1 Geometriopgave 100

1.1 Løsning

Uden tab af generalitet kan vi sætte $a = 1$.

Vi indfører et koordinatsystem med origo i punktet A og med x-aksen i retning mod punktet C. Så har punket P koordinaterne $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ og den lille cirkel har radius $r = \frac{1}{4}$.

Tangenten DQ har ligningen $-hx + y = 0$, hvor $h > 1$ er (den endnu ukendte) hældning af linjen DQ. Afstanden fra punktet P til denne linje skal derfor være ilg med radius. Med formlen for afstand fra punkt til linje giver det følgende ligning:

$$\frac{|-hP_x + P_y|}{\sqrt{h^2+1}} = r$$

Vi indsætter nu de kendte tal og det giver:

$$\frac{3}{4}\frac{h-1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{1}{4}$$

Dette omskrives til følgende andengradsligning:

$$4h^2 - 9h + 4 = 0$$

Punktet Q vil have koordinaterne $(\frac{1}{h}, 1)$, og den søgte afstand $|DQ|$ bliver da:

$$|DQ| = \sqrt{\frac{1}{h^2} + 1} = \frac{\sqrt{h^2+1}}{h}$$

Ud fra andengradsligningen får vi

$$h^2 + 1 = \frac{9}{4}h$$

Dermed kan den søgte afstand skrives som:

$$|DQ| = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Ved at dividere andengradsligningen med h får vi

$$4h - 9 + \frac{4}{h} = 0$$

Dermed har vi, at

$$\left(2\sqrt{h} - \frac{2}{\sqrt{h}}\right)^2 = 4h + \frac{4}{h} - 8 = 1$$

Da $h > 1$ har vi altså

$$2\sqrt{h} - \frac{2}{\sqrt{h}} = 1$$

Heri sætter vi nu

$$x = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Det giver følgende nye andengradsligning (efter multiplikation med x):

$$-2x^2 - x + 2 = 0$$

Da vi må have $0 < x < 1$ så er løsningen givet ved:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = x = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$$

Den søgte afstand er da:

$$|DQ| = \frac{3}{8}\left(\sqrt{17} - 1\right)$$

2 Opgave 24

Det oplyses, at

$$\begin{aligned} p + q + r &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ \frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} &= 0 \end{aligned}$$

Vis, at

$$pa^2 + qb^2 + rc^2 = 0$$

2.1 Løsning

Betragt matricen M defineret ved:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Determinanten af denne udregnes til

$$\det(M) = \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 - b^2}{c}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b+c)(b-c)}{a} + \frac{(c+a)(c-a)}{b} + \frac{(a+b)(a-b)}{c} \\
&= \frac{(b+c+a)(b-c)}{a} + \frac{(c+a+b)(c-a)}{b} + \frac{(a+b+c)(a-b)}{c} \\
&\quad -(b-c)-(c-a)-(a-b) \\
&= (a+b+c)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)
\end{aligned}
$$

Der gælder altså, at hvis $a+b+c=0$, så er determinanten nul, og de tre rækker i matricen M er lineært afhængige. Specielt kan den tredje række skrives som en linearkombination af de to første rækker. Heraf følger, at hvis $p+q+r=0$ og $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}=0$, så vil der også gælde, at $pa^2+qb^2+rc^2=0$.

Ovenstående udregning er tilstrækkelig, men den præcise linearkombination kan også findes. Vi ønsker altså at bestemme to tal m og n, således at

$$
\begin{aligned}
a^2 &= m + \frac{n}{a} \\
b^2 &= m + \frac{n}{b} \\
c^2 &= m + \frac{n}{c}
\end{aligned}
$$

Ved at trække de to første ligninger fra hinanden får man

$$a^2 - b^2 = n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = n\frac{b-a}{ab}$$

Heraf følger, at

$$n = -ab(a+b)$$

Under antagelsen $a+b+c=0$ giver det

$$n = abc$$

Herefter finder man, at

$$m = a^2 - bc$$

Denne sidste ligning kan omskrives til en symmetrisk form (igen under antagelse af $a+b+c=0$) ved at erstatte a med $-(b+c)$. Det giver:

$$m = (b+c)^2 - bc = b^2 + c^2 + bc$$

Vi har to forskellige udtryk for m. Ved at lægge dem sammen og dividere med to fås det symmetriske udtryk:

$$m = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Hermed er vi nået frem til følgende ligning:

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(p+q+r)+abc\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right)=pa^2+qb^2+rc^2$$

som gælder blot $a+b+c=0$.

3 Opgave 25

Løs ligningen

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3,$$

hvor a, b og c ikke er 0.

3.1 Løsning

Ved inspektion ses det, at $x=a+b+c$ opfylder ligningen.

Det bemærkes derefter, at ligningen er lineær i x, og dermed er der ikke andre løsninger.

4 Opgave 27

Vis, at hvis $5\leq a\leq 10$, vil

$$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}=1$$

4.1 Løsning

Vi ser først, at

$$\left(2-\sqrt{a-1}\right)^2=a+3-4\sqrt{a-1}$$

og

$$\left(3-\sqrt{a-1}\right)^2=a+8-6\sqrt{a-1}$$

For $5\leq a\leq 10$ vil der gælde, at

$$\begin{aligned}2-\sqrt{a-1} &\leq 0\\ 3-\sqrt{a-1} &\geq 0\end{aligned}$$

Dermed er

$$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}=-(2-\sqrt{a-1})$$

og

$$\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}} = 3-\sqrt{a-1}$$

Heraf følger resultatet.

5 Opgave 28

Skaf rationel nævner i brøken

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$$

5.1 Løsning

Vi benytter følgende identitet:

$$(x+y+z)\Big(xy+xz+yz-(x^2+y^2+z^2)\Big) = 3xyz-(x^3+y^3+z^3)$$

som kan verificeres ved at gange parenteserne ud.

Denne ligning omskrives til:

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{xy+xz+yz-(x^2+y^2+z^2)}{3xyz-(x^3+y^3+z^3)}$$

Heri skal vi nu indsætte $x=\sqrt[3]{9}$, $y=\sqrt[3]{6}$ og $z=\sqrt[3]{4}$. Vi får følgende mellemregninger:

$$\begin{aligned}
xyz &= \sqrt[3]{216} = 6 \\
x^3+y^3+z^3 &= 19 \\
xy &= \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2} \\
xz &= \sqrt[3]{36} \\
yz &= \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3} \\
x^2 &= \sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3} \\
y^2 &= \sqrt[3]{36} \\
z^2 &= \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

Det endelige resultat bliver

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} &= \frac{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{3}-(3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{2})}{18-19} \\
&= \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

6 Opgave 29

Vis, at der for positive tal a og b gælder, at

$$\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right)} = a+b-\sqrt{a^2+b^2}$$

6.1 Løsning

Vi ganger parenteseren i radikanten ud:

$$\begin{aligned}
& 2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right) \\
= \quad & 2\left(a^2+b^2-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+ab\right) \\
= \quad & (a+b)^2+a^2+b^2-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} \\
= \quad & \left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2
\end{aligned}$$

For positive tal gælder at

$$(a+b)^2 > a^2+b^2$$

og dermed

$$a+b > \sqrt{a^2+b^2}$$

Heraf følger det ønskede resultat.

7 Opgave 31

Find samtlige hele positive tal n, for hvilke $n^2+20n+15$ er et kvadrattal.

7.1 Løsning

Vi skal altså finde talpar (m, n) således at

$$n^2+20n+15 = m^2$$

Heraf følger specielt, at $m > n$. Ligningen kan også omskrives til

$$(n+10)^2-85 = m^2$$

Heraf følger tilsvarende, at $m < n+10$.

Nu indfører vi tallet $k = m-n$. Så gælder der, at $0 < k < 10$. Indsættes nu $m = n+k$ i ligningen giver det:

$$n^2+20n+15 = n^2+2nk+k^2$$

Her kan n isoleres:

$$n = \frac{k^2 - 15}{2(10 - k)}$$

For at n skal være et positivt heltal, så skal k være et ulige tal større end 4 og mindre end 10. Det giver mulighederne 5, 7 og 9.

Vi samler resultaterne i følgende tabel

k	n
5	1
7	$\frac{17}{3}$
9	33

Der er således to løsninger: $n = 1$ og $n = 33$.

8 Opgave 33

Bestem mindsteværdien af funktionen $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+10$.

8.1 Løsning

Først substituerer vi $x = y - \frac{5}{2}$. Det giver følgende resultat:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) + 10 \\ &= \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\left(y^2 - \frac{9}{4}\right) + 10 \\ &= y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{169}{16} \end{aligned}$$

Nu foretager vi yderligere en substitution $z = y^2$ og vi får:

$$f(x) = z^2 - \frac{5}{2}z + \left(\frac{13}{4}\right)^2$$

Vi ønsker altså at bestemme mindsteværdien af dette andengradspolynomium for $z \geq 0$. Vi beregner først diskriminanten

$$d = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{13}{4}\right)^2 = -36$$

Så finder vi koordinaterne for toppunktet:

$$\left(\frac{5}{4}, 9\right)$$

Da første-koordinaten netop er positiv, så har vi vist, at mindsteværdien for $f(x)$ er 9.

9 Opgave 36

Lad a og b være reelle tal, og sæt

$$\begin{aligned} p &= a^3 - 3ab^2 \\ q &= b^3 - 3a^2 b \end{aligned}$$

Udtryk $a^2 + b^2$ ved p og q.

9.1 Løsning

Først udregner vi

$$p + q = a^3 + b^3 - 3ab(a + b)$$

og

$$pq = ab\left(10a^2b^2 - 3(a^4 + b^4)\right)$$

Lad nu $z = a^2 + b^2$. Vi vil udtrykke $p + q$ og pq ved z. Først har vi

$$(a + b)^2 = z + 2ab$$

Så får vi

$$\begin{aligned} p + q &= (a + b)^3 - 6ab(a + b) \\ &= (a + b)(z - 4ab) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} pq &= ab(10a^2b^2 - 3(z^2 - 2a^2b^2)) \\ &= -3abz^2 + 16(ab)^3 \end{aligned}$$

Nu udregner vi

$$\begin{aligned} (p + q)^2 &= (z + 2ab)(z - 4ab)^2 \\ &= z^3 - 6abz^2 + 32(ab)^3 \\ &= z^3 + 2pq \end{aligned}$$

Heraf ser vi, at

$$z^3 = p^2 + q^2$$

Altså er løsningen:

$$a^2 + b^2 = \sqrt[3]{p^2 + q^2}$$

10 Opgave 37

Opløs følgende udtryk i faktorer

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$$

10.1 Løsning

Vi ganger parenteserne ud:

$$\begin{aligned}
&= a(b^2+c^2+2bc) + b(c^2+a^2+2ac) + c(a^2+b^2+2ab) - 4abc \\
&= ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) + 2abc \\
&= ab(a+b) + c\left(a(a+c) + b(b+c) + 2ab\right) \\
&= ab(a+b) + c(a+b)(a+b+c) \\
&= (a+b)(ab+ca+cb+c^2) \\
&= (a+b)(a+c)(b+c)
\end{aligned}$$

11 Opgave 38

Løs inden for de reelle tal ligningen

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$$

11.1 Løsning

Vi har $x > 0$. Det ses umiddelbart, at $x = 1$ er en løsning. Antag derfor i det følgende at $x \neq 1$. Tag nu logaritmen på begge sider:

$$\sqrt{x}\log x = x\log\sqrt{x} = \frac{x}{2}\log x$$

Da $x \neq 1$ kan vi dividere med $\log x$ på begge sider:

$$\sqrt{x} = \frac{x}{2}$$

Det omskrives til

$$2 = \sqrt{x}$$

som har løsningen $x = 4$.

12 Opgave 39

Tallene a, b og c er reelle og

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$$

Bestem værdien af tallet

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c)$$

12.1 Løsning

Jeg betragter det mere generelle problem, nemlig at udtrykke tallet

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c)$$

ved hjælp af tallene

$$\begin{aligned} p &= a + b + c \\ q &= a^2 + b^2 + c^2 \\ r &= a^3 + b^3 + c^3 \end{aligned}$$

Det ønskede resultat opnås da ved at sætte $p = q = r$.

Først omskrives den første faktor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc}$$

Der gælder følgende identiteter:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \\ (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + ac + bc)(a + b + c) - 3abc \end{aligned}$$

Med de førhen introducerede betegnelser kan disse relationer skrives som:

$$\begin{aligned} p^2 &= q + 2(ab + ac + bc) \\ p^3 &= r + 3(ab + ac + bc)p - 3abc \end{aligned}$$

Heraf får vi:

$$\begin{aligned} ab + ac + bc &= \frac{1}{2}\left(p^2 - q\right) \\ abc &= \frac{1}{6}\left(p^3 - 3pq + 2r\right) \end{aligned}$$

Vi har hermed det generelle resultat

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=3\frac{p^3-pq}{p^3-3pq+2r}$$

Nu sætter vi $q=p$ og $r=p$. Så reduceres ovenstående til

$$3\frac{p^3-p^2}{p^3-3p^2+2p}=3\frac{p}{p-2}$$

Vi har således vist, at

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=3\frac{a+b+c}{a+b+c-2}$$

13 Opgave 40

Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} x+y &= z \\ x^2+y^2 &= z \\ x^3+y^3 &= z \end{aligned}$$

13.1 Løsning

Vi ser umiddelbart, at $z \geq 0$. Endvidere ser vi, at hvis $z=0$, så er der netop én løsning $(0,0,0)$.

Antag derfor nu, at $z \neq 0$. Så udregner vi

$$z^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=z+2xy$$

og

$$z^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=z(1+3xy)$$

Da $z \neq 0$ kan den sidste ligning forkortes med z. Det giver

$$z^2=1+3xy$$

Isoleres nu xy i de to ovenstående ligninger for z^2 får vi følgende ligning:

$$xy=\frac{z^2-1}{3}=\frac{z^2-z}{2}$$

Det sidste lighedstegn reducerer til følgende andengradsligning

$$z^2-3z+2=0$$

som har løsningerne $z = 1$ og $z = 2$.

Nu undersøger vi først $z = 1$: Det giver $xy = 0$, som sammen med $x+y = 1$ giver to løsninger $(0, 1, 1)$ og $(1, 0, 1)$.

Nu undersøger vi dernæst $z = 2$: Det giver $xy = 1$, som sammen med $x + y = 2$ giver én løsning $(1, 1, 2)$.

I alt er der fundet fire forskellige løsninger.

14 Opgave 42

Løs (uden hjælpemidler) ligningen

$$x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

14.1 Løsning

Vi ser ved indsættelse, at $x = -1$ er en løsning. Polynomiers division giver da følgende ligning:

$$x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 2x + 1 = 0$$

På grund af symmetrien i koefficienterne, så ser vi straks, at hvis x er en løsning, da er også $\frac{1}{x}$ en løsning. Derfor dividerer vi med x^3 så det giver:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4 = 0$$

Vi laver nu substitutionen

$$t = x + \frac{1}{x}$$

og udregner

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

og

$$t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Dermed kan ligningen reduceres til

$$t^3 - 3t + 2t^2 = 0$$

Da $t \neq 0$ så kan vi dividere med t:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

Løsningerne er $t = 1$ og $t = -3$.

Vi undersøger de to mulige værdier af t hver for sig. Substitutionen for t omskrives til:

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

Hvis $t = 1$ så giver det

$$x^2 - x + 1 = 0$$

som ikke har nogen reelle løsninger. Dernæst hvis $t = -3$ så har vi

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

Her er løsningerne

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vi har således fundet i alt tre reelle løsninger.