Elliptiske funktioner

Michael Jørgensen

August 2015

Lad der være givet to komplekse tal ω_1 og ω_2, som antages at være R-lineært uafhængige af hinanden. Vi definerer nu et gitter L bestående af heltallige linearkombinationer af ω_1 og ω_2:

$$L = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in Z\} \tag{1}$$

Vi indfører nu Weierstrass' P-funktion ved følgende definition:

$$P(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad u \notin L \tag{2}$$

I det følgende vil vi undersøge egenskaberne af denne funktion.

1 Indledende observationer

Sætning 1.1. *Funktionen $P(u)$ har følgende elementære egenskaber:*

1. *Funktionen $P(u)$ er analytisk for alle $u \notin L$.*
2. *Funktionen $P(u)$ er lige, dvs. $P(u) = P(-u)$.*
3. *Funktionen $P(u)$ er dobbelt periodisk med perioderne ω_1 og ω_2, dvs. $P(u) = P(u + \omega_1) = P(u + \omega_2)$.*

Bevis. 1. Følger direkte af definitionen.

2. Følger af, at gitteret L er symmetrisk omkring $\omega = 0$.

3. Da funktionen er analytisk, så giver ledvis differentiation:

$$P'(u) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(u-\omega)^3}, \quad u \notin L \tag{3}$$

Heraf ses, at $P'(u)$ er periodisk over hele gitteret, dvs

$$P'(u+w) = P'(u), \quad \text{for alle } \omega \in L \tag{4}$$

Ved integration og benyttelse af, at $P(u)$ er lige, så fåes at også $P(u)$ selv er periodisk.

□

2 Taylor

Vi kan danne en potensudvikling af $P(u)$ omkring $u = 0$ ved at benytte:

$$\frac{1}{(u-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{u}{\omega}\right)^n \tag{5}$$

Indsættes dette i definitionen fåes følgende resultat:

Sætning 2.1. *Funktionen P(u) har følgende rækkeudvikling:*

$$P(u) = \frac{1}{u^2} + \alpha_2 u^2 + \alpha_4 u^4 + \cdots, \tag{6}$$

hvor

$$\alpha_n = (n+1) \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^{n+2}}, \quad n > 0,\ n \text{ lige} \tag{7}$$

Bevis. Følger af ovenstående. □

3 Differentialligning

Vi kan nu vise følgende hovedresultat:

Sætning 3.1. $P(u)$ *opfylder følgende simple differentialligning:*

$$[P'(u)]^2 - 4\,[P(u)]^3 + 20\,\alpha_2 P(u) + 28\,\alpha_4 = 0, \tag{8}$$

hvor α_2 *og* α_4 *er defineret oven for.*

Bevis. Vi definerer

$$G(u) = [P'(u)]^2 - 4\,[P(u)]^3 + 20\,\alpha_2 P(u) + 28\,\alpha_4. \tag{9}$$

Ved at benytte rækkeudviklingen for $P(u)$ kan vi finde følgende resultat for $G(u)$:

$$G(u) \to 0 \text{ for } u \to 0.$$

Dermed er $G(u)$ uden poler, og da $G(u)$ endvidere er dobbeltperiodisk, så må den være konstant, altså

$$G(u) = 0, \quad \text{for alle } u.$$

□

4 Additionsformel

Vi vil nu vise følgende additionsformel:

Sætning 4.1.

$$P(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{P'(u) - P'(v)}{P(u) - P(v)}\right)^2 - P(u) - P(v) \tag{10}$$

Bevis. Vi definerer funktionen $F(u)$ ved:

$$F(u) = P'(u) - A \cdot P(u) - B, \tag{11}$$

hvor A og B er komplekse konstanter. Denne funktion er dobbelt-periodisk med en enkelt pol af tredie orden i $u = 0$. Heraf følger, at $F(u)$ har tre (muligvis sammenfaldende) nulpunkter, hvis sum er nul. Kald de tre nulpunkter for u_1, u_2 og u_3. Så haves altså:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

samt

$$P'(u_i) = A \cdot P(u_i) + B, \quad i = 1, 2, 3 \tag{12}$$

Indsættes nu denne sidste formel i differentialligningen, og sættes $x = P(u_i)$, så giver det:

$$x^3 - \frac{1}{4}A^2x^2 - \frac{1}{4}(20\alpha_2 + 2AB)x - \frac{1}{4}(28\alpha_4 + B^2) = 0$$

Summen af rødderne i dette tredjegradspolynomium er givet ud fra koefficienten til x^2. Derfor har vi:

$$P(u_1) + P(u_2) + P(u_3) = \frac{1}{4}A^2. \tag{13}$$

Konstanten A bestemmes ud fra (12) til

$$A = \frac{P'(u_2) - P'(u_1)}{P(u_2) - P(u_1)}$$

Og fra (4) har vi

$$P(u_3) = P(-u_1 - u_2) = P(u_1 + u_2)$$

Disse to resultater indsættes i (13) og resultatet følger heraf. □

Sætning 4.2.

$$P(2u) = \frac{1}{4}\left(\frac{P''(u)}{P'(u)}\right)^2 - 2P(u) \tag{14}$$

Bevis. Dette følger direkte af grænseovergangen $v \to u$. □

5 Halve perioder

Idet vi definerer $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ så gælder der:

Sætning 5.1.

$$P'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = P'\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = P'\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = 0$$

Bevis. Dette følder af, at $P'(u)$ er en ulige funktion. □

Sætning 5.2. *Værdierne $P(\frac{\omega_1}{2})$, $P(\frac{\omega_2}{2})$ og $P(\frac{\omega_3}{2})$ er alle nulpunkter til polynomiet*

$$4\,x^3 - 20\,\alpha_2\,x - 28\,\alpha_4 = 0$$

Specielt gælder der, at

$$P\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + P\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + P\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = 0$$

Bevis. Dette følger af ligning (8). □

6 Omvendt funktion

I det følgende specialiserer vi til, at ω_1 er reel og ω_2 er rent imaginær. Vi ønsker nu at invertere ligning (2). Specielt ønsker vi ud fra kendskab til $P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $P\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ og $P\left(\frac{\omega_3}{2}\right)$ at bestemme ω_1 og ω_2, hvor vi stadigvæk har, at $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Idet vi definerer funktionen

$$I(a,b)=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}, \tag{15}$$

samt konstanterne

$$a = \sqrt{P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)-P\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} \tag{16}$$

$$b = \sqrt{P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)-P\left(\frac{\omega_3}{2}\right)} \tag{17}$$

$$c = \sqrt{P\left(\frac{\omega_3}{2}\right)-P\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} \tag{18}$$

så vil vi bevise følgende resultat:

Sætning 6.1. *Hvis ω_1 er reel og ω_2 er rent imaginær, så er a, b og c alle reelle. Endvidere er*

$$\omega_1 = 2I(a,b) \tag{19}$$

$$\omega_2 = 2iI(a,c) \tag{20}$$

$$\omega_3 = 2iI(b,ic) \tag{21}$$

Bevis. Først skal man vise, at $P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $P\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ og $P\left(\frac{\omega_3}{2}\right)$ alle er reelle. Dernæst skal man vise, at

$$P\left(\frac{\omega_2}{2}\right) < P\left(\frac{\omega_3}{2}\right) < P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$$

. Så kan man benytte differentialligningen til at vise, at

$$\omega_1 = 2\int_{P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-20\alpha_2 x-28\alpha_4}}$$

Til sidst indføres substitutionen $x = P\left(\frac{\omega_1}{2}\right)+t^2$.

□