隐马尔科夫模型

1、隐马尔科夫模型的基本概念

1.1、隐马尔科夫模型的基本概念

隐马尔科夫模型(HMM)，描述由隐藏的马尔科夫链观测序列的过程，属于生成模型。HMM是一个关于时序的概率模型，按照概率生成观测序列和状态序列，先生成随机不可观测的状态序列，再由这些状态序列，对应生成一个随机的观测序列，终极目的，生成观测序列。这里包含了双重随机，第一个是状态随机，第二个是观测随机。HMM由初始概率分布，状态转移概率分布以及观测概率分布确定。

假设 Q 是所有可能的状态集合，V 是所有可能的观测的集合：

$$Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_N\} \quad V=\{v_1,v_2,\ldots,v_M\}$$

其中，N 表示所有的状态数，是固定的，M 表示所有的观测值数目。

I 是长度为 T 的状态序列，O 是对应的观测序列，每个状态和观测有多种取值，状态序列和对应的观测序列长度相等:

$$I=(i_1,i_2,\ldots,i_T) \quad O=(o_1,o_2,\ldots,o_T)$$

A 表示状态转移概率矩阵：

$$A=\left[a_{ij}\right]_{N\times N}$$

其中，a_{ij} 表示在 t 时刻处于状态 q_i 的条件下，在 $t+1$ 时刻处于 q_j 的概率。

$$a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j \mid i_t=q_i)$$

B 表示观测概率矩阵：

$$B=\left[b_j(k)\right]_{N\times M}$$

其中，$b_j(k)$ 表示在时刻 t 下，处于状态 q_j 的条件下，生成观测值 v_k 的概率。

$$b_j(k)=P(o_t=v_k \mid i_t=q_j)$$

π 表示初始概率向量：

$$\pi=(\pi_i)$$

π 表示 $t=1$ 时刻 q_i 的概率分布，第一步的概率分布。

$$\pi_i=P(i_1=q_i)$$

隐马尔科夫模型，π 和 A 决定状态序列，B 决定观测序列，马尔科夫模型 λ ，三个参数称为三要素：

$$\lambda=(A,B,\pi)$$

状态转移概率矩阵 A 与初始概率分布 π 确定了隐藏的马尔科夫链，生成不可观测的状态序列。观测概率矩阵 B 确定了如何从状态生成观测，与状态序列综合确定了如何产生观测序列。

马尔科夫的两个基本假设，这两个假设非常重要：

- 齐次马尔科夫假设，假设隐藏的马尔科夫链在任意时刻 t 的状态，只依赖与前一时刻的状态，与上一个状态的观测无关，至于状态转移概率有关，也与时刻 t 无关。

$$P(i_t \mid i_{t-1}, o_{t-1}, \ldots, i_1, o_1) = P(i_t \mid i_{t-1})$$

- 观测独立性假设，任意时刻的观测只依赖与该时刻对应的状态，与其他观测和状态无关。

$$P(o_t \mid i_t, o_{t-1}, \ldots, i_1, o_1) = P(o_t \mid i_t)$$

例子，假设有4个盒子，每个盒子里面都装有红白两种颜色的求，盒子里面的球如下表：

盒　子	1	2	3	4
红球数	5	3	6	8
白球数	5	7	4	2

按照下面的方法抽球，产生一个球的颜色的观测序列：开始，从4个盒子里面等概率随机抽取1个盒子，然后在这个盒子里面随机抽取1个求，记录颜色后放回。然后从当前的盒子随机转移到下一个盒子，转移规则如下：如果当前的盒子是1，那么下一个盒子一定是2，如果当前的盒子是2或3，那么分别以0.4和0.6的概率转移到左边或者右边的盒子，如果是盒子4，那么分别以0.5个概率停留在盒子4或者转移到盒子3。如此下去，重复5次，得到一个求得颜色的观测序列。

$$O = \{红，红，白，白，红\}$$

在这个过程中，观测这只能观测到球的颜色，观测不到从哪个盒子取出来的，也就是观测不到状态序列。在这个过程中，有两个随机序列，一个是盒子的序列(状态序列)，一个是球的颜色的观测序列(观测序列)，前者是隐藏的，后者是可观测的。状态序列是隐藏的，观测序列是可观测的，这就是一个典型的**HMM**模型。

盒子对应于状态，状态的集合是：

$$Q = \{盒子1，盒子2，盒子3，盒子4\} \quad N = 4$$

球的颜色对应观测，观测集合为：

$$V = \{红，白\} \quad M = 2$$

状态序列和观测序列的长度为 $T = 5$
初始概率分布为(机器学习中很多变量默认是使用列向量表示)：

$$\pi = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$$

状态转移概率分布为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

观测概率分布为：

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

1.2、观测序列的生成过程

根据HMM的定义，可将一个长度为 T 的观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$ 的生成过程描述如下：

观测序列的生成
输入：隐马尔科夫模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 模型已知，观测序列的长度 T 。
输出：观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$

- 按照初始状态分布 π 产生状态 i_1 ，按照概率分布生成。
- 令 $t=1$
- 按照状态 i_t 的 观测概率分布 $b_{i_t}(k)$ 生成观测 o_t
- 按照状态 i_t 的状态转移概率分布 $\{a_{i_t i_{t+1}}\}$ 产生状态 i_{t+1} ，一共有 N 种可能。
- 迭代，直到达到指定的长度。

1.3、隐马尔科夫模型的3个基本问题

- 概率计算问题。使用前向后向算法，给定模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$，计算在模型 λ 下观测序列 O 的概率 $P(O|\lambda)$，这一步是 学习算法中的一个必备步骤，用于**EM**算法的 **E** 步
- 学习问题。已知观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$ ，估计模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 的参数。使得在该模型下，观测序列概率 $P(O|\lambda)$ 最大。通常使用极大似然估计的方法来估计参数。由于含有隐变量，是无标签数据，所以需要使用 **EM** 算法。
- 预测问题，也叫解码问题，已知模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$，求给定观测条件序列条件下，概率 $P(I|O)$ 最大的状态序列 $I=(i_1,i_2,...,i_T)$。也就是给定观测序列，求最可能的状态序列。通常用于序列标注问题，重点是求状态序列。

总结起来，这三个问题就是求观测序列的概率，估计模型参数，求状态序列。

2、概率计算方法

2.1、直接计算法

给定模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$，计算在模型 λ 下观测序列 O 的概率 $P(O|\lambda)$，最直接的方法是，按概率公式直接计算。通过列举所有长度为 T 的状态序列 $I=(i_1,i_2,...,i_T)$ ，求各个状态序列 I 与观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$ 的联合概率 $P(O,I|\lambda)$，然后对所有的状态序列求和，得到 $P(O|\lambda)$。先求联合概率，再对每个状态求和。

指定状态序列 $I=(i_1,i_2,...,i_T)$ 出现的概率：

$$P(I|\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}...a_{i_{T-1}i_T}$$

在指定状态序列 $I=(i_1,i_2,...,i_T)$ 下，观测序列 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$ 出现的概率：

$$P(O|I,\lambda)=b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)...b_{i_T}(o_T)$$

O 和 I 同时出现的联合概率为：

$$P(O|\lambda)=P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)$$

$$=[\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)][a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)]...[a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)]$$

然后，对所有可能的状态序列 I 求和，得到观测序列 O 的概率 $P(O \mid \lambda)$，具体求解方式如下：

$$P(O \mid \lambda) = \sum_I P(O \mid I, \lambda) P(I \mid \lambda)$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_T} [\pi_{i_1} b_{i_1}(o_1)][a_{i_1 i_2} b_{i_2}(o_2)] \ldots [a_{i_{T-1} i_T} b_{i_T}(o_T)]$$

从上面的公式可以看到，一共要进行 T 次求和，由于每一步，需要对所有的状态都求指定观测 o_i 的概率，所以需要 N 次计算，那么求完一整个观测序列，时间复杂度为 $O(TN^T)$，这种复杂度在非常大，计算几乎不可能。

2.2、前向算法

前向概率，给定隐马尔科夫模型 λ ，定义到时刻 t 部分观测序列为 $o_1, o_2, \ldots, o_t$，且在 t 时刻状态为 q_i 的概率，求在特定时刻 t，满足特定的观测序列，并且在该时刻，状态为 q_i 的概率：

$$\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, \ldots, o_t, i_t = q_i \mid \lambda)$$

可以递归地求出前向概率 $\alpha_t(i)$，以及观测序列概率 $P(O \mid \lambda)$。

最终目的，求观测序列的前向概率
输入：隐马尔科夫模型 λ，观测序列 O
输出：观测序列概率 $P(O \mid \lambda)$

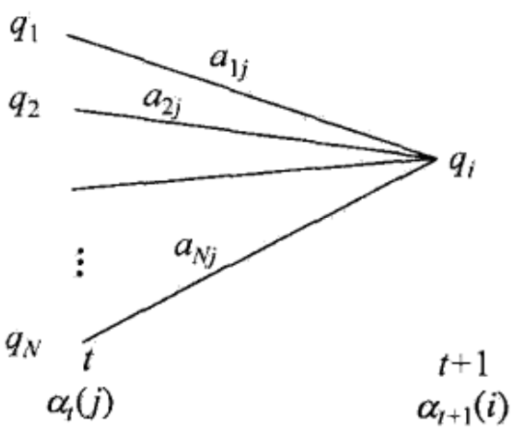
- 初值 $t = 1$：

$$\alpha_1(i) = P(o_1, i_1 = q_i \mid \lambda) = \pi_i b_i(o_1) \quad i = 1, 2, \ldots, N \text{ (状态数量)}$$

- 递推，对 $t = 1, 2, \ldots, T-1$，只能递推到 $T-1$ 步，具体的形式如图：

$$\alpha_{t+1}(i) = \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j) \cdot a_{ji}\right] b_i(o_{t+1})$$

  左边中括号部分表示，按照指定的观测序列 $o_1, o_2, \ldots, o_t$，走下来，在 $t+1$ 时刻的出现状态 q_i 的概率，右边部分表示在 q_i 状态出现指定观测的概率。



.

- 终止，需要对最后所有的出现指定观测的概率进行累加。

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

前向算法实际是基于状态序列的路径结构递推的计算 $P(O|\lambda)$ 的算法，前向算法高效的关键是局部计算前向概率，避免了很多重复计算，通过递推的方法，推广到全局。由于计算时，只要用到上一步的结果，所以只要计算两层，时间复杂度为 $O(N^2T)$

例子：已知上面的盒子和球模型为 $\lambda=(A,B,\pi)$，状态集合 $Q=\{1,2,3\}$，观测集合为 $V=\{$红，白$\}$，参数如下：

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix}\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^T$$

设 $T=3$，$O=($红，白，红$)$，使用前向算法计算观测概率值 $P(O|\lambda)$

- 计算初值：

$$\alpha_1(q_i=1)=\pi_1\cdot b_1(\text{红})=0.2\times 0.5=0.10$$
$$\alpha_1(q_i=2)=\pi_2\cdot b_2(\text{红})=0.4\times 0.4=0.16$$
$$\alpha_1(q_i=3)=\pi_3\cdot b_3(\text{红})=0.7\times 0.4=0.28$$

- 递推计算：

$$\alpha_2(q_i=1)=\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_1(j)\cdot a_{j1}\right]b_1(\text{白})=(0.10\times 0.5+0.16\times 0.3+0.28\times 0.2)\times 0.5=0.077$$
$$\alpha_2(q_i=2)=\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_1(j)\cdot a_{j2}\right]b_2(\text{白})=(0.10\times 0.2+0.16\times 0.5+0.28\times 0.3)\times 0.6=0.1104$$
$$\alpha_2(q_i=3)=\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_1(j)\cdot a_{j3}\right]b_3(\text{白})=(0.10\times 0.3+0.16\times 0.2+0.28\times 0.5)\times 0.3=0.0606$$
$$\alpha_3(q_i=1)=\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_2(j)\cdot a_{j1}\right]b_1(\text{红})=(0.077\times 0.5+0.1104\times 0.3+0.0606\times 0.2)\times 0.5=0.04187$$
$$\alpha_3(q_i=2)=\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_2(j)\cdot a_{j2}\right]b_2(\text{红})=(0.077\times 0.2+0.1104\times 0.5+0.0606\times 0.3)\times 0.4=0.03551$$
$$\alpha_3(q_i=3)=\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_2(j)\cdot a_{j3}\right]b_3(\text{红})=(0.077\times 0.3+0.1104\times 0.2+0.0606\times 0.5)\times 0.7=0.05284$$

- 终止，将所有可能出现指定状态的概率累加

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_3(i)=0.13022$$

2.3、后向算法

后向概率，给定马尔科夫模型 λ，已知 t 时刻的状态 q_i，求从 $t+1$ 到 T 的出现指定观测序列 $o_{t+1},o_{t+2},...,o_T$ 的概率。

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \ldots, o_T \mid i_t = q_i, \lambda)$$

可以只用递推的方法求得后向概率 $\beta_t(i)$，以及观测序列概率 $P(O \mid \lambda)$

最终目的，求观测序列的后向概率
输入：隐马尔科夫模型 λ，观测序列 O
输出：观测序列概率 $P(O \mid \lambda)$

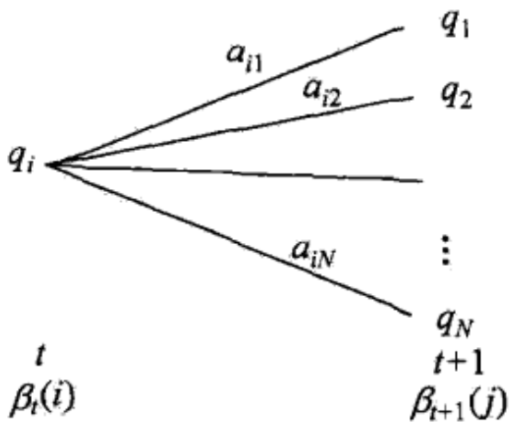
- 初始化，由于在 T 时刻，后面的观测序列都不存在，所以规定其值为1

$$\beta_T(i) = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

- 递推，对 $t = T-1, T-2, \ldots, 1$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

现在，我们假设在 t 时刻，向后迭代一步，也就是下一步必须出现 o_{t+1}，由于从 t 到 $t+1$ 时刻有N种可能出现指定的观测 o_{t+1} ，所以需要将他们累加。



.

- 终止

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i b_i(o_1) \beta_1(i)$$

利用前向概率和后向概率的定义可以将观测序列概率 $P(O \mid \lambda)$ 统一写成：

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

2.4、一些有用的概率与期望值的计算(都是在给定模型 λ 和观测序列 O 的前提下)

- 给定模型 λ 和观测 O，在时刻 t 处于状态 q_i 的概率，也就是观测序列经过指定的状态序列的概率

$$\gamma_t(i) = P(i_t = q_i \mid O, \lambda) = \frac{P(i_t = q_i, O \mid \lambda)}{P(O \mid \lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

- 给定模型 λ 和观测 O，在时刻 t 处于状态q_i，且在时刻 $t+1$ 处于状态 q_j 的概率可以表示为：

$$\xi_t(i,j) = P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j \mid O, \lambda)$$

可以通过前向和后向算法计算概率，得到：

$$\xi_t(i,j) = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O \mid \lambda)}{P(O \mid \lambda)} = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O \mid \lambda)}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O \mid \lambda)}$$

从前向后向计算概率可以得到

$$P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O \mid \lambda) = \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

- 将 $\gamma_t(i)$ 和 $\xi_t(i,j)$ 对各个时刻 t 求和，可以得到以下期望值：
  - 在观测 O 下状态 i 出现的概率值，在所有步长中出现的概率之和：

$$\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)$$

  - 在观测 O 下状态 i 转移的期望值

$$\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)$$

  - 在观测 O 下状态 i 转移到状态 j 的期望值

$$\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)$$

3、学习算法

马尔科夫模型的学习，已知观测序列，根据对应的训练集数据是否含有状态序列，可分为监督学习和非监督学习，非监督学习方法-Baum-Welch算法（也就是**EM**算法）

3.1、监督学习方法

假设已经给定的训练数据集，包含S 个观测序列和对应的状态序列$\{(O_1, I_1), (O_2, I_2), \ldots, (O_S, I_S)\}$，有了这些数据，就可以直接使用极大似然估计来估计隐马尔科夫模型的参数，全部可以通过统计计算得到。

- 转移概率 a_{ij} 的估计
  设样本中时刻 t 处于状态 i，时刻 $t+1$ 转移到状态 j 的频数为 A_{ij}，那么状态转移概率 a_{ij} 的估计为：

$$\hat{a}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} A_{ij}} \quad i = 1, 2, \ldots, N \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

- 观测概率 $b_j(k)$ 的估计
  设样本中状态为 j，并且观测为 k 的频数为 B_{jk}，那么观测概率 $b_j(k)$ 可以表示为：

$$\hat{b}_j(k) = \frac{B_{jk}}{\sum_{k=1}^{M} B_{jk}} \quad j = 1, 2, \ldots, N \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

- 初始状态概率 π_i 的估计，$\hat{\pi}_i$ 为 S 个样本中初始状态为 q_i 的频率。

可以看出，使用监督学习，需要使用大量的人工标注训练数据，代价往往比较高，所以可以通过非监督学习的方法来实现。

3.2、Baum-Welch 算法

假设给定的训练数据只包含 S 个 长度为 T 的观测序列，$\{O_1, O_2, ..., O_S\}$，没有给出相应的状态序列，目标是学习隐马尔科夫模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ 的参数，这个问题可以将不可观测的状态序列 I 看做隐变量，也就是一个包含隐变量的概率模型：

$$P(O|\lambda) = \sum_I P(O|I, \lambda)P(I|\lambda)$$

这个模型的参数学习可以由 EM 算法来实现。

- 确定完全数据的对数似然函数
  所有的观测数据可以表示为 $O = (o_1, o_2, ..., o_T)$ ，所有的隐状态可以表示为 $I = (i_1, i_2, ..., i_T)$，完全数据是 $(O, I) = (o_1, o_2, ..., o_T, (i_1, i_2, ..., i_T)$，完全数据的似然函数是：

$$logP(O, I|\lambda)$$

- **EM**算法的**E**步：求**Q**函数 $Q(\lambda, \bar{\lambda})$，完全数据的似然函数与隐数据的概率分布的期望

$$Q(\lambda, \bar{\lambda}) = E_I\left[logP(O, I|\lambda)|O, \bar{\lambda}\right] = \sum_I P(I|O, \bar{\lambda})logP(O, I|\lambda)$$

$$= \sum_I \frac{P(I, O|\bar{\lambda})}{P(O|\bar{\lambda})} logP(O, I|\lambda)$$

  由于 $P(O|\bar{\lambda})$ 是已知的一个常数，所以我们可以省去，得到的 Q 函数如下,形成了一个类似与熵的模型：

$$Q(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_I P(I, O|\bar{\lambda})logP(O, I|\lambda)$$

  其中 $\bar{\lambda}$ 是隐马尔科夫模型参数的当前估计值，已知的，λ 是需要极大化的隐马尔科夫模型参数。

$$P(O, I|\lambda) = \pi_{i_1} b_{i_1}(o_1) a_{i_1 i_2} b_{i_2}(o_2) ... a_{i_{T-1}} b_{i_T}(o_T)$$

  于是 $Q(\lambda, \bar{\lambda})$ 函数可以表示为：

$$Q(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_I P(I, O|\bar{\lambda})log\pi_{i_1}$$
$$+ \sum_I P(I, O|\bar{\lambda}) \sum_{t=1}^{T-1} loga_{i_t i_{t+1}} + \sum_I P(I, O|\bar{\lambda}) \sum_{t=1}^{T} logb_{i_t}(o_t)$$

- **EM**算法的**M**步：极大化函数 $Q(\lambda, \bar{\lambda})$ 求参数模型
  根据上面的表达式，需要极大化 Q 函数，就需要分别对这三个部分进行极大化。
  - 第一项极大化：

$$\sum_I P(I, O|\bar{\lambda})log\pi_{i_1} = \sum_{i=1}^{N} P(i_1 = i, O|\bar{\lambda})log\pi_i$$

    注意到 π_i 满足约束条件 $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$，利用拉格朗日乘子法，可以得到拉格朗日函数：

$$\sum_{i=1}^{N} P(i_1 = i, O|\bar{\lambda})log\pi_i + \gamma\left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i - 1\right)$$

    要估计参数 π_i，需要对参数求偏导数并令结果为0，可得：

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i}\left[\sum_{i=1}^{N} P(i_1=i,O|\bar{\lambda})log\pi_i+\gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i-1\right)\right]=0$$

求导之后可以得到:

$$\frac{P(i_1=i,O|\bar{\lambda})}{\pi_i}+\gamma=0$$

也就是可以得到:

$$P(i_1=i,O|\bar{\lambda})+\gamma\pi_i=0$$

两边同时对 i 求和，得到 γ

$$\gamma=-P(O|\bar{\lambda})$$

于是得到:

$$\pi_i=\frac{P(i_1=i,O|\bar{\lambda})}{P(O|\bar{\lambda})}$$

- 第二项极大化:

$$\sum_{I} P(I,O|\bar{\lambda})\sum_{t=1}^{T-1} loga_{i_t i_{t+1}}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1}[loga_{ij}]P(i_t=i,i_{t+1}=j,O|\bar{\lambda})$$

类似与第一项，应用约束条件 $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}=1$ 的拉个朗日乘子，可以求出

$$a_{ij}=\frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(i_t=i,i_{t+1}=j,O|\bar{\lambda})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(i_t=i,O|\bar{\lambda})}$$

- 第三项极大化:

$$b_j(k)=\frac{\sum_{t=1}^{T} P(O,i_t=j|\bar{\lambda})I(o_t=v_k)}{\sum_{t=1}^{T} P(O,i_t=j|\bar{\lambda})}$$

3.3、Baum-Welch 模型参数估计公式（需要对所有的长度求和）

将上面的各个概率分别用 $\gamma_t(i)$，$\xi_t(i,j)$ 表示，则可将相应的公式写成:

$$a_{ij}=\frac{\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)}$$

$$b_j(k)=\frac{\sum_{t=1,o_t=v_k}^{T}\gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(i)}$$

$$\pi_i=\gamma_1(i)$$

从这里也可以看出，使用EM算法学习模型参数时，需要利用到前向后向算法的计算结果。

Baum-Welch算法:
输入：观测数据 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$
输出：隐马尔科夫模型参数

- 初始化：
  对 $n=0$，选取 $a_{ij}^{(0)}, b_j(k)^{(0)}, \pi_i^{(0)}$，得到模型 $\lambda^{(0)} = (A^{(0)}, B^{(0)}, \pi^{(0)})$

- 递推，对 $n = 1, 2, \ldots$

$$a_{ij}^{(n+1)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$b_j(k)^{(n+1)} = \frac{\sum_{t=1,o_t=v_k}^{T} \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)}$$

$$\pi_i^{(n+1)} = \gamma_1(i)$$

  更具给定的模型参数，我们可以计算当前的 $\gamma_t(i)$，$\xi_t(i,j)$ ，通过这个公式得到下一个模型的参数，通过这种方式来不断迭代，当每个值的变化都很小的时候，终止迭代。

- 终止：得到模型参数 $\lambda^{(n+1)} = (A^{(n+1)}, B^{(n+1)}, \pi^{(n+1)})$

4、预测算法

4.1、近似算法（贪心算法）

近似算法的思想是，在每个时刻 t ，选择在该时刻最有可能出现的状态 i_t^*，从而得到一个状态序列 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \ldots, i_T^*)$ 将它作为预测的结果。

给定隐马尔科夫模型 λ 和 观测序列 O，在时刻 t 处于状态 q_i 的概率 $\gamma_t(i)$可以表示为：

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

在每一时刻 t 选取最有可能的状态 i_t^*：

$$i_t^* = arg \max_{1 \le i \le N} \left[\gamma_t(i)\right] \qquad t = 1, 2, .., T$$

从而得到状态序列 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \ldots, i_T^*)$，近似算法的优点是计算简单，其缺点是不能保证预测的转台序列的整体最优。可能出现有的转移概率为0的情况。

4.2、维特比算法（动态规划算法）

维特比算法是一种使用动态规划方法求解隐马尔科夫模型的算法，求概率最大路径，也就是最优路径，这条路径对应这一个状态序列。

从前往后计算概率最大，从后往前计算最优节点。首先定义两个变量 δ 和 ψ，定义在时刻 t 状态为 i ，并且观测值为 o_t， 的所有单个路径 $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ 中概率最大值（只是该状态下，并且出现指定观测的概率，所以是二者相乘）：

$$\delta_t(i) = \max_{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}} P(i_t = i, i_{t-1}, \ldots, i_1, o_t, \ldots, o_1 \mid \lambda) \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

那么变量 δ 的递推公式为：

$$\delta_{t+1}(i)=\max_{i_1,i_2,\ldots,i_{t+1}} P(i_{t+1}=i,i_t,\ldots,i_1,o_{t+1},\ldots,o_1 \mid \lambda)$$

$$=\max_{1\le j\le N}\left[\delta_t(j)a_{ji}\right] b_i(o_{t+1}) \quad \text{状态与观测值概率的乘积}$$

定义在时刻 t ，状态为 i 的所有所有可能路径中，概率最大的一个状态，没有乘以当前状态的观测值，但是返回的是上一个使其状态概率最大的点，返回的是 **j** 这个点：

$$\psi_t(i)=arg\max_{1\le j\le N}\left[\delta_{t-1}(j)a_{ji}\right]$$

维特比算法：
输入：隐马尔科夫模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测 $O=(o_1,o_2,\ldots,o_T)$
输出：最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,\ldots,i_T^*)$

- 初始化

$$\delta_1(i)=\pi_i b_i(o_1)$$
$$\psi_1(i)=0$$

- 递推，对 $t=2,3,\ldots,T$

$$\delta_t(i)=\max_{1\le j\le N}\left[\delta_{t-1}(j)a_{ji}\right] b_i(o_t)$$

$$\psi_t(i)=arg\max_{1\le j\le N}\left[\delta_{t-1}(j)a_{ji}\right]$$

- 终止，先找到求的概率值最大的点

$$P^*=\max_{1\le i\le N}\delta_T(i)$$

$$i_T^*=arg\max_{1\le i\le N}\left[\delta_T(i)\right]$$

- 最优路径回溯，对 $t=T-1,T-2,\ldots,1$

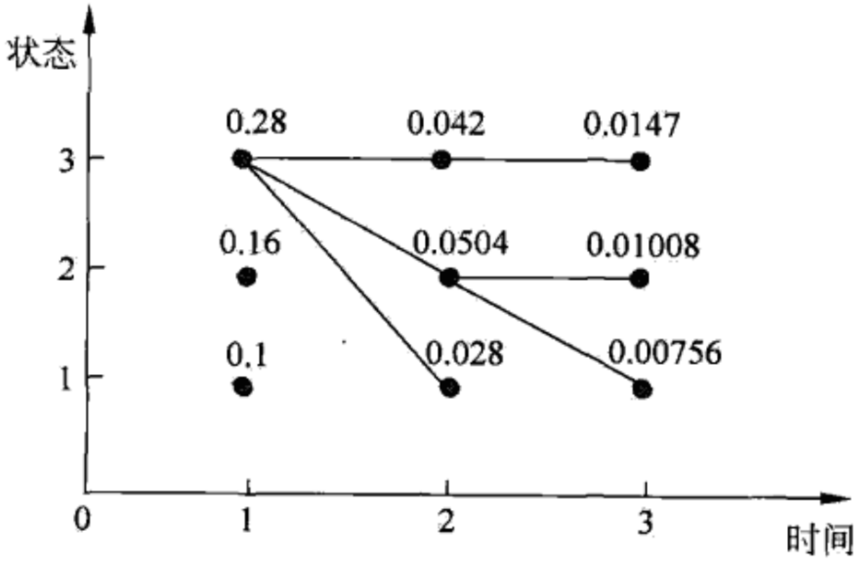
$$i_t^*=\psi_{t+1}(i_{t+1}^*)$$

  从后向前找，就能找到最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,\ldots,i_T^*)$

例子，已知模型 $\lambda=(A,B,\pi)$

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\\0.7 & 0.3\end{bmatrix} \quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^T$$

设 $T=3$ ，$O=$(红，白，白)，试求最优状态序列，也就是最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,i_3^*)$



- 初始化，在 $t=1$ 时，对每个状态 $i=1,2,3$，求状态为 i 观测 o_1 为红的概率，则有

$$\delta_1(i)=\pi_i b_i(o_1)=\pi_i b_i(红)$$

  代入数据得到：

$$\delta_1(1)=0.2\times 0.5=0.1 \quad \delta_1(2)=0.4\times 0.4=0.16 \quad \delta_1(3)=0.4\times 0.7=0.28$$

$$\psi_1(i)=0 \quad i=1,2,3$$

- 在$t=2$ 时，对每个状态 $i=1,2,3$，求在 $t=1$ 时刻状态 j 观测为红，并且在 $t=2$ 时状态为 i 观测 o_2 为白的路径的最大概率，记最大概率为 $\delta_2(t)$ ，则：

$$\delta_2(i)=\max_{1\leq j\leq 3}\left[\delta_1(j)a_{ji}\right]b_i(o_2)$$

  所以有：

$$\delta_2(1)=max\{0.1\times 0.5,0.16\times 0.3,0.28\times 0.2\}\times 0.5=0.0280$$

$$\delta_2(2)=max\{0.1\times 0.2,0.16\times 0.5,0.28\times 0.3\}\times 0.6=0.0504$$

$$\delta_2(3)=max\{0.1\times 0.3,0.16\times 0.2,0.28\times 0.5\}\times 0.3=0.0420$$

$$\psi_2(i)=arg\max_{1\leq j\leq 3}\left[\delta_1(j)a_{1i}\right]$$

$$\psi_2(1)=3 \quad \psi_2(2)=3 \quad \psi_2(3)=3$$

- 在$t=3$ 时，对每个状态 $i=1,2,3$，求在 $t=2$ 时刻状态 j 观测为白，并且在 $t=3$ 时状态为 i 观测 o_3 为白的路径的最大概率，记最大概率为 $\delta_3(t)$ ，则：

$$\delta_3(1)=0.00756$$

$$\delta_3(2)=0.01008$$

$$\delta_3(3)=0.0147$$

$$\psi_3(1)=2 \quad \psi_3(2)=2 \quad \psi_3(3)=3$$

- 以 P^* 表示最优路径的概率，则

$$P^*=\max_{1\leq i\leq 3}\delta_3(i)=0.0147$$

  最优路径的终点 i_3^*

$$i_3^* = arg \max_i \delta_3(i) = 3$$

- 由最优路径的终点 i_3^*，逆向找到 i_2^*, i_1^*:

$$在t = 2时，i_2^* = \psi_3(i_3^*) = \psi_3(3) = 3$$

$$在t = 1时，i_1^* = \psi_2(i_2^*) = \psi_2(3) = 3$$

  于是求得最优路径，最优状态序列 $I^* = (i_1^*, i_2^*, i_3^*) = (3, 3, 3)$