

Von null-dimensionalen Theorien zu inhomogenen Phasen mit der Funktionalen Renormierungsgruppe

Disputationsvortrag

Martin Jakob Steil

15.05.2024

Prüfende

Priv.-Doz. Dr. Michael Buballa
Prof. Dr. Jens Braun
Prof. Dr. Tetyana Galatyuk
Prof. Dr. Michael Vogel

Veröffentlichungen

- [1] *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065012
- [2] *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065013
- [3] *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065014
- [4] arXiv: 2108.10616 [hep-ph]
- [5] *J. Phys. A* **55** (2022) 375402

Koautoren

- J. Braun^[1, 2], M. Buballa^[1],
- E. Grossi^[1, 2], A. Koenigstein^[1–5],
- L. Pannullo^[5], S. Rechenberger^[5],
- D. H. Rischke^[1], J. Stoll^[4],
- N. Wink^[1, 2], M. Winstel^[5] und
- N. Zorbach^[4]

Disputationsvortrag

2024-07-30

Von null-dimensionalen Theorien zu inhomogenen Phasen mit der Funktionalen Renormierungsgruppe

Disputationsvortrag
Martin Jakob Steil
15.05.2024

Publiziert	Veröffentlichte in	Koautoren
Prof. Dr. Michael Buballa	<i>J. Phys. Rev. D</i> 106 (2022) 065012	J. Braun ^[1, 2] , M. Buballa ^[1]
Prof. Dr. Jens Braun	<i>J. Phys. Rev. D</i> 106 (2022) 065013	E. Grossi ^[1, 2] , A. Koenigstein ^[1–5]
Prof. Dr. Tetyana Galatyuk	<i>J. Phys. Rev. D</i> 106 (2022) 065014	L. Pannullo ^[5] , S. Rechenberger ^[5]
Prof. Dr. Michael Vogel	<i>J. Phys. A</i> 55 (2022) 375402	D. H. Rischke ^[1] , J. Stoll ^[4]
	<i>J. Phys. A</i> 55 (2022) 375402	N. Wink ^[1, 2] , M. Winstel ^[5] und N. Zorbach ^[4]

0/22

1. Einleitung und Motivation

2. Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

3. Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d=1+1$

4. Quark-Meson-Modell in $d=3+1$

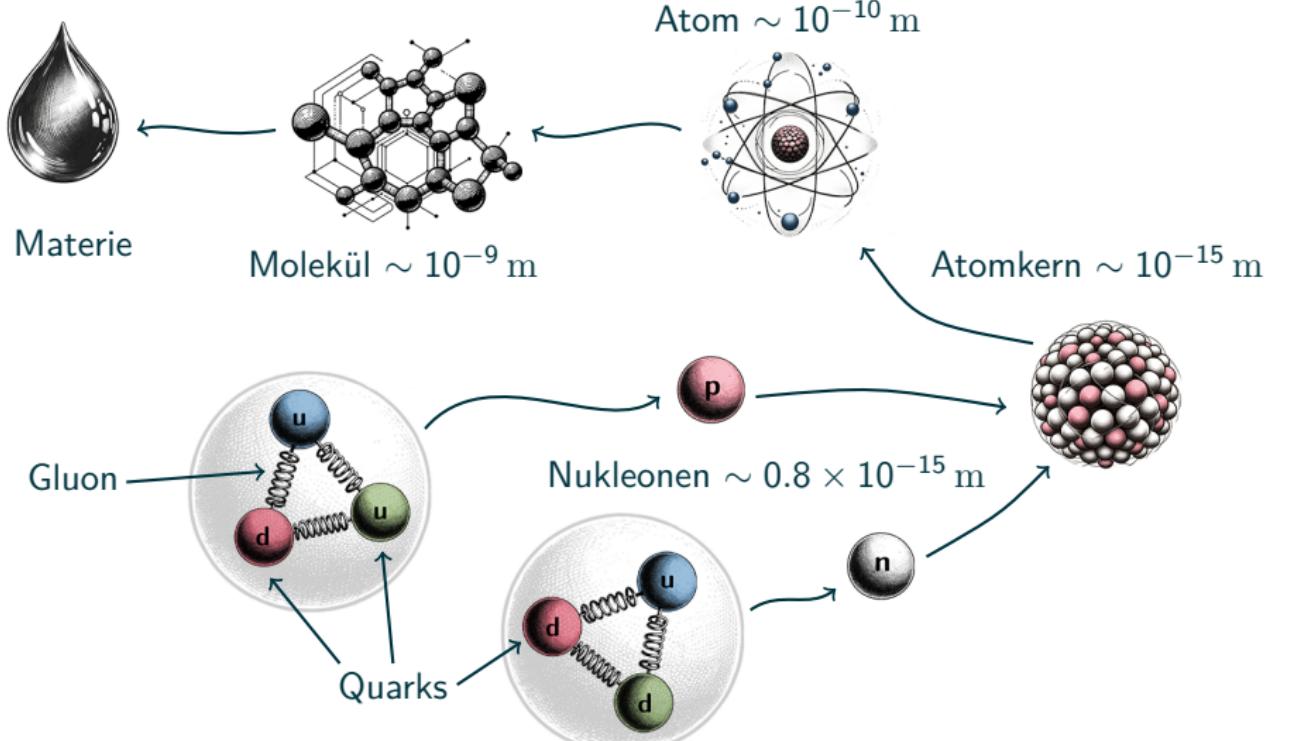
5. Zusammenfassung und Ausblick

2024-07-30

Übersicht

- 1. Einleitung und Motivation
- 2. Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$
- 3. Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d=1+1$
- 4. Quark-Meson-Modell in $d=3+1$
- 5. Zusammenfassung und Ausblick

Von Quarks zu makroskopischer Materie



Grafiken: Motiviert von [stock.adobe.com](#) und Elemente mit OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Disputationsvortrag

Einleitung und Motivation

Von Quarks zu makroskopischer Materie

2024-07-30



- In meiner Forschung beschäftigte ich mich mit der **Wechselwirkung von Quarks**.
- Quarks sind fermionische Elementarteilchen welche durch den Austausch von Gluonen stark wechselwirken.
- Quarks und Gluonen formen als elementare Bausteine Protonen und Neutronen.
- Welche wiederum als Nukleonen Atomkerne bilden.
- Diese Kerne verbinden sich mit Elektronen zu Atomen, deren Bindungszuständen letztlich makroskopische Materie bilden.
- Wie wir an dieser Hierarchie hier sehen forschen wir beim Studium von Quarks auf subatomaren Längenskalen von Femtometern, das sind 10^{-15} Meter.

2/22

Starke und elektromagnetische Wechselwirkung im Vergleich

Proton



$$m_u \approx 2 \text{ MeV}$$

$$m_d \approx 5 \text{ MeV}$$

$$m_p \approx 938 \text{ MeV}$$

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \sim 1$$

stark gebunden

$$O(E_b) = 1 \text{ GeV}$$

Wasserstoff Atom



$$m_p \approx 938 \text{ MeV}$$

$$m_e \approx 511 \text{ keV}$$

$$m_H \approx 939 \text{ MeV}$$

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \sim 7 \times 10^{-3}$$

elektromagnetisch gebunden

$$E_b = 13.6 \text{ eV}$$

Einheiten: $1 \text{ MeV} \approx 1.6 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.8 \times 10^{-30} \text{ kg}$

Folienaufbau: Motiviert von [6] Philipsen 2010, Grafiken: OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Disputationsvortrag

Einleitung und Motivation

Starke und elektromagnetische Wechselwirkung im Vergleich

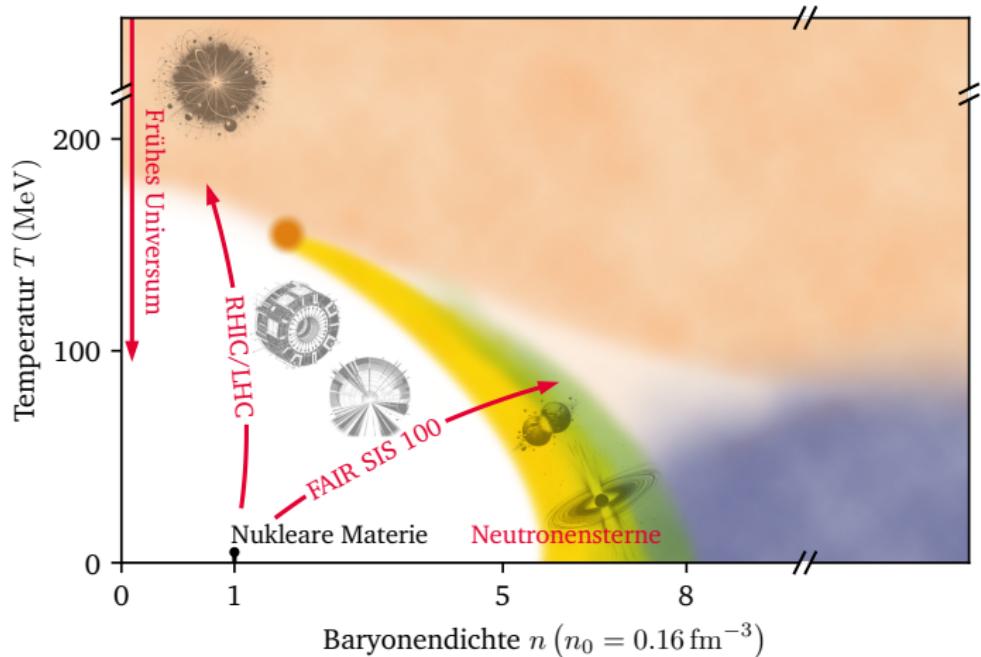
2024-07-30

3/22

- In Nukleonen – hier exemplarisch dem Proton – sind Quarks und Gluonen stark gebunden. Mit einer entsprechenden dimensionslosen **Kopplungskonstante von etwa 1**.
- Zum Vergleich: Im Wasserstoff Atom sind das Proton und Elektron elektromagnetisch gebunden. Mit einer wesentlich geringeren **Kopplungskonstante von nur circa 7 Promille**.
- Die Bindungs- bzw. Ionisierungsenergie von Wasserstoff ist mit 13.6 eV vergleichsweise gering.
- Im Proton hingegen ist die Bindungsenergie mit etwa 1 GeV circa und damit 8 Größenordnungen über der im Wasserstoff.

3/22

Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie



Einheiten: $1 \text{ MeV} \approx 1.2 \times 10^{10} \text{ K}$ und $1 \text{ fm}^{-3} = 1 \times 10^{45} \text{ m}^{-3}$

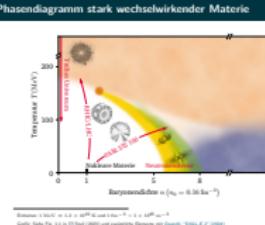
Grafik: Siehe Fig. 1.1 in [7] Steil (2023) und zusätzliche Elemente mit OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Disputationsvortrag

Einleitung und Motivation

Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie

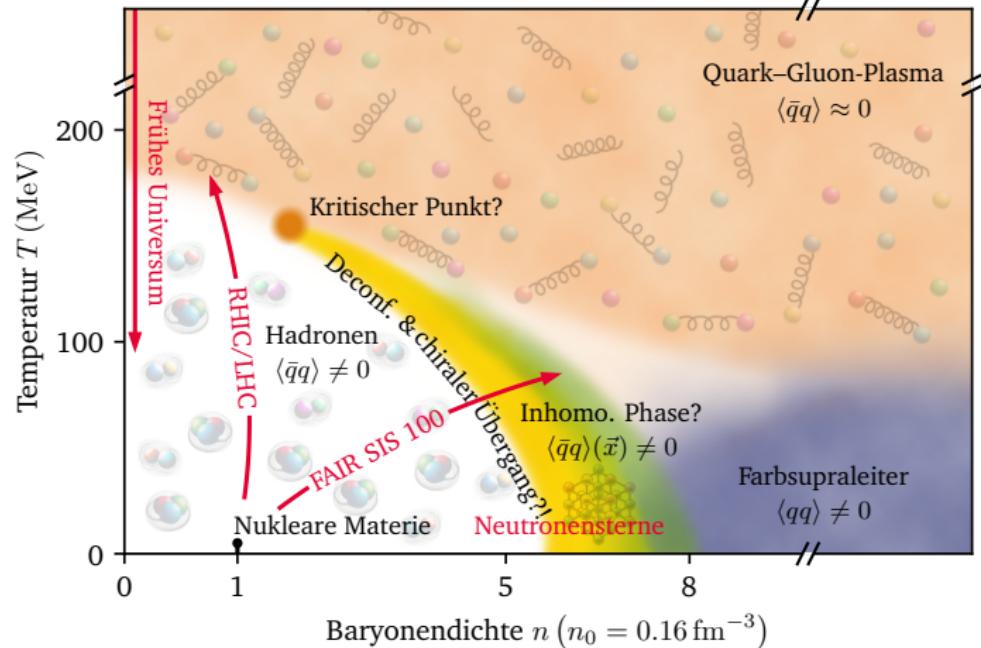
2024-07-30



- Um die Bestandteile von Kernmaterie zu untersuchen werden **hohe Energien benötigt**, welche unter verschiedenen extreme thermodynamischen Bedingungen vorliegen – das bringt uns zum **Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie**.
- Bei niedrigen Temperaturen und nuklearer Dichte – das entspricht Energien von etwa 1 GeV – liegt **stark WW Materie in Form von Nukleonen** vor. Wenn wir jedoch die Temperatur und Dichte ändern können wir andere Zustände stark WW Materie untersuchen.
- Dazu sind jedoch extreme Bedingungen nötig:
- Hier entsprechen 100 MeV auf der Temperatur-Achse etwa dem 4-Milliarden-fachen ($1.16 \times 10^{12} / 293 = 3.96 \times 10^9$) der Raumtemperatur
- Und die nukleare Dichte von 0.16 Baryonen pro Kubikfemtometer selbst ist circa 2-Billiarden-mal ($0.16 \times 10^{45} / (8,5 \times 10^{28}) = 1.88 \times 10^{15}$) höher als die Atomdichte in Eisen.
- Derartig extreme Bedingungen erwarten wir im **frühen Universum**, in **Neutronensternen** und sie können mit **Teilchenbeschleuniger** erzeugt werden.

4/22

Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie



Einheiten: $1 \text{ MeV} \approx 1.2 \times 10^{10} \text{ K}$ und $1 \text{ fm}^{-3} = 1 \times 10^{45} \text{ m}^{-3}$

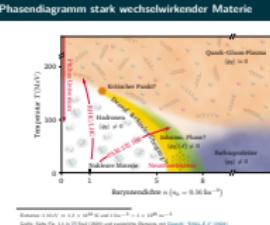
Grafik: Siehe Fig. 1.1 in [7] Steil (2023) und zusätzliche Elemente mit OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Disputationsvortrag

Einleitung und Motivation

Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie

2024-07-30



- Aus experimentellen und theoretische Arbeiten wissen wir das stark WW Materie **bei hohen Dichten und Temperaturen als ein Gas aus ungebundenen Quarks und Gluonen** vorliegt. Man spricht hier von einem Quark-Gluon Plasma.
- Ebenfalls experimentell und theoretisch gesichert ist, dass bei niedrigen Temperaturen und Dichten Quarks und Gluonen in farb-neutralen Hadronen gebunden sind.
- Wie genau der **Übergang von gebundenen zu ungebundenen Quarks und Gluonen** stattfindet ist bei gerade mittleren Dichten **noch unklar**.
- Ein wichtiger Ordnungsparameter hier ist das chirale Kondensat, dass in der hadronischen Phase einen nicht-verschwindenden Wert hat, welcher im QGP auf fast Null abfällt.
- Meine Forschungsarbeit beschäftigt sich **mit chiraler Symmetriebrüchung: d.h. dem Bilden und Verschwinden von chiralen Kondensaten** gerade in diesem Bereich **mittlerer Dichten und niedriger Temperaturen**. Speziell an der Möglichkeit für inhomogene chirale Phasen habe ich geforscht. Dazu später mehr.

Die Quantenchromodynamik (QCD)

Generierendes Funktional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\chi] \exp(-S_{\text{QCD}} + J^a \chi_a)$$

als Zustandssumme/euklidisches Funktionalintegral über die Wirkung

$$S_{\text{QCD}} = \int_x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{q}(\gamma_\mu D_\mu + \hat{m} - \gamma_4 \hat{\mu}) q + \dots \right)$$

- ▶ Funktionale Ableitungen von $Z[J] \Rightarrow$ Korrelationsfunktionen
- ▶ Thermodynamisches Potential $\Omega(\mu, V, T) = -T \ln Z[J=0]$
- ▶ Herausforderung: Explizite Berechnung von $Z[J]$
 - Störungstheoretische Berechnung für $\alpha_s \ll 1$
 - Direkte numerische Simulation: Gitter QCD
 - **Funktionale Methoden**
 - ...

Disputationsvortrag

Einleitung und Motivation

Die Quantenchromodynamik (QCD)

2024-07-30

Die Quantenchromodynamik (QCD)

Generierendes Funktional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\chi] \exp(-S_{\text{QCD}} + J^a \chi_a)$$

als Zustandssumme/euklidisches Funktionalintegral über die Wirkung

$$S_{\text{QCD}} = \int_x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{q}(\gamma_\mu D_\mu + \hat{m} - \gamma_4 \hat{\mu}) q + \dots \right)$$

▶ Funktionale Ableitungen von $Z[J] \Rightarrow$ Korrelationsfunktionen

▶ Thermodynamisches Potential $\Omega(\mu, V, T) = -T \ln Z[J=0]$

▶ Herausforderung: Explizite Berechnung von $Z[J]$

■ Störungstheoretische Berechnung für $\alpha_s < 1$

■ Direkte numerische Simulation: Gitter QCD

■ **Funktionale Methoden**

...
...

- Die grundlegende theoretische Beschreibung der stark WW findet im Rahmen der Quantenchromodynamik kurz QCD statt. Die QCD ist eine Quantenfeldtheorie, welche die WW von Quarks durch den Austausch von farbgeladenen Gluonen als Eichboson beschreibt.
- Mathematisch lässt sich dies durch ein generiertes Funktional beschreiben. Welches in Form einer Zustandssumme als euklidisches Funktionalintegral über die Wirkung der QCD gegeben ist. Diese Wirkung kodiert die starke WW mikroskopisch. ↪
- Aus dem generieren Funktional können alle makroskopischen Observablen und die Thermodynamik stark WW Materie formal extrahiert werden.
- Die Herausforderung besteht nun in der expliziten Berechnung der Zustandssumme, dies nicht nach Belieben möglich. ↪
- Eine Vielzahl verschiedener Methoden werden verwendet um es zu berechnen oder zu nähern. Vielversprechend und flexibel sind hierbei Funktionale Methoden.

5/22

Die Funktionale Renormierungsgruppe (FRG)

► Implementierung von K. G. Wilsons Ansatz zur RG:

$$\Gamma_{1\text{PI}}[\chi] = \bar{\Gamma}_0[\chi] \quad \bar{\Gamma}_{k(t)}[\chi] \quad \bar{\Gamma}_\Lambda[\chi] = S_\Lambda[\chi]$$

RG Fluss

► Evolutionsgleichung ($t \equiv -\ln(k/\Lambda)$) statt Funktionalintegral

$$\partial_t \bar{\Gamma}_k[\chi] = \frac{1}{2} \text{STr} \left([\bar{\Gamma}_k^{(2)}[\chi] + R_k]^{-1} \partial_t R_k \right) = \frac{1}{2} \otimes$$

► Exakte funktionale Differentialgleichung aber zur expliziten Lösung sind Trunkierungen nötig!

[8–10] Wilson 1971, Wilson 1979 und [11–16] Wetterich 1993, Reuter und Wetterich 1994, Morris 1994, Tetradis und Wetterich 1994, Ellwanger 1994

Disputationsvortrag

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

2024-07-30

Die Funktionale Renormierungsgruppe (FRG)

- Die funktionale Renormierungsgruppe (kurz) FRG ist eine dieser funktionalen Methoden.
- Die grundlegende Idee der FRG ist das **Ausintegrieren von Quantenfluktuationen** Impulsschale für Impulsschale nach Wilson.
- In der FRG interpoliert man mit einem **geeigneten Skalen abhängigem Funktional** – hier groß Gamma:
- zwischen der **mikroskopischen, klassischen Wirkung bei hohen RG-Impuls-Skalen im UV**
- zu einer **makroskopischen Quanten Wirkung bei verschwindenden RG-Impulsskalen-Skalen im IR.** ↪
- Diese **Skalenevolution ist durch die Wetterich Gleichung in Form einer exakten, funktionale Differential Gleichung** beschrieben. Hier formuliert als eine Evolutionsgleichung in RG Zeit t ist eine **dimensionslose logarithmische Parametrisierung** der RG-Impuls-Skala k und wir evolvieren damit von $t = 0$ im UV nach t gegen ∞ im IR. ↪
- Explizite Lösungen der vollen funktionalen Differentialgleichungen lassen sich jedoch im Allgemeinen nicht berechnen.
- Für praktische Rechnungen sind **Problem- und Theorie-spezifische Trunkierungen und Näherungen** nötig.

Die Funktionale Renormierungsgruppe (FRG)

► Implementierung von K. G. Wilsons Ansatz zur RG:

$$\Gamma_{1\text{PI}}[\chi] = \bar{\Gamma}_0[\chi] \quad \bar{\Gamma}_{k(t)}[\chi] \quad \bar{\Gamma}_\Lambda[\chi] = S_\Lambda[\chi]$$

► Evolutionsgleichung ($t \equiv -\ln(k/\Lambda)$) statt Funktionalintegral

$$\partial_t \bar{\Gamma}_k[\chi] = \frac{1}{2} \text{STr} \left([\bar{\Gamma}_k^{(2)}[\chi] + R_k]^{-1} \partial_t R_k \right) = \frac{1}{2} \otimes$$

► Exakte funktionale Differentialgleichung aber zur expliziten Lösung sind Trunkierungen nötig!

© CERN 2024, CERN-TH-2024-07-30, 10 pages, 07 July 2024, 14:00, Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, 07.07.2024

Forschungsprojekte im Rahmen der Dissertation

- ▶ **Problem:** Etablierte Diskretisierungsverfahren für traktierte FRG Flussgleichungen sind numerisch unzuverlässig für

- Stark im Feldraum gekoppelte Probleme mit Phasenübergängen
- Probleme mit intern/externen getriebenen Schocks/Diskontinuitäten
- Anwendungen bei kleinen T , k und besonders bei hohem μ

- ▶ **Lösung:** Reformulierung der Flussgleichungen in konservativer Form
⇒ Behandlung im Rahmen der Strömungsmechanik

- ▶ **Adaption von Konzepten und numerischen Methoden aus dem Feld der Strömungsmechanik auf FRG Flussgleichungen**
- ▶ **Einfluss von bosonischen und fermionischen Fluktuationen auf homogene und inhomogene chirale Kondensate**

Zentrale Forschungsprojekte

[17] Grossi und Wink 2019, [1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022 und [4, 5] Stoll *et al.* 2021, Koenigstein *et al.* 2022

Disputationsvortrag

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

Forschungsprojekte im Rahmen der Dissertation

2024-07-30

Forschungsprojekte im Rahmen der Dissertation

- ▶ **Problem:** Etablierte Diskretisierungsverfahren für traktierte FRG Flussgleichungen sind numerisch unzuverlässig für
 - Stark im Feldraum gekoppelte Probleme mit Phasenübergängen
 - Probleme mit intern/externen getriebenen Schocks/Diskontinuitäten
 - Anwendungen bei kleinen T , k und besonders bei hohem μ

- ▶ **Lösung:** Reformulierung der Flussgleichungen in konservativer Form
⇒ Behandlung im Rahmen der Strömungsmechanik

- ▶ **Adaption von Konzepten und numerischen Methoden aus dem Feld der Strömungsmechanik auf FRG Flussgleichungen**
- ▶ **Einfluss von bosonischen und fermionischen Fluktuationen auf homogene und inhomogene chirale Kondensate**

Zentrale Forschungsprojekte

- Ein großes Problem, welches im Rahmen unserer Forschung auftrat, war jedoch das etablierte Lösungsverfahren für traktierte Flussgleichungen sich als unzuverlässig erwiesen haben. Zumindest für die Art von Fragestellungen hier an denen wir interessiert sind. ↗
- Kollegen aus Heidelberg haben damals die Lösung angestoßen. Diese besteht in einer Reformulierung von Flussgleichungen in konservativer Form. Dies wiederum erlaubt die direkte Anwendung von **hoch-entwickelten numerischen Methoden aus dem Feld der Strömungsmechanik**. ↗
- Es haben sich damit **zwei zentrale Forschungsprojekte** im Rahmen meiner Promotion gebildet.
- Zum Einen **methodische Entwicklungen zur Adaption von Konzepten aus der Strömungsmechanik auf FRG Flussgleichungen**.
- Und zum Anderen, die **Anwendung dieser Methoden zum Studium von homogenen und inhomogenen chiralen Kondensaten**. Hierbei lag der **Fokus auf dem Einfluss von fermionischen und bosonischen Fluktuationen**.

Das $O(1)$ -Modell in $d=0$ – Die perfekte Testumgebung

Untersuchung von gewöhnlichen N -dimensionaleneindimensionalen Integralen der Form

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \exp(-S(\phi) + J\phi)$$

mit der Funktionalen Renormierungsgruppe:

► Perfekte Testumgebung:

- Exakte Referenzwerte für alle Theorien $S(\phi)$ mit \mathbb{Z}_2 Symmetrie
- Keine Trunkierung nötig
- FRG Flussgleichungen: nicht-trivial und strukturell ähnlich zu $d > 0$
- Ideal für konzeptionelle und numerische Entwicklungen

[18] Keitel und Bartosch 2012 und [1–3] Koenigstein et al. 2022, Koenigstein et al. 2022, Steil und Koenigstein 2022

Disputationsvortrag

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

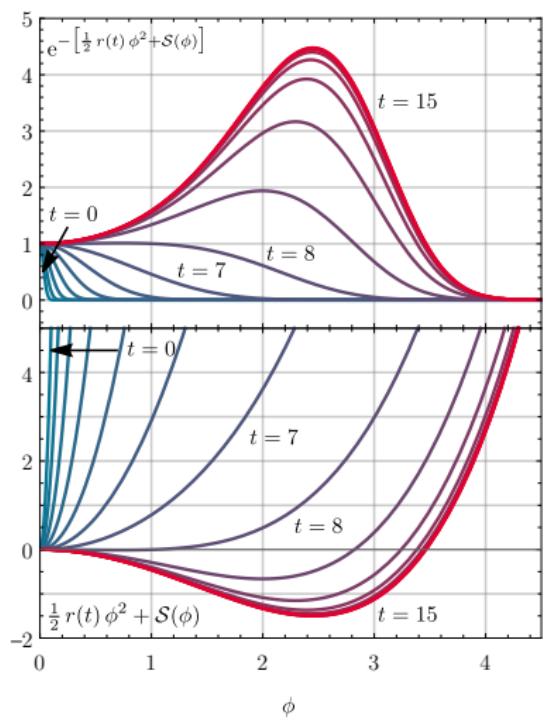
Das $O(1)$ -Modell in $d=0$ – Die perfekte Testumgebung

2024-07-30

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \exp(-S(\phi) + J\phi)$$

- Perfekte Testumgebung:
 - Exakte Referenzwerte für alle Theorien $S(\phi)$ mit \mathbb{Z}_2 Symmetrie
 - Keine Trunkierung nötig
 - FRG Flussgleichungen: nicht-trivial und strukturell ähnlich zu $d > 0$
 - Ideal für konzeptionelle und numerische Entwicklungen

Die FRG als Integraldeformation für $N = 1$ mit $r(t) \equiv \Lambda e^{-t}$



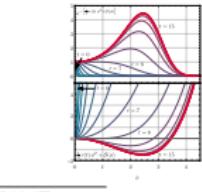
[1] Koenigstein et al. 2022

Disputationsvortrag

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

2024-07-30

Die FRG als Integraldeformation für $N = 1$ mit $r(t) \equiv \Lambda e^{-t}$



- In null Dimensionen kann ich Ihnen jetzt auch anschaulich erklären was die FRG jetzt eigentlich ist und wie wir mit Ihr Integrale berechnen.
- Mit der FRG Lösen wir Integrale in dem wir sie verformen.
- Wir deformieren die komplizierten Integranden, die wir im IR berechnen wollen durch einen skalenabhängigen Massenterm auf einfache Glockenkurven im UV.
- Die Integrale im UV lassen sich dann einfach als Gauß'sche Integrale berechnen.
- Wir nehmen diese einfachen Integrale als Anfangsbedingung im UV und berechnen die komplizierten Integrale im IR durch sukzessive Deformation der Anfangsbedingung.

- FRG Flussgleichung für das $O(N)$ -Modell in $d=0$ als **Erhaltungsgleichung**:

$$\partial_\sigma \partial_t U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = -\partial_\sigma F[t, \sigma, u(t, \sigma)] + \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)]$$

- **FRG-Fluss** im wahrsten Sinne des Wortes:

Advektion: $F[t, \sigma, u(t, \sigma)] = -(N-1) \frac{\frac{1}{2} \partial_t r(t)}{r(t) + \frac{1}{\sigma} u(t, \sigma)} = \frac{1}{2}$ 

Diffusion: $Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] = \frac{\frac{1}{2} \partial_t r(t)}{r(t) + \partial_\sigma u(t, \sigma)} = \frac{1}{2}$ 

- Adaption eines “finite volume” Verfahrens für die FRG Flussgleichung

[17] Grossi und Wink 2019 und [1] Koenigstein et al. 2022 mit Adaption von [19] Kurganov und Tadmor 2000

Disputationsvortrag

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

2024-07-30

FRG und numerische Strömungsmechanik

► FRG Flussgleichung für das $O(N)$ -Modell in $d=0$ als Erhaltungsgleichung:

$$\partial_\sigma \partial_t U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = -\partial_\sigma F[t, \sigma, u(t, \sigma)] + \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)]$$

► FRG-Fluss im wahrsten Sinne des Wortes:

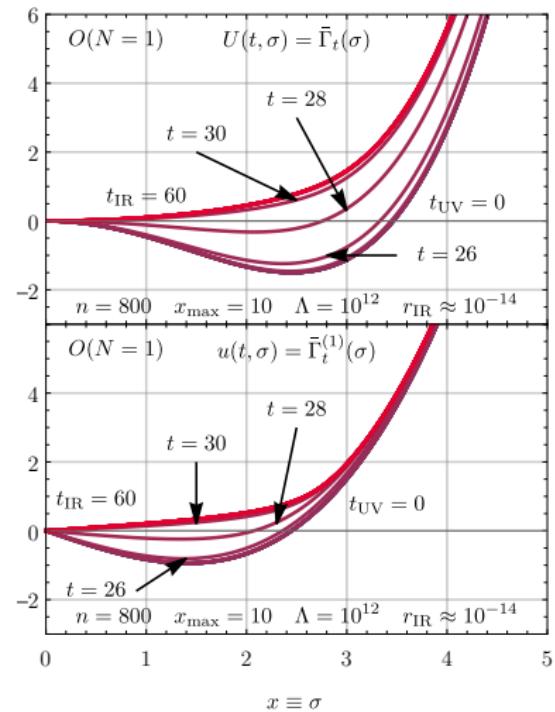
Advektion: $F[t, \sigma, u(t, \sigma)] = -(N-1) \frac{\frac{1}{2} \partial_t r(t)}{r(t) + \frac{1}{\sigma} u(t, \sigma)} = \frac{1}{2}$ 

Diffusion: $Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] = \frac{\frac{1}{2} \partial_t r(t)}{r(t) + \partial_\sigma u(t, \sigma)} = \frac{1}{2}$ 

► Adaption eines “finite volume” Verfahrens für die FRG Flussgleichung

[17] Grossi und Wink 2019 und [1] Koenigstein et al. 2022 mit Adaption von [19] Kurganov und Tadmor 2000

FRG Fluss für $N = 1$ und $\mathcal{S}(\phi) = U(t = 0, \phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4$



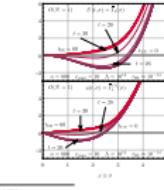
[1] Koenigstein et al. 2022

Disputationsvortrag

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d = 0$

FRG Fluss für $N = 1$ und $\mathcal{S}(\phi) = U(t = 0, \phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4$

2024-07-30



- Damit nun die besprochene Integral Deformation als numerischer FRG Fluss: **oben der Fluss des Potentials** und **unten der zu Grunde liegende Fluss der Ableitung**.
- Wir haben im UV bei $t = 0$ die klassische, mikroskopische Wirkung als **Anfangsbedienung** und evolvieren diese in RG Zeit durch numerisches Lösen der Flussgleichungen ins IR zu **hohen RG Zeiten** und erhalten so die **volle makroskopische Quantenwirkung**.

Und noch viel mehr ...

- ▶ Weitere Testszenarien
- ▶ Advektion vs. Diffusion – Pionen vs. Sigma
- ▶ Skalierungs- und Konvergenztests
- ▶ Randbedingungen
- ▶ RG-Konsistenz und UV Skalen Λ
- ▶ Vergleich mit Taylor-/Vertex-Entwicklung
- ▶ Dynamische Reichweite und IR Cutoffs
- ▶ Irreversibilität und “Entropie”-Produktion
- ▶ Advektive Flüsse bei großem N
- ▶ **Graßmann-Zahlen: “Fermionen” in null Dimensionen**

[1–3] Koenigstein et al. 2022, Koenigstein et al. 2022, Steil und Koenigstein 2022

Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d=0$

2024-07-30

└ Und noch viel mehr ...

- An dieser Stelle würde ich gerne viel mehr von unseren Entwicklungen in null Dimensionen präsentieren, aber dann würde mir die Zeit fehlen, die folgenden Anwendungen auf physikalische Modelle zu besprechen.

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

Testmodell in $1+1$ Dimensionen zum Studium von diskreter chiraler (\mathbb{Z}_2) Symmetriebrechung

$$\bar{\Gamma}_t[\chi] = \int_x \left(\bar{\psi} (\not{\partial} - \mu\gamma^2 + \frac{h}{\sqrt{N}} \varphi) \psi - \frac{1}{2} \varphi (\square \varphi) + U(t, \varphi) \right)$$

- ▶ N über eine Yukawa-Kopplung (h) wechselwirkende Fermionen
- ▶ Asymptotisch frei und renormierbar
- ▶ ...

⇒ Gut geeignet für Untersuchungen verschiedener technischer – für QCD Materie relevanter – Aspekte.

[4, 5] Stoll et al. 2021, Koenigstein et al. 2022

Disputationsvortrag

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

2024-07-30

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

Testmodell in $1+1$ Dimensionen zum Studium von diskreter chiraler (\mathbb{Z}_2) Symmetriebrechung

$$\bar{\Gamma}_t[\chi] = \int_x \left(\bar{\psi} (\not{\partial} - \mu\gamma^2 + \frac{h}{\sqrt{N}} \varphi) \psi - \frac{1}{2} \varphi (\square \varphi) + U(t, \varphi) \right)$$

- ▶ N über eine Yukawa-Kopplung (h) wechselwirkende Fermionen
- ▶ Asymptotisch frei und renormierbar
- ▶ ...

⇒ Gut geeignet für Untersuchungen verschiedener technischer – für QCD Materie relevanter – Aspekte.

[4, 5] Stoll et al. 2021, Koenigstein et al. 2022

Trunkierte Flussgleichung in “local potential approximation”

► LPA Flussgleichung für das GNY-Modell in $d = 1+1$:

$$\partial_t \partial_\sigma U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] + S[t, \sigma]$$

► Diffusionsgleichung mit Quellen/Senken:

$$Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] = \frac{1}{2} \text{Diagramm mit Kreis und Kreuz} = -\frac{1}{\pi N} \frac{k_t^3}{2E_b(t, \partial_\sigma u)} [1 + 2 n_b(\beta E_b(t, \partial_\sigma u))]$$

$$S[t, \sigma] = -\frac{1}{2} \partial_\sigma \text{Diagramm mit Kreis und Pfeil} = \partial_\sigma \left(\frac{1}{\pi} \frac{k_t^3}{E_f(t, \sigma)} [1 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - n_f(\beta [E_f(t, \sigma) + \mu]) - n_f(\beta [E_f(t, \sigma) - \mu])] \right)$$

$$\text{mit } E_b(t, \partial_\sigma u) \equiv \sqrt{k_t^2 + \partial_\sigma^2 U(t, \sigma)} \text{ und } E_f(t, \sigma) \equiv \sqrt{k_t^2 + (h\sigma)^2}.$$

[4] Stoll et al. 2021

Disputationsvortrag

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

Trunkierte Flussgleichung in “local potential approximation”

2024-07-30

Trunkierte Flussgleichung in “local potential approximation”

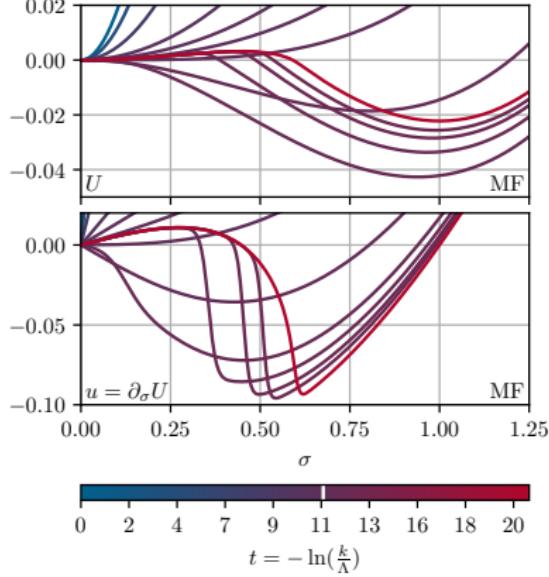
► LPA Flussgleichung für das GNY-Modell in $d = 1+1$:
 $\partial_t \partial_\sigma U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] + S[t, \sigma]$

► Diffusionsgleichung mit Quellen/Senken:
 $Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] = \frac{1}{2} \text{Diagramm mit Kreis und Kreuz} = -\frac{1}{\pi N} \frac{k_t^3}{2E_b(t, \partial_\sigma u)} [1 + 2 n_b(\beta E_b(t, \partial_\sigma u))]$
 $S[t, \sigma] = -\frac{1}{2} \partial_\sigma \text{Diagramm mit Kreis und Pfeil} = \partial_\sigma \left(\frac{1}{\pi} \frac{k_t^3}{E_f(t, \sigma)} [1 - n_f(\beta [E_f(t, \sigma) + \mu]) - n_f(\beta [E_f(t, \sigma) - \mu])] \right)$
mit $E_b(t, \partial_\sigma u) \equiv \sqrt{k_t^2 + \partial_\sigma^2 U(t, \sigma)}$ und $E_f(t, \sigma) \equiv \sqrt{k_t^2 + (h\sigma)^2}$.

FRG Flüsse im GNY-Modell

nur fermionische Fluktuationen
(MF: $N \rightarrow \infty$)

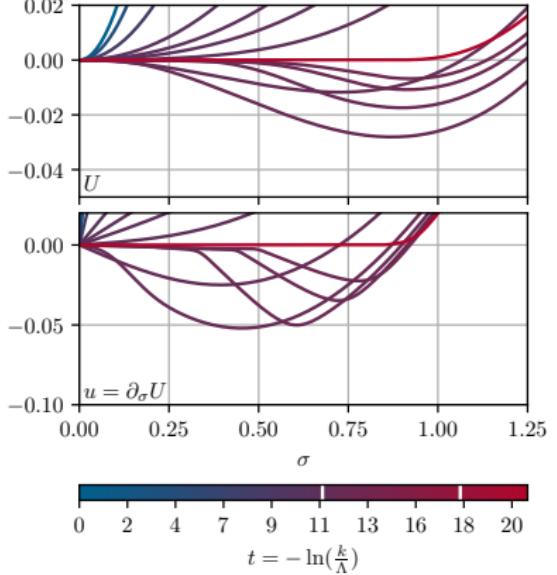
$$T = 0.00625, \mu = 0.6, \Lambda = 10^5, k_{\text{IR}} = 10^{-4}, n_{\text{cells}} = 1000, \sigma_{\max} = 6.0$$



[4] Stoll et al. 2021

fermionische und bosonische
Fluktuationen (LPA: $N = 2$)

$$T = 0.00625, \mu = 0.6, N = 2, \Lambda = 10^5, k_{\text{IR}} = 10^{-4}, n_{\text{cells}} = 1000, \sigma_{\max} = 6.0$$



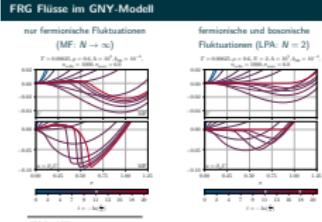
15/22

Disputationsvortrag

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

FRG Flüsse im GNY-Modell

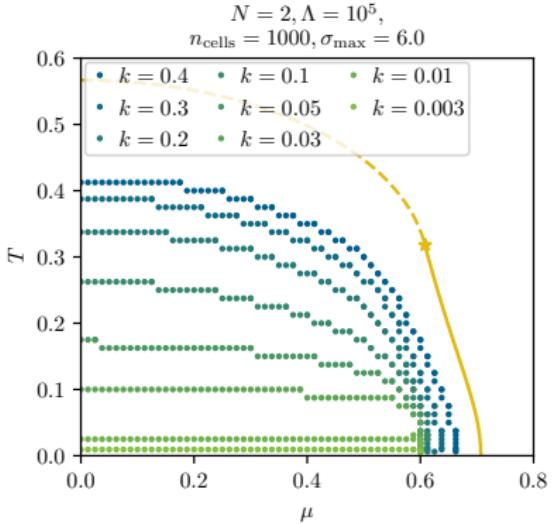
2024-07-30



- Hier ein exemplarischer FRG Fluss zunächst nur unter Berücksichtigung der Fermionen. Wir starten im UV mit einer freien Theorie und fließen ins IR. Dabei agieren die Fermionen auf Level des Potenzials als Senken und es bildet sich ein nicht triviales Minimum. Dieses Minimum signalisiert eine spontane chirale Symmetriebrechung welche dynamisch durch das Ausintegrieren der fermionischen Fluktuationen ermöglicht wird. Es bildet sich als Konsequenz ein nichtverschwindendes chirales Kondensat aus. ↗
- Betrachten wir nun rechts die Rolle von bosonschen Fluktuationen. Zunächst dominieren wieder die Fermionen und es bildet sich ein Minimum aber auf Grund der Diffusion durch die bosonischen Fluktuationen überlebt dieses nicht bis ins IR. Im IR ist die chirale Symmetrie nicht mehr spontan gebrochen. Sprich die Bosonen verdampfen das durch die Fermionen gebildete chirale Kondensat.

15/22

Das homogene Phasendiagramm



- ▶ Keine Symmetriebrechung im IR für endliche N und $T > 0$
- ▶ Symmetriebrechung im Vakuum ($T = \mu = 0$)
- ▶ Anzeichen für Symmetriebrechung bei $T = 0$ und $\mu > 0$

[4] Stoll et al. 2021

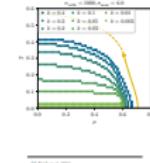
Disputationsvortrag

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

Das homogene Phasendiagramm

2024-07-30

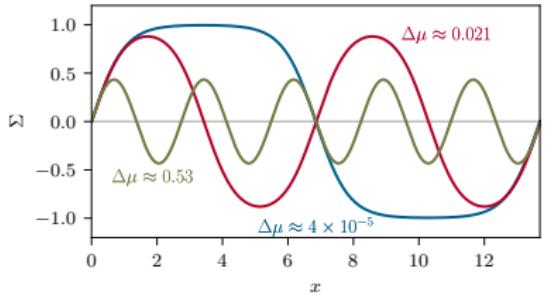
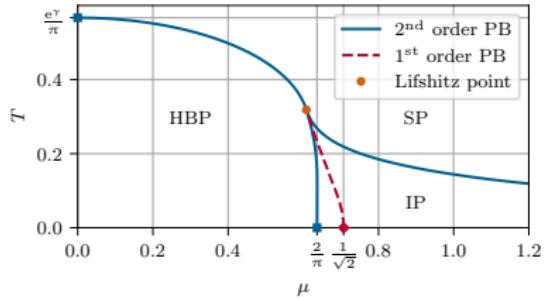
Das homogene Phasendiagramm



- ▶ Keine Symmetriebrechung im IR für endliche N und $T > 0$
- ▶ Symmetriebrechung im Vakuum ($T = \mu = 0$)
- ▶ Anzeichen für Symmetriebrechung bei $T = 0$ und $\mu > 0$

- Derartige Flüsse können wir nun bei verschiedenen Temperaturen und chemischen Potenzialen berechnen und so ein Phasendiagramm ermitteln.
- Generell haben unsere Untersuchungen gezeigt, dass das chirale Kondensat mit sinkender RG Skala immer weiter schrumpft und letztlich im IR für nicht-verschwindende Temperaturen komplett von den Bosonen verdampft wird.
- Nur bei verschwindenden Temperaturen finden wir Anzeichen für Kondensation.
- Mit formal undenklich vielen Fermionen lassen sich die bosonischen Fluktuationen komplett unterdrücken und wir reproduzieren das bekannte Literaturergebnis (hier links in Gelb) mit einer gebrochenen Phase bei niedrigen Temperaturen und chemischen Potentialen und einer Restaurierten Phase bei höheren.
- Das Literaturergebnis ohne bosonische Fluktuationen in der sog. Mean-Field Näherung basiert jedoch auf der restriktiven Annahme, dass das chirale Kondensat homogen in der einen Raumrichtung des Modells vorliegt.

Inhomogene Phasen im MF/Limes $N \rightarrow \infty$



- ▶ Semi-analytische Methoden zur direkten Berechnung einer inhomogenen Phase (IP) für $N \rightarrow \infty$
- ▶ Stabilitätsanalyse als flexible indirekte Detektionsmethode

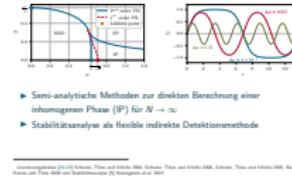
Literaturergebnisse [20–23] Schnetz, Thies und Urlichs 2004, Schnetz, Thies und Urlichs 2006, Schnetz, Thies und Urlichs 2005, Basar, Dunne und Thies 2009 und Stabilitätsanalyse [5] Koenigstein et al. 2022

Disputationsvortrag

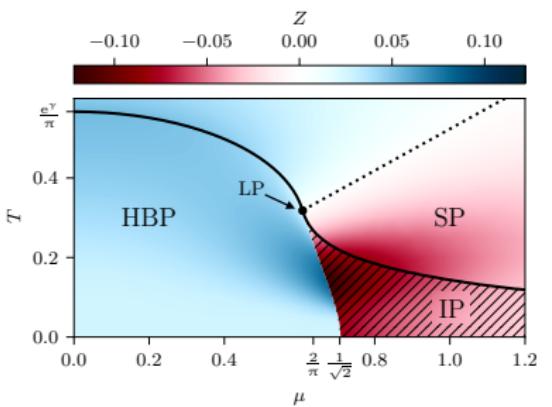
Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$

2024-07-30

Inhomogene Phasen im MF/Limes $N \rightarrow \infty$



- Arbeiten die ein **inhomogenen Kondensat zulassen** finden zwar auch eine **homogen-gebrochene Phase** hier, aber bei höheren chemischen Potenzialen und entsprechenden Dichten findet man eine **äußerst dominante inhomogene Phase** hier. In dieser Phase oszilliert das Kondensat wie hier links veranschaulicht im Raum. Bei hohen Temperaturen finden wir dann wieder die homogen restaurierte Phase. ↪
- Dieses **Literatur Ergebnis wurde mit äußerst speziellen und komplizierten semi-analytischen Methoden berechnet, welche sich nicht direkt vom MF auf die FRG übertragen lassen.**
- Daher haben wir dieses **Modell zur Hand genommen um eine Stabilitätsanalyse der homogenen Phase als alternative und flexiblere Methode im Detail zu testen.**

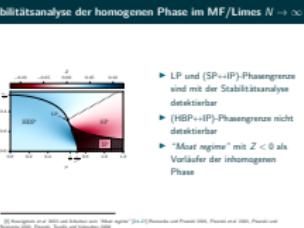


- ▶ LP und $(SP \leftrightarrow IP)$ -Phasengrenze sind mit der Stabilitätsanalyse detektierbar
- ▶ $(HBP \leftrightarrow IP)$ -Phasengrenze nicht detektierbar
- ▶ "Moat regime" mit $Z < 0$ als Vorläufer der inhomogenen Phase

[5] Koenigstein et al. 2022 und Arbeiten zum "Moat regime" [24–27] Rennecke und Pisarski 2021, Pisarski et al. 2021, Pisarski und Rennecke 2021, Pisarski, Tsvetkov und Valgushev 2020

2024-07-30

Stabilitätsanalyse der homogenen Phase im MF/Limes $N \rightarrow \infty$



Zwei Flavor Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$

Effektive Niederenergietheorie der QCD im Rahmen der FRG hier wieder in LPA

$$\bar{\Gamma}_k[\chi] = \int_x \left(\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_4 \mu + h(t^0 \varphi_0 + i\gamma^{\text{ch}} t^a \varphi_a)) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U_k(\frac{\varphi^2}{2}) \right)$$

- ▶ Explizites inhomogenes Kondensat: chirale Dichtewelle (CDW)

$$\varphi(\vec{x}) \equiv (\sigma(\vec{x}), 0, 0, \pi_3(\vec{x})) \equiv \Delta(\cos(\vec{q} \cdot \vec{x}), 0, 0, \sin(\vec{q} \cdot \vec{x}))$$

- ▶ Analytische Konstruktion der **expliziten LPA Flussgleichung der CDW** mittels unitärer Transformationen

[28] Fu 2022, [29] Dautry und Nyman 1979 und [7] Steil 2024

Disputationsvortrag

Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$

Zwei Flavor Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$

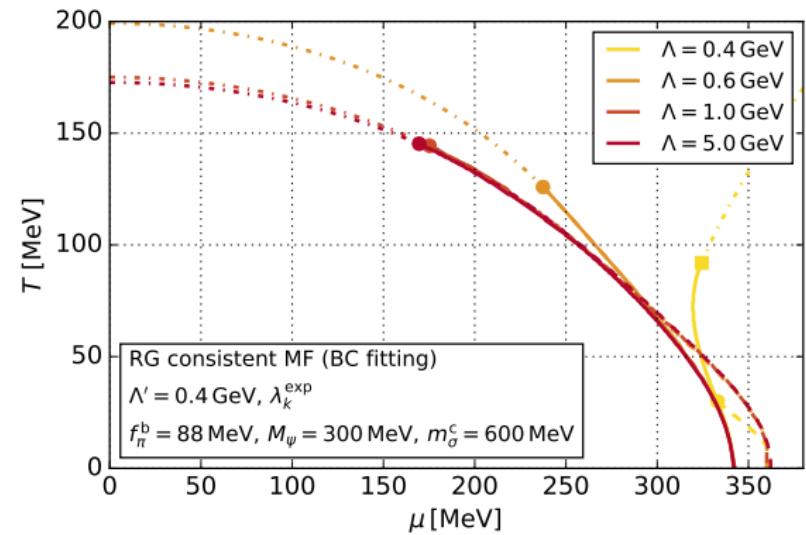
2024-07-30

Effektive Niederenergietheorie der QCD im Rahmen der FRG hier wieder in LPA
 $\bar{\Gamma}_k[\chi] = \int_x \left(\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_4 \mu + h(t^0 \varphi_0 + i\gamma^{\text{ch}} t^a \varphi_a)) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U_k(\frac{\varphi^2}{2}) \right)$
 ▶ Explizites inhomogenes Kondensat: chirale Dichtewelle (CDW)
 $\varphi(\vec{x}) = (\sigma(\vec{x}), 0, 0, \pi_3(\vec{x})) \equiv \Delta(\cos(\vec{q} \cdot \vec{x}), 0, 0, \sin(\vec{q} \cdot \vec{x}))$
 ▶ Analytische Konstruktion der expliziten LPA Flussgleichung der CDW mittels unitärer Transformationen
[28] Fu 2022, [29] Dautry und Nyman 1979 und [7] Steil 2024

- Damit möchte ich zum Abschluss kurz zu meinen **Rechnungen in vier Dimensionen** kommen. Hier habe ich das **Quark-Meson-Modell als effektive Niederenergietheorie der QCD** studiert.
- Das Ziel hier ist explizite inhomogene chirale Phasen in einem QCD nahen Modell im Rahmen der FRG zu studieren. Diese Untersuchung dient als komplementäre Rechnung zu existierenden und geplanten Stabilitätsanalysen.
- Ich habe in local potential approximation ein sehr spezielles inhomogenes Kondensat betrachtet. Und zwar die sog. chirale Dichtewelle in der das Kondensat zwischen einer Pion und Sigma Richtung spiralförmig im Raum rotiert.
- Diese Art von Kondensat hat eine Vielzahl mathematisch angenehmer Eigenschaften, welche es mir ermöglicht haben eine explizite Flussgleichung abzuleiten.

Das inhomogene Phasendiagramm in MF

RG-konsistente MF Rechnungen – nur fermionische Fluktuationen
– als erster Schritt zur vollen Lösung und als Konsistenzcheck zu
existierenden MF Rechnungen



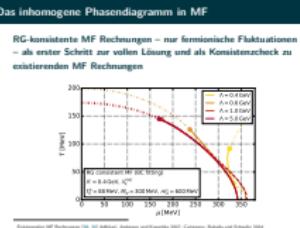
Existierenden MF Rechnungen [30, 31] Adhikari, Andersen und Kneschke 2017, Carignano, Buballa und Schaefer 2014

Disputationsvortrag

Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$

2024-07-30

Das inhomogene Phasendiagramm in MF



- Mit der hergeleiteten Flussgleichungen habe ich zunächst **MF Rechnungen unter Vernachlässigung der bosonischen Fluktuationen** angestellt. Diese Rechnungen dienen als erster Schritt hin zu einer vollständigen Lösung und ermöglicht als **Konsistenzcheck einen Vergleich mit MF Literaturergebnissen**.
- Wie für **rein fermionischen Rechnungen** in dieser Art von Modellen üblich, findet man auch mit der FRG als Regularisierung, eine **inhomogene Phase — hier in diesem schmalen Streifen**.

20/22

► (Numerische) Strömungsmechanik für die FRG

- Methodische, konzeptionelle und didaktische Entwicklungen in $d=0$
- Anwendung im Gross-Neveu-Yukawa-Modell: Bosonische Fluktuationen verhindern Kondensation bei $T \neq 0$ in $d=1+1$

► Stabilitätsanalyse als indirekte Detektionsmethode für inhomogene Phasen

► Quark-Meson-Modell mit explizitem inhomogenen Kondensat im Rahmen der FRG

- FRG Flussgleichung für CDW Kondensat mittels unitärer Transformationen
- RG-konsistente MF Rechnung als erster Schritt zur vollen numerischen Lösung

[1–3] Koenigstein et al. 2022, Koenigstein et al. 2022, Steil und Koenigstein 2022, [4] Stoll et al. 2021 und [5] Koenigstein et al. 2022

2024-07-30

- ▶ (Numerische) Strömungsmechanik für die FRG in $d = 0$
 - Modelle mit **Graßmann-Zahlen** ⇒ Laufende Yukawa Kopplung
 - Entropie Funktion in Anwesenheit von Quelltermen
- ▶ Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$
 - Stabilitätsanalyse mit bosonischen Fluktuationen
 - Verbesserung der Trunkierung
- ▶ Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$
 - Veröffentlichung der RG-konsistenten MF Rechnung und Flussgleichung mit der CDW
 - Numerische Lösung der hergeleiteten Flussgleichung für die CDW ⇒ Einfluss von bosonischen Fluktuationen auf explizites inhomogenes Kondensat
 - Komplementäre Stabilitätsanalyse ⇒ Direkte vs. indirekte Detektion inhomogener Phasen

[32] Steil und Koenigstein (in Vorbereitung) und [33] Steil, Buballa und Schaefer (in Vorbereitung)

Disputationsvortrag

Zusammenfassung und Ausblick

Ausblick

2024-07-30

- Abschließen will ich letztlich mit diesem Ausblick über geplante und mögliche weiterführende Forschung.
- In Bezug auf Null dimensionale Modelle sind **Grassmann-Zahlen als das Analogon zu Fermionen in null Dimensionen** noch ein großer Forschungsschwerpunkt. Hier haben wir ein **Manuskript in Arbeit**.
- Im Gross-Neveu-Yukawa-Modell gibt es auch noch vielversprechende und wichtige Weiterentwicklungen aber mein Fokus liegt aktuell auf den begonnen Arbeiten im Quark-Meson-Modell.
- Hier steht die Veröffentlichung der MF Rechnungen und Flussgleichungen für die CDW noch aus. Auch hierzu ist ein **Manuskript in Arbeit**.
- Der logische nächste große Schritt ist dann die volle Lösung der hergeleiteten Flussgleichungen mit den nun etablierten numerischen Methoden.
- Damit bin ich am Ende meines Vortrags angelangt und ich Danke vielmals für Ihre Aufmerksamkeit!

Ausblick

- (Numerische) Strömungsmechanik für die FRG in $d = 0$
 - Modelle mit **Graßmann-Zahlen** ⇒ Laufende Yukawa Kopplung
 - Entropie Funktion in Anwesenheit von Quelltermen
- Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1+1$
 - Stabilitätsanalyse mit bosonischen Fluktuationen
 - Verbesserung der Trunkierung
- Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$
 - **Veröffentlichung der RG-konsistenten MF Rechnung und Flussgleichung mit der CDW**
 - **Numerische Lösung der hergeleiteten Flussgleichung für die CDW** ⇒ Einfluss von bosonischen Fluktuationen auf explizites inhomogenes Kondensat
 - **Komplementäre Stabilitätsanalyse** ⇒ Direkte vs. indirekte Detektion inhomogener Phasen

[32] Steil und Koenigstein (in Vorbereitung) und [33] Steil, Buballa und Schaefer (in Vorbereitung)

Disputationsvortrag
└ Zusammenfassung und Ausblick

2024-07-30

2024-07-30

Anhänge

Referenzen

- [1] A. Koenigstein *et al.*, “Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. I. The $O(N)$ model”, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065012, arXiv: 2108.02504 [cond-mat.stat-mech].
- [2] A. Koenigstein *et al.*, “Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. II. Entropy production and irreversibility of RG flows”, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065013, arXiv: 2108.10085 [cond-mat.stat-mech].
- [3] M. J. Stoll und A. Koenigstein, “Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. III. Shock and rarefaction waves in RG flows reveal limitations of the $N \rightarrow \infty$ limit in $O(N)$ -type models”, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065014, arXiv: 2108.04037 [cond-mat.stat-mech].
- [4] J. Stoll *et al.*, “Bosonic fluctuations in the $(1+1)$ -dimensional Gross-Neveu(-Yukawa) model at varying μ and T and finite N ”, (2021), arXiv: 2108.10616 [hep-ph].
- [5] A. Koenigstein *et al.*, “Detecting inhomogeneous chiral condensation from the bosonic two-point function in the $(1+1)$ -dimensional Gross–Neveu model in the mean-field approximation*”, *J. Phys. A* **55** (2022) 375402, arXiv: 2112.07024 [hep-ph].
- [6] O. Philipsen, “Nuclear Matter between Heaven and Earth: The QCD Phase Diagram”, Inaugural lecture (Frankfurt: Goethe-Universität, 2010), URL:
https://itp.uni-frankfurt.de/~philipsen/homepage_files/antritt10.pdf, [Online; accessed 2024.05.02].

Disputationsvortrag

Referenzen

Referenzen

2024-07-30

Referenzen

- [1] A. Koenigstein *et al.*, “Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. I. The $O(N)$ model”, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065012, arXiv: 2108.02504 [cond-mech].
- [2] A. Koenigstein *et al.*, “Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. II. Entropy production and irreversibility of RG flows”, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065013, arXiv: 2108.10085 [cond-mat.stat-mech].
- [3] M. J. Stoll und A. Koenigstein, “Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. III. Shock and rarefaction waves in RG flows reveal limitations of the $N \rightarrow \infty$ limit in $O(N)$ -type models”, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065014, arXiv: 2108.04037 [cond-mat.stat-mech].
- [4] J. Stoll *et al.*, “Bosonic fluctuations in the $(1+1)$ -dimensional Gross-Neveu(-Yukawa) model at varying μ and T and finite N ”, (2021), arXiv: 2108.10616 [hep-ph].
- [5] A. Koenigstein *et al.*, “Detecting inhomogeneous chiral condensation from the bosonic two-point function in the $(1+1)$ -dimensional Gross–Neveu model in the mean-field approximation*”, *J. Phys. A* **55** (2022) 375402, arXiv: 2112.07024 [hep-ph].
- [6] O. Philipsen, “Nuclear Matter between Heaven and Earth: The QCD Phase Diagram”, Inaugural lecture (Frankfurt: Goethe-Universität, 2010), URL:
https://itp.uni-frankfurt.de/~philipsen/homepage_files/antritt10.pdf, [Online; accessed 2024.05.02].

Referenzen

- [7] M. J. Stein, *From zero-dimensional theories to inhomogeneous phases with the functional renormalization group*, PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2024, DOI: 10.26083/tuprints-00027380, URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/27380/>.
- [8] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. 1. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture”, *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3174–3183.
- [9] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. 2. Phase space cell analysis of critical behavior”, *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3184–3205.
- [10] K. G. Wilson, “Problems in physics with many scales of length”, *Sci. Am.* **241** (1979) 158–179.
- [11] C. Wetterich, “The average action for scalar fields near phase transitions”, *Z. Phys. C* **57** (1993) 451–470.
- [12] C. Wetterich, “Exact evolution equation for the effective potential”, *Phys. Lett. B* **301** (1993) 90–94, arXiv: 1710.05815 [hep-th].
- [13] M. Reuter und C. Wetterich, “Effective average action for gauge theories and exact evolution equations”, *Nucl. Phys. B* **417** (1994) 181–214.
- [14] T. R. Morris, “The Exact Renormalization Group and approximate solutions”, *Int. J. Mod. Phys. A* **09** (1994) 2411–2450, arXiv: hep-ph/9308265.

Disputationsvortrag

Referenzen

Referenzen

2024-07-30

Referenzen

- [1] M. J. Stein, *From zero-dimensional theories to inhomogeneous phases with the functional renormalization group*, PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2024, URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/27380/>.
- [2] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. 1. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture”, *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3174–3183.
- [3] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. 2. Phase space cell analysis of critical behavior”, *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3184–3205.
- [4] K. G. Wilson, “Problems in physics with many scales of length”, *Sci. Am.* **241** (1979) 158–179.
- [5] C. Wetterich, “The average action for scalar fields near phase transitions”, *Z. Phys. C* **57** (1993) 451–470.
- [6] C. Wetterich, “Exact evolution equation for the effective potential”, *Phys. Lett. B* **301** (1993) 90–94, arXiv: 1710.05815 [hep-th].
- [7] M. Reuter und C. Wetterich, “Effective average action for gauge theories and exact evolution equations”, *Nucl. Phys. B* **417** (1994) 181–214.
- [8] T. R. Morris, “The Exact Renormalization Group and approximate solutions”, *Int. J. Mod. Phys. A* **09** (1994) 2411–2450, arXiv: hep-ph/9308265.

Referenzen

- [15] N. Tetradis und C. Wetterich, "Critical exponents from effective average action", *Nucl. Phys. B* **422** (1994) 541–592, arXiv: [hep-ph/9308214](#).
- [16] U. Ellwanger, "Flow equations for N point functions and bound states", *Z. Phys. C* **62** (1994) 503–510, arXiv: [hep-ph/9308260](#).
- [17] E. Grossi und N. Wink, "Resolving phase transitions with Discontinuous Galerkin methods", (2019), arXiv: [1903.09503 \[hep-th\]](#).
- [18] J. Keitel und L. Bartosch, "The zero-dimensional $O(N)$ vector model as a benchmark for perturbation theory, the large- N expansion and the Functional Renormalization Group", *J. Phys. A* **A45** (2012) 105401, arXiv: [1109.3013 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [19] A. Kurganov und E. Tadmor, "New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection–Diffusion Equations", *J. Comput. Phys.* **160** (2000) 241–282.
- [20] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "Phase diagram of the Gross-Neveu model: Exact results and condensed matter precursors", *Annals Phys.* **314** (2004) 425–447, arXiv: [hep-th/0402014](#).
- [21] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "Full phase diagram of the massive Gross-Neveu model", *Annals Phys.* **321** (2006) 2604–2637, arXiv: [hep-th/0511206](#).
- [22] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "The Phase diagram of the massive Gross-Neveu model, revisited", (2005), arXiv: [hep-th/0507120](#).

Disputationsvortrag

Referenzen

2024-07-30

Referenzen

Referenzen

- [18] N. Tetradis und C. Wetterich, "Critical exponents from effective average action", *Nucl. Phys. B* **422** (1994) 543–592, arXiv: [hep-ph/9308214](#).
- [19] U. Ellwanger, "Flow equations for N point functions and bound states", *Z. Phys. C* **62** (1994) 503–510, arXiv: [hep-ph/9308260](#).
- [20] E. Grossi und N. Wink, "Resolving phase transitions with Discontinuous Galerkin methods", (2019), arXiv: [1903.09503 \[hep-th\]](#).
- [21] J. Keitel und L. Bartosch, "The zero-dimensional $O(N)$ vector model as a benchmark for perturbation theory, the large- N expansion and the Functional Renormalization Group", *J. Phys. A* **A45** (2012) 105401, arXiv: [1109.3013 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [22] A. Kurganov und E. Tadmor, "New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection–Diffusion Equations", *J. Comput. Phys.* **160** (2000) 241–282.
- [23] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "Phase diagram of the Gross-Neveu model: Exact results and condensed matter precursors", *Annals Phys.* **314** (2004) 425–447, arXiv: [hep-th/0402014](#).
- [24] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "Full phase diagram of the massive Gross-Neveu model", *Annals Phys.* **321** (2006) 2604–2637, arXiv: [hep-th/0511206](#).
- [25] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "The Phase diagram of the massive Gross-Neveu model, revisited", (2005), arXiv: [hep-th/0507120](#).

Referenzen

- [23] G. Basar, G. V. Dunne und M. Thies, "Inhomogeneous condensates in the thermodynamics of the chiral NJL₂ model", *Phys. Rev. D* **79** (2009) 105012, arXiv: [0903.1868 \[hep-th\]](#).
- [24] F. Rennecke und R. D. Pisarski, "Moat Regimes in QCD and their Signatures in Heavy-Ion Collisions", in: *International Conference on Critical Point and Onset of Deconfinement* (2021), arXiv: [2110.02625 \[hep-ph\]](#).
- [25] R. D. Pisarski *et al.*, "The Lifshitz Regime and its Experimental Signals", *Nucl. Phys. A* **1005** (2021) 121910, hrsg. von F. Liu *et al.*, arXiv: [2005.00045 \[nucl-th\]](#).
- [26] R. D. Pisarski und F. Rennecke, "Signatures of Moat Regimes in Heavy-Ion Collisions", *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021) 152302, arXiv: [2103.06890 \[hep-ph\]](#).
- [27] R. D. Pisarski, A. M. Tsvelik und S. Valgushev, "How transverse thermal fluctuations disorder a condensate of chiral spirals into a quantum spin liquid", *Phys. Rev. D* **102** (2020) 016015, arXiv: [2005.10259 \[hep-ph\]](#).
- [28] W.-j. Fu, "QCD at finite temperature and density within the fRG approach: an overview", *Commun. Theor. Phys.* **74** (2022) 097304, arXiv: [2205.00468 \[hep-ph\]](#).
- [29] F. Dautry und E. M. Nyman, "Pion condensation and the σ -model in liquid neutron matter", *Nucl. Phys. A* **319** (1979) 323–348.
- [30] P. Adhikari, J. O. Andersen und P. Kneschke, "Inhomogeneous chiral condensate in the quark-meson model", *Phys. Rev. D* **96** (2017) 016013, arXiv: [1702.01324 \[hep-ph\]](#), [Erratum: *Phys. Rev. D* **98**, 099902 (2018)].

Disputationsvortrag

Referenzen

Referenzen

2024-07-30

Referenzen

- [29] G. Basar, G. V. Dunne und M. Thies, "Inhomogeneous condensates in the thermodynamics of the chiral NJL₂ model", *Phys. Rev. D* **79** (2009) 105012, arXiv: [0903.1868 \[hep-th\]](#).
- [30] F. Rennecke und R. D. Pisarski, "Moat Regimes in QCD and their Signatures in Heavy-Ion Collisions", in: *International Conference on Critical Point and Onset of Deconfinement* (2021), arXiv: [2110.02625 \[hep-ph\]](#).
- [31] R. D. Pisarski *et al.*, "The Lifshitz Regime and its Experimental Signals", *Nucl. Phys. A* **1005** (2021) 121910, hrsg. von F. Liu *et al.*, arXiv: [2005.00045 \[nucl-th\]](#).
- [32] R. D. Pisarski, F. Rennecke und F. Liu, "Signatures of Moat Regimes in Heavy-Ion Collisions", *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021) 152302, arXiv: [2103.06890 \[hep-ph\]](#).
- [33] R. D. Pisarski, A. M. Tsvelik und S. Valgushev, "How transverse thermal fluctuations disorder a condensate of chiral spirals into a quantum spin liquid", *Phys. Rev. D* **102** (2020) 016015, arXiv: [2005.10259 \[hep-ph\]](#).
- [34] W.-j. Fu, "QCD at finite temperature and density within the fRG approach: an overview", *Commun. Theor. Phys.* **74** (2022) 097304, arXiv: [2205.00468 \[hep-ph\]](#).
- [35] F. Dautry und E. M. Nyman, "Pion condensation and the σ -model in liquid neutron matter", *Nucl. Phys. A* **319** (1979) 323–348.
- [36] P. Adhikari, J. O. Andersen und P. Kneschke, "Inhomogeneous chiral condensate in the quark-meson model", *Phys. Rev. D* **96** (2017) 016013, arXiv: [1702.01324 \[hep-ph\]](#), [Erratum: *Phys. Rev. D* **98**, 099902 (2018)].

Referenzen

- [31] S. Carignano, M. Buballa und B.-J. Schaefer, "Inhomogeneous phases in the quark-meson model with vacuum fluctuations", *Phys. Rev. D* **90** (2014) 014033, arXiv: [1404.0057 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1404.0057).
- [32] M. J. Steil und A. Koenigstein, "Testing FRG (numerics) in zero spacetime dimensions: A model with fermions, bosons, and interactions", 2024, in preparation.
- [33] M. J. Steil, M. Buballa und B.-J. Schaefer, "Inhomogeneous chiral condensates in the quark-meson model with the functional renormalization group", Draft, 2024, in preparation.

Disputationsvortrag

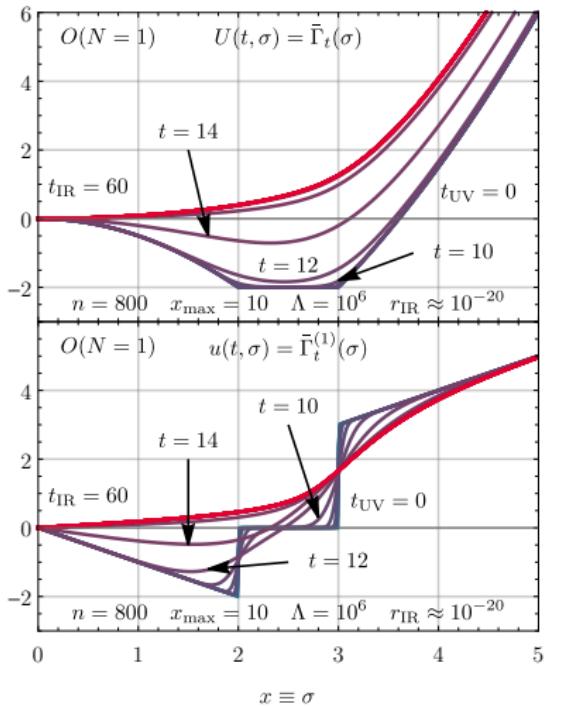
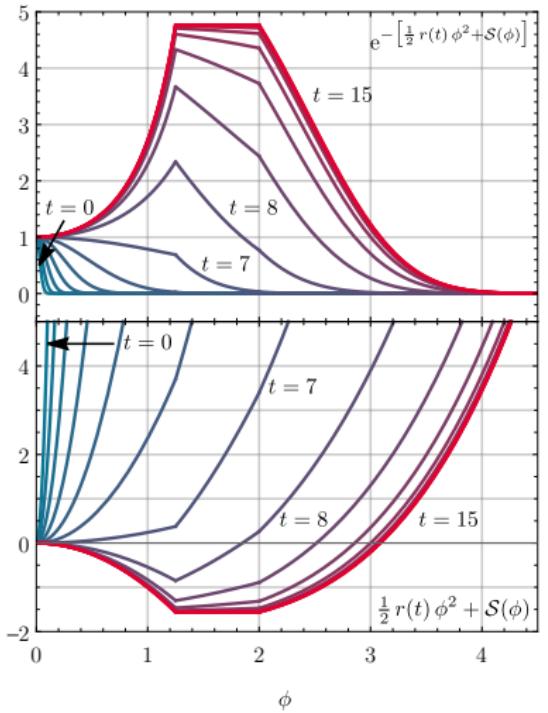
Referenzen

Referenzen

2024-07-30

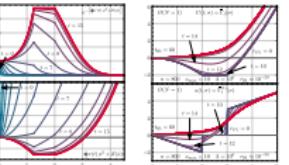
- [34] S. Carignano, M. Buballa und B.-J. Schaefer, "Inhomogeneous phases in the quark-meson model with vacuum fluctuations", *Phys. Rev. D* **90** (2014) 014033, arXiv: [1404.0057 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1404.0057).
- [35] M. J. Steil und A. Koenigstein, "Testing FRG (numerics) in zero spacetime dimensions: A model with fermions, bosons, and interactions", 2024, in preparation.
- [36] M. J. Steil, M. Buballa und B.-J. Schaefer, "Inhomogeneous chiral condensates in the quark-meson model with the functional renormalization group", Draft, 2024, in preparation.

Testszenario I: Nicht stetiges Potential

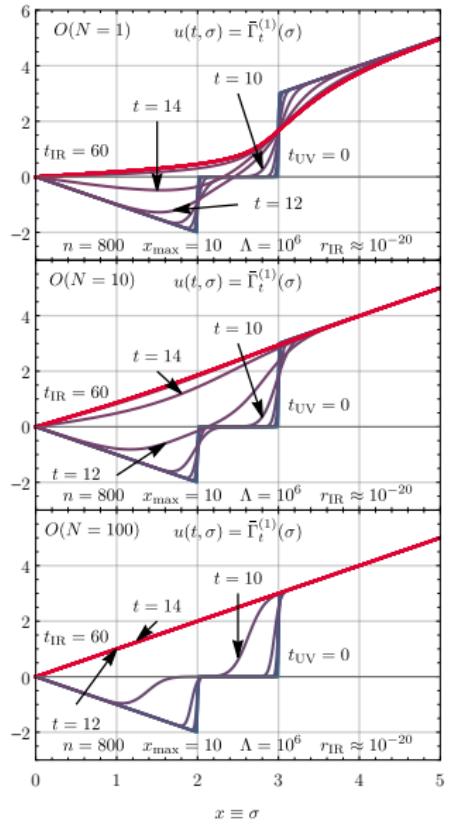


2024-07-30

Testszenario I:



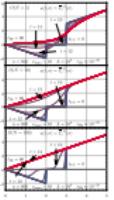
Advektion vs. Diffusion – Pionen vs. Sigma



Disputationsvortrag

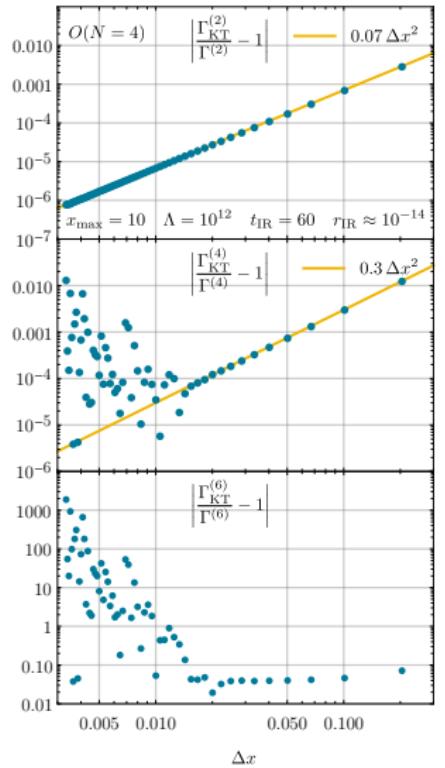
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

Advektion vs. Diffusion – Pionen vs. Sigma



2024-07-30

Räumlicher Diskretisierungsfehler für $U(\vec{\varphi}) = -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} (\vec{\varphi}^2)^2$

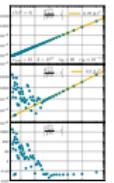


Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

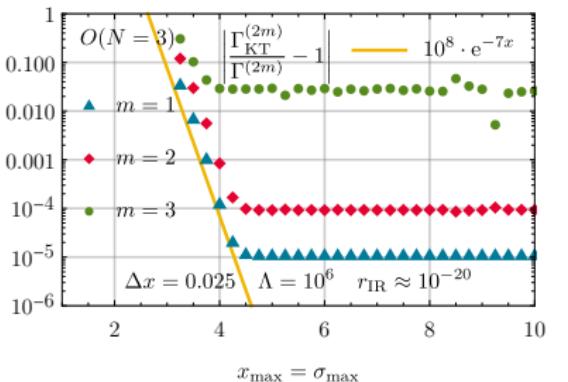
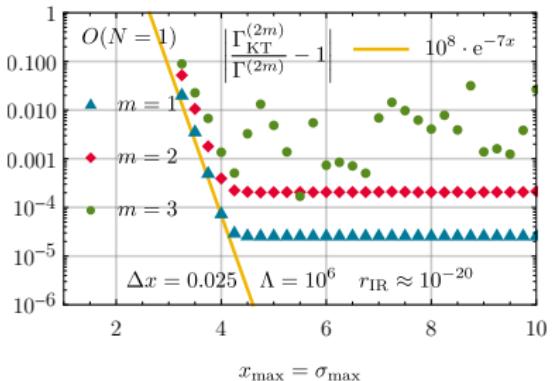
2024-07-30

Räumlicher Diskretisierungsfehler für $U(\vec{\varphi}) = -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} (\vec{\varphi}^2)^2$



Berechnungsintervall für Testszenario I

$$U(\vec{\varphi}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2, & \text{if } |\vec{\varphi}| \leq 2, \\ -2, & \text{if } 2 < |\vec{\varphi}| \leq 3, \\ +\frac{1}{2} (\vec{\varphi}^2 - 13), & \text{if } 3 < |\vec{\varphi}| \end{cases}$$



Disputationsvortrag

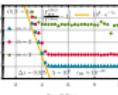
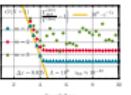
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

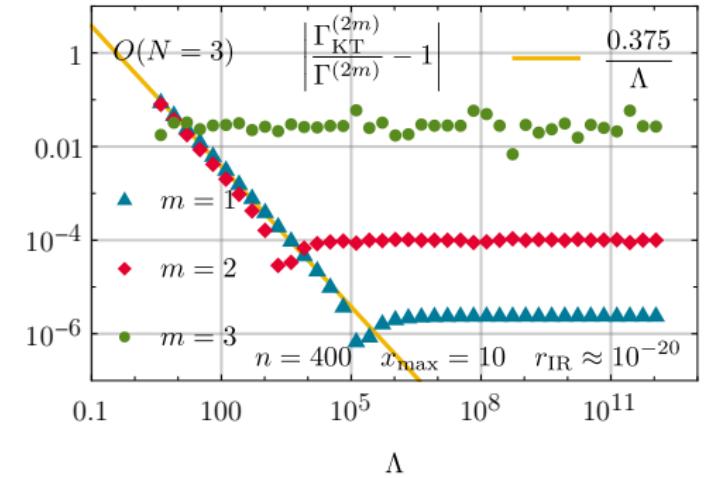
2024-07-30

Berechnungsintervall für Testszenario I

Berechnungsintervall für Testszenario I

$$U(\vec{\varphi}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2, & \text{if } |\vec{\varphi}| \leq 2, \\ -2, & \text{if } 2 < |\vec{\varphi}| \leq 3, \\ +\frac{1}{2} (\vec{\varphi}^2 - 13), & \text{if } 3 < |\vec{\varphi}| \end{cases}$$



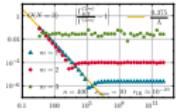


Disputationsvortrag

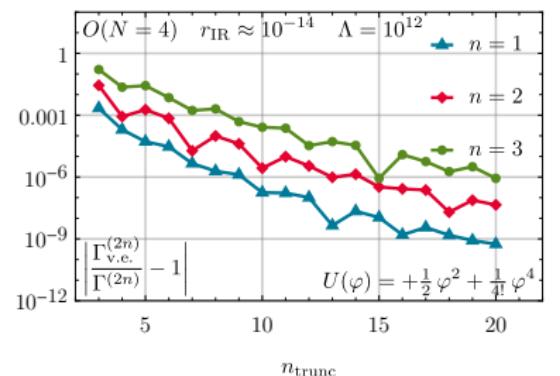
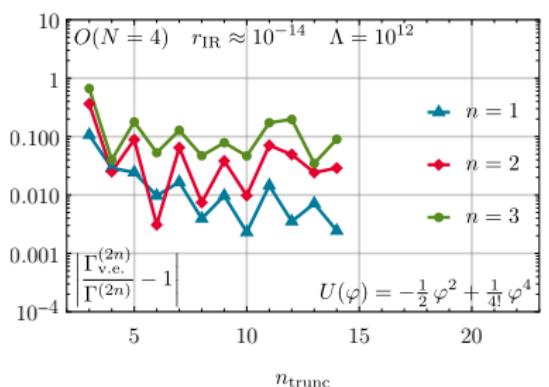
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

RG-Konsistenz und UV-Skalen Λ für Testfall I

2024-07-30



FRG Taylor-/Vertex-Expansion fürr $U(\vec{\varphi}) = \mp \frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} (\vec{\varphi}^2)^2$

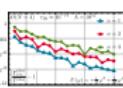
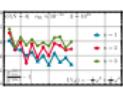


Disputationsvortrag

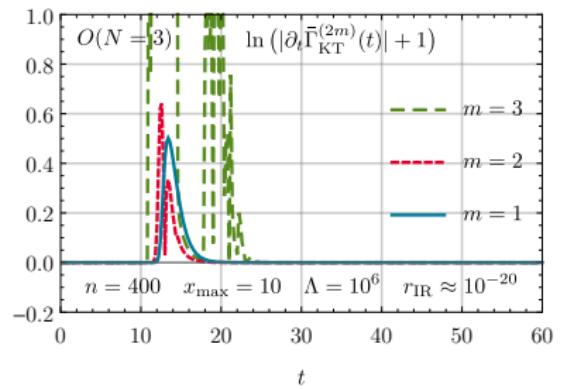
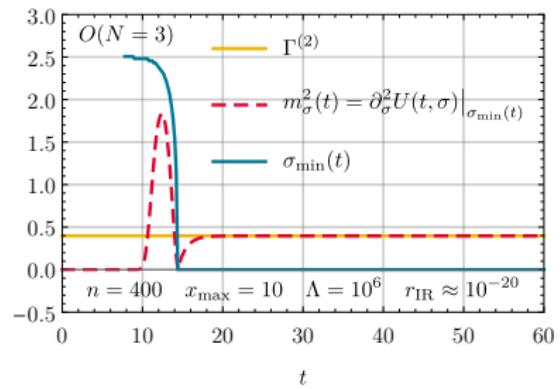
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

2024-07-30

FRG Taylor-/Vertex-Expansion fürr $U(\vec{\varphi}) = \mp \frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} (\vec{\varphi}^2)^2$



Dynamische-Reichweite und IR Cutoffs für Testfall I

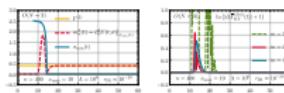


Disputationsvortrag

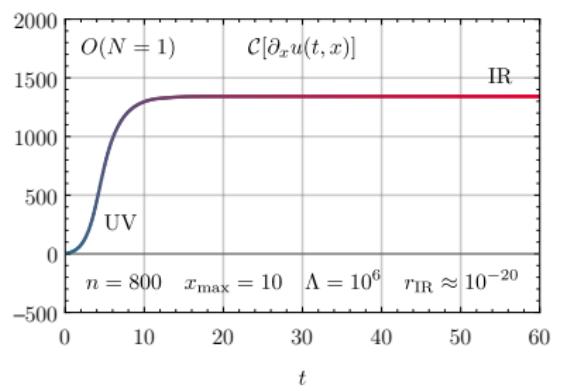
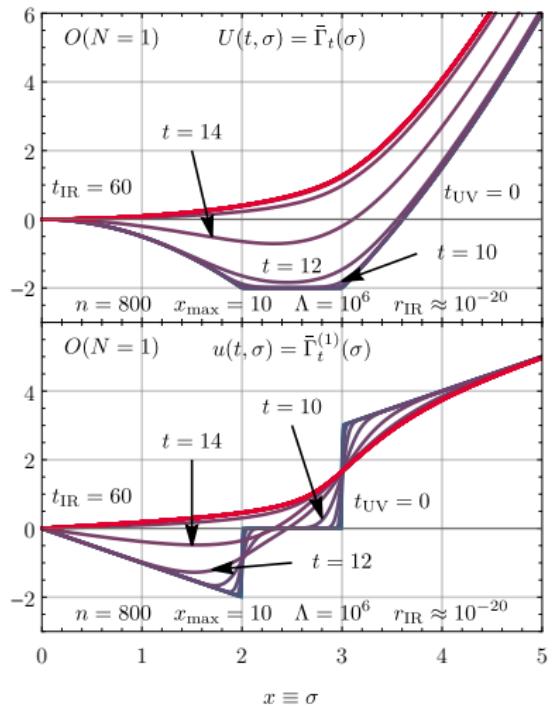
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

Dynamische-Reichweite und IR Cutoffs für Testfall I

2024-07-30



Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall I



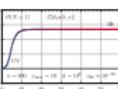
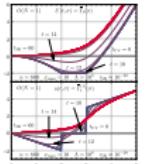
Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

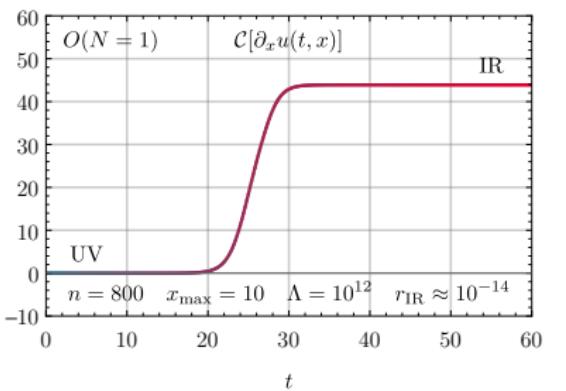
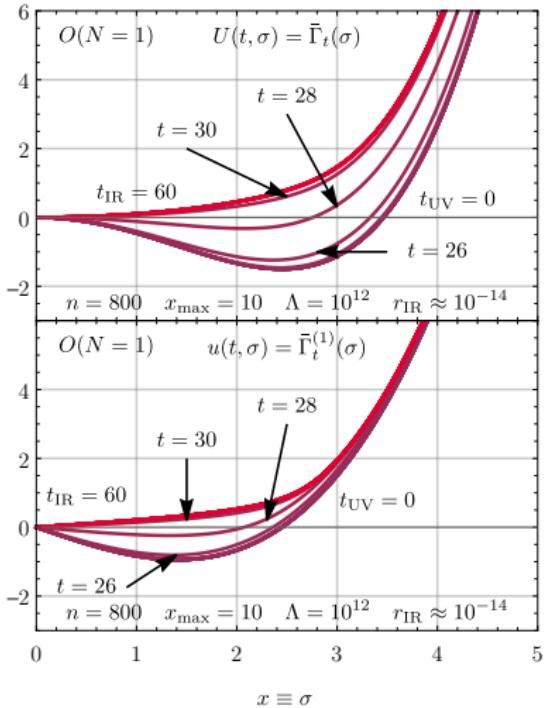
Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall I

2024-07-30

Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall I



Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall II



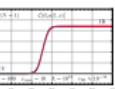
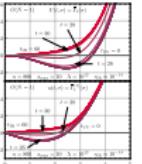
Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

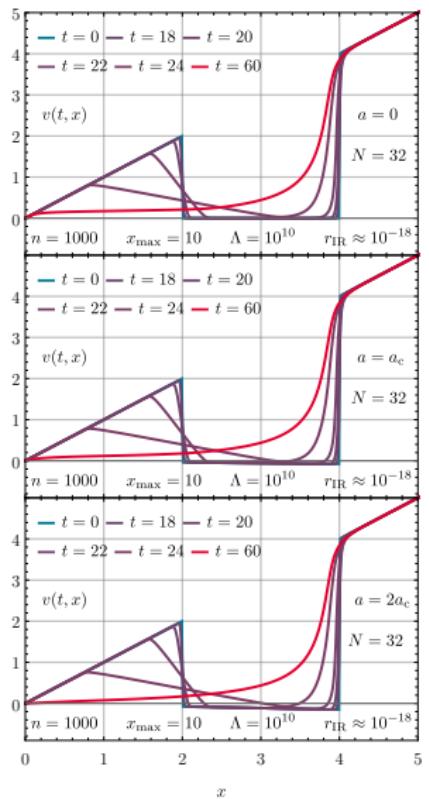
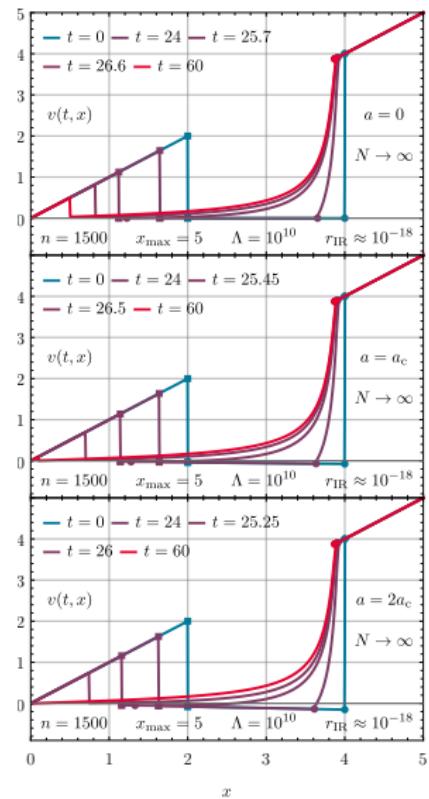
2024-07-30

Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall II

Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall II



Flüsse bei $N \rightarrow \infty$ und $N = 32$

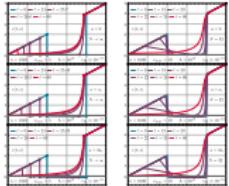


Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d=0$

Flüsse bei $N \rightarrow \infty$ und $N = 32$

2024-07-30



Ein $SU(2)$ Model – stark gekoppelte Graßmannzahlen

Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 0$

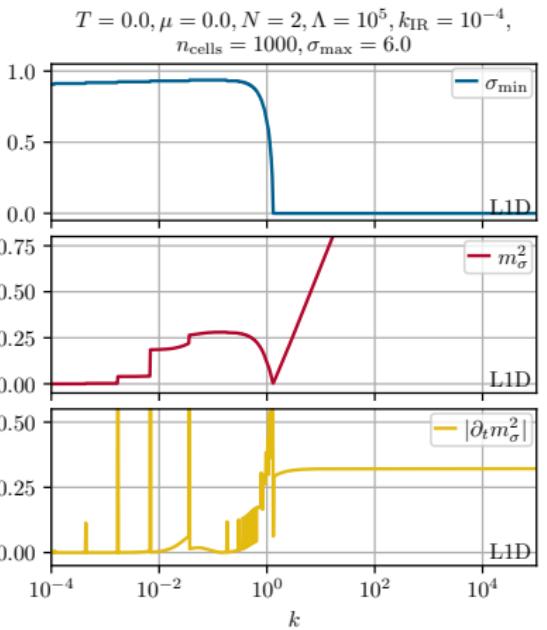
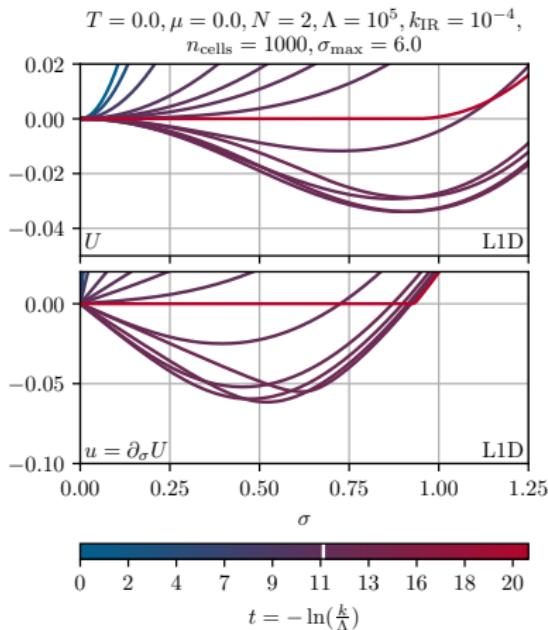
2024-07-30

Ein $SU(2)$ Model – stark gekoppelte Graßmannzahlen

$$\bar{\Gamma}_k[\chi] = (m_t(\varrho)(t_0)^\alpha{}_\beta + i h_t(\varrho)(t_i)^\alpha{}_\beta \varphi_i) \bar{\vartheta}_\alpha \vartheta^\beta + \\ + \frac{1}{2} g_t(\varrho)(t_0)^\alpha{}_\beta (t_0)^\delta{}_\gamma \bar{\vartheta}_\alpha \vartheta^\beta \bar{\vartheta}_\delta \vartheta^\gamma + U_t(\varrho)$$

$$\bar{\Gamma}_k[\chi] = (m_t(\varrho)(t_0)^\alpha{}_\beta + i h_t(\varrho)(t_i)^\alpha{}_\beta \varphi_i) \bar{\vartheta}_\alpha \vartheta^\beta + \\ + \frac{1}{2} g_t(\varrho)(t_0)^\alpha{}_\beta (t_0)^\delta{}_\gamma \bar{\vartheta}_\alpha \vartheta^\beta \bar{\vartheta}_\delta \vartheta^\gamma + U_t(\varrho)$$

GNY Model im Vakuum mit $N = 2$

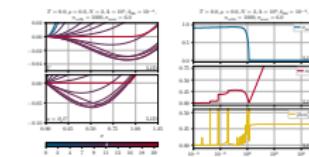


Disputationsvortrag

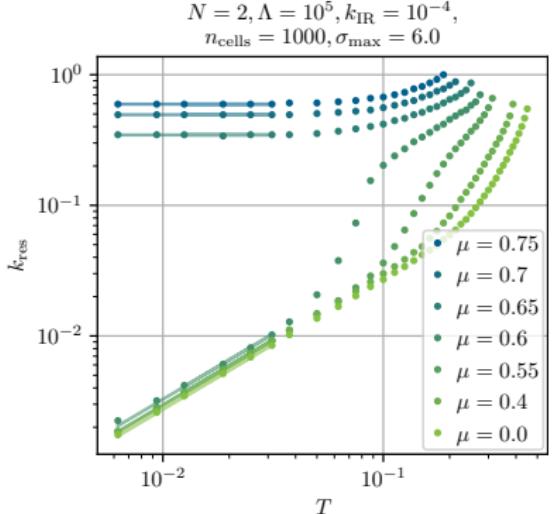
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 1+1$

GNY Model im Vakuum mit $N = 2$

2024-07-30



Restaurations-Skala $k_{\text{res}}(T)$



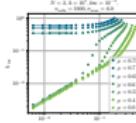
$$k_{\text{res}}(T) \propto \begin{cases} T^0 & \text{für } \mu > 0.6, \\ T^1 & \text{für } \mu < 0.6 \end{cases}$$

Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 1+1$

2024-07-30

Restaurations-Skala $k_{\text{res}}(T)$



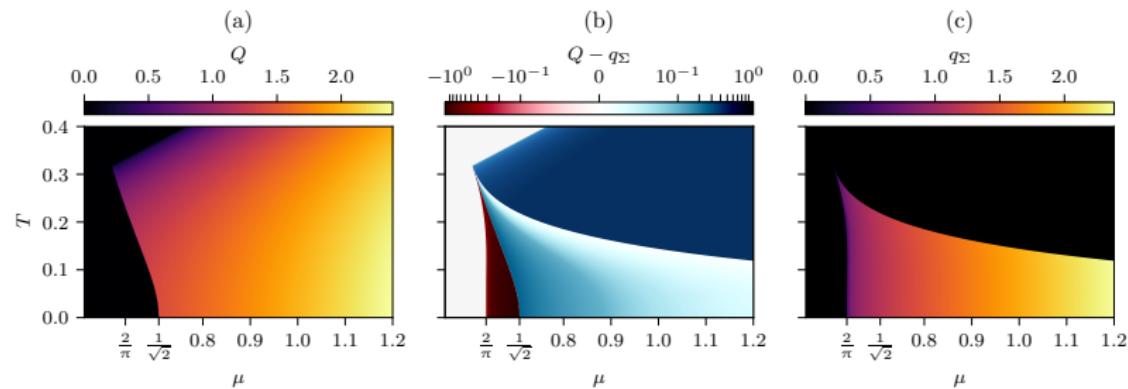
$$k_{\text{res}}(T) \propto \begin{cases} T^0 & \text{für } \mu > 0.6, \\ T^1 & \text{für } \mu < 0.6 \end{cases}$$

Stabilitätsanalyse vs. semi-analytische Lösung

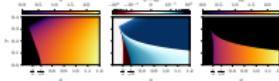
Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 1+1$

Stabilitätsanalyse vs. semi-analytische Lösung



2024-07-30



$$U_\psi(\vec{x}) = \exp(-i\gamma^{\text{ch}} t_3 \vec{q} \cdot \vec{x})$$

$$U_\varphi(\vec{x})_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) & 0 & 0 & 1 + \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -i(1 + \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x})) & 0 & 0 & i(\exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) - 1) \end{pmatrix}_I$$

Unitäre Transformationen für die CDW

Unitäre transformationen zur Diagonalisierung von $\tilde{\Gamma}_k^{\psi\psi}$ und $\tilde{\Gamma}_k^{\varphi_i\varphi_j}$:

$$U_\psi(\vec{x}) = \exp(-i\gamma^{\text{ch}} t_3 \vec{q} \cdot \vec{x})$$

$$U_\varphi(\vec{x})_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) & 0 & 0 & 1 + \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -i(1 + \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x})) & 0 & 0 & i(\exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) - 1) \end{pmatrix}_{ij}$$

Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 3+1$

2024-07-30

Unitäre Transformationen für die CDW

Flussgleichung für QM Model mit CDW Kondensat

$$\partial_k U_k(\rho) = 12 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{\pm} \left[-1 + n_f(\beta[E_{\psi;k}^{\pm} + \mu]) + n_f(\beta[E_{\psi;k}^{\pm} - \mu]) \right] \partial_k E_{\psi;k}^{\pm} + \\ + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=0}^3 \left(\frac{1}{2} + n_b(\beta E_{\phi,i;k}) \right) \tilde{\partial}_k E_{\phi,i;k}$$

$$(E_{\psi;k}^{\pm})^2 = M^2 + \frac{(\vec{p}_k^{+q})^2}{2} + \frac{(\vec{p}_k^{-q})^2}{2} \pm \sqrt{M^2 (\vec{p}_k^{+q} - \vec{p}_k^{-q})^2 + \frac{1}{4} ((\vec{p}_k^{+q})^2 - (\vec{p}_k^{-q})^2)^2} \\ \stackrel{q=0}{=} M^2 + (\vec{p}_k)^2$$

$$(E_{\phi;k}^{0,3})^2 = \frac{1}{2}(\vec{p}_k)^2 + \frac{1}{2}(\vec{p}_k^{+4q})^2 + 2U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho) \pm \sqrt{4\rho^2 U''_k(\rho)^2 + \frac{1}{4} ((\vec{p}_k^{+4q})^2 - (\vec{p}_k)^2)^2} \\ \stackrel{q=0}{=} (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho) + 2\rho(U''_k(\rho) \pm |U''_k(\rho)|)$$

$$(E_{\phi;k}^1)^2 = (E_{\phi;k}^2)^2 = (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho) \stackrel{q=0}{=} (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho)$$

$$\vec{p}_k^q \equiv (\vec{p} + \vec{q}/2) \lambda_k (|\vec{p} + \vec{q}/2|) \quad \text{und} \quad M^2 \equiv \frac{1}{4} h^2 \Delta^2 = \frac{h^2}{2} \rho$$

Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 3+1$

2024-07-30

Flussgleichung für QM Model mit CDW Kondensat

Flussgleichung für QM Model mit CDW Kondensat

$$\partial_k U_k(\rho) = 12 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{\pm} \left[-1 + n_f(\beta [E_{\psi;k}^{\pm} + \mu]) + n_f(\beta [E_{\psi;k}^{\pm} - \mu]) \right] \partial_k E_{\psi;k}^{\pm} + \\ + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=0}^3 \left(\frac{1}{2} + n_b(\beta E_{\phi,i;k}) \right) \tilde{\partial}_k E_{\phi,i;k}$$

$$(E_{\psi;k}^{\pm})^2 = M^2 + \frac{(\vec{p}_k^{+q})^2}{2} + \frac{(\vec{p}_k^{-q})^2}{2} + \sqrt{M^2 (\vec{p}_k^{+q} - \vec{p}_k^{-q})^2 + \frac{1}{4} ((\vec{p}_k^{+q})^2 - (\vec{p}_k^{-q})^2)^2} \\ \stackrel{q=0}{=} M^2 + (\vec{p}_k)^2$$

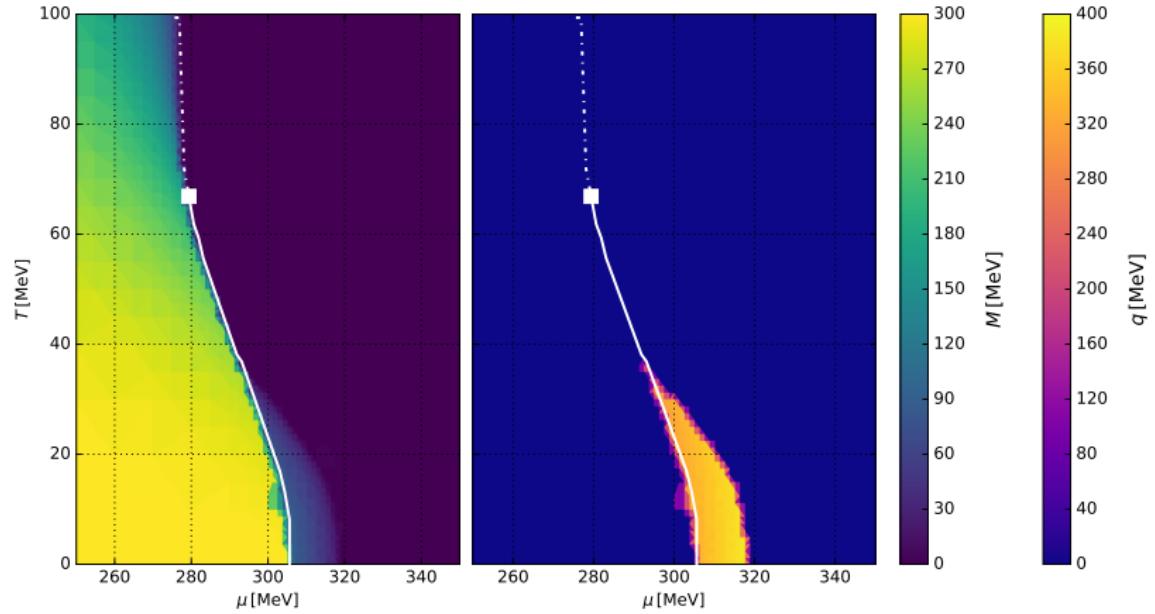
$$(E_{\phi,k}^{0,3})^2 = \frac{1}{2}(\vec{p}_k)^2 + \frac{1}{2}(\vec{p}_k^{+4q})^2 + 2U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho) + \sqrt{\omega^2 U''_k(\rho)^2 + \frac{1}{4} ((\vec{p}_k^{+4q})^2 - (\vec{p}_k)^2)^2}$$

$$\stackrel{q=0}{=} (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho) + 2\rho(U''_k(\rho) + |U''_k(\rho)|)$$

$$(E_{\phi,k}^1)^2 = (E_{\phi,k}^2)^2 = (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho) \stackrel{q=0}{=} (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho)$$

$$\vec{p}_k^q = (\vec{p} + \vec{q}/2) \lambda_k (|\vec{p} + \vec{q}/2|) \quad \text{und} \quad M^2 = \frac{1}{4} h^2 \Delta^2 = \frac{h^2}{2} \rho$$

Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung



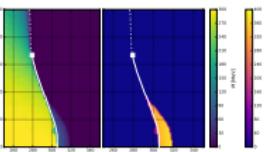
Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 3+1$

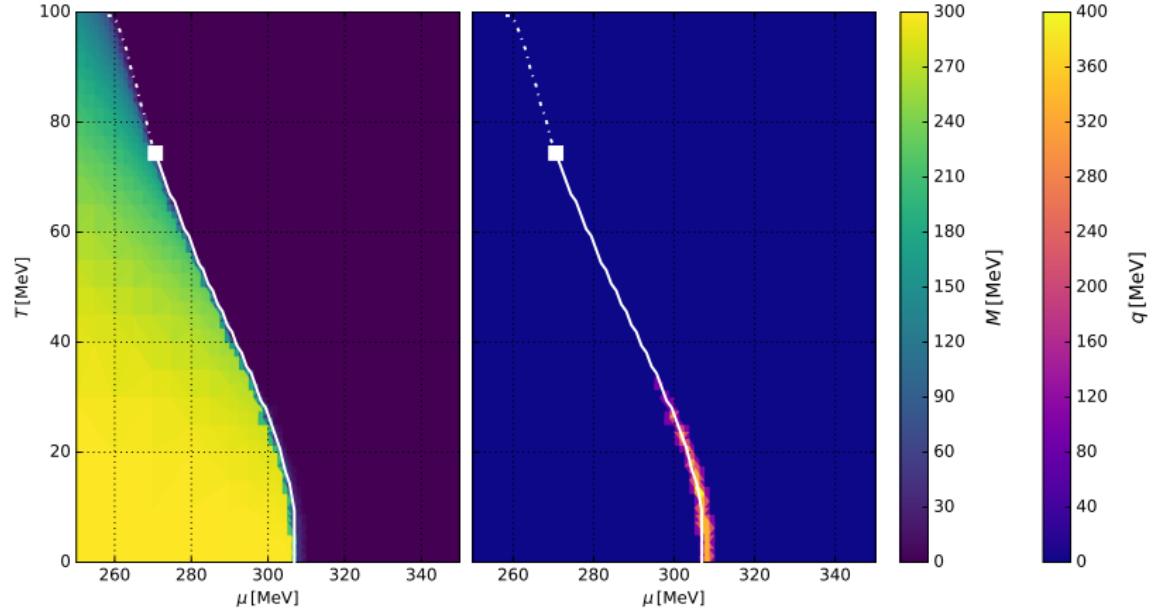
2024-07-30

Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung

Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung



Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung

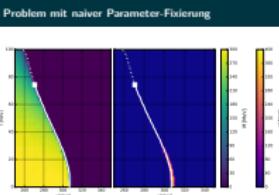


Disputationsvortrag

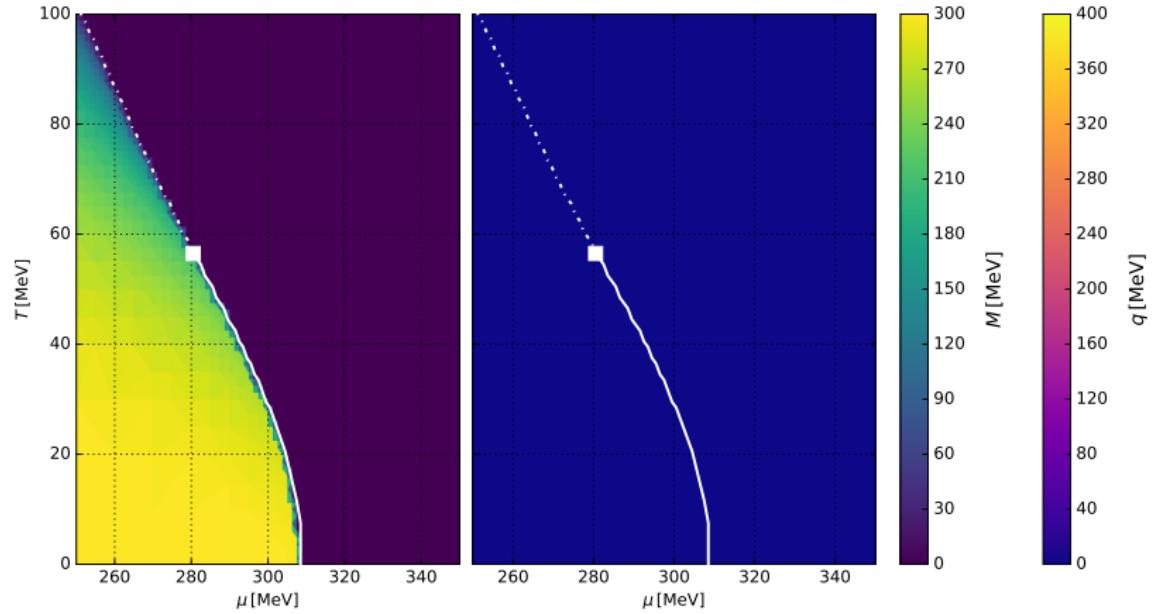
Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 3+1$

2024-07-30

Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung



Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung



Disputationsvortrag

Weitere Ergebnisse und Plots für $d = 3+1$

2024-07-30

Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung

