Alle opgaverne i dette dokument er omskrivninger af resultater fra dokumentet `https://www.tjhsst.edu/~2010bhamrick/files/dumbassing.pdf`

1 Opgave 2a

Bevis følgende ulighed:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

hvor a og b er ikke-negative reelle tal.

1.1 Løsning

Vi benytter først den aritmetiske-geometriske ulighed på tallene a^3, a^3 og b^3 til at få:

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3a^3b^3}$$

Dette reducerer til

$$\frac{2a^3 + b^3}{3} \geq a^2b$$

Ved at ombytte a og b og lægge til, så giver det

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

hvilket er det ønskede.

2 Opgave 2b

Bevis følgende ulighed:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$$

hvor a, b og c er ikke-negative reelle tal.

2.1 Løsning

Vi trækker højresiden fra venstresiden, så vi i stedet for skal vise

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 0$$

Nu udnytter vi følgende identitet:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$$

til at omskrive venstresiden i uligheden:

$$\begin{aligned} & 2(a^3+b^3+c^3)+3abc-(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \\ = \;& a^3+b^3+c^3+3abc-a^2(b+c)-b^2(a+c)-c^2(a+b) \\ = \;& a\left(a^2-a(b+c)+bc\right)+b\left(b^2-b(a+c)+ac\right)+c\left(c^2-c(a+b)+ab\right) \\ = \;& a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \\ = \;& (a-b)\Big(a(a-c)-b(b-c)\Big)+c(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

Vi skal nu vise at dette udtryk aldrig kan være negativt. Da udtrykket er symmetrisk ved permutation af de tre variabler, så kan vi uden tab af generalitet antage, at $a \geq b \geq c$. Med denne antagelse er det tydeligt, at begge led er ikke-negative, og vi har vist det ønskede. Dette er et specialtilfælde af Schur's ulighed.

3 Opgave 2c

Bevis følgende ulighed:

$$a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c) \geq (ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2)$$

hvor a, b og c alle er vilkårlige reelle tal.

3.1 Løsning

Vi omskriver højresiden:

$$(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2) = ab(a^2+b^2)+ac(a^2+c^2)+bc(b^2+c^2)+abc(a+b+c)$$

Idet vi flytter alle led over på venstresiden, så kan uligheden skrives som:

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-ab(a^2+b^2)-ac(a^2+c^2)-bc(b^2+c^2) \geq 0$$

Vi laver nu følgende omskrivninger af venstresiden i denne ulighed:

$$\begin{aligned} & a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-ab(a^2+b^2)-ac(a^2+c^2)-bc(b^2+c^2) \\ = \;& a^4+a^2bc-a^3b-a^3c+b^4+b^2ac-b^3a-b^3c+c^4+c^2ab-c^3a-c^3b \\ = \;& a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b) \\ = \;& (a-b)\left(a^2(a-c)-b^2(b-c)\right)+c^2(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

Vi skal nu vise at dette udtryk aldrig kan være negativt. Da udtrykket er symmetrisk ved permutation af de tre variabler, så kan vi uden tab af generalitet antage, at $a \geq b \geq c$. Med denne antagelse er det tydeligt, at begge led er ikke-negative, og vi har vist det ønskede. Dette er et specialtilfælde af Schur's ulighed.

4 Opgave 2d

Bevis følgende ulighed:

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ac}{a+2b+c} + \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

hvor a, b og c er ikke-negative reelle tal.

4.1 Løsning

Ved at gange uligheden med $4(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$ og flytte alle led over på højresiden, så får vi følgende ækvivalente ulighed:

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & (2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)(a+b+c) - 4bc(a+2b+c)(a+b+2c) \\ & -4ac(2a+b+c)(a+b+2c) - 4ab(2a+b+c)(a+2b+c) \end{aligned}$$

Vi vil nu vise, at højresiden i denne ulighed er ikke-negativ. Højresiden ganges ud og kan – efter en del mellemregninger – skrives som

$$\begin{aligned} & 2(a^4+b^4+c^4) + 2abc(a+b+c) \\ & +ab(a^2+b^2) + ac(a^2+c^2) + bc(b^2+c^2) - 6a^2b^2 - 6a^2c^2 - 6b^2c^2 \end{aligned}$$

Fra opgave 2c har vi vist, at

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) - ab(a^2+b^2) - ac(a^2+c^2) - bc(b^2+c^2) \geq 0 \quad (1)$$

Endvidere er det tydeligt, at

$$ab(a-b)^2 + ac(a-c)^2 + bc(b-c)^2 \geq 0$$

hvilket kan omskrives til

$$ab(a^2+b^2) + ac(a^2+c^2) + bc(b^2+c^2) - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Ved nu at lægge 2 gange uligheden (1) sammen med 3 gange uligheden (2) så får vi det ønskede resultat.