Feuille de colle n°1

Exercice 1 (BCCINP 14). Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.

   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$.
   On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
   Prouver que $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right) dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,dx.$

3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right) dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n2^n}\,dx$

Proof. Voir les BCCINPs. □

Exercice 2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{(1+n^2x)^2} \end{cases}$$

1. Etudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. De même pour $\sum f_n'$.

Proof. Exercice classique où il faut savoir appliquer les méthodes d'étude de convergence.

1. Qui peut le plus, peut le moins, on privilégie dans un premier de voir si on peut obtenir une convergence normale facilement. On essaye de borner f_n par une suite numérique. Pour $n \geq 1$

   $$f_n'(x) = -x\frac{2n^2}{(1+n^2x)^3} + \frac{1}{(1+n^2x)^2}$$

   $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $1 + n^2x - 2n^2x = 0$, un optimum est atteint à $x = \frac{1}{n^2}$. On peut argumenter avec un tableau de variations qu'il s'agit d'un maximum. On a alors,

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x)| \leq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{4n^2}$$

   On peut faire sans calcul de dérivée en remarquant que la fonction à deux régimes, celui du numérateur en x et celui du dénominateur en n^2x. Si $x \leq \frac{1}{n^2}$, on a

   $$\frac{x}{(1+n^2x)^2} \leq x \leq \frac{1}{n^2}$$

   Sinon, $x > \frac{1}{n^2}$ et donc $xn^2 > 1$. On a alors

   $$\frac{x}{(1+n^2x)^2} = \frac{x}{1+2n^2x+n^4x^2} < \frac{x}{1+1+n^2x} < \frac{x}{n^2x} = \frac{1}{n^2}$$

   Donc quelque soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|f_n(x)| < \frac{1}{n^2}$.
   Pour conclure, $\sum f_n$ est converge donc normalement, et *a fortiori* uniformément et simplement.

2. On a
$$f_n'(x) = \frac{-2n^2x}{(1+n^2x)^3} + \frac{1}{(1+n^2x)^2}$$
Donc $f_n'(0) = 1$. On conclut alors que la série $\sum f_n'(0)$ diverge grossièrement. Et qui ne peut le moins, ne peut le plus. $\sum f_n'$ est simplement divergente, donc uniformément et normalement divergente sur $\mathbb{R}$. Comme remarquée par certains, on peut effectivement montrer une convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ et au moins une convergence normale sur les segments $]0, a]$.

□

Exercice 3. On pose $f(x) = \sum nx^n$. Montrer que pour $|x| < 1$, on a
$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Montrer que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-z)^{k+1}}$$

Proof. On remarque dans un premier temps que si on pose $g(x) = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$, alors alors $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. On souhaite alors montrer que
$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} nx^{n-1}$$
Premièrement, si $|x| \leq a < 1$, on sait que $n|x|^{n-1} \leq na^{n-1}$. La série $\sum na^{n-1}$ étant convergente car $a < 1$, on déduit que $\sum nx^{n-1}$ converge normalement et donc uniformément. Evidemment, $x \mapsto x^n$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et on conclut alors par le théorème de dérivation des séries de fonctions:
$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
Il suffit alors de remarquer que:
$$xg'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n$$

Pour la deuxième, on repart de la même idée que pour la première mais en appliquant le théorème de dérivation $\mathcal{C}^k$. La dérivée $k$eme de $x \mapsto x^n$ est
$$n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = x^{-k}\frac{n!}{(n-k)!}x^n$$
Les $x \mapsto x^n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et on peut également remarquer que pour $|x| < a$, on a que $n(n-1)\dots(n-k+1)|x|^n \leq n^k a^n$. La série $\sum n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ convergement normalement, et donc uniformément sur $[-a, a]$. Cela vaut pour tout $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$, on déduit alors que les $\sum n(n-1)\dots(n-\ell+1)x^{n-\ell}$ convergent simplement sur $[-a, a]$. On peut alors appliquer le théorème de dérivation $\mathcal{C}^k$. $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$, donc dérivée k donne $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. On déduit alors que
$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

En divisant par $k!$ les deux termes, et en multipliant par x^k, on obtient sur $[-a, a]$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

□

Exercice 4 (Courbe du blanc-manger*)**.** On définit pour un réel x la valeur $s(x)$, la distance de x à l'entier relatif le plus proche de x, *i.e.*
$$s(x) = \min_{y\in\mathbb{Z}} |x - y|$$
On définit la fonction suivante pour $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n : x \mapsto \frac{\lfloor 2^n x \rceil}{2^n}$$

1. Montrer que $B = \sum f_n$ est convergente et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que B est 1-périodique. En déduire que B est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3. (Bonus) Essayer de tracer B (commencer par tracer $f_0, f_1, \dots$ et faites les additions). Quelle est votre conjecture sur la dérivabilité de B.

4. (Si vous êtes vraiment motivé) Prouver ou réfuter votre conjecture.

* *Le blanc-manger est un dessert et son profil ressemble au graphe de la fonction B.*

Proof.

1. On observe que quelque soit $z \in \mathbb{R}$, on a $s(z) \leq \frac{1}{2}$. On déduit donc que

$$f_n(x) = \frac{s(2^n x)}{2^n} \leq 2^{-(n+1)}$$

$\sum f_n$ converge normalement et donc absolument. En particulier, B est définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que les f_n sont également continues. Par morceau, notons pour $y \in \mathbb{Z}$, $V(y) = [y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}]$. Sur $V(y)$, f_n est affine. De plus, montre qu'on peut raccorder sans discontinuité $V(y)$ et $V(y+1)$, ainsi que $V(y)$ et $V(y-1)$.

2. On calcule d'abord.

$$\begin{aligned} B(x+1) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s((x+1)2^n)}{2^n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s(x2^n + 2^n)}{2^n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s(x2^n)}{2^n} \\ &= B(x). \end{aligned}$$

C'est un classique, une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On commence par remarquer que B est continue sur $[0,1]$. Par le théorème de Heine, une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce même segment. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |B(x) - B(y)| \leq \varepsilon$$

Soit ε et notons le α qu'on obtient de cette propriété. Posons $\alpha' = \min\{\frac{1}{4}, \alpha\}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, si on a $|x-y| \leq \alpha'$, on déduit que $|x-y| < \frac{1}{2}$. Autrement dit, il ne peut pas y avoir un entier d'écart entre x et y. Donc on peut écrire $x = a + x'$ et $y = a + y'$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $x', y' \in [0,1]$. On remarque alors que $B(x) = B(x')$, $B(y) = B(y')$ et $|x' - y'| = |x-y| \leq \alpha' \leq \alpha$. On a donc que $|B(x) - B(y)| = |B(x') - B(y')| \leq \varepsilon$. On a bien prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |B(x) - B(y)| \leq \varepsilon$$

3. Si vous faites les dessins, vous obtiendrez des courbes avec de plus en plus de pics. A chaque pic, vous vous doutez que la fonction de ne sera pas dérivable. La conjecture a priori, c'est que la fonction n'est dérivable en aucun point.

4. Une preuve un peu longue et fastidieuse. Vous pouvez me demander par mail pour en discuter.

□

Feuille de colle n°2

Exercice 5 (BCCINP 15)**.** Soit X une partie de $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$?

Exercice 6. On définit la fonction f suivante:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} \frac{x}{n + x^2} \end{array} \right.$$

1. Montrer S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Proof. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (on récupèrera les x négatifs en utilisant le fait que $S(-x) = -S(x)$), on pose $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}$ et, si défini, $R_n(x)$ le reste de la somme $S(x)$. $(u_n(x))_n$ est une suite alternée décroissante telle que $|u_n(x)| \to 0$. On peut alors appliquer le critère spécial des séries alternées. On a en particulier que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |R_n(x)| \leq \frac{x}{n + x^2}$$

- **Première méthode, on montre que la fonction est continue sur des segments:** Les u_n sont continues sur $[0, a]$ et pour $|x| \leq a$, on a

$$|R_n(x)| \leq \frac{a}{n}$$

  d'où $||R_n||_{\infty,[-a,a]} \leq \frac{a}{n}$. On déduit que S converge uniformément sur $[-a, a]$ et donc est continue sur $[-a, a]$ par théorème de continuité. On conclut alors que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- **Deuxième méthode, on montre que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$:** On on a toujours que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n + x^2} = g_n(x)$$

  Si on dérive, g_n, on a que

$$g_n'(x) = \frac{n - x^2}{(n + x^2)^2}$$

  On a donc que g_n croit puis décroit et que le maximum est atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$. D'où

$$|f_n(x)| \leq \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{n + n} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

  Or $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ converge, on déduit donc que $\sum f_n$ converge normalement.

2. **Si on a utilisé le critère spécial.** Par le critère spécial des séries alternées, on a aussi que

$$\frac{x}{1 + x^2} - \frac{x}{2 + x^2} \leq S(x) \leq \frac{x}{1 + x^2}$$

Le terme de gauche et de droite tendent vers 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

Si on a montré la convergence normale. On a montré la convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de $\sum f_n$. On peut remarquer que pour tout n, on a $f_n(x) \to 0$, donc par théorème d'interversion $\sum$ / lim, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

□

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{z - e^{it}} dt$$

Proof. On remarque que pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z - e^{it}} &= \frac{-e^{-it}}{1 - ze^{-it}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n e^{-it(n+1)}\end{aligned}$$

De plus, on remarque qu'il y a convergence normale, donc uniforme. De plus chaque fonction $t \mapsto z^n e^{-it(n+1)}$ est continue sur $[0, 2\pi]$. On peut appliquer le théorème de permutation $\sum$ / $\int$ et on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{z - e^{it}} dt &= -\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n e^{-it(n+1)} dt \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \int_0^{2\pi} e^{-it(n+1)} dt \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Exercice 8 (Un prolongement de ζ)**.** On définit la fonction ζ pour $s \in \mathbb{C}$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Montrer que ζ est définie si $\mathfrak{Re}(s) > 1$.
2. Montrer que si $\mathfrak{Re}(s) > 1$, alors

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} =: \eta(s)$$

3. Déterminer un prolongement continu de ζ sur $\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(s) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\}$, *i.e.* qu'il existe une fonction continue f définie sur Ω telle que $f(s) = \zeta(s)$ si $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

Proof. 1. On sait que $\zeta(x)$ converge pour $x > 1$. Remarquons que $n^{x+iy} = n^x e^{i\ln(n)y}$ donc $|n^x e^{i\ln(n)y}| = n^x$. On déduit alors que si $\mathfrak{Re}(s) > 1$, alors $\zeta(s)$ est défini.

2. On fait les calculs pour s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$

$$\begin{aligned}\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\end{aligned}$$

3. L'idée est de remarquer que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ peut être définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 0$. On peut alors étendre la définition de ζ pour $s \neq 1$. Montrer qu'il y a convergence de η dans les complexes est compliqué. Mais on peut le faire autrement, on va montrer la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}$$

qui, dans le cas où $\mathfrak{Re}(s) > 1$ est bien égale à $\eta(s)$ (et aussi généralement mais on ne peut pas le prouver maintenant. Posons $f : t \mapsto t^s$ f est continue sur $\mathbb{R}$ et dans $\mathcal{C}^1$ également. On déduit par inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \sup_{x \leq t \leq y} |f'(t)|$$

On a $|f'(t)| = s|t|^{s-1}$ qui peut être bornée

$$|f'(t)| \leq |s| \left(y^{s-1} + x^{s-1} \right)$$

Et donc

$$|f(2n) - f(2n-1)| \leq |s| \left((2n)^{s-1} + (2n-1)^{s-1} \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} \right| &= \frac{|(2n)^s - (2n-1)^s|}{|(2n-1)^s(2n)^s|} \\
&\leq |s| \frac{|(2n)^{s-1}| + |(2n-1)^{s-1}|}{|(2n-1)^s(2n)^s|} \\
&\leq |s| \left(\frac{1}{|(2n-1)(2n)^s|} + \frac{1}{|(2n-1)^s(2n)|} \right) \\
&= |s| \left(\frac{1}{(2n-1)(2n)^x} + \frac{1}{(2n-1)^x(2n)} \right)
\end{aligned}$$

où $x = \mathfrak{Re}(s)$. Donc, si on pose $\Omega_{a,r} = \{s \in \Omega \cup \{1\},\ \mathfrak{Re}(s) \geq a\ |s| \leq r\}$. Alors, on déduit que

$$\left| \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} \right| \leq r \left(\frac{1}{(2n-1)(2n)^a} + \frac{1}{(2n-1)^a(2n)} \right)$$

et le terme de droite est le terme d'une série convergente donc on déduit que notre série est normalement convergente. En particulier, on peut utiliser le théorème de convergence des séries de fonctions pour montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}$$

est continue sur $\Omega \cup \{1\}$. On définit alors pour $s \in \Omega$

$$\widetilde{\zeta}(s) = \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}}{(1 - 2^{1-s})}$$

On a pour s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$

$$\widetilde{\zeta}(s) = \frac{\eta(s)}{(1 - 2^{1-s})} = \zeta(s)$$

4. Non, bien sûr. Il y a des années, de nombreux vulgarisateurs, dont des très bons, ont fait des vidéos *sensationnalistes* sur le fait que

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

En fait, le prolongement (analytique) de la fonction ζ est égale à $-\frac{1}{12}$ à -1. On observe quelque chose de similaire ici, $\widetilde{\zeta}(1/2) < 0$. Donc on pourrait dire que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} < 0$$

Mais on n'a fait que montrer que le prolongement $\widetilde{\zeta}$ est négatif pour la valeur $1/2$. Dans le même genre, vous verrez un prolongement de la suite factorielle aux réels (la bien nommée fonction Γ) qui conservent par exemple de nombreuses propriétés de la suite factorielle.

Pour autant, ces prolongements ont bien un sens mathématiquement qui ne sort pas de nulle part. Pour en savoir plus, faites des mathématiques après la prépa :).

$\square$

Feuille de colle n°3

Exercice 9 (BCCINP 17). Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication suivante

$$\begin{gathered}\big(\text{la série de fonctions } \textstyle\sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\big)\\ \Downarrow \\ \big(\text{la suite de fonction } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A\big)\end{gathered}$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$? Justifier.

Exercice 10. On définit pour $n \geq 1$ la fonction suivante

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array} \right.$$

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$.

Proof. $(f_n(x))_n$ est alternée, décroissante et tend vers 0. Donc la série $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}$ par la critère spécial des séries alternées. De plus, si on note $R_n(x)$ le reste de la série $\sum f_n(x)$, on a

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

On déduit que $||R_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$ et donc $\sum f_n$ converge uniformément. $\sum f_n$ ne converge pas normalement. En effet, $||f_n|| = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. □

Exercice 11. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)}\, dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2\pi}{n!^2}$$

Proof. On a pour $x \in [0, 2\pi]$

$$e^{2\cos(x)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n \cos(x)^n}{n!}$$

$x \mapsto \frac{2^n\cos(x)^n}{n!}$ est continue pour tout n sur $[0, 2\pi]$ et on a $|f_n(x)| \leq \frac{2^n}{n!}$. On déduit que $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$. On peut alors appliquer le théorème de permutation $\sum / \int$,

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)} dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos(x)^n dx$$

On peut reconnaître l'intégrale à droite, il s'agit d'une intégrale proche de l'intégrale de Wallis.
Si on connaît l'intégrale de Wallis: On sait que (Wallis)

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n} dx = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

Remarquons alors que

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)^n dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos(x)^n + 2\int_0^{\pi/2} \cos(x+\pi)^n$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)^{2n} dx = 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \qquad \int_0^{2\pi} \cos(x)^{2n+1} dx = 0$$

Ainsi, on calcule:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)}dx &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!}\int_0^{2\pi}\cos(x)^n dx\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{2n}}{(2n)!}2\pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2\pi}{n!^2}\end{aligned}$$

Si on ne connaît pas l'intégrale de Wallis: On calcule avec une intégration par partie. On note $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x)^n dx$. On remarque déjà que $I_{2n+1} = 0$. On a aussi

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{2\pi}\cos(x)^n dx\\ &= \Big[\cos(x)^{n-1}\sin(x)\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}(n-1)\cos(x)^{n-2}\sin(x)^2 dx\\ &= \int_0^{2\pi}(n-1)\cos(x)^{n-2}(1-\cos(x)^2)dx\\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\end{aligned}$$

Donc on déduit que

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

On montre alors par récurrence que

$$I_{2n} = I_0\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = 2\pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

□

Exercice 12. Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto a_n\sin(nx)$. Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\sin(nx)$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Proof. Clairement, il s'agit d'une exercice qu'on ne peut pas improviser. Il faut avoir vu au moins une fois une résolution de ce genre.

Je motive d'abord ce que je vais utiliser. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On a

$$\sum_{k=p}^{n} u_k(v_k - v_{k-1}) = u_n v_n - u_{p-1}v_{p-1} - \sum_{k=p}^{n} v_{k-1}(u_k - u_{k-1})$$

Cette relation se montre en remarquant que

$$u_k v_k - u_{k-1}v_{k-1} = u_k(v_k - v_{k-1}) + v_{k-1}(u_k - u_{k-1})$$

Pour rappel, si on fait l'analogie suivante

$$\int_p^n f\,dx \longleftrightarrow \sum_{k=p}^{n} f_k \quad f' \longleftrightarrow f_n - f_{n-1}$$

on remarque que cette relation est une sorte d'intégration par parties discrète.

$$\begin{array}{c|c} f' & (\mathrm{d}u)_k = u_k - u_{k-1}\\ \int f & \sum u_k\\ (fg)' = f'g + fg' & (\mathrm{d}[uv])_k = u_k(\mathrm{d}v)_k + v_{k-1}(\mathrm{d}u)_k\end{array}$$

Pourquoi c'est intéressant ? Exactement comme pour l'intégration par parties, parfois vous avez plus d'information sur la dérivée que sur la suite en elle-même. Par exemple, on sait que a_n

est décroissante et tend vers 0 mais on sait que $(\mathrm{d}a)_n = a_n - a_{n-1}$ tend vers 0 et $\sum(\mathrm{d}a)_n$ converge! Appliquons-le à notre série.

Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, la convergence est donnée. Supposons que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. On a en posant $B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, en particulier $B_{-1} = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}(a_k - a_{k-1})$$

La force de cette relation maintenant est qu'on a que (B_n) est bornée. En effet, on a

$$|B_n(x)| = \frac{|\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)|}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

En particulier, on déduit que:

$$\sum_{k=1}^{n} |B_{k-1}(a_{k-1} - a_k)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - a_k \leq \frac{a_0}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

Donc $\sum B_n(a_n - a_{n-1})$ converge absolument. De plus, on sait que $B_n a_n \to 0$ car B_n est bornée et a_n tend vers 0. On conclut alors que $\sum f_n(x)$ converge.

Remarque: En général, cette techniquement est très utile quand vous avez d'un côté une suite qui tend vers 0 et de l'autre une suite dont la somme des n premiers termes sera bornée. En particulier, on a le théorème suivant:

Théorème 1 (Critère d'Abel)**.** Soit (a_n) une suite qui tend vers 0 telle que $\sum a_n - a_{n-1}$ converge absolument. Soit (b_n) une suite telle que $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est bornée. Alors,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n B_n$$

est convergente.

Une conséquence est une généralisation du théorème des séries alternées. En effet, si on pose $b_n = e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et si on considère une série a_n à valeurs complexes telle que $a_n \to 0$, $|a_n|$ est décroissante et $a_n = e^{in\theta}|a_n|$, alors la série suivante est convergente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Pour ça, on écrit $a_n = e^{in\theta}|a_n| = |a_n|(B_n - B_{n-1})$. On peut alors appliquer le critère d'Abel. Une sous-conséquence de cette conséquence est de montrer que

$$\ln(1+z) := -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-z)^n}{n}$$

est convergente pour $|z| < 1$.

□