Feuille de colle n°1

Exercice 1 (BCCINP 14)**.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$.
   On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
   Prouver que $\int_a^b \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right) dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\, dx$.

3. Démontrer que $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right) dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n2^n}\, dx$

Exercice 2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{(1+n^2x)^2} \end{cases}$$

1. Etudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. De même pour $\sum f_n'$.

Exercice 3. On pose $f(x) = \sum nx^n$. Montrer que pour $|x| < 1$, on a

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Montrer également que pour $|x| < 1$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Exercice 4 (Courbe du blanc-manger*)**.** On définit pour un réel x la valeur $s(x)$ la distance de x aux entiers relatifs, *i.e.*

$$s(x) = \min_{y\in\mathbb{Z}} |x - y|$$

On définit aussi

$$f_n : x \mapsto \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

1. Montrer que $B = \sum f_n$ est convergente et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que B est 1-périodique. En déduire que B est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3. (Bonus) Essayer de tracer B (commencer par tracer $f_0, f_1, \ldots$ et faites les additions). Quelle est votre conjecture sur la dérivabilité de B.

4. (Si vous êtes vraiment motivé) Démontrer ou réfuter votre conjecture.

* *Le blanc-manger est un dessert et son profil ressemble au graphe de la fonction B.*

Feuille de colle n°2

Exercice 1 (BCCINP 15)**.** Soit X une partie de $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$?

Exercice 2. On définit la fonction f suivante:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2} \end{array} \right.$$

1. Montrer S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{z - e^{it}} dt$$

Exercice 4 (Un prolongement de ζ)**.** On définit la fonction ζ pour $s \in \mathbb{C}$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Montrer que ζ est définie si $\mathfrak{Re}(s) > 1$.
2. Montrer que si $\mathfrak{Re}(s) > 1$, alors

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} =: \eta(s)$$

3. Déterminer un prolongement continu de ζ sur $\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(s) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\}$, *i.e.* qu'il existe une fonction continue $\widetilde{\zeta}$ définie sur Ω telle que $\widetilde{\zeta}(s) = \zeta(s)$ si $\mathfrak{Re}(s) > 1$.
4. (Bonus) Montrer que $\widetilde{\zeta}(\frac{1}{2}) < 0$. Si vous étiez un vulgarisateur mathématique un peu hâtif, auriez-vous raison de dire que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est négatif ?

Feuille de colle n°3

Exercice 1 (BCCINP 17). Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication suivante
$$\big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\big)$$
$$\Downarrow$$
$$\big(\text{la suite de fonction } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A\big)$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$? Justifier.

Exercice 2. On définit pour $n \geq 1$ la fonction suivante

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array} \right.$$

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 3. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)}\, dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2\pi}{n!^2}$$

Exercice 4. Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que la série de fonctions
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(nx)$$
converge simplement sur $\mathbb{R}$.