

Von null-dimensionalen Theorien zu inhomogenen Phasen mit der Funktionalen Renormierungsgruppe

Disputationsvortrag

Martin Jakob Steil

15.05.2024

Prüfende

Priv.-Doz. Dr. Michael Buballa
Prof. Dr. Jens Braun
Prof. Dr. Tetyana Galatyuk
Prof. Dr. Michael Vogel

Veröffentlichungen

- [1] *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065012
- [2] *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065013
- [3] *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065014
- [4] arXiv: 2108.10616 [hep-ph]
- [5] *J. Phys. A* **55** (2022) 375402

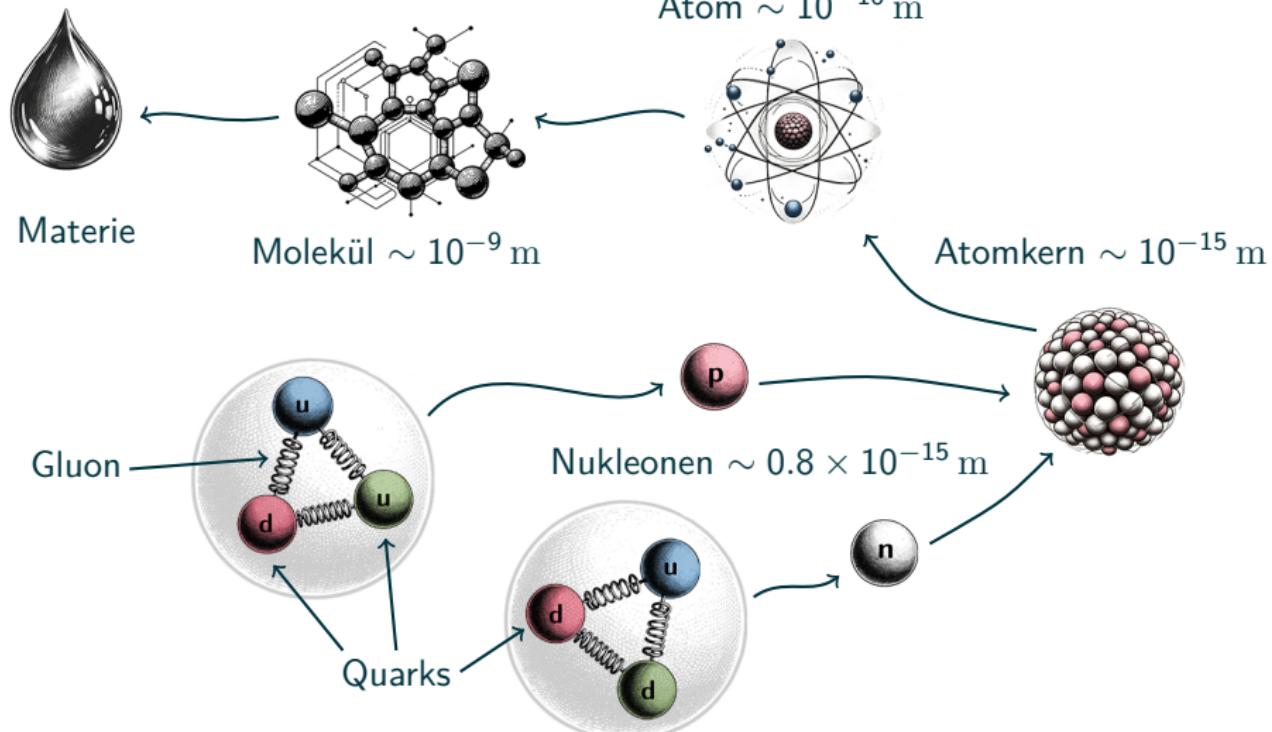
Koautoren

J. Braun^[1, 2], M. Buballa^[1],
E. Grossi^[1, 2], A. Koenigstein^[1–5],
L. Pannullo^[5], S. Rechenberger^[5],
D. H. Rischke^[1], J. Stoll^[4],
N. Wink^[1, 2], M. Winstel^[5] und
N. Zorbach^[4]

Übersicht

1. Einleitung und Motivation
2. Funktionale Renormierungsgruppe und Theorien in $d = 0$
3. Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1 + 1$
4. Quark-Meson-Modell in $d = 3 + 1$
5. Zusammenfassung und Ausblick

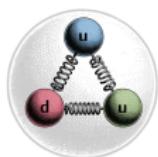
Von Quarks zu makroskopischer Materie



Grafiken: Motiviert von stock.adobe.com und Elementen mit OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Starke und elektromagnetische Wechselwirkung im Vergleich

Proton



$$m_u \approx 2 \text{ MeV}$$

$$m_d \approx 5 \text{ MeV}$$

$$m_p \approx 938 \text{ MeV}$$

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \sim 1$$

stark gebunden

$$O(E_b) = 1 \text{ GeV}$$

Wasserstoff Atom



$$m_p \approx 938 \text{ MeV}$$

$$m_e \approx 511 \text{ keV}$$

$$m_H \approx 939 \text{ MeV}$$

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{4\pi} \sim 7 \times 10^{-3}$$

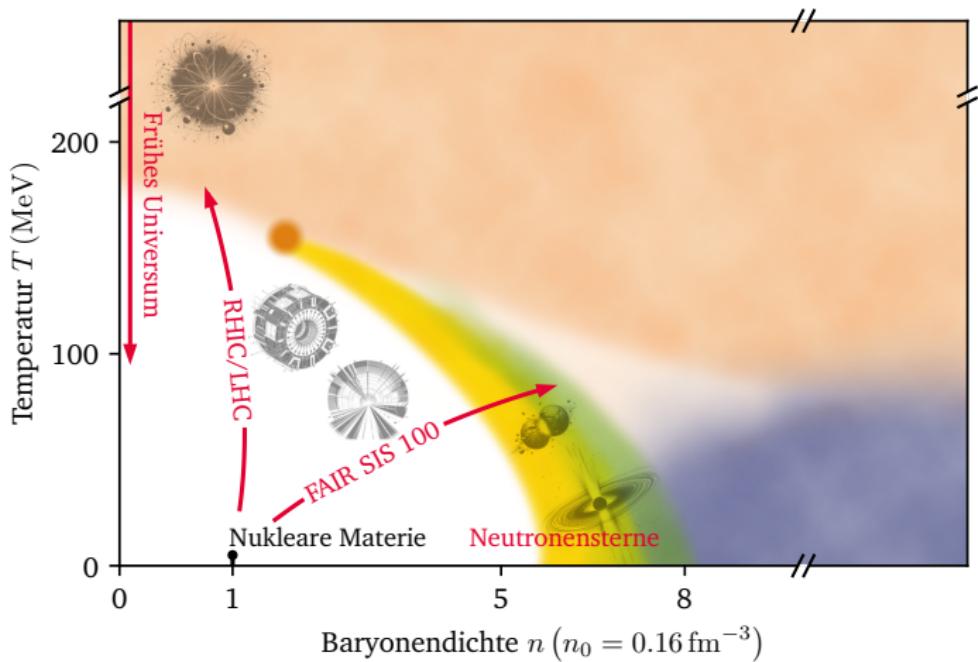
elektromagnetisch gebunden

$$E_b = 13.6 \text{ eV}$$

Einheiten: $1 \text{ MeV} \approx 1.6 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.8 \times 10^{-30} \text{ kg}$

Folienaufbau: Motiviert von [6] Philipsen 2010, Grafiken: OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

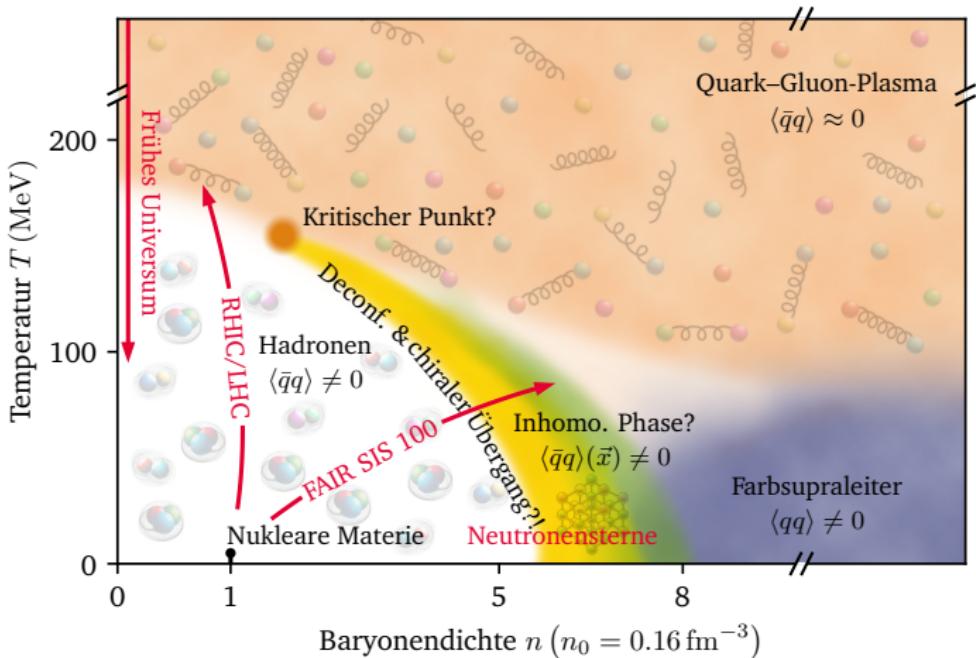
Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie



Einheiten: $1 \text{ MeV} \approx 1.2 \times 10^{10} \text{ K}$ und $1 \text{ fm}^{-3} = 1 \times 10^{45} \text{ m}^{-3}$

Grafik: Siehe Fig. 1.1 in [7] Steil (2023) und zusätzliche Elemente mit OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie



Einheiten: $1 \text{ MeV} \approx 1.2 \times 10^{10} \text{ K}$ und $1 \text{ fm}^{-3} = 1 \times 10^{45} \text{ m}^{-3}$

Grafik: Siehe Fig. 1.1 in [7] Steil (2023) und zusätzliche Elemente mit OpenAI, "DALL-E 2" (2024)

Die Quantenchromodynamik (QCD)

Generierendes Funktional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\chi] \exp(-S_{\text{QCD}} + J^a \chi_a)$$

als Zustandssumme/euklidisches Funktionalintegral über die Wirkung

$$S_{\text{QCD}} = \int_x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{q}(\gamma_\mu D_\mu + \hat{m} - \gamma_4 \hat{\mu}) q + \dots \right)$$

Die Quantenchromodynamik (QCD)

Generierendes Funktional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\chi] \exp(-S_{\text{QCD}} + J^a \chi_a)$$

als Zustandssumme/euklidisches Funktionalintegral über die Wirkung

$$S_{\text{QCD}} = \int_x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{q}(\gamma_\mu D_\mu + \hat{m} - \gamma_4 \hat{\mu}) q + \dots \right)$$

- ▶ Funktionale Ableitungen von $Z[J] \Rightarrow$ Korrelationsfunktionen
- ▶ Thermodynamisches Potential $\Omega(\mu, V, T) = -T \ln Z[J=0]$
- ▶ Herausforderung: Explizite Berechnung von $Z[J]$

Die Quantenchromodynamik (QCD)

Generierendes Funktional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\chi] \exp(-S_{\text{QCD}} + J^a \chi_a)$$

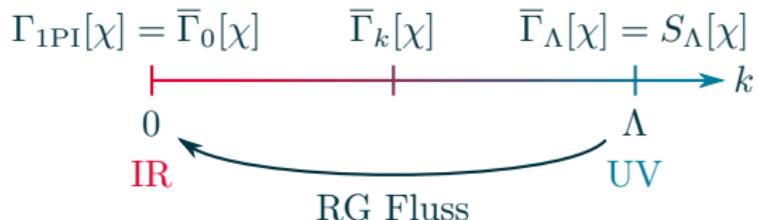
als Zustandssumme/euklidisches Funktionalintegral über die Wirkung

$$S_{\text{QCD}} = \int_x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{q}(\gamma_\mu D_\mu + \hat{m} - \gamma_4 \hat{\mu}) q + \dots \right)$$

- ▶ Funktionale Ableitungen von $Z[J] \Rightarrow$ Korrelationsfunktionen
- ▶ Thermodynamisches Potential $\Omega(\mu, V, T) = -T \ln Z[J=0]$
- ▶ Herausforderung: Explizite Berechnung von $Z[J]$
 - Störungstheoretische Berechnung für $\alpha_s \ll 1$
 - Direkte numerische Simulation: Gitter QCD
 - **Funktionale Methoden**
 - ...

Die Funktionale Renormierungsgruppe (FRG)

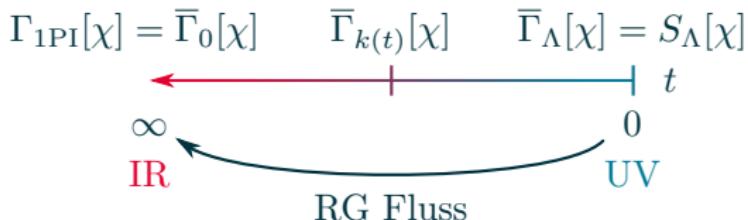
- Implementierung von K. G. Wilsons Ansatz zur RG:



[8–10] Wilson 1971, Wilson 1979 und [11–16] Wetterich 1993, Reuter und Wetterich 1994, Morris 1994, Tetradis und Wetterich 1994, Ellwanger 1994

Die Funktionale Renormierungsgruppe (FRG)

- Implementierung von K. G. Wilsons Ansatz zur RG:



- Evolutionsgleichung ($t \equiv -\ln(k/\Lambda)$) statt Funktionalintegral

$$\partial_t \bar{\Gamma}_k[\chi] = \frac{1}{2} \text{STr} \left([\bar{\Gamma}_k^{(2)}[\chi] + R_k]^{-1} \partial_t R_k \right) = \frac{1}{2} \circlearrowleft$$

- Exakte funktionale Differentialgleichung **aber** zur expliziten Lösung sind Trunkierungen nötig!

[8–10] Wilson 1971, Wilson 1979 und [11–16] Wetterich 1993, Reuter und Wetterich 1994, Morris 1994, Tetradiis und Wetterich 1994, Ellwanger 1994

Forschungsprojekte im Rahmen der Dissertation

- ▶ **Problem:** Etablierte Diskretisierungsverfahren für trunkierte FRG Flussgleichungen sind numerisch unzuverlässig für
 - Stark im Feldraum gekoppelte Probleme mit Phasenübergängen
 - Probleme mit intern/externen getriebenen Schocks/Diskontinuitäten
 - Anwendungen bei kleinen T , k und besonders bei hohem μ

[17] Grossi und Wink 2019, [1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022 und [4, 5] Stoll *et al.* 2021, Koenigstein *et al.* 2022

Forschungsprojekte im Rahmen der Dissertation

- ▶ **Problem:** Etablierte Diskretisierungsverfahren für trunkierte FRG Flussgleichungen sind numerisch unzuverlässig für
 - Stark im Feldraum gekoppelte Probleme mit Phasenübergängen
 - Probleme mit intern/externen getriebenen Schocks/Diskontinuitäten
 - Anwendungen bei kleinen T , k und besonders bei hohem μ
- ▶ **Lösung:** Reformulierung der Flussgleichungen in konservativer Form
⇒ Behandlung im Rahmen der Strömungsmechanik

[17] Grossi und Wink 2019, [1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022 und [4, 5] Stoll *et al.* 2021, Koenigstein *et al.* 2022

Forschungsprojekte im Rahmen der Dissertation

- ▶ **Problem:** Etablierte Diskretisierungsverfahren für trunkierte FRG Flussgleichungen sind numerisch unzuverlässig für
 - Stark im Feldraum gekoppelte Probleme mit Phasenübergängen
 - Probleme mit intern/externen getriebenen Schocks/Diskontinuitäten
 - Anwendungen bei kleinen T , k und besonders bei hohem μ
- ▶ **Lösung:** Reformulierung der Flussgleichungen in konservativer Form
⇒ Behandlung im Rahmen der Strömungsmechanik

- ▶ **Adaption von Konzepten und numerischen Methoden aus dem Feld der Strömungsmechanik auf FRG Flussgleichungen**
- ▶ **Einfluss von bosonischen und fermionischen Fluktuationen auf homogene und inhomogene chirale Kondensate**

Zentrale Forschungsprojekte

[17] Grossi und Wink 2019, [1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022 und [4, 5] Stoll *et al.* 2021, Koenigstein *et al.* 2022

Das $O(N)$ -Modell in $d=0$ – Die perfekte Testumgebung

Untersuchung von gewöhnlichen N -dimensionalen Integralen der Form

$$Z(\vec{J}) = \int_{\mathbb{R}^N} d\vec{\phi} \exp(-S(\vec{\phi}) + \vec{J} \cdot \vec{\phi})$$

mit der Funktionalen Renormierungsgruppe:

► Perfekte Testumgebung:

- Exakte Referenzwerte für alle Theorien $S(\vec{\phi})$ mit $O(N)$ Symmetrie
- Keine Trunkierung nötig
- FRG Flussgleichungen: nicht-trivial und strukturell ähnlich zu $d > 0$
- Ideal für konzeptionelle und numerische Entwicklungen

[18] Keitel und Bartosch 2012 und [1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022

Das $O(1)$ -Modell in $d=0$ – Die perfekte Testumgebung

Untersuchung von gewöhnlichen eindimensionalen Integralen der Form

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \exp(-S(\phi) + J\phi)$$

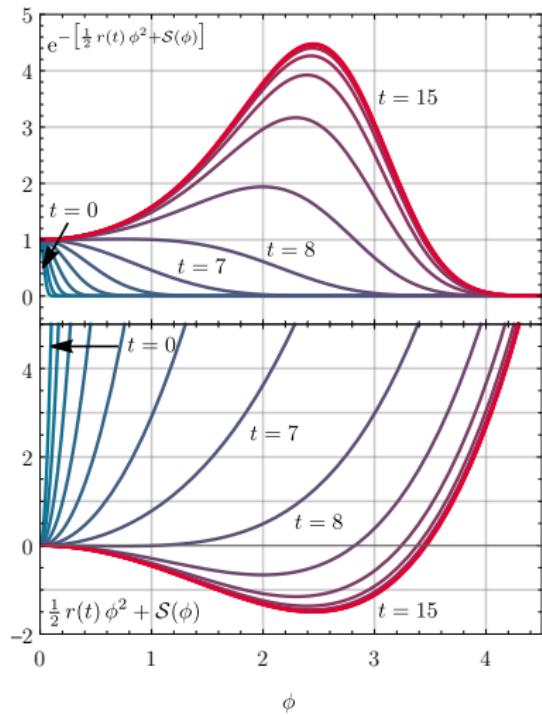
mit der Funktionalen Renormierungsgruppe:

► Perfekte Testumgebung:

- Exakte Referenzwerte für alle Theorien $S(\phi)$ mit \mathbb{Z}_2 Symmetrie
- Keine Trunkierung nötig
- FRG Flussgleichungen: nicht-trivial und strukturell ähnlich zu $d > 0$
- Ideal für konzeptionelle und numerische Entwicklungen

[18] Keitel und Bartosch 2012 und [1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022

Die FRG als Integraldeformation für $N = 1$ mit $r(t) \equiv \Lambda e^{-t}$



[1] Koenigstein et al. 2022

- FRG Flussgleichung für das $O(N)$ -Modell in $d=0$ als **Erhaltungsgleichung**:

$$\partial_\sigma \partial_t U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = -\partial_\sigma F[t, \sigma, u(t, \sigma)] + \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)]$$

[17] Grossi und Wink 2019 und [1] Koenigstein *et al.* 2022 mit Adaption von [19] Kurganov und Tadmor 2000

FRG und numerische Strömungsmechanik

- FRG Flussgleichung für das $O(N)$ -Modell in $d=0$ als **Erhaltungsgleichung**:

$$\partial_\sigma \partial_t U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = -\partial_\sigma F[t, \sigma, u(t, \sigma)] + \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)]$$

- **FRG-Fluss** im wahrsten Sinne des Wortes:

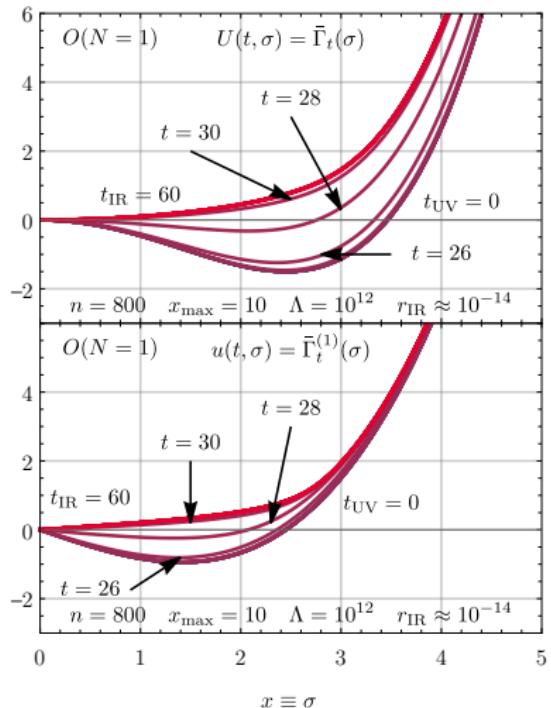
Advektion: $F[t, \sigma, u(t, \sigma)] = -(N-1) \frac{\frac{1}{2} \partial_t r(t)}{r(t) + \frac{1}{\sigma} u(t, \sigma)} = \frac{1}{2}$ 

Diffusion: $Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] = \frac{\frac{1}{2} \partial_t r(t)}{r(t) + \partial_\sigma u(t, \sigma)} = \frac{1}{2}$ 

- Adaption eines “finite volume” Verfahrens für die FRG Flussgleichung

[17] Grossi und Wink 2019 und [1] Koenigstein *et al.* 2022 mit Adaption von [19] Kurganov und Tadmor 2000

FRG Fluss für $N = 1$ und $\mathcal{S}(\phi) = U(t = 0, \phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4$



[1] Koenigstein et al. 2022

Und noch viel mehr ...

- ▶ Weitere Testszenarien
- ▶ Advektion vs. Diffusion – Pionen vs. Sigma
- ▶ Skalierungs- und Konvergenztests
- ▶ Randbedingungen
- ▶ RG-Konsistenz und UV Skalen Λ
- ▶ Vergleich mit Taylor-/Vertex-Entwicklung
- ▶ Dynamische Reichweite und IR Cutoffs
- ▶ Irreversibilität und “Entropie”-Produktion
- ▶ Advektive Flüsse bei großem N
- ▶ **Graßmann-Zahlen: “Fermionen” in null Dimensionen**

[1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022

Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d=1+1$

Testmodell in $1+1$ Dimensionen zum Studium von diskreter chiraler (\mathbb{Z}_2) Symmetriebrechung

$$\bar{\Gamma}_t[\chi] = \int_x \left(\bar{\psi} (\not{\partial} - \mu \gamma^2 + \frac{h}{\sqrt{N}} \varphi) \psi - \frac{1}{2} \varphi (\square \varphi) + U(t, \varphi) \right)$$

- ▶ N über eine Yukawa-Kopplung (h) wechselwirkende Fermionen
 - ▶ Asymptotisch frei und renormierbar
 - ▶ ...
- ⇒ Gut geeignet für Untersuchungen verschiedener technischer – für QCD Materie relevanter – Aspekte.

[4, 5] Stoll *et al.* 2021, Koenigstein *et al.* 2022

Trunkierte Flussgleichung in “local potential approximation”

- LPA Flussgleichung für das GNY-Modell in $d = 1+1$:

$$\partial_t \partial_\sigma U(t, \sigma) \equiv \partial_t u(t, \sigma) = \partial_\sigma Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] + S[t, \sigma]$$

- Diffusionsgleichung mit Quellen/Senken:

$$Q[t, \partial_\sigma u(t, \sigma)] = \frac{1}{2} \text{ (Diagramm: Kreis mit blauem Strich und einem kleinen Kreuz oben rechts)} = -\frac{1}{\pi N} \frac{k_t^3}{2E_b(t, \partial_\sigma u)} [1 + 2 n_b(\beta E_b(t, \partial_\sigma u))]$$

$$S[t, \sigma] = -\frac{1}{2} \partial_\sigma \text{ (Diagramm: Kreis mit grüner Pfeilrichtung im Uhrzeigersinn und einem kleinen Kreuz oben rechts)} = \partial_\sigma \left(\frac{1}{\pi} \frac{k_t^3}{E_f(t, \sigma)} [1 - \right. \\ \left. - n_f(\beta [E_f(t, \sigma) + \mu]) - n_f(\beta [E_f(t, \sigma) - \mu])] \right)$$

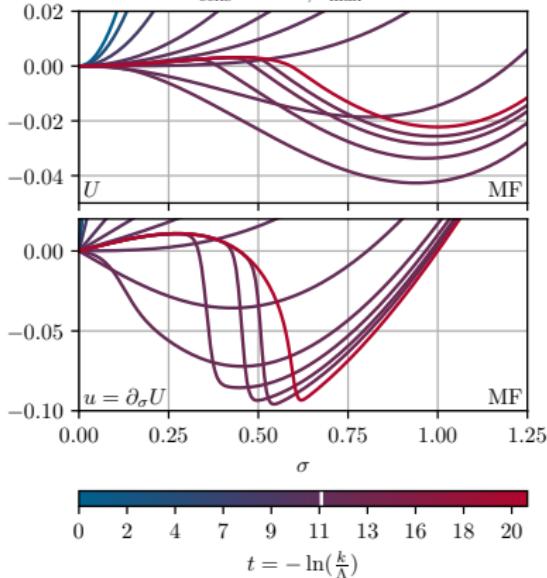
$$\text{mit } E_b(t, \partial_\sigma u) \equiv \sqrt{k_t^2 + \partial_\sigma^2 U(t, \sigma)} \text{ und } E_f(t, \sigma) \equiv \sqrt{k_t^2 + (h\sigma)^2}.$$

[4] Stoll et al. 2021

FRG Flüsse im GNY-Modell

nur fermionische Fluktuationen
(MF: $N \rightarrow \infty$)

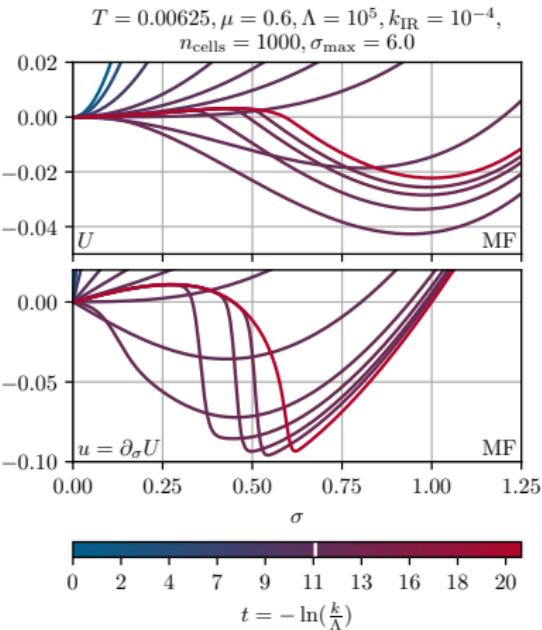
$$T = 0.00625, \mu = 0.6, \Lambda = 10^5, k_{\text{IR}} = 10^{-4}, \\ n_{\text{cells}} = 1000, \sigma_{\max} = 6.0$$



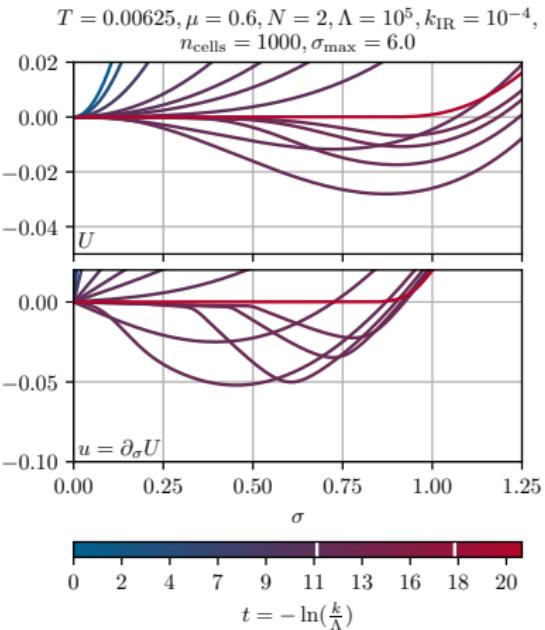
[4] Stoll et al. 2021

FRG Flüsse im GNY-Modell

nur fermionische Fluktuationen
(MF: $N \rightarrow \infty$)

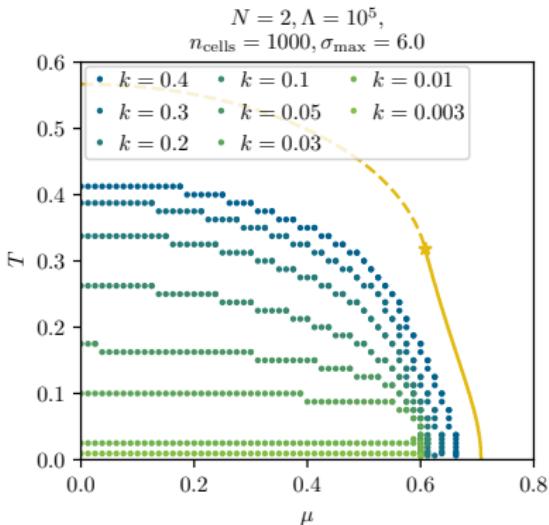


fermionische und bosonische
Fluktuationen (LPA: $N = 2$)



[4] Stoll et al. 2021

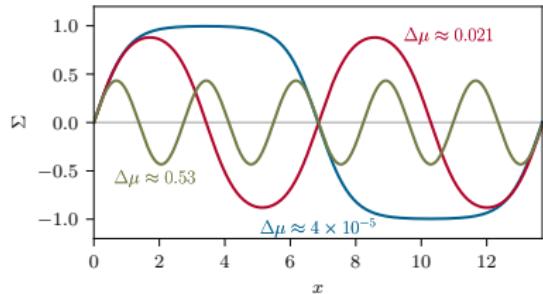
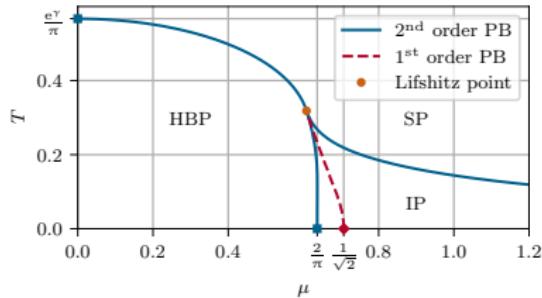
Das homogene Phasendiagramm



- ▶ Keine Symmetriebrechung im IR für endliche N und $T > 0$
- ▶ Symmetriebrechung im Vakuum ($T = \mu = 0$)
- ▶ Anzeichen für Symmetriebrechung bei $T = 0$ und $\mu > 0$

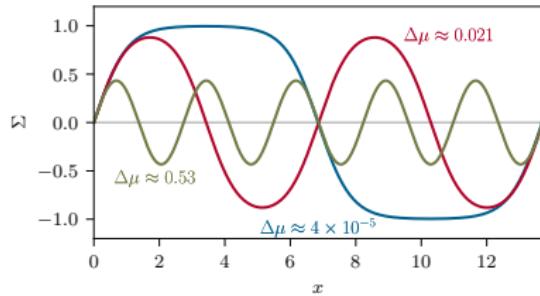
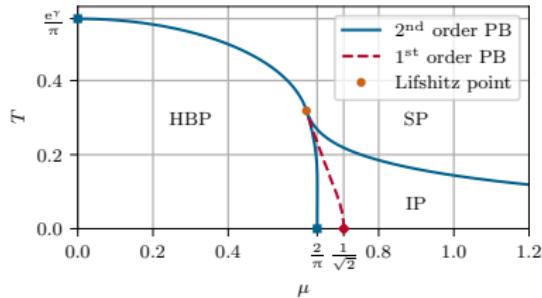
[4] Stoll et al. 2021

Inhomogene Phasen im MF/Limes $N \rightarrow \infty$



Literaturergebnisse [20–23] Schnetz, Thies und Urlichs 2004, Schnetz, Thies und Urlichs 2006, Schnetz, Thies und Urlichs 2005, Basar, Dunne und Thies 2009 und Stabilitätsanalyse [5] Koenigstein *et al.* 2022

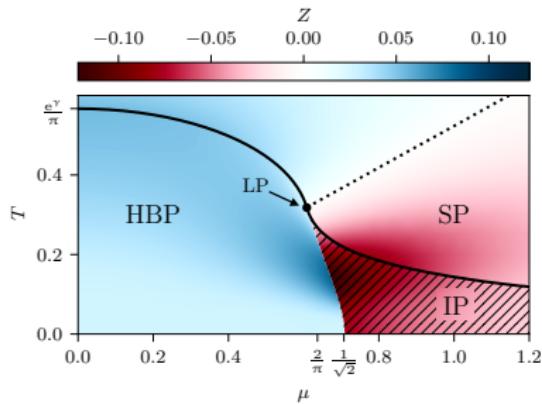
Inhomogene Phasen im MF/Limes $N \rightarrow \infty$



- ▶ Semi-analytische Methoden zur direkten Berechnung einer inhomogenen Phase (IP) für $N \rightarrow \infty$
- ▶ Stabilitätsanalyse als flexible indirekte Detektionsmethode

Literaturergebnisse [20–23] Schnetz, Thies und Urlichs 2004, Schnetz, Thies und Urlichs 2006, Schnetz, Thies und Urlichs 2005, Basar, Dunne und Thies 2009 und Stabilitätsanalyse [5] Koenigstein *et al.* 2022

Stabilitätsanalyse der homogenen Phase im MF/Limes $N \rightarrow \infty$



- ▶ LP und $(SP \leftrightarrow IP)$ -Phasengrenze sind mit der Stabilitätsanalyse detektierbar
- ▶ $(HBP \leftrightarrow IP)$ -Phasengrenze nicht detektierbar
- ▶ “*Moat regime*” mit $Z < 0$ als Vorläufer der inhomogenen Phase

[5] Koenigstein et al. 2022 und Arbeiten zum “*Moat regime*” [24–27] Rennecke und Pisarski 2021, Pisarski et al. 2021, Pisarski und Rennecke 2021, Pisarski, Tsvetkov, Valgushev 2020

Zwei Flavor Quark-Meson-Modell in $d = 3+1$

Effektive Niederenergietheorie der QCD im Rahmen der FRG hier wieder in LPA

$$\bar{\Gamma}_k[\chi] = \int_x \left(\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_4 \mu + h(t^0 \varphi_0 + i \gamma^{\text{ch}} t^a \varphi_a)) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U_k(\frac{\varphi^2}{2}) \right)$$

- ▶ Explizites inhomogenes Kondensat: chirale Dichtewelle (CDW)

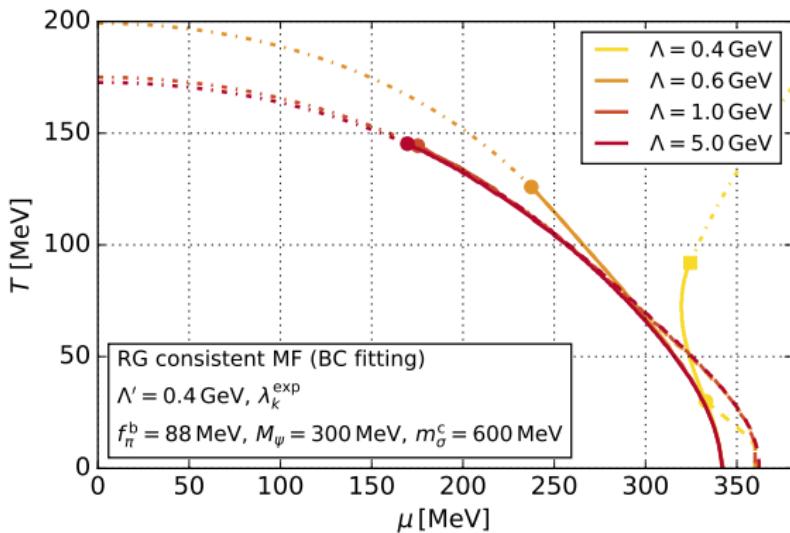
$$\varphi(\vec{x}) \equiv (\sigma(\vec{x}), 0, 0, \pi_3(\vec{x})) \equiv \Delta(\cos(\vec{q} \cdot \vec{x}), 0, 0, \sin(\vec{q} \cdot \vec{x}))$$

- ▶ Analytische Konstruktion der **expliziten LPA Flussgleichung der CDW** mittels unitärer Transformationen

[28] Fu 2022, [29] Dautry und Nyman 1979 und [7] Steil 2023

Das inhomogene Phasendiagramm in MF

RG-konsistente MF Rechnungen – nur fermionische Fluktuationen
– als erster Schritt zur vollen Lösung und als Konsistenzcheck zu existierenden MF Rechnungen



Existierenden MF Rechnungen [30, 31] Adhikari, Andersen und Kneschke 2017, Carignano, Buballa und Schaefer 2014

Zusammenfassung

- ▶ (Numerische) Strömungsmechanik für die FRG
 - Methodische, konzeptionelle und didaktische Entwicklungen in $d=0$
 - Anwendung im Gross-Neveu-Yukawa-Modell: Bosonische Fluktuationen verhindern Kondensation bei $T \neq 0$ in $d=1+1$
- ▶ Stabilitätsanalyse als indirekte Detektionsmethode für inhomogene Phasen
- ▶ Quark-Meson-Modell mit explizitem inhomogenen Kondensat im Rahmen der FRG
 - FRG Flussgleichung für CDW Kondensat mittels unitärer Transformationen
 - RG-konsistente MF Rechnung als erster Schritt zur vollen numerischen Lösung

[1–3] Koenigstein *et al.* 2022, Koenigstein *et al.* 2022, Steil und Koenigstein 2022, [4] Stoll *et al.* 2021 und [5] Koenigstein *et al.* 2022

Ausblick

- ▶ (Numerische) Strömungsmechanik für die FRG in $d = 0$
 - Modelle mit **Graßmann-Zahlen** ⇒ Laufende Yukawa Kopplung
 - Entropie Funktion in Anwesenheit von Quelltermen
- ▶ Gross-Neveu-Yukawa-Modell in $d = 1 + 1$
 - Stabilitätsanalyse mit bosonischen Fluktuationen
 - Verbesserung der Trunkierung
- ▶ Quark-Meson-Modell in $d = 3 + 1$
 - Veröffentlichung der RG-konsistenten MF Rechnung und Flussgleichung mit der CDW
 - Numerische Lösung der hergeleiteten Flussgleichung für die CDW ⇒ Einfluss von bosonischen Fluktuationen auf explizites inhomogenes Kondensat
 - Komplementäre Stabilitätsanalyse ⇒ Direkte vs. indirekte Detektion inhomogener Phasen

[32] Steil und Koenigstein (in Vorbereitung) und [33] Steil, Buballa und Schaefer (in Vorbereitung)

Anhänge

Referenzen

- [1] A. Koenigstein *et al.*, "Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. I. The $O(N)$ model", *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065012, arXiv: [2108.02504 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/2108.02504).
- [2] A. Koenigstein *et al.*, "Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. II. Entropy production and irreversibility of RG flows", *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065013, arXiv: [2108.10085 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/2108.10085).
- [3] M. J. Steil und A. Koenigstein, "Numerical fluid dynamics for FRG flow equations: Zero-dimensional QFTs as numerical test cases. III. Shock and rarefaction waves in RG flows reveal limitations of the $N \rightarrow \infty$ limit in $O(N)$ -type models", *Phys. Rev. D* **106** (2022) 065014, arXiv: [2108.04037 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/2108.04037).
- [4] J. Stoll *et al.*, "Bosonic fluctuations in the $(1+1)$ -dimensional Gross-Neveu(-Yukawa) model at varying μ and T and finite N ", (2021), arXiv: [2108.10616 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2108.10616).
- [5] A. Koenigstein *et al.*, "Detecting inhomogeneous chiral condensation from the bosonic two-point function in the $(1+1)$ -dimensional Gross–Neveu model in the mean-field approximation*", *J. Phys. A* **55** (2022) 375402, arXiv: [2112.07024 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2112.07024).
- [6] O. Philipsen, "Nuclear Matter between Heaven and Earth: The QCD Phase Diagram", Inaugural lecture (Frankfurt: Goethe-Universität, 2010), URL: https://itp.uni-frankfurt.de/~philipsen/homepage_files/antritt10.pdf, [Online; accessed 2024.05.02].

Referenzen

- [7] M. J. Steil, *From zero-dimensional theories to inhomogeneous phases with the functional renormalization group*, in preparation, PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2023.
- [8] K. G. Wilson, "Renormalization group and critical phenomena. 1. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture", *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3174–3183.
- [9] K. G. Wilson, "Renormalization group and critical phenomena. 2. Phase space cell analysis of critical behavior", *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3184–3205.
- [10] K. G. Wilson, "Problems in physics with many scales of length", *Sci. Am.* **241** (1979) 158–179.
- [11] C. Wetterich, "The average action for scalar fields near phase transitions", *Z. Phys. C* **57** (1993) 451–470.
- [12] C. Wetterich, "Exact evolution equation for the effective potential", *Phys. Lett. B* **301** (1993) 90–94, arXiv: [1710.05815 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1710.05815).
- [13] M. Reuter und C. Wetterich, "Effective average action for gauge theories and exact evolution equations", *Nucl. Phys. B* **417** (1994) 181–214.
- [14] T. R. Morris, "The Exact Renormalization Group and approximate solutions", *Int. J. Mod. Phys. A* **09** (1994) 2411–2450, arXiv: [hep-ph/9308265](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9308265).
- [15] N. Tetradis und C. Wetterich, "Critical exponents from effective average action", *Nucl. Phys. B* **422** (1994) 541–592, arXiv: [hep-ph/9308214](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9308214).

Referenzen

- [16] U. Ellwanger, "Flow equations for N point functions and bound states", *Z. Phys. C* **62** (1994) 503–510, arXiv: [hep-ph/9308260](#).
- [17] E. Grossi und N. Wink, "Resolving phase transitions with Discontinuous Galerkin methods", (2019), arXiv: [1903.09503 \[hep-th\]](#).
- [18] J. Keitel und L. Bartosch, "The zero-dimensional $O(N)$ vector model as a benchmark for perturbation theory, the large- N expansion and the Functional Renormalization Group", *J. Phys. A* **45** (2012) 105401, arXiv: [1109.3013 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [19] A. Kurganov und E. Tadmor, "New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection–Diffusion Equations", *Journal of Computational Physics* **160** (2000) 241–282.
- [20] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "Phase diagram of the Gross-Neveu model: Exact results and condensed matter precursors", *Annals Phys.* **314** (2004) 425–447, arXiv: [hep-th/0402014](#).
- [21] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "Full phase diagram of the massive Gross-Neveu model", *Annals Phys.* **321** (2006) 2604–2637, arXiv: [hep-th/0511206](#).
- [22] O. Schnetz, M. Thies und K. Urlichs, "The Phase diagram of the massive Gross-Neveu model, revisited", (2005), arXiv: [hep-th/0507120](#).
- [23] G. Basar, G. V. Dunne und M. Thies, "Inhomogeneous condensates in the thermodynamics of the chiral NJL₂ model", *Phys. Rev. D* **79** (2009) 105012, arXiv: [0903.1868 \[hep-th\]](#).

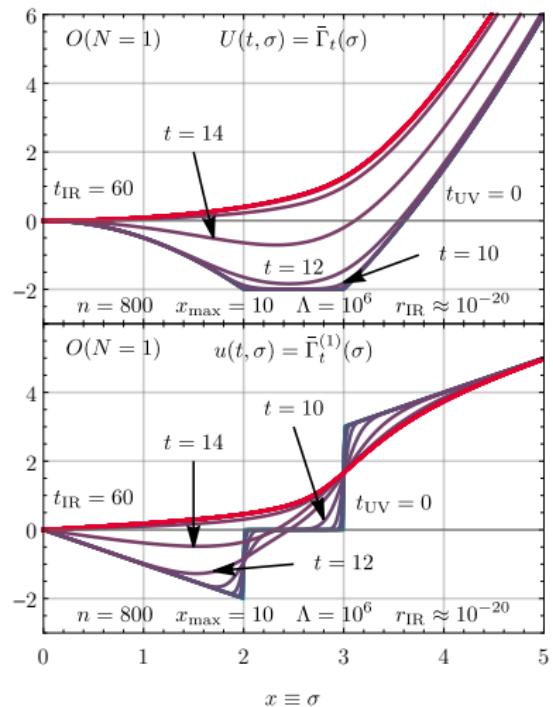
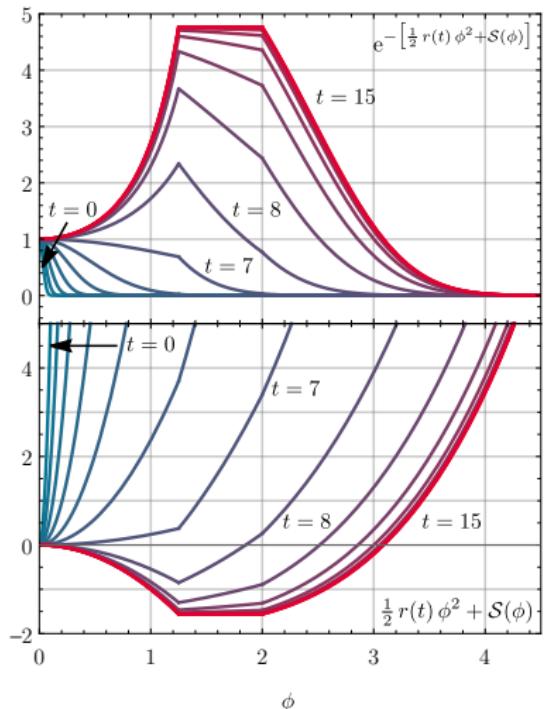
Referenzen

- [24] F. Rennecke und R. D. Pisarski, "Moat Regimes in QCD and their Signatures in Heavy-Ion Collisions", in: *International Conference on Critical Point and Onset of Deconfinement* (2021), arXiv: [2110.02625 \[hep-ph\]](#).
- [25] R. D. Pisarski *et al.*, "The Lifshitz Regime and its Experimental Signals", *Nucl. Phys. A* **1005** (2021) 121910, hrsg. von F. Liu *et al.*, arXiv: [2005.00045 \[nucl-th\]](#).
- [26] R. D. Pisarski und F. Rennecke, "Signatures of Moat Regimes in Heavy-Ion Collisions", *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021) 152302, arXiv: [2103.06890 \[hep-ph\]](#).
- [27] R. D. Pisarski, A. M. Tsvelik und S. Valgushev, "How transverse thermal fluctuations disorder a condensate of chiral spirals into a quantum spin liquid", *Phys. Rev. D* **102** (2020) 016015, arXiv: [2005.10259 \[hep-ph\]](#).
- [28] W.-j. Fu, "QCD at finite temperature and density within the fRG approach: an overview", *Commun. Theor. Phys.* **74** (2022) 097304, arXiv: [2205.00468 \[hep-ph\]](#).
- [29] F. Dautry und E. M. Nyman, "Pion condensation and the σ -model in liquid neutron matter", *Nucl. Phys. A* **319** (1979) 323–348.
- [30] P. Adhikari, J. O. Andersen und P. Kneschke, "Inhomogeneous chiral condensate in the quark-meson model", *Phys. Rev. D* **96** (2017) 016013, arXiv: [1702.01324 \[hep-ph\]](#), [Erratum: *Phys. Rev. D* 98, 099902 (2018)].
- [31] S. Carignano, M. Buballa und B.-J. Schaefer, "Inhomogeneous phases in the quark-meson model with vacuum fluctuations", *Phys. Rev. D* **90** (2014) 014033, arXiv: [1404.0057 \[hep-ph\]](#).

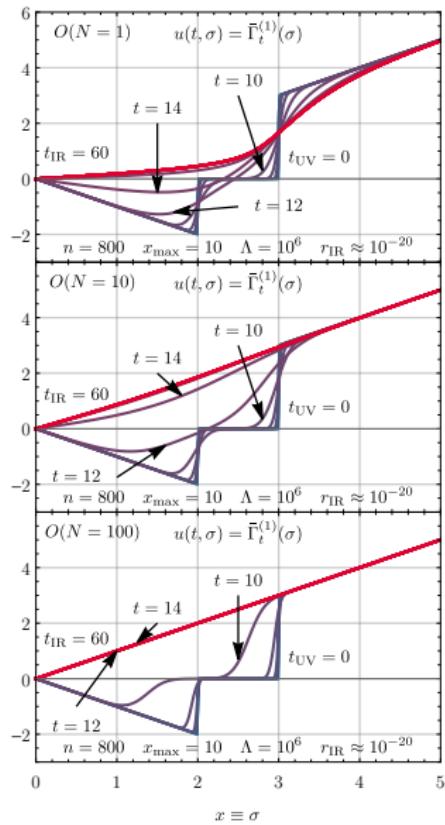
Referenzen

- [32] M. J. Steil und A. Koenigstein, "Testing FRG (numerics) in zero spacetime dimensions: A model with fermions, bosons, and interactions", 2024, in preparation.
- [33] M. J. Steil, M. Buballa und B.-J. Schaefer, "Inhomogeneous chiral condensates in the quark-meson model with the functional renormalization group", Draft, 2024, in preparation.
- [34] W.-j. Fu, J. M. Pawłowski und F. Rennecke, "QCD phase structure at finite temperature and density", *Phys. Rev. D* **101** (2020) 054032, arXiv: [1909.02991 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1909.02991).

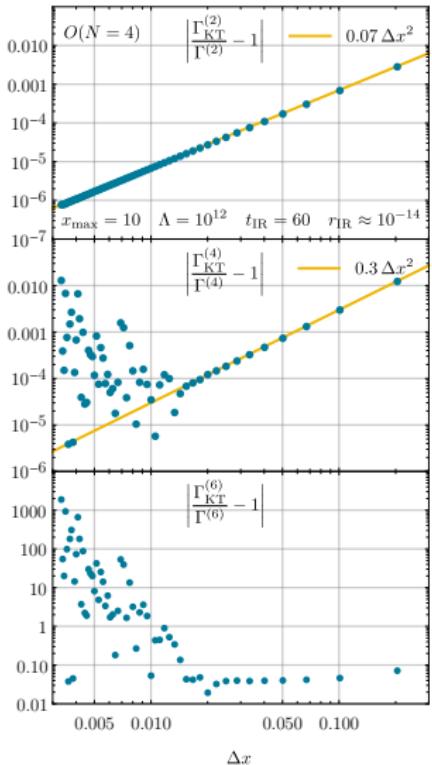
Testszenario I: Nicht stetiges Potential



Advektion vs. Diffusion – Pionen vs. Sigma

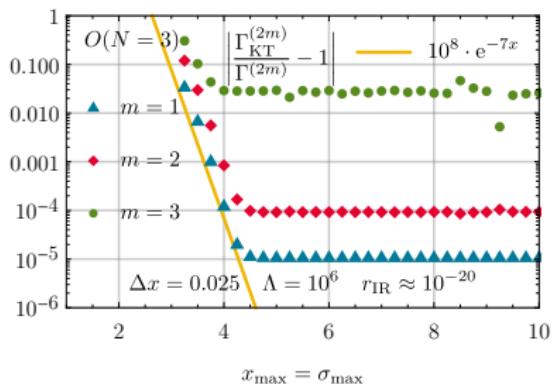
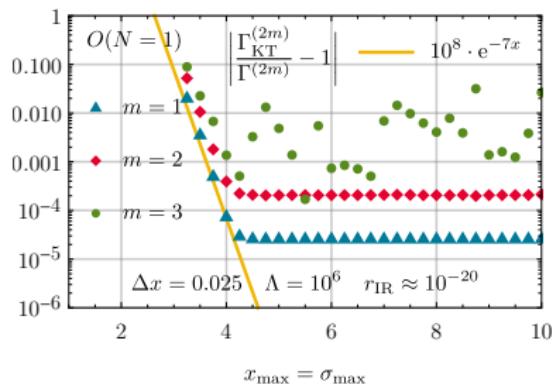


Räumlicher Diskretisierungsfehler für $U(\vec{\varphi}) = -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} (\vec{\varphi}^2)^2$

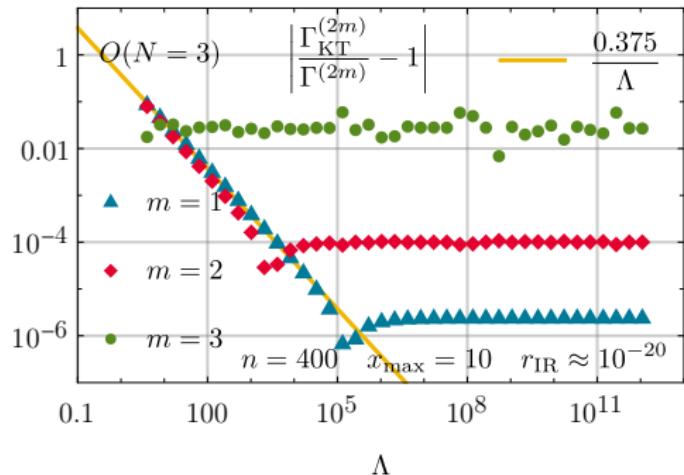


Berechnungsintervall für Testszenario I

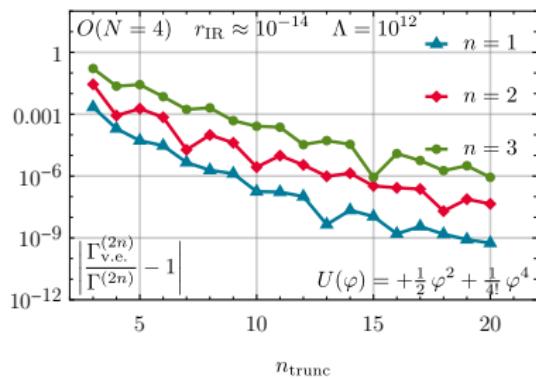
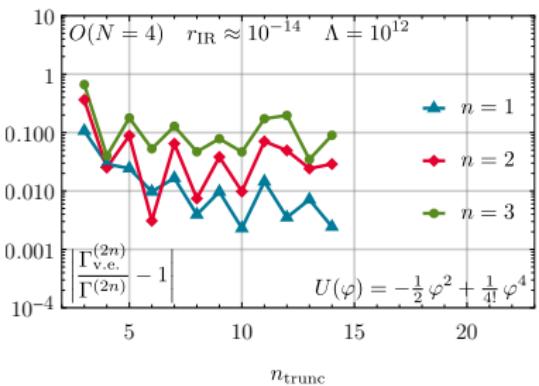
$$U(\vec{\varphi}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2, & \text{if } |\vec{\varphi}| \leq 2, \\ -2, & \text{if } 2 < |\vec{\varphi}| \leq 3, \\ +\frac{1}{2} (\vec{\varphi}^2 - 13), & \text{if } 3 < |\vec{\varphi}| \end{cases}$$



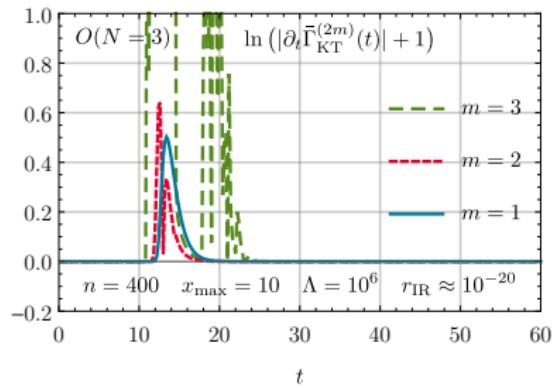
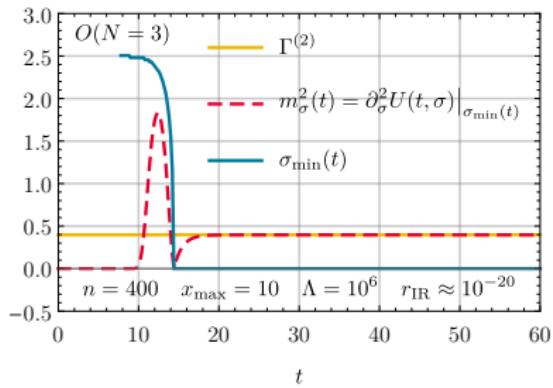
RG-Konsistenz und UV-Skalen Λ für Testfall I



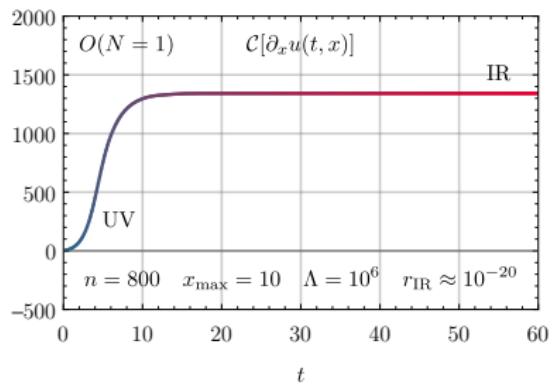
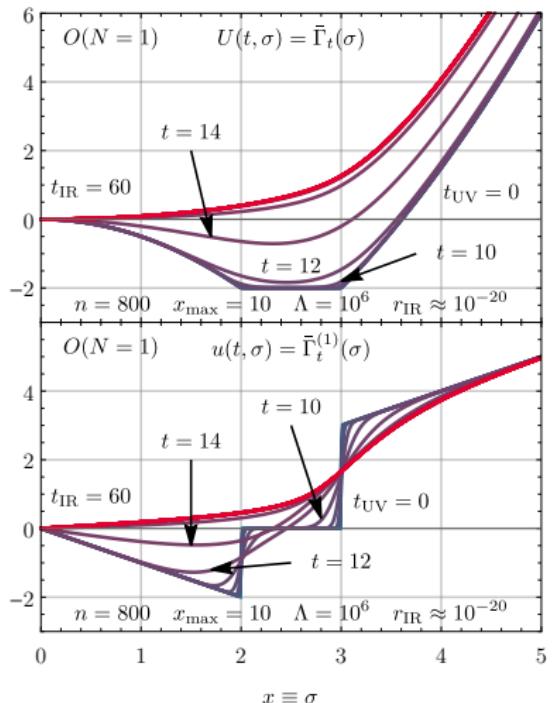
FRG Taylor-/Vertex-Expansion für $U(\vec{\varphi}) = \mp \frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} (\vec{\varphi}^2)^2$



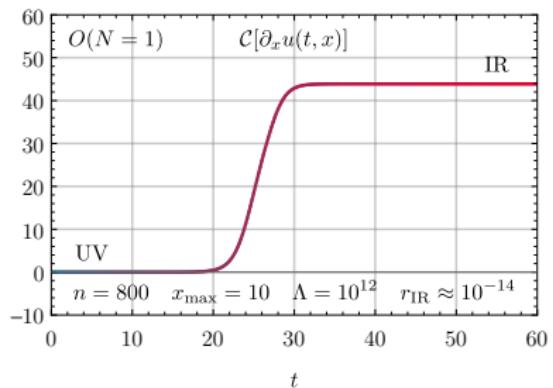
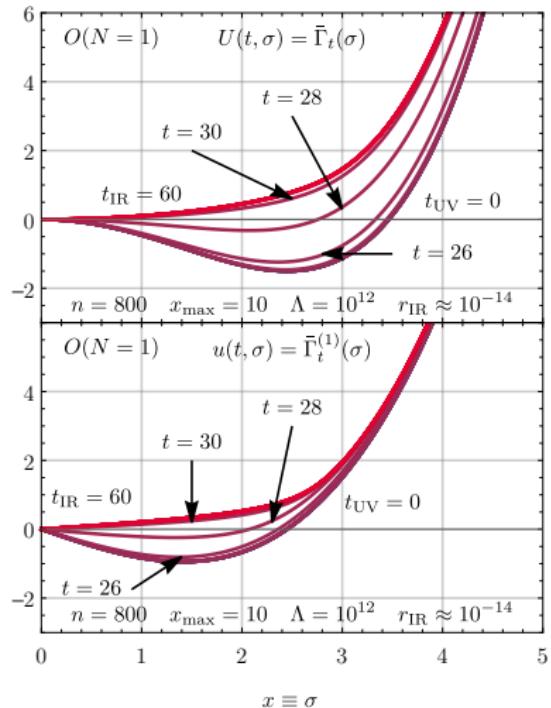
Dynamische-Reichweite und IR Cutoffs für Testfall I



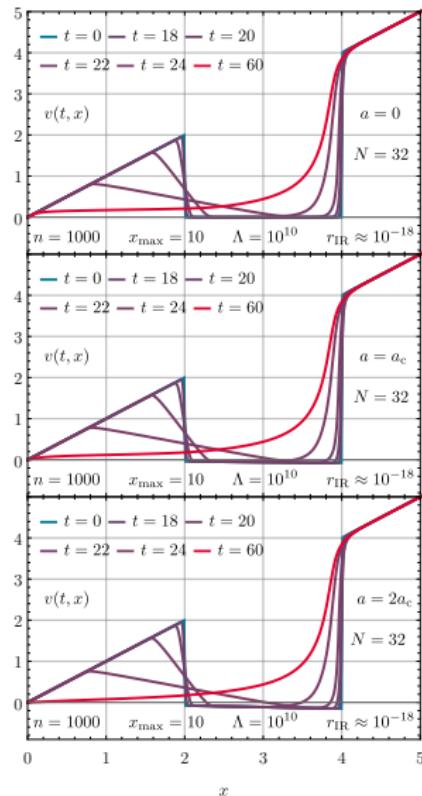
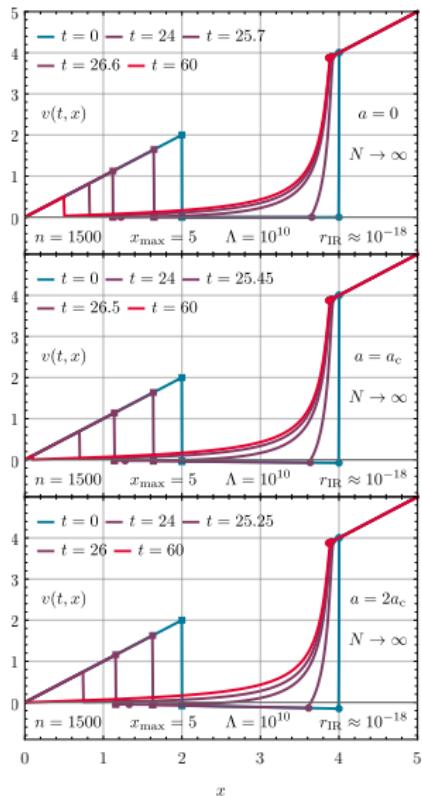
Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall I



Irreversibilität und “Entropie”-Produktion für Testfall II



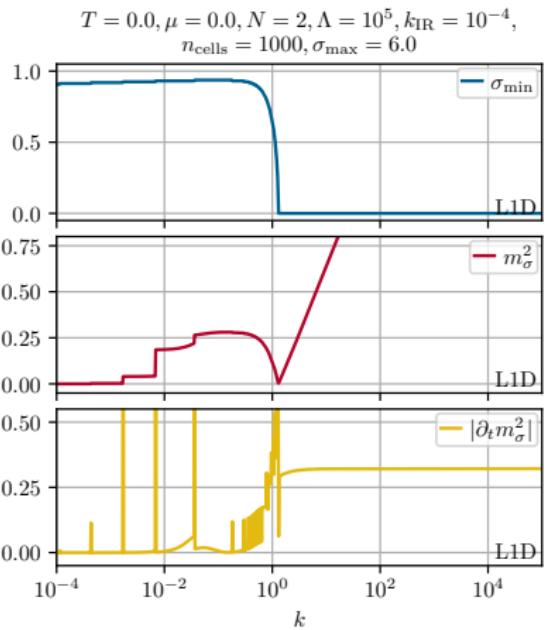
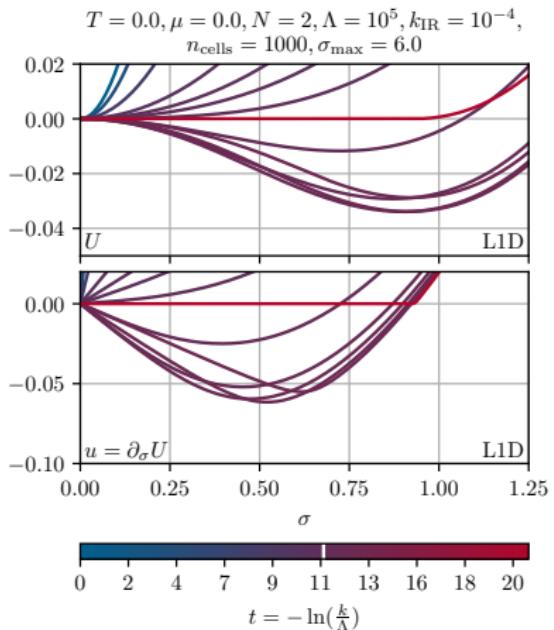
Flüsse bei $N \rightarrow \infty$ und $N = 32$



Ein $SU(2)$ Model – stark gekoppelte Graßmannzahlen

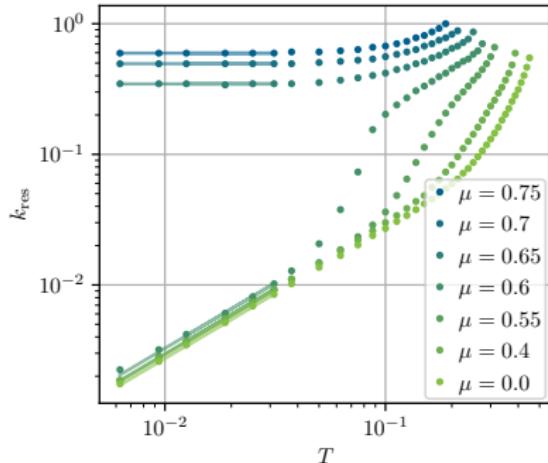
$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_k[\chi] = & \left(m_t(\varrho)(t_0)^\alpha{}_\beta + i h_t(\varrho)(t_i)^\alpha{}_\beta \varphi_i \right) \bar{\vartheta}_\alpha \vartheta^\beta + \\ & + \frac{1}{2} g_t(\varrho)(t_0)^\alpha{}_\beta (t_0)^\delta{}_\gamma \bar{\vartheta}_\alpha \vartheta^\beta \bar{\vartheta}_\delta \vartheta^\gamma + U_t(\varrho)\end{aligned}$$

GNY Model im Vakuum mit $N = 2$



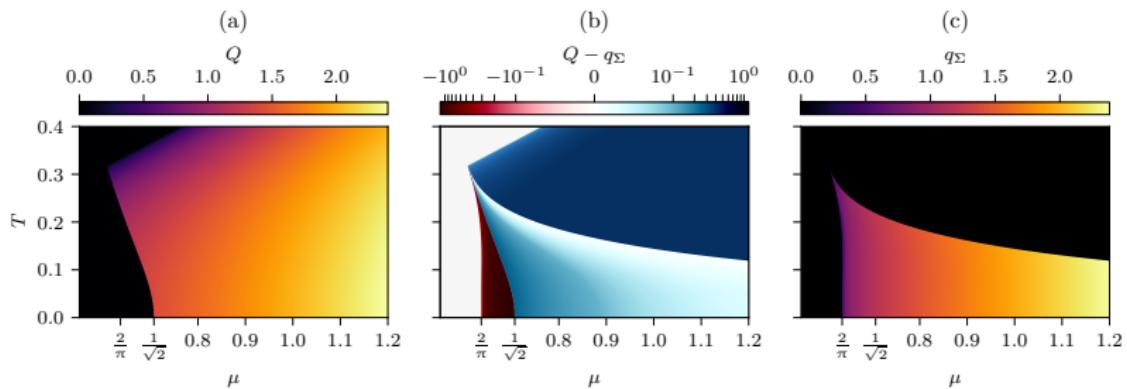
Restaurations-Skala $k_{\text{res}}(T)$

$$N = 2, \Lambda = 10^5, k_{\text{IR}} = 10^{-4}, \\ n_{\text{cells}} = 1000, \sigma_{\text{max}} = 6.0$$



$$k_{\text{res}}(T) \propto \begin{cases} T^0 & \text{für } \mu > 0.6, \\ T^1 & \text{für } \mu < 0.6 \end{cases}$$

Stabilitätsanalyse vs. semi-analytische Lösung



Unitäre Transformationen für die CDW

Unitäre transformationen zur Diagonalisierung von $\tilde{\Gamma}_k^{\psi\bar{\psi}}$ und $\tilde{\Gamma}_k^{\varphi_i\varphi_j}$:

$$U_\psi(\vec{x}) = \exp(-i\gamma^{\text{ch}} t_3 \vec{q} \cdot \vec{x})$$

$$U_\varphi(\vec{x})_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) & 0 & 0 & 1 + \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -i(1 + \exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x})) & 0 & 0 & i(\exp(-2i\vec{q} \cdot \vec{x}) - 1) \end{pmatrix}_{ij}$$

Flussgleichung für QM Model mit CDW Kondensat

$$\partial_k U_k(\rho) = 12 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{\pm} \left[-1 + n_f(\beta [E_{\psi;k}^{\pm} + \mu]) + n_f(\beta [E_{\psi;k}^{\pm} - \mu]) \right] \partial_k E_{\psi;k}^{\pm} + \\ + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=0}^3 \left(\frac{1}{2} + n_b(\beta E_{\phi,i;k}) \right) \tilde{\partial}_k E_{\phi,i;k}$$

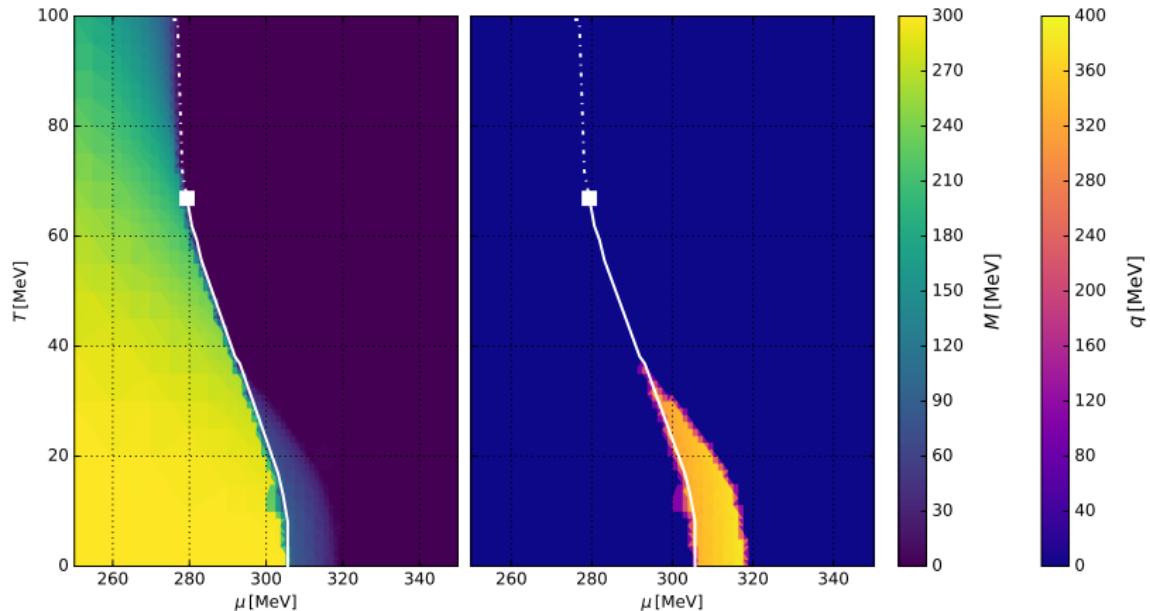
$$(E_{\psi;k}^{\pm})^2 = M^2 + \frac{(\vec{p}_k^{+q})^2}{2} + \frac{(\vec{p}_k^{-q})^2}{2} \pm \sqrt{M^2 (\vec{p}_k^{+q} - \vec{p}_k^{-q})^2 + \frac{1}{4} ((\vec{p}_k^{+q})^2 - (\vec{p}_k^{-q})^2)^2} \\ \stackrel{q=0}{=} M^2 + (\vec{p}_k)^2$$

$$(E_{\phi;k}^{0,3})^2 = \frac{1}{2} (\vec{p}_k)^2 + \frac{1}{2} (\vec{p}_k^{+4q})^2 + 2U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho) \pm \sqrt{4\rho^2 U''_k(\rho)^2 + \frac{1}{4} ((\vec{p}_k^{+4q})^2 - (\vec{p}_k)^2)^2} \\ \stackrel{q=0}{=} (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho) + 2\rho (U''_k(\rho) \pm |U''_k(\rho)|)$$

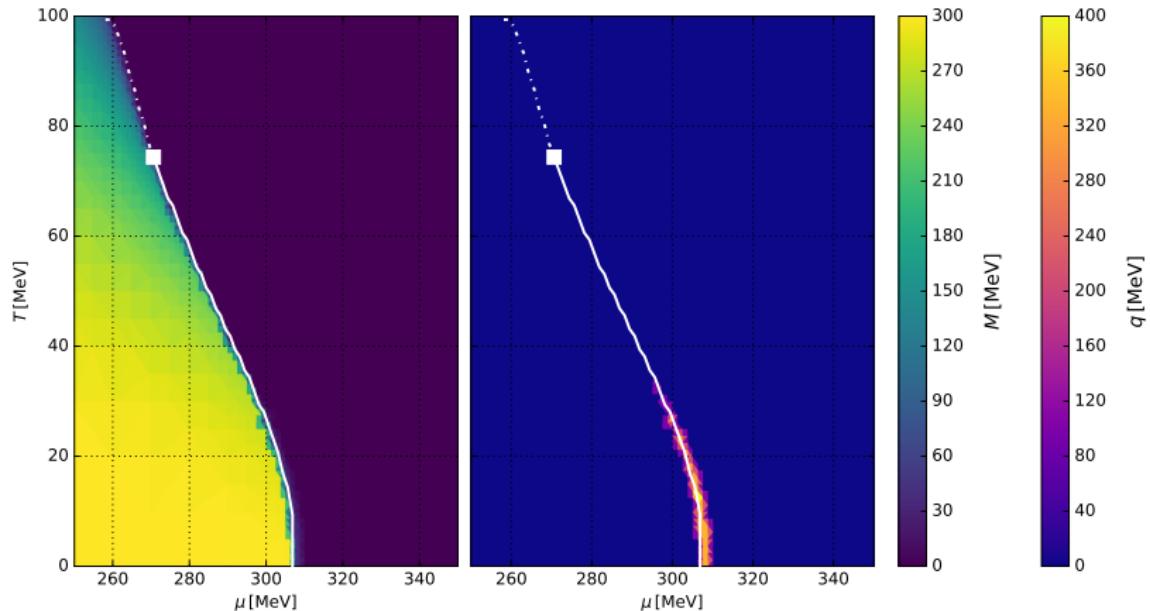
$$(E_{\phi;k}^1)^2 = (E_{\phi;k}^2)^2 = (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho) \stackrel{q=0}{=} (\vec{p}_k)^2 + 2U'_k(\rho)$$

$$\vec{p}_k^q \equiv (\vec{p} + \vec{q}/2) \lambda_k(|\vec{p} + \vec{q}/2|) \quad \text{und} \quad M^2 \equiv \frac{1}{4} h^2 \Delta^2 = \frac{h^2}{2} \rho$$

Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung



Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung



Das Problem mit naiver Parameter-Fixierung

