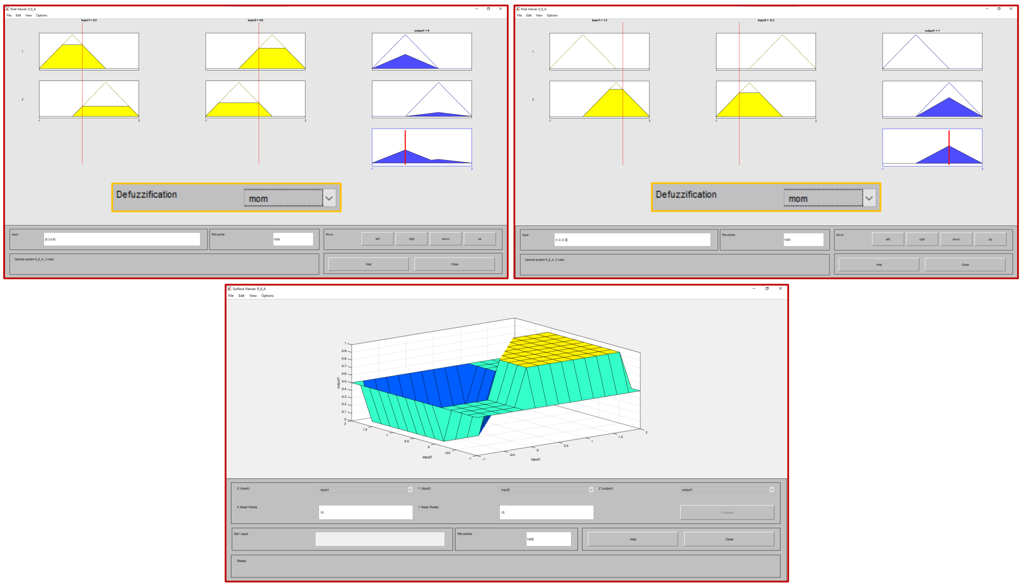
در ادامه، برای بررسی صحت محاسبات، یک پیاده‌سازی با استفاده از جعبه‌ابزار فازی متلب انجام

دادیم که با نام `9_6_A.fis` در پوشهٔ مربوط به این سوال قابل دسترسی است. قوانین، توابع تعلق و موتور استنتاج تنظیم‌شده برای شبیه‌سازی این سوال در شکل ۳ و نتایج آن برای دو ورودی بررسی‌شده در بالا در شکل ۴ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست‌آمده در شبیه‌سازی بر نتایج محاسبه‌شده به‌صورت دستی منطبق است. با توجه به هشدار متلب مبنی بر حذف دستور مربوط به این جعبه‌ابزار در نسخهٔ آیندهٔ متلب (شکل ۱)، از پیشنهاد جدید متلب استفاده کرده و همین پیاده‌سازی را در محیطی دیگر نیز انجام می‌دهیم. نتیجهٔ مربوط به این پیاده‌سازی در `9_6_f1.fis` آورده شده و در شکل ۵ نشان داده شده است. این جعبه‌ابزار قابلیت‌هایی از قبیل تبدیل سریع موتورهای استنتاج به یکدیگر و تبدیل فازی نوع اول به نوع دوم و غیره را دارد که نمونه‌ای از عملکرد این بخش‌های هم در شکل ۶ نشان داده شده است.

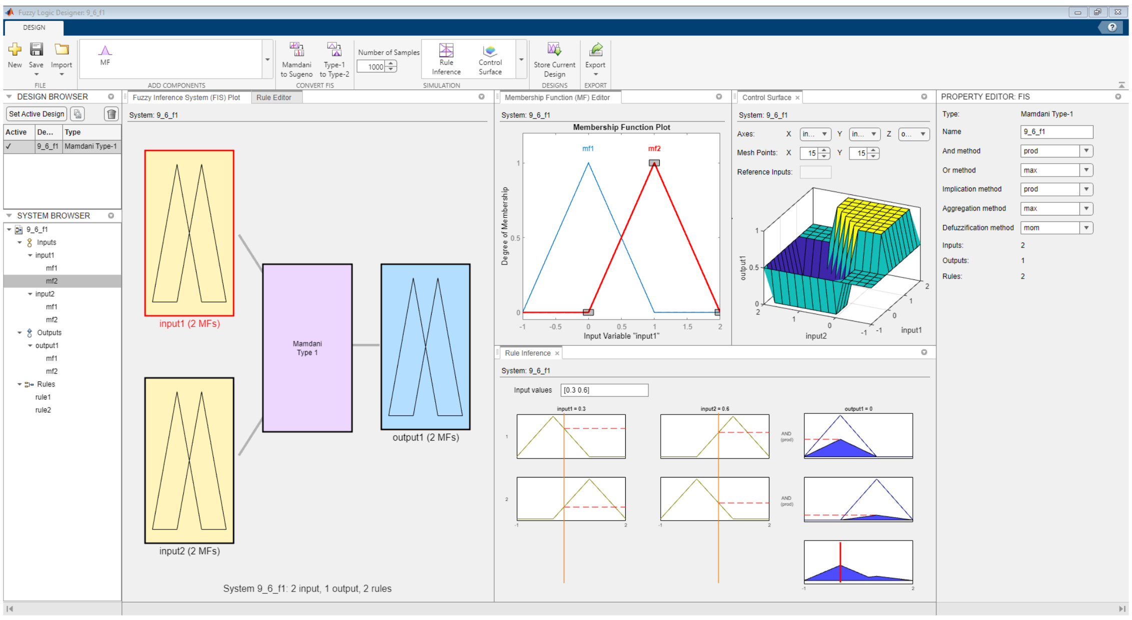


شکل ۳: تنظیمات جعبه‌ابزار فازی برای قسمت اول سوال ۶-۹.

علاوه بر این‌ها اسکریپت‌هایی را برای ترسیم سیستم فازی در این قسمت نوشته‌ایم. نمایی از این دستورات در شکل ۷ آورده شده است و دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است.



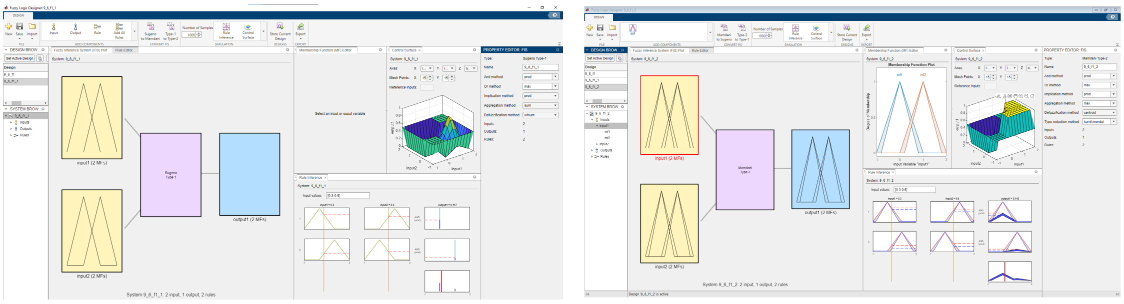
شکل ۴: نتایج جعبه‌ابزار فازی برای قسمت اول سوال ۶-۹.



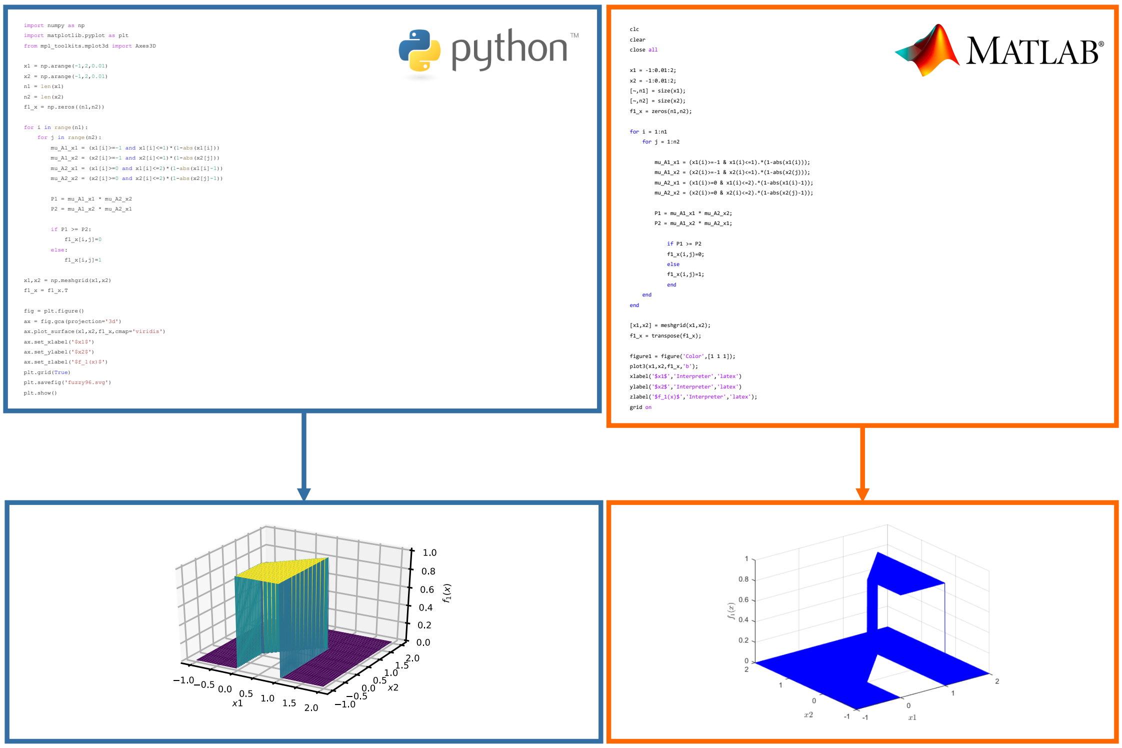
شکل ۵: نتایج جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت اول سوال ۶-۹.

حلّ دستی - قسمت دوم:

حال در ادامه می‌دانیم که سیستم‌های فازی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ مشابه یکدیگر هستند، با این تفاوت که در بخش غیرفازی‌ساز به‌جای ماکزیمم از میانگین مراکز با رابطهٔ $y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l}$ استفاده می‌شود که در آن $\bar{y}^l$ مرکز مجموعهٔ فازی lام و w_l میزان ارتفاع آن است. با در نظر گرفتن فازی‌ساز منفرد، موتور استنتاج حاصل‌ضرب



شکل ۶: امکانات تبدیلی جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت اول سوال ۶-۹.



شکل ۷: دستورات متلب و پایتون سوال ۶-۹ و نتایج آن‌ها.

به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^{M} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right) \mu_{B^l}(y) \right] \tag{۱۸}$$

هم‌چنین می‌دانیم:

$$w_l = \mu_{B'}\left(\bar{y}^l\right) = \max_{l=1}^{M} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right) \mu_{B^l}\left(\bar{y}^l\right) \right] = \max_{l=1}^{M} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}\left(x_i^*\right) \right] \tag{۱۹}$$

در نهایت سیستم فازی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f_{۲}(x)=y^{*}=\frac{\sum_{l=۱}^{M}\bar{y}^{l}\left[\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^{*}\right)\right]}{\sum_{l=۱}^{M}\left[\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^{*}\right)\right]} \qquad (۲۰)$$

حال اگر ورودی سیستم فازی $\left(x_{۱}^{*},x_{۲}^{*}\right)=(۰/۳,۰/۶)$ باشد؛ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_{۲}(x)=y^{*}&=\frac{\sum_{l=۱}^{M}\bar{y}^{l}\left[\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^{*}\right)\right]}{\sum_{l=۱}^{M}\left[\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^l}\left(x_i^{*}\right)\right]}\\ &=\frac{\bar{y}^{۱}\left[\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۱}\left(x_i^{*}\right)\right]+\bar{y}^{۲}\left[\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۲}\left(x_i^{*}\right)\right]}{\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۱}\left(x_i^{*}\right)+\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۲}\left(x_i^{*}\right)} \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با توجه به $\bar{y}^{۱}=۰$ ، $\bar{y}^{۲}=۱$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f_{۲}(x)=y^{*}&=\frac{\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۲}\left(x_i^{*}\right)}{\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۱}\left(x_i^{*}\right)+\prod_{i=۱}^{n}\mu_{A_i^۲}\left(x_i^{*}\right)}\\ &=\frac{\mu_{A_۱^۲}\left(x_۱^{*}\right)\mu_{A_۲^۲}\left(x_۲^{*}\right)}{\mu_{A_۱^۱}\left(x_۱^{*}\right)\mu_{A_۲^۱}\left(x_۲^{*}\right)+\mu_{A_۱^۲}\left(x_۱^{*}\right)\mu_{A_۲^۲}\left(x_۲^{*}\right)} \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

طبق رابطهٔ ۱، داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{A_۱^۱}\left(x_۱^{*}\right)&=\mu_{A_۱}(۰/۳)=۰/۷\\ \mu_{A_۲^۱}\left(x_۲^{*}\right)&=\mu_{A_۲}(۰/۶)=۰/۶\\ \mu_{A_۱^۲}\left(x_۱^{*}\right)&=\mu_{A_۲}(۰/۳)=۰/۳\\ \mu_{A_۲^۲}\left(x_۲^{*}\right)&=\mu_{A_۱}(۰/۶)=۰/۴ \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_{۲}(x)=y^{*}&=\frac{\mu_{A_۱^۲}\left(x_۱^{*}\right)\mu_{A_۲^۲}\left(x_۲^{*}\right)}{\mu_{A_۱^۱}\left(x_۱^{*}\right)\mu_{A_۲^۱}\left(x_۲^{*}\right)+\mu_{A_۱^۲}\left(x_۱^{*}\right)\mu_{A_۲^۲}\left(x_۲^{*}\right)}\\ &=\frac{۰/۳\times۰/۴}{۰/۷\times۰/۶+۰/۳\times۰/۴}=۰/۲۲ \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

حال اگر ورودی سیستم فازی $(x_1^*, x_2^*) = (0/7, 0/7)$ باشد؛ خواهیم داشت:

$$f_2(x) = y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i^*)\right]}{\sum_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i^*)\right]} = \frac{\bar{y}^1\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^1}(x_i^*)\right]+\bar{y}^2\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^2}(x_i^*)\right]}{\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^1}(x_i^*)+\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^2}(x_i^*)} \tag{25}$$

با توجه به $\bar{y}^1 = 0$ و $\bar{y}^2 = 1$ می‌نویسیم:

$$f_2(x) = y^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^2}(x_i^*)}{\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^1}(x_i^*)+\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^2}(x_i^*)} = \frac{\mu_{A_1^2}(x_1^*)\mu_{A_2^2}(x_2^*)}{\mu_{A_1^1}(x_1^*)\mu_{A_2^1}(x_2^*)+\mu_{A_1^2}(x_1^*)\mu_{A_2^2}(x_2^*)} \tag{26}$$

طبق رابطهٔ ۱، داریم:

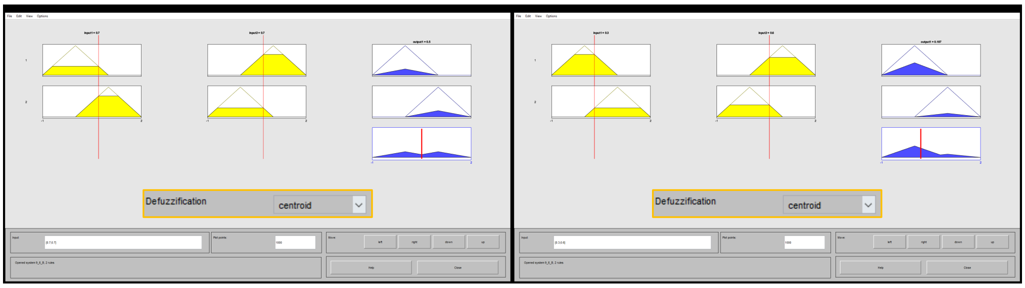
$$\mu_{A_1^1}(x_1^*) = \mu_{A_1}(0/7) = 0/3$$
$$\mu_{A_2^1}(x_2^*) = \mu_{A_2}(0/7) = 0/7 \tag{27}$$

بنابراین خواهیم داشت:

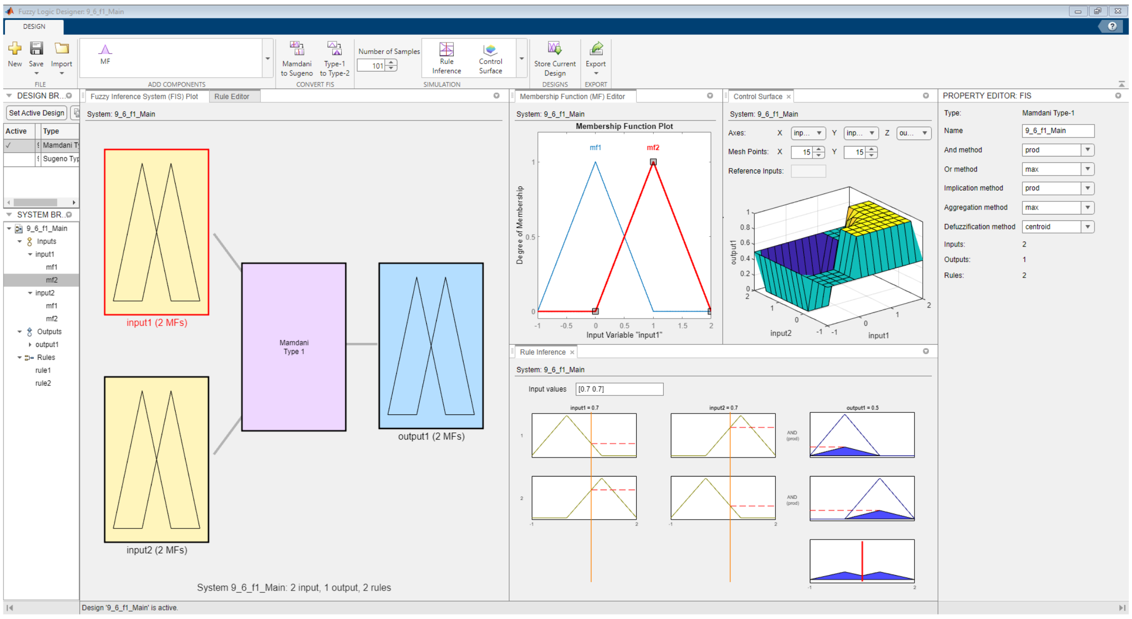
$$f_2(x) = y^* = \frac{\mu_{A_1^2}(x_1^*)\mu_{A_2^2}(x_2^*)}{\mu_{A_1^1}(x_1^*)\mu_{A_2^1}(x_2^*)+\mu_{A_1^2}(x_1^*)\mu_{A_2^2}(x_2^*)} = \frac{0/3\times 0/7}{0/3\times 0/7+0/3\times 0/7} = 0/5 \tag{28}$$

شبیه‌سازی - قسمت دوم:

برای بررسی صحت محاسبات، یک پیاده‌سازی با استفاده از جعبه‌ابزار فازی متلب انجام دادیم که با نام 9_6_B.fis در پوشهٔ مربوط به این سوال قابل دسترسی است. قوانین، توابع تعلق و موتور استنتاج تنظیم‌شده برای شبیه‌سازی این سوال در شکل ۸ و نتایج آن برای دو ورودی بررسی‌شده در بالا در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست‌آمده در شبیه‌سازی بر نتایج محاسبه‌شده به‌صورت دستی منطبق است. در ادامه، از پیشنهاد جدید متلب استفاده کرده و همین پیاده‌سازی را در محیطی دیگر نیز انجام می‌دهیم. نتیجهٔ مربوط به این پیاده‌سازی در 9_6_f2.fis آورده شده و در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۸: تنظیمات و نتایج جعبه‌ابزار فازی برای قسمت دوم سوال ۶-۹.



شکل ۹: تنظیمات و نتایج جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت دوم سوال ۶-۹.

توضیح پوشهٔ کدها

دو زیرپوشه در پوشهٔ اصلی این سوال (Q1__9_6) درنظر گرفته شده است. پوشهٔ 2_Script حاوی کدهای متلب و پایتون مربوط به رسم توابع فازی است. پوشهٔ 1_Toolbox حاوی خروجی جعبه‌ابزارهای قدیمی و جدید فازی است. نمادهای A و f1 در نامگذاری فایل‌ها به‌ترتیب به پیاده‌سازی قسمت اول سوال در محیط‌های قدیمی و جدید، و نمادهای B و f2 در نامگذاری فایل‌ها به‌ترتیب به پیاده‌سازی قسمت دوم سوال در محیط‌های قدیمی و جدید بازمی‌گردد.

سوال ۲-۱۰

حلّ دستی:

فرض می‌کنیم که تابع $g(x)$ روی مجموعهٔ بستهٔ $U = [\alpha, \beta] = [-۱, ۱] \subset \mathbb{R}$ تعریف شود. ما می‌خواهیم سیستم فازی $f(x)$ را طوری طراحی کنیم که تابع $g(x)$ را با دقت $\epsilon = ۰/۱$ تقریب بزند. بیان ریاضیاتی این موضوع به شرح رابطهٔ ۲۹ است.

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \le \left\| \frac{\partial g}{\partial x_۱} \right\|_\infty h_۱ + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_۲} \right\|_\infty h_۲ \le \epsilon \qquad (۲۹)$$

حال برای طراحی سیستم فازی به‌صورت گام‌به‌گام پیش می‌رویم:

گام اول: در این مثال، تعداد N مجموعهٔ فازی در بازهٔ $U = [\alpha, \beta] = [-۱, ۱] \subset \mathbb{R}$ به‌صورت $A^۱, \dots, A^N$ و با توابع تعلق مثلثیِ $\mu_{A^۱}(x; a_۱, b_۱, c_۱), \dots, \mu_{A^N}(x; a_N, b_N, c_N)$ در نظر می‌گیریم به شکلی که:

$$\begin{cases} A^۱ < A^۲ < \cdots < A^N \\ a_۱ = b_۱ = \alpha = -۱ \\ b_N = c_N = \beta = ۱ \end{cases} \qquad (۳۰)$$

اگر مرکز مجموعهٔ فازی $A^۱$، $e^۱$ باشد داریم: $e^۱ = \alpha = -۱$ و اگر اگر مرکز مجموعهٔ فازی A^N، e^N باشد داریم: $e^N = \beta = ۱$. بقیهٔ مراکز برای $j = ۲, ۳, \dots, N-۱$ به‌صورت $e^j = \alpha + h(j-۱)$ خواهد بود.هم‌چنین برای $k = ۱, ۲, \dots, N-۱$ فرض می‌کنیم که $a^{k+۱} = b^k$ باشد.

گام دوم: حال قواعد اگر-آنگاه فازی را به‌صورت «اگر x، A^i باشد آنگاه، y، B^i است.» را به‌صورتی تشکیل می‌دهیم که در آن i شمارهٔ قانون باشد. هم‌چنین مرکز مجموعه‌های فازی B^i که به‌صورت $\bar{y}^i$ نام‌گذاری می‌گردد از رابطهٔ ۳۱ انتخاب می‌گردد.

$$\bar{y}^i = g\left(e^i\right) = \sin\left(e^i\pi\right) + \cos\left(e^i\pi\right) + \sin\left(e^i\pi\right)\cos\left(e^i\pi\right), \qquad i = ۱, ۲, \dots, N \qquad (۳۱)$$

گام سوم: سیستم فازیِ $f(x)$ را با N قاعدهٔ آورده‌شده در رابطهٔ ۳۱، موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد

و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{y}^i \left[\mu_{A^i}(x)\right]}{\sum_{i=1}^{N} \left[\mu_{A^i}(x)\right]} \tag{۳۲}$$

برای تعیین دقت تقریب سیستم فازی از این قضیه کمک می‌گیریم که اگر فرض کنیم $f(x)$ سیستم فازی مطابق رابطهٔ ۳۲ باشد و $g(x)$ روی $U = [\alpha, \beta]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد؛ آنگاه داریم:

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty h \tag{۳۳}$$

حال با توجه به رابطهٔ ۲۹ می‌نویسیم:

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty h \le \epsilon, \qquad h = \max_{1 \le j \le N} \left|e^{j+1} - e^j\right| \tag{۳۴}$$

با نظر به این که دقت تقریب $\epsilon = 0/1$ ذکر شده داریم:

$$h < \frac{\varepsilon = 0/1}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty} \tag{۳۵}$$

در نتیجه، برای محاسبهٔ h، $\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty = \sup_{x \in U} \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \sup_{x \in U} |\pi \cos(x\pi) - \pi \sin(x\pi) + \pi \cos(2x\pi)| \tag{۳۶}$$

حال نیاز است تا $x \in U = [-1, 1]$ را به‌گونه‌ای بیابیم که عبارت $|\pi \cos(x\pi) - \pi \sin(x\pi) + \pi \cos(2x\pi)|$ را بیشینه کند. بنابراین، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\pi^2 \sin(x\pi) - \pi^2 \cos(x\pi) - 2\pi^2 \sin(2x\pi) = 0 \xrightarrow{\div(-\pi^2)} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \sin(x\pi) + \cos(x\pi) + 2 \sin(2x\pi) = 0 \end{aligned} \tag{۳۷}$$

از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(x\pi) + \cos(x\pi) = \sqrt{2} \sin\left(x\pi + \frac{\pi}{4}\right) \tag{۳۸}$$

در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^۲ g}{\partial x^۲} = \sqrt{۲}\sin\left(x\pi + \frac{\pi}{۴}\right) + ۲\sin(۲x\pi) = ۰ \\
&\rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = ۲\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \left(۲x\pi + \frac{\pi}{۲}\right)\right) \\
&\rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = ۲\cos\left(۲x\pi + \frac{\pi}{۲}\right)
\end{aligned}
\tag{۳۹}
$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ مثلثاتی $\cos\left(۲x\pi + \frac{\pi}{۲}\right) = ۱ - ۲\sin^۲\left(x\pi + \frac{\pi}{۴}\right)$ و تغییرمتغیر $s = x\pi + \frac{\pi}{۴}$، معادلهٔ مرتبه‌دومی به‌شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$
\frac{\partial^۲ g}{\partial x^۲} = ۴\sin^۲(s) + \sqrt{۲}\sin(s) - ۲ = ۰ \tag{۴۰}
$$

ریشه‌های رابطهٔ ۴۰ را با استفاده از متلب یا دستورات موجود در این پیوند محاسبه می‌کنیم. با اجرای دستورات نوشته‌شده و با توجه به بازهٔ موجود، جواب‌های ۱/۱۳۳- و ۰/۵۸ برای s به‌دست می‌آیند. درنتیجه، برای x داریم:

$$
x_۱ = \frac{s_۱ - \frac{\pi}{۴}}{\pi} = -۰/۰۶۵۴, x_۲ = \frac{s_۲ - \frac{\pi}{۴}}{\pi} = -۰/۶۱۰۶ \tag{۴۱}
$$

از میان دو نقطهٔ به‌دست‌آمده برای x، بیشینهٔ عبارت $|\pi\cos(x\pi) - \pi\sin(x\pi) + \pi\cos(۲x\pi)|$ در نقطهٔ $x_۱ = -۰/۰۶۵۴ \in [-۱, ۱]$ رخ می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \sup_{x\in U} \\
&\left|\ \pi\cos(-۰/۰۶۵۴\pi) - \pi\sin(-۰/۰۶۵۴\pi) + \pi\cos(۲(-۰/۰۶۵۴)\pi)\ \right| = ۶/۵۹۶
\end{aligned}
\tag{۴۲}
$$

بنابراین، با توجه به رابطهٔ ۳۵ داریم:

$$
\begin{aligned}
&h < \frac{\varepsilon}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty} = \frac{۰/۱}{۶/۵۹۶} \\
&h < ۰/۰۱۵
\end{aligned}
\tag{۴۳}
$$

بنابراین، می‌توان h را معادل ۰/۰۱ در نظر گرفت. باید توجه داشت که هدف از به‌دست‌آوردن فاصلهٔ مرکزی

توابع تعلق (h)، تعیین تعداد توابع تعلق یا همان N است. حال با انتخاب $h = ۰/۰۱$ (با توجه به نتیجهٔ رابطهٔ ۴۳) داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{۱ - (-۱)}{n} = \frac{۲}{n} = ۰/۰۱ \to n = ۲۰۰ \tag{۴۴}$$

با توجه به این که ۲۰۰ تقسیم در بازهٔ $[\alpha, \beta] = [-۱, ۱]$ نیاز است ($n = ۲۰۰$)، ۲۰۱ تابع تعلق در بازهٔ $[-۱, ۱]$ خواهیم داشت ($N = n + ۱ = ۲۰۱$). با توجه به این توضیحات، ۲۰۱ مجموعهٔ فازی با توابع تعلق مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

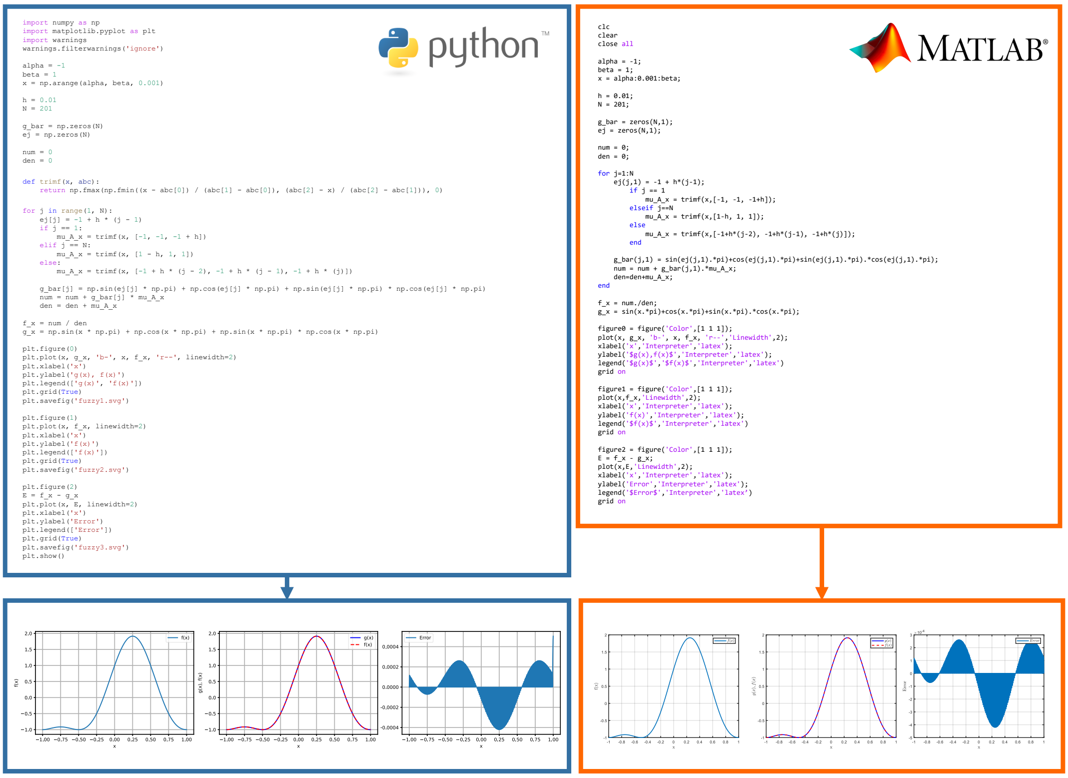
$$\begin{aligned}
&\mu_{A^۱}(x) = \mu_{A^۱}(x; a_۱, b_۱, c_۱) = \mu_{A^۱}(x; -۱, -۱, -۱ + h) \\
&\mu_{A^j}(x) = \mu_{A^j}(x; a_j, b_j, c_j) = \mu_{A^j}\left(x; e^{j-۱}, e^j, e^{j+۱}\right), \quad \begin{cases} j = ۲, \cdots, ۲۰۰ \\ e^j = \alpha + h(j - ۱) = -۱ + ۰/۰۱(j - ۱) \end{cases} \\
&\mu_{A^{۲۰۱}}(x) = \mu_{A^{۲۰۱}}(x; a_{۲۰۱}, b_{۲۰۱}, c_{۲۰۱}) = \mu_{A^{۲۰۱}}(x; ۱ - h, ۱, ۱)
\end{aligned} \tag{۴۵}$$

حال سیستم فازی $f(x)$ از روی ۲۰۱ قاعدهٔ اگر-آنگاه فازی ساخته شده و به این صورت محاسبه می‌شود:

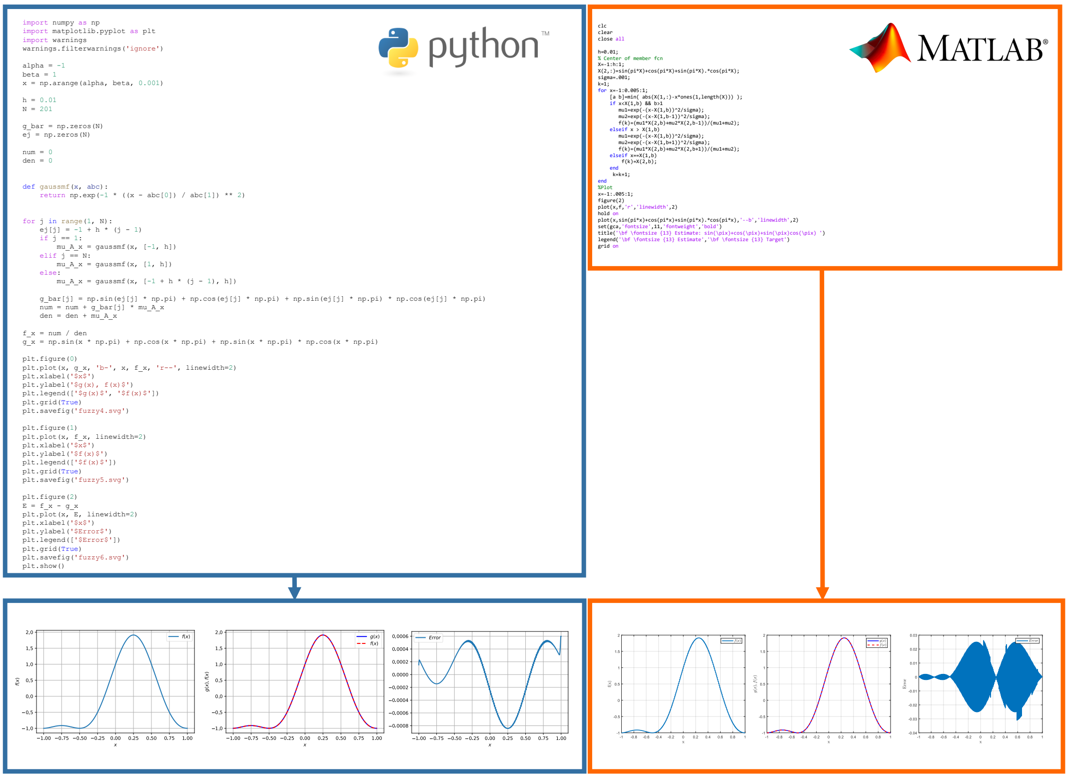
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sum_{i=۱}^{N} \bar{y}^i \left[\mu_{A^i}(x)\right]}{\sum_{i=۱}^{N} \left[\mu_{A^i}(x)\right]} = \frac{\sum_{i=۱}^{۲۰۱} g\left(e^i\right) \left[\mu_{A^i}(x)\right]}{\sum_{i=۱}^{۲۰۱} \left[\mu_{A^i}(x)\right]} \\
&= \frac{g\left(e^۱\right) \mu_{A^۱}(x) + g\left(e^۲\right) \mu_{A^۲}(x) + \cdots + g\left(e^{۲۰۱}\right) \mu_{A^{۲۰۱}}(x)}{\mu_{A^۱}(x) + \mu_{A^۲}(x) + \cdots + \mu_{A^{۲۰۱}}(x)}
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

شبیه‌سازی:

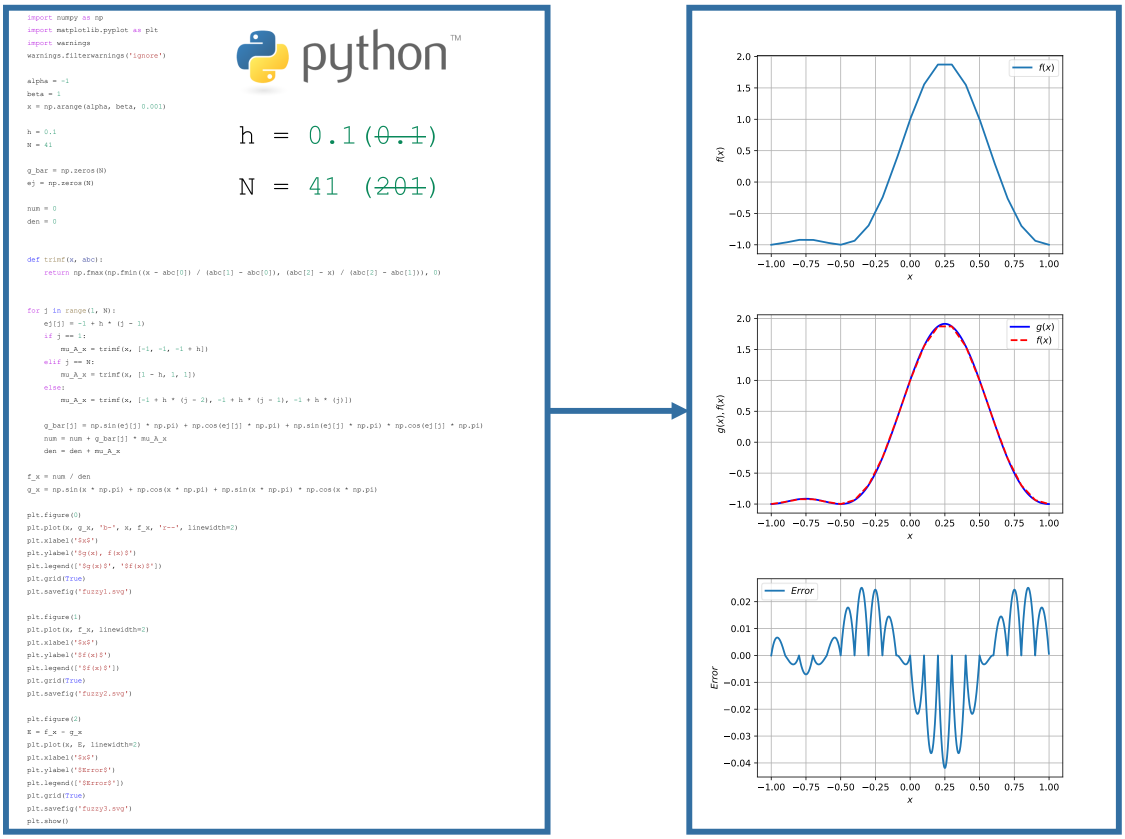
حال با توجه به محاسبات صورت‌گرفته، دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم $g(x)$ و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های **متلب و پایتون** نوشته‌ایم. نمایی از این دستورات در شکل ۱۰ آورده شده است و دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است. هم‌چنین اگر تابع تعلق را به‌جای مثلثی را به‌صورت گاوسی در نظر بگیریم دستورات و نتایج مرتبط با آن به‌صورتی می‌شود که در شکل ۱۱ نشان داده شده است. بررسی اثر کاهش تعداد توابع تعلق بر نتایج، در شکل ۱۲ و این پیوند آورده شده است. از مقایسهٔ شکل ۱۰ و شکل ۱۲ مشاهده می‌گردد که با کاستن تعداد توابع تعلق مثلثی تا میزان یک‌پنجم، خطا حدوداً ده برابر شده است.



شکل ۱۰: دستورات متلب و پایتون سوال ۲-۱۰ و نتایج آن‌ها.



شکل ۱۱: دستورات متلب و پایتون سوال ۲-۱۰ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی).



شکل ۱۲: دستورات پایتون و نتایج پیاده‌سازی سوال ۲-۱۰ با توابع تعلق کم‌تر.

توضیح پوشهٔ کدها

در پوشهٔ اصلی این سوال (Q2__10_2)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند. با توجه به تغییر نوع توابع تعلق در قسمت شبیه‌سازی دو نوع m-فایل متلب برای این پیاده‌سازی آورده شده است. پیاده‌سازی‌های مثلثی و گاوسی با استفاده از پایتون نیز به‌صورت یک‌جا در فایل کدهای مربوط به پایتون آورده شده است.

سوال ۵-۱۰

با توجه به شرط $k_1 + k_2 + k_3 > 0$ و این که k_iها صفر یا یک هستند، نتیجه می‌گیریم در هر حالت ممکن حداقل یکی از k_iها برابر یک است. بدین‌ترتیب، حالت‌های ممکن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
& k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 0 \\
& k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0 \\
& k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1 \\
& k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 0 \\
& k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 1 \\
& k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 1 \\
& k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1
\end{aligned}
\tag{47}
$$

با توجه به این هفت حالتِ ممکن، تابع $g(x)$ به‌صورت رابطهٔ ۴۸ تعریف می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
g(x_1, x_2, x_3) &= 1 + \sum_{k_1 k_2 k_3 \in k} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \\
&= 1 + x_1^1 x_2^0 x_3^0 + x_1^0 x_2^1 x_3^0 + x_1^0 x_2^0 x_3^1 + x_1^1 x_2^1 x_3^0 + x_1^1 x_2^0 x_3^1 + x_1^0 x_2^1 x_3^1 + x_1^1 x_2^1 x_3^1 \\
&= 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3
\end{aligned}
\tag{48}
$$

از تعریف مسأله داریم که $g(x)$ تابعی روی مجموعهٔ بستهٔ $U = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$ است. می‌خواهیم سیستم فازیِ $f(x)$ را طوی تعریف کنیم که تابع $g(x)$ را با دقت ϵ به شکلی یکنواخت تقریب بزند:

$$
\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \le \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 \le \epsilon \tag{49}
$$

حال برای طراحی سیستم فازی به‌صورت گام‌به‌گام پیش می‌رویم:

گام اول: در این مثال، تعداد N_i $(i = 1, 2, 3)$ مجموعهٔ فازی در بازهٔ $U = [\alpha_i, \beta_i] = [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ به‌صورت $A^1, \dots, A^{N_i}$ و با توابع تعلق مثلثیِ $\mu_{A_i^1}(x_i; a_i^1, b_i^1, c_i^1), \dots, \mu_{A_i}^{N_i}(x_i; a_i^{N_i}, b_i^{N_i}, c_i^{N_i})$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین در نظر داریم که: $A_i^1 < A_i^2 < \dots < A_i^{N_i}$, $b_i^1 = \alpha_i = 0$, $b_i^{N_i} = \beta_i = 1$. از سوی دیگر، اگر

مرکز مجموعهٔ فازی A_i^1 را با e_i^1 نشان دهیم، خواهیم داشت: $e_i^1=\alpha_i=0$. هم‌چنین اگر مرکز مجموعهٔ فازی $A_i^{N_i}$ را با $e_i^{N_i}$ نشان دهیم خواهیم داشت: $e_i^{N_i}=\beta_i=1$. بقیهٔ مراکز را هم به‌صورت $e_i^j=\alpha_i+h_i(j-1)$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض می‌کنیم که: $a_i^{k+1}=b_i^k$.

گام دوم: در ادامه، $M=N_1\times N_2\times N_3$ قاعدهٔ اگر–آنگاه فازی را به‌صورت «اگر x_1، $A_1^{i_1}$، x_2، $A_2^{i_2}$ و x_3، $A_3^{i_3}$ باشد؛ آن‌گاه y، $B^{i_1i_2i_3}$ است. لازم به ذکر است که $i_q=1,2,\ldots,N_q(q=1,2,3)$ بوده و مراکز مجموعه‌های فازی $B^{i_1i_2i_3}$ را با $\bar{y}^{i_1i_2i_3}=g\left(e_1^{i_1},e_2^{i_2},e_3^{i_3}\right)$ نشان می‌دهیم. این مراکز با توجه به روابط مسأله به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\bar{y}^{i_1i_2i_3}=g\left(e_1^{i_1},e_2^{i_2},e_3^{i_3}\right)\\&=1+e_1^{i_1}+e_2^{i_2}+e_3^{i_3}+e_1^{i_1}e_2^{i_2}+e_1^{i_1}e_3^{i_3}+e_2^{i_2}e_3^{i_3}+e_1^{i_1}e_2^{i_2}e_3^{i_3}\end{aligned}\tag{50}$$

گام سوم: سیستم فازی $f(x)$ را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز مبانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\sum_{i_3=1}^{N_3}\bar{y}^{i_1i_2i_3}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2}^{i_2}(x_2)\,\mu_{A_3}(x_3)\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\sum_{i_3=1}^{N_3}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\,\mu_{A_3}(x_3)\right]}\\&=\frac{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\sum_{i_3=1}^{N_3}g\left(e_1^{i_1},e_2^{i_2},e_3^{i_3}\right)\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\,\mu_{A_3}(x_3)\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\sum_{i_3=1}^{N_3}\left[\mu_{A_1}(x_1)\,\mu_{A_2}^{i_2}(x_2)\,\mu_{A_3}^{i_3}(x_3)\right]}\end{aligned}\tag{51}$$

برای تعیین دقت تقریب سیستم فازی از این قضیه استفاده می‌کنیم که با فرض $f(x)$ به‌عنوان سیستم فازی و $g(x)$ به‌صورت پیوسته و مشتق‌پذیر روی $U=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times[\alpha_3,\beta_3]$، خواهیم داشت:

$$\|g(x)-f(x)\|_\infty\le\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1+\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2+\left\|\frac{\partial g}{\partial x_3}\right\|_\infty h_3\le\epsilon,\begin{cases}\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\|\,|_\infty=\sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|\\h_i=\max_{1\le j\le N_{i-1}}\left|e_i^{j+1}-e_i^j\right|\end{cases}\tag{52}$$

برای هر سه متغیر x_1، x_2 و x_3 فرض می‌کنیم که $h_1=h_2=h_3=h$ و در نتیجه داریم:

$$\varepsilon>h\left(\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty+\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty+\left\|\frac{\partial g}{\partial x_3}\right\|_\infty\right)\to h<\frac{\varepsilon}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty+\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty+\left\|\frac{\partial g}{\partial x_3}\right\|_\infty}\tag{53}$$

برای محاسبهٔ h می‌نویسیم:

$$\left\|\left|\frac{\partial g}{\partial x_۱}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_۱}\right| = \sup_{x\in U}\left| ۱ + x_۲ + x_۳ + x_۲ x_۳ \right| = ۴ \right.$$
$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_۲}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_۲}\right| = \sup_{x\in U}\left| ۱ + x_۱ + x_۳ + x_۱ x_۳ \right| = ۴ \tag{۵۴}$$
$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_۳}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_۳}\right| = \sup_{x\in U}\left| ۱ + x_۱ + x_۲ + x_۱ x_۲ \right| = ۴$$

بنابراین داریم:

$$h < \frac{۰/۰۵}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x_۱}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_۲}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_۳}\right\|_\infty} = \frac{۰/۰۵}{۴+۴+۴} = ۰/۰۰۴۱۶ \tag{۵۵}$$

حال با محاسبهٔ h تعداد توابع تعلق یا تعداد تقسیمات بازه‌های $[\alpha_۱, \beta_۱] = [\alpha_۲, \beta_۲] = [\alpha_۳, \beta_۳] = [۰, ۱]$ (n) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{۱ - (۰)}{n} = \frac{۱}{n} = ۰/۰۰۴ \to n = ۲۵۰ \tag{۵۶}$$

n تعداد تقسیمات بازه‌های $[\alpha_۱, \beta_۱] = [\alpha_۲, \beta_۲] = [\alpha_۳, \beta_۳] = [۰, ۱]$ بوده و در نتیجه $N_۱ = N_۲ = N_۳ = N = n + ۱ = ۲۵۱$ تابع تعلق روی متغیرهای X تعریف می‌شود و با توجه به گام دوم تعداد $N_۱ \times N_۲ \times N_۳ = ۲۵۱ \times ۲۵۱ \times ۲۵۱ = ۱۵۸۱۳۲۵۱$ قانون اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت. درواقع در این سیستم فازی بیش از ۱۵ میلیون قانون داریم که عددی بسیار بزرگ است. لازم به ذکر است که این موضوع در چالش بیش‌اِشغالی فضای RAM در این کد پیاده‌سازی خود را نشان می‌دهد. درنهایت سیستم فازی $f(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_۱=۱}^{۲۵۱}\sum_{i_۲=۱}^{۲۵۱}\sum_{i_۳=۱}^{۲۵۱} g\left(e_۱^{i_۱}, e_۲^{i_۲}, e_۳^{i_۳}\right)\left[\mu_{A_۱^{i_۱}}(x_۱)\,\mu_{A_۲^{i_۲}}(x_۲)\,\mu_{A_۳^{i_۳}}(x_۳)\right]}{\sum_{i_۱=۱}^{۲۵۱}\sum_{i_۲=۱}^{۲۵۱}\sum_{i_۳=۱}^{۲۵۱}\left[\mu_{A_۱^{i_۱}}(x_۱)\,\mu_{A_۲}^{i_۲}(x_۲)\,\mu_{A_۳}^{i_۳}(x_۳)\right]} \tag{۵۷}$$

سوال ۷-۱۰

حلّ دستی:

فرض می‌کنیم که تابع $g(x)$ روی مجموعهٔ $U = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ تعریف شود. ما می‌خواهیم سیستم فازی $f(x)$ را طوری طراحی کنیم که تابع $g(x)$ را با دقت ϵ تقریب بزند. بیان ریاضیاتی این موضوع به شرح رابطهٔ ۶۱ است.

$$\|g-f\|_\infty = \sup_{x\in U}|g(x)-f(x)| \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2 \le \epsilon \tag{58}$$

حال برای طراحی سیستم فازی به‌صورت گام‌به‌گام پیش می‌رویم:

گام اول: در این مثال، تعداد N_i $(i = 1,2)$ مجموعهٔ فازی در بازهٔ $U = [\alpha_i, \beta_i] = [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ به‌صورت $A^1, \ldots, A_i^N$ و با توابع تعلق مثلثیِ $\mu_{A_i^1}\left(x_i; a_i^1, b_i^1, c_i^1\right), \ldots, \mu_{A_i}^{N_i}\left(x_i; a_i^{N_i}, b_i^{N_i}, c_i^{N_i}\right)$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین در نظر داریم که: $A_i^1 < A_i^2 < \cdots < A_i^{N_i}$ $b_i^{N_i} = \beta_i = 1, b_i^1 = \alpha_i = -1,$. از سوی دیگر، اگر مرکز مجموعهٔ فازی A_i^1 را با e_i^1 نشان دهیم، خواهیم داشت: $e_i^1 = \alpha_i = -1$. هم‌چنین اگر مرکز مجموعهٔ فازی $A_i^{N_i}$ را با $e_i^{N_i}$ نشان دهیم خواهیم داشت: $e_i^{N_i} = \beta_i = 1$. بقیهٔ مراکز را هم به‌صورت $e_i^j = \alpha_i + h_i(j-1)$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین از آن‌جا که نقطهٔ شروع تابع بعدی، مرکز تابع قبلی است، فرض می‌کنیم که: $a_i^{k+1} = b_i^k$.

گام دوم: در ادامه، $M = N_1 \times N_2$ قاعدهٔ اگر–آنگاه فازی را به‌صورت «اگر x_1، $A_1^{i_1}$ و x_2، $A_2^{i_2}$ باشد؛ آن‌گاه y، $B^{i_1 i_2}$ است.» می‌سازیم. لازم به ذکر است که $i_q = 1,2,\ldots,N_q (q = 1,2)$ بوده و مراکز مجموعه‌های فازی $B^{i_1 i_2}$ را با $\bar{y}^{i_1 i_2} = g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)$ نشان می‌دهیم. این مراکز با توجه به روابط اصلی مطرح‌شده در صورت مسأله به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right) = 0{/}52 + 0{/}1 e_1^{i_1} + 0{/}28 e_2^{i_2} - 0{/}06 e_1^{i_1} e_2^{i_2} \tag{59}$$

گام سوم: سیستم فازی $f(x)$ را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد

و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_{۱}=۱}^{N_{۱}} \sum_{i_{۲}=۱}^{N_{۲}} \bar{y}^{i_{۱} i_{۲}} \left[\mu_{A_{۱}^{i_{۱}}}(x_{۱})\, \mu_{A_{۲}}(x_{۲})\right]}{\sum_{i_{۱}=۱}^{N_{۱}} \sum_{i_{۲}=۱}^{N_{۲}} \left[\mu_{A_{۱}}(x_{۱})\, \mu_{A_{۲}}(x_{۲})\right]} = \frac{\sum_{i_{۱}=۱}^{N_{۱}} \sum_{i_{۲}=۱}^{N_{۲}} g\left(e_{۱}^{i_{۱}}, e_{۲}^{i_{۲}}\right) \left[\mu_{A_{۱}}(x_{۱})\, \mu_{A_{۲}}^{i_{۲}}(x_{۲})\right]}{\sum_{i_{۱}=۱}^{N_{۱}} \sum_{i_{۲}=۱}^{N_{۲}} \left[\mu_{A_{۱}^{i_{۱}}}(x_{۱})\, \mu_{A_{۲}}^{i_{۲}}(x_{۲})\right]} \tag{۶۰}$$

دقت تقریب سیستم فازی بواسطهٔ همان قضیهٔ مطرح‌شده در قسمت‌های قبلی تعیین می‌شود و داریم:

$$\|g-f\|_{\infty} = \sup_{x\in U} |g(x)-f(x)| \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\right\|_{\infty} h_{۱} + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۲}}\right\|_{\infty} h_{۲} \le \epsilon, \begin{cases} \|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\| \, |_{\infty} = \sup_{x\in U} \left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right| \\ h_i = \max_{۱\le j\le N_{i-۱}} \left|e_i^{j+۱} - e_i^{j}\right| \end{cases} \tag{۶۱}$$

با توجه به فرض دقت $\epsilon = ۰/۱$ برای تقریب سیستم فازی و هم‌چنین فرض $h_{۱} = h_{۲} = h$ داریم:

$$\varepsilon > h\left(\left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\right\|_{\infty} + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۲}}\right\|_{\infty}\right) \to h < \frac{\varepsilon}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\right\|_{\infty} + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۲}}\right\|_{\infty}} \tag{۶۲}$$

بنابراین، برای محاسبهٔ h کافیست بنویسیم:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\right\|_{\infty} &= \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\right| = \sup_{x\in U}|۰/۱ - ۰/۰۶x_{۲}| \\ &= |۰/۱ - (۰/۰۶ \times -۱)| = ۰/۱۶ \\ \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۲}}\right\|_{\infty} &= \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_{۲}}\right| = \sup_{x\in U}|۰/۲۸ - ۰/۰۶x_{۱}| \\ &= |۰/۲۸ - (۰/۰۶ \times -۱)| = ۰/۳۴ \end{aligned} \tag{۶۳}$$

بنابراین:

$$h < \frac{۰/۱}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۱}}\right\|_{\infty} + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_{۲}}\right\|_{\infty}} = \frac{۰/۱}{۰/۱۶ + ۰/۳۴} = ۰/۲ \tag{۶۴}$$

حال با محاسبهٔ h، تعداد توابع تعلق را محاسبه خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n} = 0.2 \tag{65}$$

n تعداد تقسیمات بازه‌های $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] = [-1, 1]$ بوده و در نتیجه $N_1 = N_2 = N = n + 1 = 11$ تابع تعلق روی متغیرهای X تعریف می‌شود. درواقع ما در نهایت ۱۱ مجموعهٔ فازی با توابع تعلق مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

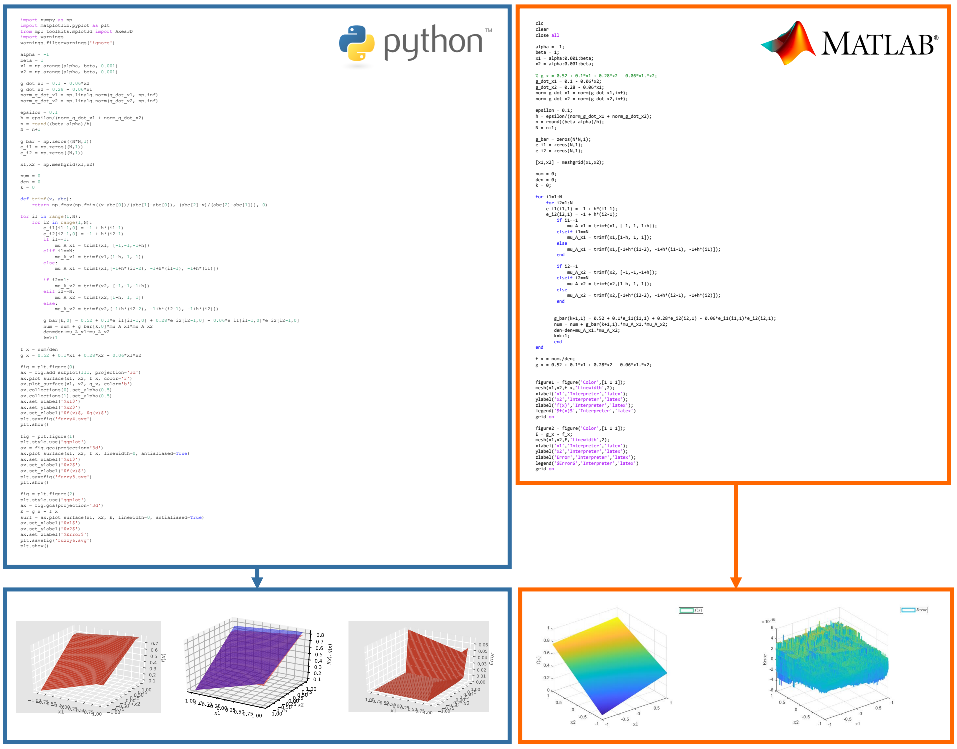
$$\begin{aligned}
&\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}(x; a_1, b_1, c_1) = \mu_{A^1}(x; -1, -1, -0.8) \\
&\mu_{ji}(x) = \mu_{A^j}(x; a_j, b_j, c_j) = \mu_A j\left(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}\right), \quad \begin{cases} j = 2, \cdots, 10 \\ e^j = \alpha + h(j-1) = -1 + 0.2(j-1) \end{cases} \\
&\mu_{A^{11}}(x) = \mu_{A^{11}}(x; a_{11}, b_{11}, c_{11}) = \mu_{A^{11}}(x; 0.8, 1, 1)
\end{aligned} \tag{66}$$

در مجموع $N_1 \times N_2 = 11 \times 11 = 121$ قاعدهٔ اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت و درنهایت سیستم فازی $f(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

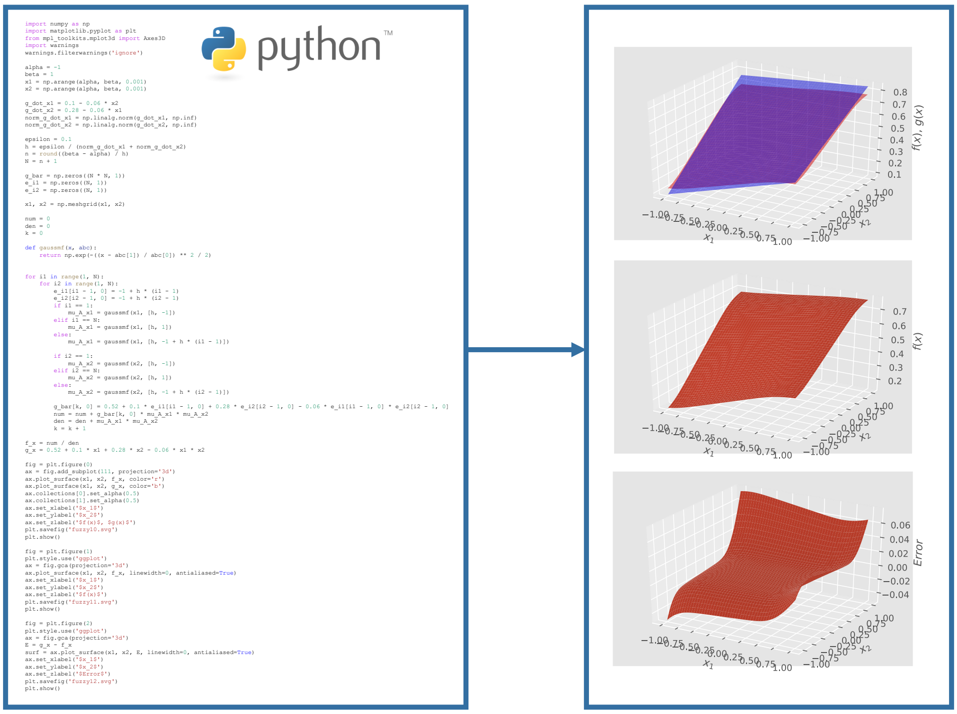
$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]}{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)\right]} \tag{67}$$

شبیه‌سازی:

دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم $g(x)$ و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های **متلب و پایتون** نوشته‌ایم. نمایی از این دستورات در شکل ۱۳ آورده شده است و دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است. حال اگر تابع تعلق را به‌جای مثلثی گاوسی در نظر بگیریم دستورات و نتایج مرتبط با آن به‌صورتی می‌شود که در شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۳: دستورات متلب و پایتون سوال ۷-۱۰ و نتایج آن‌ها.



شکل ۱۴: دستورات پایتون سوال ۷-۱۰ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی).

توضیح پوشهٔ کدها

در پوشهٔ اصلی این سوال (`Q4__10_7`)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند.