Question(s) de cours

1. Soit E un espace vectoriel. Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
2. Soit u un endormophisme d'un espace vectoriel. Montrer qu'une somme finie de sous-espaces propres de u est directe.
3. Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
4. Soient u un endormorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u. Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $u_F : F \to F$ divise le polynôme caractéristique de u.
5. *Facultatif.* Montrer que si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors u trigonalisable (sur $\mathbb{K}$).

Echauffement !

Exercice 1 : Isormorphisme induit

Soit u un endomorphisme injectif d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par u. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur F est bijectif. Donner un contre-exemple si F est de dimension infinie.

Solution. Si u est injectif, alors u_F l'endomorphisme induit est aussi injectif. u_F est donc un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, donc u_F est alors une bijection.

Prenons $E = \mathbb{K}[X]$ qui est bien de dimension infinie. On peut définir $u(P) = XP$. u est bien injective et linéaire. Si on considère $F = E = \mathbb{K}[X]$, u est injective mais pas surjective puisque $1 \notin \mathrm{Im}(u)$. □

Exercice 2 : Triangulaire supérieure

Soient u un endormorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (a) La matrice de u dans B est triangulaire supérieure ;
   (b) Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.
   (c) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ l'espace $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est stable par u.
2. Comment interpréter que la matrice est triangulaire inférieure ?

Solution. 1. Supposons que la matrice de u dans B est triangulaire supérieure. On pose $B = (e_1, \ldots, e_n)$. On a :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{j} B_{i,j} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$$

2. Supposons que $u(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, on a alors

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u(e_j)$$

   Puisque $u(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Donc $u(x) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

3. Supposons que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u pour tout k. On pose $B = (e_1, \dots, e_n)$, on a donc par stabilité que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} e_i$$

   Alors la matrice u dans la base B est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

□

Exercice 3 : Exemples à retenir

Donner un exemple de matrice pour chacun de ces cas :

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$;
2. Une matrice de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable dans $\mathbb{R}$;
3. Une matrice de $A_i n \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Pour trouver une non-diagonalisabilité, c'est une bonne idée de construire une matrice dont le polynôme caractéristique sera de la forme $(X - a)^2$, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On a alors $\chi_A(X) = (X - 1)^2$. Or, $\dim(\text{Ker}(A - I)) = 1$. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. Prenez une matrice n'admettant pas de valeurs propres réelles. Par exemple, une matrice B telle que $\chi_B(X) = X^2 + 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   On a donc $\chi_B(X) = X^2 + 1$. Sur $\mathbb{R}$, B n'admet pas de valeur propre donc n'est pas diagonalisable. Sur $\mathbb{C}$, $\chi_B(X) = (X - i)(X + i)$ donc le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples. B est alors diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

3. On reprend la matrice B. Puisque χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, on déduit que B n'est pas trigonalisable.

□

Exercice 4 : Endomorphisme qui stabilise une droite

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n et x un vecteur non nul de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(x)$ stable par u si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$.

Solution. Supposons que $\mathrm{Vect}(x)$ stable par u. On déduit que $u(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Soit $\mu x \in \mathrm{Vect}(x)$, on a alors $u(\mu \cdot x) = \mu \cdot u(x) = \lambda\mu \cdot x$. D'où $u(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. □

Exercice 5 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Solution. La preuve est essentiellement un tour de passe-passe qu'il faut savoir refaire. On reprend la définition de χ_{AB}.

$$\begin{aligned}
\chi_{AB}(X) &= \det(XI - AB) \\
&= \det(A)\det(XA^{-1} - B) \\
&= \det(XA^{-1} - B)\det(A) \\
&= \det(XI - BA)
\end{aligned}$$

Remarque : Quand vous ferez le chapitre de topologie, vous apprendrez à étendre ce résultat pour n'importe quelle matrice, non nécessairement inversible. □

Exercice 6 :

Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de valeur propre réelle.

Solution. Pour rappel, $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$. Le premier exemple de polynôme de degré 2 qui n'admet pas de racines sur $\mathbb{R}$ est $X^2 + 1$. Choisissons A telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 1$. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $\chi_A(X) = X^2 - 0 \cdot X + 1 = X^2 + 1$. Les valeurs propres (complexes) de A sont i et $-i$. □

Exercice ☕

Exercice 7 :

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D est l'opérateur de dérivation,

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D.
2. Les vecteurs propres forment-ils une base de E ? (☕☕)

Solution. 1. Un vecteur propre $e_\lambda \in E$ associé à la valeur propre λ vérifie l'équation suivante : $D(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$, et donc e_λ vérifie l'équation différentielle $y' - \lambda y$. On déduit alors que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_\lambda(x) = e^{\lambda x}$$

On a donc $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{C}$ et les vecteurs propres sont les $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$.

2. Réponse courte : non. Petit conseil : si on vous demande à un oral un contre-exemple, c'est qu'il n'est pas inaccessible. On ne vous demandera pas de construire (dans la plupart des cas) un escalier du diable de Cantor, ou autre objet exotique. Donc pensez d'abord aux objets les plus simples.
Ici, prenez la fonction f définie par $f(x) = x$. Si les $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ formaient une base de E, alors il existerait $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et $\mu_1, \dots, \mu_m$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x = \sum_{j=1}^{m} \mu_j e^{\lambda_j x}$$

On peut dériver la relation et on obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \lambda_j e^{\lambda_j x}$$

Or, on peut remarquer que la fonction constante égale à 1 est égale à e_0. Par unicité de la décomposition dans une base, on aurait donc $\lambda_j = 0$ pour tout j. On déduit alors avec notre première décomposition que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0$$

On conclut par contradiction que les $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ ne forment pas une base de E.

□

Exercice 8 :

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. Montrer que les matrices A et B sont semblables si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique.

Si on enlève la condition de diagonalisabilité, garde-t-on le même résultat ?

Solution. Si A et B sont semblables, alors elles ont le même polynôme caractéristique. Réciproquement, supposons que $\chi_A = \chi_B$. On en déduit que A et B ont les mêmes valeurs propres, car elles sont les racines de χ_A (et donc aussi χ_B). Or, on sait que A et B sont diagonalisables donc il existe P et M deux matrices inversibles telles que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \qquad B = M^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} M$$

On déduit alors que $A = PMBM^{-1}P^{-1} = (PM)B(PM)^{-1}$, donc A et B sont semblables.

Si A et B ne sont pas diagonalisables, on ne garde pas le résultat. Un contre-exemple pour $n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A(X) = (X-1)^2$ et $\chi_B(X) = (X-1)^2$. Or, A étant la matrice identité elle n'est semblable qu'à elle-même et donc pas à B. En effet, si on regarde la matrice

$$B - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 1 donc la dimension de $\mathrm{Ker}(B-I)$ est seulement de 1, ce qui permet de conclure que B n'est pas diagonalisable. □

Exercice 9 :

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que 0 est une valeur propre de f^k. Montrer que 0 est aussi une valeur propre de f.

Solution. Si 0 n'est pas une valeur propre de f, alors f est un endomorphisme injectif. Une composée d'endomorphismes injectifs est aussi injective. Par exemple, f^k serait aussi injectif. Ce qui contredit le fait que 0 soit une valeur propre de f^k. Donc 0 est une valeur propre de f. □

Exercice ☕☕

Exercice 10 :

On dit qu'un ensemble C est convexe si pour tout $X, Y \in C$ et pour tout $\delta \in [0,1]$, on a $(1-\delta)X + \delta Y \in C$.

Est-ce que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est convexe ?

Solution. Réponse courte : non. Commençons d'abord avec $n = 2$. L'idée est de trouver deux matrices A et B diagonalisables telles que $\frac{A+B}{2}$ ne soit pas diagonalisable. Identifier d'abord comment trouver plein d'exemples de matrices diagonalisables et non diagonalisables. Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

sont des matrices non-diagonalisables pour $a, b \neq 0$. En effet, leurs valeurs propres sont a avec multiplicité 2. Or $\dim(\mathrm{Ker}(M) - aI) = 1$. Inversement, des matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

avec $a \neq c$ sont diagonalisables car elles admettent deux valeurs propres distinctes et donc un polynôme caractéristique scindé à racines simples. Posons alors

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors que

$$M = \frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme discuté précédemment, A et B sont diagonalisables et M n'est pas diagonalisable. Pour généraliser pour $n \geq 3$, on définit les matrices suivantes :

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right)$$

On montre de la même manière que $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2}$ n'est pas diagonalisable, alors que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont diagonalisables. □

Exercice 11 : Matrice Compagnon

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On définit la matrice suivante :

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de A_P.

Solution. **CLASSIQUE à connaître.** Ce genre d'exercice est plus simple quand on connaît la solution. Si on navigue à vue, autant commencer méthodiquement, on écrit χ_{A_P} dans sa forme de déterminant :

$$\chi_{A_P}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & & (0) & a_0 \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ (0) & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Un tel déterminant va sûrement se calculer en développant par colonnes ou par lignes. La technique rapide pour démontrer le résultat sans trop de calculs (quand on le connaît) :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & & (0) & a_0 \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ (0) & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} &\overset{\sum_{i=2} \lambda^{n-i} L_i \to L_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda - \lambda & \dots & (0) & P(\lambda) \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ (0) & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ (0) & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} P(\lambda) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & & (0) \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ (0) & & & -1 \end{vmatrix} \\ &= P(\lambda) \end{aligned}$$

On déduit alors que $\chi_{A_P}(\lambda) = P(\lambda)$. Essayez de retenir cette technique qui facilite grandement vos calculs par rapport à la stratégie "naive".

Stratégie naïve : Ce qui embête davantage dans ce déterminant, ce sont les a_k. Alors, on va développer sur a_k.

$$\begin{vmatrix} \lambda & & (0) & a_0 \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ (0) & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n+i+1} a_i \left| \begin{array}{c|c} -I_{n-i-1} & \\ \hline & \lambda I_i \end{array} \right| + (-1)^{n+n-1+1}(\lambda + a_{n-1}) \left| \lambda I_{n-1} \right|$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n+i+1} a_i (-1)^{n-i-i} \lambda^i + (\lambda + a_{n-1})\lambda^{n-1}$$

$$= \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$$

Cette preuve est plus accessible si on n'a jamais vu ce classique mais terriblement fastidieux à écrire correctement sur une copie, en justifiant bien les étapes. Je vous invite à garder le résultat en tête et si possible la première méthode qui permet de s'en sortir rapidement pour des écrits de concours. $\square$

Exercice 12 :

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit l'application suivante définie par

$$\forall f \in E,\ \forall x > 0,\ \phi[f](x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x > 0 \\ f(0)\text{si} = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Détermininer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Solution. 1. La linéarité est simple à montrer, on le fait via la linéarité de l'intégrale et de l'évaluation. Reste à montrer que $\phi[f] \in E$. Le théorème fondamental de l'analyse dit que :

— $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est, elle, continue seulement sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit que $\phi[f]$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— La dérivée de $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est f. On déduit alors que

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt - 0}{x - 0} = f(0)$$

On conclut donc $\phi[f]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit f un vecteur propre associée à une valeur propre λ. On commencer par le fait que $f(0) = \phi[f](0) = \lambda f(0)$. On déduit alors que $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$. Supposons que $\lambda \neq 1$. On a l'équation suivante pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$$

Soit en multipliant par x l'équation :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x)$$

Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut dériver les fonctions et obtenir :

$$f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$$

f vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$(1-\lambda)y - x\lambda y' = 0$$

Supposons d'abord que $\lambda \neq 1$, on a alors $y - x\frac{\lambda}{1-\lambda}y' = 0$ On déduit alors que les solutions f sont de la forme :

$$f(x) = \alpha e^{\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{x^2}{2}} = \alpha e^{\frac{x^2\lambda}{2(1-\lambda)}}$$

On note alors f_λ ces fonctions, qu'on prolonge ensuite par continuité en 0. On a alors $f_\lambda(0) = 1$. On arrive à une contradiction, ces f_λ ne peuvent pas être des vecteurs propres.
Supposons maintenant que $\lambda = 1$, on a alors :

$$y' = 0$$

donc $f(x) = \alpha$ est la forme des solutions. On prolonge par continuité, d'où $f(0) = \alpha$. Réciproquement, si on pose $f(x) = 1$, on a :

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 1 = f(x)$$

et $\phi[f](0) = f(0)$.
On conclut que ϕ admet une valeur propre dont le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.

□

Exercice 13 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit I l'endomorphisme défini par

$$I\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

Déterminer tous les sous-espaces de E stables par I.

Solution. Considérons un sous-espace stable F de E. Remarquons d'abord que si $F \neq \{0\}$, alors F est de dimension infinie. En effet, si $P \neq 0$ est dans F, alors $\deg I(P) = \deg(P) + 1$ donc on a une famille de polynômes de degrés échelonnés, ce qui implique que F est de dimension infinie. Si on considère P un polynôme de degrés minimal d appartenant à F.

Si $d \geq 1$, montrons qu'il y a un unique polynôme de degrés d unitaire. On peut supposer P unitaire. Soit Q un polynôme différent de P de degrés d et unitaire. Alors $P - Q$ est un polynôme non-nul de degrés inférieur à $d-1$ de F, ce qui contredit la minimalité de d. Donc les polynômes de degrés d de F sont de la forme αP avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit Q et Q' de polynômes de F de degrés $d+1$, on peut faire en sorte que $Q + \alpha Q'$ soit de degrés au plus d et on déduit alors que $Q + \alpha Q' = \beta P$ Faisons-le avec $I(P)$ et un polynôme Q et on a :

$$Q + \alpha I(P) = \beta P$$

On peut supposer sans perte de généralité que $\beta = 1$. D'où $Q + \alpha I(P) = \beta P$. On a alors

$$q_k + \alpha \frac{p_{k-1}}{k} = p_k$$

. En particulier, $q_0 = p_0$. □

Exercice 14 :

On définit l'application f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & X^2 P(\frac{1}{X}) \end{array} \right.$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer les éléments propres de f.

Solution. Remarque : Je note $f[P](X)$ pour $(f(P))(X)$ pour alléger les notations et éviter des confusions.

1. Considérons $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, on a alors :

$$f[P](X) = X^2 \left(a_0 + a_1 \frac{1}{X} + a_2 \frac{1}{X^2} \right) = a_2 + a_1 X + a_0 X^2$$

   L'action de P est donc renverser les coefficients de P. Je vous laisse montrer que cette opération est alors bien linéaire.

2. Une idée dans ce cas est de représenter dans une bonne base notre endomorphisme. Il se trouve qu'on sait plutôt bien comment f agit sur les coordonnées de la base canonique. En effet, si on note $e_i = X^i$, on a $f[e_i](X) = X^{2-i} = e_{2-i}$. La matrice de f dans la base e_i est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Il suffit désormais de déterminer les éléments propres de cet matrice.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} &\overset{C_1+C_2+C_3 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(-1)^{2+2}(\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

On déduit alors les éléments propres de f sont 1 avec multiplicité 2 et -1 avec multiplicité 1. Et, on peut même en déduire que c'est un endomorphisme diagonalisable. En effet, si on pose $P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = X$ et $P_3 = 1 - X^2$. On remarque que $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_2$ et $f(P_3) = -P_3$.

□

Exercice 15 : Dérivation de polynômes

On considère D l'application linéaire qui $P \in \mathbb{K}[X]$ associe son polynôme dérivé. Déterminer les sous-espaces stables de D.

Solution. Soit F un espace stable par D. On suppose que $F \neq \{0\}$. Il existe donc un polynôme $P \in F$. Puisque F est stable par D, on déduit que $D(P)$ est aussi dans F. Or, on a $\deg(D(P)) = \deg(P) - 1$. De cette manière, on déduit que pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a $\alpha \in F$ (en tant que polynôme). On déduit que $\mathbb{K}_{\leq 1}[X] \subset F$, en effet on peut multiplier α par $\frac{\beta}{\alpha}$ pour tout $\beta \in \mathbb{K}$ et déduire que $\beta \in F$.

Procédons maintenant par récurrence : Montrons que si $\mathbb{K}_{\leq \ell}[X] \subset F$ et qu'il existe $P \in F$ tel que $\deg P = \ell + 1$, alors $\mathbb{K}_{\leq \ell+1}[X] \subset F$. On sait que $\{1, \dots, X^\ell\}$ sont des polynômes de F. Alors $(1, \dots, X^\ell, P)$ est une famille échelonnée et donc libre de $\mathbb{K}[X]$. On a $\mathrm{Vect} 1, \dots, X^\ell, P \subset \mathbb{K}_{\leq \ell+1}[X]$ est une égalité de dimension, donc égalité des espaces vectoriels.

Distinguons deux cas.

— S'il existe un polynôme P de degrés maximal n, donc $F \subset \mathbb{K}_{\leq n}[X]$, alors on peut faire la récurrence pour $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$. On déduit donc que $\mathbb{K}_{\leq n}[X] \subset F$.

— Sinon, on peut faire la récurrence $\ell \in \mathbb{N}$, et on déduit que $F = \bigcup_{\ell \geq 0} \mathbb{K}_{\leq \ell}[X] = \mathbb{K}[X]$.

Réciproquement, on montre que les $\mathbb{K}_{\leq \ell}[X]$ et $\mathbb{K}[X]$ sont des sous-espaces stables par D. □

Exercice 16 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, on définit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour $\mathrm{rg}(M) = 2$.
2. On suppose que M est de rang 2 désormais. Soit λ une valeur propre de M, montrer que $\lambda = 0$ ou λ est une solution de l'équation suivante

$$\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Solution. 1. Remarquons déjà que les $n-1$ première ligne imposent que $\mathrm{rg}(M) \leq 2$. Si $b = 0$, alors on a nécessairement que $\mathrm{rg}(M) \leq 1$ (une colonne au plus non-nulle), Par le même raisonnement, on déduit que $c \neq 0$. Réciproquement, si c et b sont non-nuls, alors on a $n-1$ lignes égales et la dernière ligne qui ne peut être une combinaison linéaire des précédentes, donc $\mathrm{rg}(M) = 2$.

2. On suppose que M est de rang 2, donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. On a alors : $MX = \lambda X$

$$\begin{cases} cX_n & = & \lambda X_1 \\ & \vdots & \\ cX_n & = & \lambda X_{n-1} \\ b\sum_{i=1}^{n-1} X_i + aX_n & = & \lambda X_n \end{cases}$$

   On suppose que $\lambda \neq 0$, on a alors $X_i = \frac{c}{\lambda} X_n$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$. En utilisant la dernière équation, on a alors :

$$\frac{bc(n-1)}{\lambda} X_n + aX_n = \lambda X_n$$

   Si jamais $X_n = 0$ alors $X = 0$, ce qui n'est pas possible car X est un vecteur propre. On a donc

$$\lambda^2 - a\lambda - bc(n-1) = 0$$

   ou alors $\lambda = 0$

3. On calcule le discriminant du polynôme de la question précédente : $\delta^2 = a^2 + bc(n-1)$. On a alors $\lambda_\pm = \frac{a \pm \delta}{2}$. Remarquons que $\delta \neq 0$ car $bc \neq 0$. Donc λ_+ et λ_- sont distinctes de 0. On a également obtenu avec la question précédente les vecteurs propres associés, on a $X_\pm = \frac{c}{\lambda_\pm}(1, \dots, 1)^T$ et les espaces propres sont $\mathrm{Vect}(X_+)$ et $\mathrm{Vect}(X_-)$ qui sont donc de dimension 1. La dernière valeur propre est $\lambda = 0$, l'espace propre associé est donc $\mathrm{Ker}M$. On peut alors revenir à notre question. M est diagonalisable si et seulement si les espaces propres de M engendrent $\mathbb{C}^n$.
   - Si $\delta = 0$, X_+ et X_- sont confondus. On a $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n-2$ et on ne récupère qu'une dimension avec $\mathrm{Vect}(X_+)$. Donc M n'est pas diagonalisable.
   - Si $\delta \neq 0$, X_+ et X_- sont distincts. On a $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n-2$ et $\mathrm{Ker}(M) \oplus \mathrm{Vect}(X_+) \oplus \mathrm{Vect}(X_-) = \mathbb{C}^n$.

   Donc M est diagonalisable si et seulement si $\delta \neq 0$.

□

Exercice 17 :

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Solution. Voici une remarque importante : si w est un endomorphisme dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension m, alors w admet m valeurs propres comptées avec multiplicité. C'est une reformulation de la remarque du fait que tout polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$.

Soit λ une valeur propre de u, qui existe. u et v commutent donc les espaces propres de u sont stables par v. On peut alors regarder l'endomorphisme induit $v_\lambda : E_\lambda(u) \to E_\lambda(u)$. On remarque que v_λ est également un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et est donc admet une valeur propre μ. Il existe alors un vecteur propre $x \in E_\lambda(u)$ associé à μ. Par définition, si $y \in E_\lambda(u)$, alors $v_\lambda(y) = v(y)$. En particulier, $v(x) = v_\lambda(x) = \mu x$ et $u(x) = \lambda x$ car $x \in E_\lambda(u)$.

□

Exercice

Exercice 18 : Matrice Circulante

On considère dans le cadre de cet exercice la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de J et déterminer si elle est diagonalisable ou non.
2. Déterminer les valeurs propres des matrices J^k.
3. On considère la matrice suivante pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A

Solution. Petit point de culture : la matrice J intervient dans la théorie de Fourier sur les groupes finis. Peut-être avez-vous étudié en informatique, ou en physique, ce qu'on appelle la transformée de Fourier discrète. C'est plus ou moins ce qu'on calcule ici. Les matrices circulantes permettent de représenter les applications de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, soit les applications n périodiques et calculer cette représentation via une décomposition polynomiale en matrices circulantes est, à peu de choses près, faire une transformée de Fourier. Si c'est une vision théorique particulièrement jolie, elle n'est pas vraiment effectivement d'un point de vue algorithmique.

1. Il y a plusieurs manières d'aborder le problème. La plus méthodique est de considérer une valeur propre λ de J et un vecteur propre x associé à λ. On a donc $Jx = \lambda x$ et on en déduit le système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_2 & = & \lambda x_1 \\ x_3 & = & \lambda x_2 \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ x_1 & = & \lambda x_n \end{array} \right.$$

On déduit alors que les coefficients de x vérifient une relation géométrique et que la valeur de x_1 donne la valeur de tous les coefficients. Autrement dit, une conséquence de ce système est que

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

Reste à déterminer la dite valeur propre. La dernière équation de notre système donne aussi que $x_1 = \lambda x_n = \lambda^n x_1$. Si jamais $x_1 = 0$, $x = 0$ ce qui contredirait la définition de x en tant que vecteur propre, donc $x_1 \neq 0$ et donc $\lambda^n = 1$. λ est alors une racine de l'unité. Posons alors :

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ e^{\frac{2\cdot 2ik\pi}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2i(n-1)k\pi}{n}} \end{pmatrix}$$

On montre ensuite qu'on a effectivement : $Jx_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} x_k$. Remarquons que J admet donc n valeurs propres distinctes, ce qui implique que J est diagonalisable.

2. On sait que J est diagonalisable, donc il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $J = PDP^{-1}$. On calcule alors J^k en remarquant que $J^k = PD^kP^{-1}$. On déduit alors que

$$J^k = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{\frac{2ik\pi}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\frac{2ik(n-1)\pi}{n}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

3. Ce qu'il faut remarquer, c'est que la matrice A est en fait un polynôme en J. En effet,

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i J^k$$

On peut alors utiliser la diagonalisation précédente.

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i PD^iP^{-1} = P\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i\right) P^{-1}$$

On obtient alors la diagonalisation suivante :

$$A = P \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell & & & \\ & \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell e^{\frac{2i\ell\pi}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=0}^{n-1} a_\ell^{\frac{2i\ell(n-1)\pi}{n}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

Exercice 19 : Produit tensoriel

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle produit tensoriel la loi suivante :

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{array}\right)$$

1. Montrer que pour toutes matrices A, B, C, D, on a :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

2. En déduire que si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ est aussi diagonalisable.

Solution. Petit point de culture : Le produit tensoriel, aussi parfois appelé produit de Kronecker, est une loi centrale en mécanique quantique.

1. La preuve est calculatoire mais est faisable tant qu'on se rappelle des règles de calculs par blocs..

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)(C \otimes D) &= \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} c_{1,1}D & \dots & c_{1,n}D \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline c_{n,1}D & \dots & c_{n,n}D \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{k=1}^n a_{1,k}c_{k,1}BD & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1,k}c_{k,n}BD \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \sum_{k=1}^n a_{n,k}c_{k,1}BD & \dots & \sum_{k=1}^n a_{n,k}c_{k,n}BD \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} (AC)_{1,1}BD & \dots & (AC)_{1,n}BD \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline (AC)_{n,1}BD & \dots & (AC)_{n,n}BD \end{array}\right) \\
&= (AC) \otimes (BD)
\end{aligned}$$

2. La preuve est un peu fastidieuse. Remarquons d'abord que $\otimes$ est bilinéaire, donc linéaire pour chacune des variables.

   Prouvons alors le résultat d'abord pour les matrices élémentaires $E_{i,j}$. On considère $E_{i,j}, E_{k,\ell}$. On calcule $E_{i,j} \otimes A$. Il s'agit de la matrice suivante

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} (0) & \dots & (0) \\ \vdots & A & \vdots \\ (0) & \dots & (0) \end{pmatrix} \end{array}$$

   De la même manière, $E_{k,\ell} \otimes B$ est égale à la matrice suivante :

$$\begin{array}{cc} & \ell \\ k & \begin{pmatrix} (0) & \dots & (0) \\ \vdots & B & \vdots \\ (0) & \dots & (0) \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Il existe D_A, D_B deux matrices diagonales et P_A, P_B des matrices inversibles telles que $A = P_A D_A P_A^{-1}$ et $B = P_B D_B P_B^{-1}$. On pose $L = P_A \otimes P_B$. Montrons d'abord que L est inversible. Posons $M = P_A^{-1} \otimes P_B^{-1}$, on a alors

$$ML = (P_A^{-1} \otimes P_B^{-1})(P_A \otimes P_B) = (P_A^{-1}P_A) \otimes (P_B^{-1}P_B) = I_{n^2}$$

   Donc L est inversible, d'inverse M. On applique ensuite une nouvelle fois notre premier résultat.

$$M(A \otimes B)L = (P_A^{-1}AP_A) \otimes (P_B^{-1}BP_B) = D_A \otimes D_B$$

Or, $D_A \otimes D_B$ est bien une matrice diagonale. On déduit d'ailleurs que les valeurs propres de $A \otimes B$ sont exactement les $\{\lambda\mu,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}$.

□

Exercice 20 : Matrices stochastiques

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1$$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de M.
2. Montrer que si λ est une valeur propre de M, alors $|\lambda| \leq 1$.

Solution. Petit point culture : Les matrices stochastiques interviennent en théorie des probabilités. Si on a un vecteur de probabilité $\vec{p}$, *i.e.* qui représente une distribution de probabilité finie, alors $M\vec{p}$ représente aussi une distribution de probabilité. En particulier, elles sont utilisées pour étudier des suites de variables aléatoires X_k dont la distribution de probabilité est $\vec{p_k}$ vérifiant : $\vec{p_{k+1}} = M\vec{p_k}$. Si vous vous rappelez, les schémas de transition pour des variables aléatoires, M en serait une représentation.

1. Posons $x = (1, \dots, 1)$, on a :

$$(Mx)_i = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}x_k = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} = 1$$

Donc $Mx = x$. On a donc trouver un vecteur propre associé à 1. Il est aussi possible de le faire en écrivant le déterminant de $I_n - M$ via le polynôme caractéristique.

$$\begin{vmatrix} \lambda - M_{1,1} & -M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ -M_{2,1} & \lambda - M_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -M_{n-1,n} \\ -M_{n,1} & \dots & -M_{n,n-1} & \lambda - M_{n,n} \end{vmatrix} \overset{\sum_i C_i \to C_n}{=} \begin{vmatrix} \lambda - M_{1,1} & -M_{1,2} & \dots & \lambda - 1 \\ -M_{2,1} & \lambda - M_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda - 1 \\ -M_{n,1} & \dots & -M_{n,n-1} & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

On en déduit donc que $X - 1$ divise χ_M, *i.e.* 1 est valeur propre de M.

2. Soit λ une valeur propre. Il existe donc un vecteur propre x associé à λ. Par définition, $Mx = \lambda x$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} M_{i,k}x_k = \lambda x_i$$

On peut choisir x tel que $\max |x_i| = x_1 = 1$, quitte à diviser par un nombre complexe. On a donc, par exemple :

$$|\lambda| = \left|\sum_{k=1}^{n} M_{1,k}x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} M_{1,k}|x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} M_{1,k} = 1$$

On conclut donc que $|\lambda| \leq 1$.

□

Exercice ☕☕☕☕

Exercice 21 : Trigonalisation commune

Soient u, v deux endomorphismes trigonalisables (dans $\mathbb{K}$) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.
2. Montrer que u et v admettent une base de trigonalisation commune.

Solution. u est trigonalisable. Cela implique que u admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$. On le prouve ainsi : il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ telle que la représentation matricielle de u dans cette base soit la suivante

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si on regarde la première colonne, on a donc $u(e_1) = \lambda e_1$. e_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Puisqu'on a trigonalisé dans $\mathbb{K}$, on sait que $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soit λ une valeur propre de u, qui existe (d'après notre remarque). u et v commutent donc les espaces propres de u sont stables par v. On peut alors regarder l'endomorphisme induit $v_\lambda : E_\lambda(u) \to E_\lambda(u)$. On remarque que v_λ est également un endomorphisme trigonalisable. En effet, χ_{v_λ} divise χ_v. v étant trigonalisable, il est scindé et donc par divisibilité χ_{v_λ} est aussi scindé. On déduit alors que v_λ est trigonalisable. v_λ admet alors une valeur propre $\mu \in \mathbb{K}$. Il existe donc un vecteur propre $x \in E_\lambda(u)$ associé à μ. Par définition, si $y \in E_\lambda(u)$, alors $v_\lambda(y) = v(y)$. En particulier, $v(x) = v_\lambda(x) = \mu x$ et $u(x) = \lambda x$ car $x \in E_\lambda(u)$.
2. On va procéder par récurrence. Supposons qu'on puisse trouver une base de trigonalisation commune pour pour les endormophismes de dimension $n-1$. On utilise notre résultat précédent, u et v admettent un vecteur propre en commun e_1. C'est là que ça devient technique. Une bonne idée est de commencer par naïvement par compléter la famille (e_1) en une base de trigonalisation $(e_1, f_1, \ldots, f_{n-1})$ de E. u sera par exemple représentée par la matrice suivante

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Si on note, $F = \mathrm{vect}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ et p la projection de E sur F parallèlement à $\mathrm{vect}(e_1)$, c'est-à-dire $p(e_1) = 0$ et $p(f_i) = f_i$. A serait la matrice de $p \circ u_F$ où $u_F : F \to E$ est une restriction de u à F. On prouve que $p \circ u_F$ est trigonalisable.

On sait par ailleurs que v est représentée dans la base $(e_1, f_1, \ldots, f_{n-1})$ par la matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \mu_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

où B est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. B est la matrice de $p \circ v_F$ dans la base $(f_1, \dots, f_{n-1})$. Si on montre que $p \circ v_F$ est trigonalisable, on aura presque terminé. On peut aussi compléter la famille (e_1) en une base $(e_1, g_1, \dots, g_{n-1})$ de trigonalisation de v. On note p' la projection de $G = \text{vect}(g_1, \dots, g_{n-1})$ sur E. On a alors $p' \circ v_{|G}$ qui est trigonalisable. On obtient $p' \circ v_{|G}$ par le changement base vers celle de G, on en déduit que $p' \circ v_{|G}$ et $p \circ v_{|F}$ sont semblables. En particulier, B est une matrice trigonalisable dans $\mathbb{K}$.
On pose $u' = p \circ u_F$ et $v' = p \circ v_F$. On rappelle que leur représentation matricielle dans la base $f_1, \dots, f_{n-1}$ est alors :

$$M_u = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad M_v = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On sait que $M_u M_v = M_v M_u$, on déduit alors que $AB = BA$ par calcul par blocs. Et donc que $u' \circ v' = v' \circ u'$. On sait que u' et v' admettent donc une base commune de diagonalisation. Et donc, il existe P inversible telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient triangulaires. On définit alors la matrice

$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On a alors que

$$L^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Et donc LM_uL^{-1} et LM_vL^{-1} sont triangulaires et on a donc trouver une base commune de trigonalisation.

$\square$