**Question(s) de cours**

1. Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $u, v$ deux endomorphismes de $E$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $v$. Montrer que tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$.
2. Soit $u$ un endormophisme d'un espace vectoriel. Montrer qu'une somme finie de sous-espaces propres de $u$ est directe.
3. Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
4. Soient $u$ un endormorphisme de $E$ et $F$ un sous-espace de $E$ stable par $u$. Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $u_F : F \to F$ divise le polynôme caractéristique de $u$.
5. *Facultatif.* Montrer que si le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors $u$ trigonalisable (sur $\mathbb{K}$).

# Echauffement !

**Exercice 1 :** Isormorphisme induit

Soit $u$ un endomorphisme injectif d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$ stable par $u$. Montrer que l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$ est bijectif. Donner un contre-exemple si $F$ est de dimension infinie.

**Exercice 2 :** Triangulaire supérieure

Soient $u$ un endormorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (a) La matrice de $u$ dans $B$ est triangulaire supérieure ;
   (b) Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.
   (c) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ l'espace $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est stable par $u$.
2. Comment interpréter que la matrice est triangulaire inférieure ?

**Exercice 3 :** Exemples à retenir

Donner un exemple de matrice pour chacun de ces cas :

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$ ;
2. Une matrice de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ;
3. Une matrice de $A_in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 4 :** Endomorphisme qui stabilise une droite

Soient $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ et $x$ un vecteur non nul de $E$. Montrer que $\mathrm{Vect}(x)$ stable par $u$ si, et seulement si, il existe un scalaire $\lambda$ tel que $u(x) = \lambda x$.

**Exercice 5 :**

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique.

**Exercice 6 :**

Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de valeur propre réelle.

# Exercice ☕

**Exercice 7 :**

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $D$ est l'opérateur de dérivation,

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $D$.
2. Les vecteurs propres forment-ils une base de $E$ ? (☕☕)

**Exercice 8 :**

Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. Montrer que les matrices $A$ et $B$ sont semblables si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique.

Si on enlève la condition de diagonalisabilité, garde-t-on le même résultat ?

**Exercice 9 :**

Soient $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que 0 est une valeur propre de $f^k$. Montrer que 0 est aussi une valeur propre de $f$.

# Exercice ☕☕

**Exercice 10 :**

On dit qu'un ensemble $C$ est convexe si pour tout $X, Y \in C$ et pour tout $\delta \in [0,1]$, on a $(1-\delta)X + \delta Y \in C$.

Est-ce que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est convexe ?

**Exercice 11 :** Matrice Compagnon

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On définit la matrice suivante :

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de $A_P$.

**Exercice 12 :**

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit l'application suivante définie par

$$\forall f \in E,\ \forall x > 0,\ \phi[f](x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x > 0 \\ f(0)\text{si} = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que $\phi$ est un endomorphisme de $E$.
2. Détermininer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\phi$.

**Exercice 13 :**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $I$ l'endomorphisme défini par

$$I\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

Déterminer tous les sous-espaces de $E$ stables par $I$.

**Exercice 14 :**

On définit l'application $f$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & X^2 P(\frac{1}{X}) \end{array} \right.$$

1. Justifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer les éléments propres de $f$.

**Exercice 15 :** Dérivation de polynômes

On considère $D$ l'application linéaire qui $P \in \mathbb{K}[X]$ associe son polynôme dérivé. Déterminer les sous-espaces stables de $D$.

**Exercice 16 :**

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, on définit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour $\mathrm{rg}(M) = 2$.
2. On suppose que $M$ est de rang 2 désormais. Soit $\lambda$ une valeur propre de $M$, montrer que $\lambda = 0$ ou $\lambda$ est une solution de l'équation suivante

$$\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit diagonalisable.

**Exercice 17 :**

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v$ deux endomorphismes de $E$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u$ et $v$ admettent un vecteur propre commun.

# Exercice

**Exercice 18 :** Matrice Circulante

On considère dans le cadre de cet exercice la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $J$ et déterminer si elle est diagonalisable ou non.
2. Déterminer les valeurs propres des matrices $J^k$.
3. On considère la matrice suivante pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice $A$

**Exercice 19 :** Produit tensoriel

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle produit tensoriel la loi suivante :

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{array}\right)$$

1. Montrer que pour toutes matrices $A, B, C, D$, on a :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

2. En déduire que si $A$ et $B$ sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ est aussi diagonalisable.

**Exercice 20 :** Matrices stochastiques

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1$$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de $M$.
2. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $M$, alors $|\lambda| \leq 1$.

# Exercice ☕☕☕☕

**Exercice 21 :** Trigonalisation commune

Soient $u, v$ deux endomorphismes trigonalisables (dans $\mathbb{K}$) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $u$ et $v$ admettent un vecteur propre commun.
2. Montrer que $u$ et $v$ admettent une base de trigonalisation commune.