



## تمرین چهارم - بخش اول

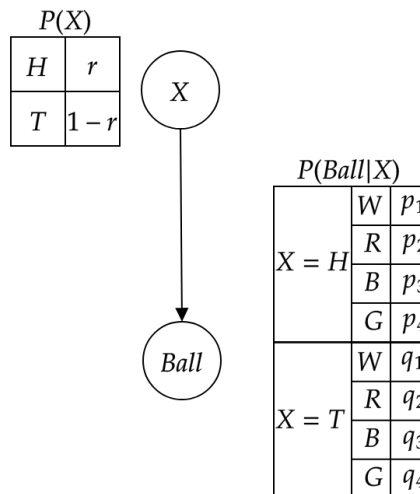
شماره دانشجویی: ۹۸۱۰۱۰۷۴

محمدجواد هزاره

## سوال ۱

(آ) متغیرهای مسئله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} X := \text{نتیجه پرتاب سکه} & X \in \{H, T\} \\ \text{Ball} := \text{نتیجه انتخاب توپ} & \text{Ball} \in \{W, R, B, G\} \end{cases}$$

بنابراین با توجه به اطلاعات داده شده برای احتمال  $X$  و احتمال  $\text{Ball}$  به شرط  $X$ ، برای شبکه‌ی بیزی داریم:

شکل ۱: شبکه بیزی

(ب) احتمال این‌که پرتاب اول  $H$  و توپ انتخاب شده سفید باشد برابر است با:

$$\mathbb{P}(X = H, \text{Ball} = W) = \mathbb{P}(X = H)\mathbb{P}(\text{Ball} = W|X = H) = rp_1$$

احتمال این‌که پرتاب دوم  $T$  و توپ انتخاب شده سفید باشد برابر است با:

$$\mathbb{P}(X = T, \text{Ball} = W) = \mathbb{P}(X = T)\mathbb{P}(\text{Ball} = W|X = T) = (1-r)q_1$$

احتمال این که پرتاب سوم  $T$  و توپ انتخاب شده سفید باشد نیز به طور مشابه برابر با  $(1-r)q_1$  خواهد بود. بنابراین احتمال این که هر سه توپ سفید باشند برابر است با  $rp_1 + 2(1-r)q_1$ . به طور مشابه احتمال این که هر سه توپ قرمز باشند برابر است با  $rp_2 + 2(1-r)q_2$  و  $\dots$ . بنابراین احتمال این که هر سه توپ هم رنگ باشند برابر خواهد بود با جمع احتمال این که هر سه توپ سفید یا آبی یا قرمز یا سبز باشند، بنابراین:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{هر سه توپ هم رنگ}) &= \sum_{i=1}^4 r(p_i) + 2(1-r)q_i \\ &= r \sum_{i=1}^4 p_i + 2(1-r) \sum_{i=1}^4 q_i \\ &= \boxed{2-r}\end{aligned}$$

(ج) با توجه به قانون بیز داریم:

$$\mathbb{P}(H|R) = \frac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(R|H)}{\mathbb{P}(R)}$$

برای مخرج کسر با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$\mathbb{P}(Ball = R) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(R|H) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(R|T) = rp_2 + (1-r)q_2$$

بنابراین برای خواسته‌ی مسئله داریم:

$$\boxed{\mathbb{P}(H|R) = \frac{rp_2}{rp_2 + (1-r)q_2}}$$