

1 Opgave 2a

Bevis følgende ulighed:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

hvor a og b er ikke-negative reelle tal.

1.1 Løsning

Vi benytter først den aritmetiske-geometriske ulighed på tallene a^3 , a^3 og b^3 til at få:

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 a^3 b^3}$$

Dette reducerer til

$$\frac{2a^3 + b^3}{3} \geq a^2 b$$

Ved at ombytte a og b og lægge til, så giver det

$$a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2$$

hvilket er det ønskede.

2 Opgave 2b

Bevis følgende ulighed:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2abc(a + b + c) \geq (ab + ac + bc)(a^2 + b^2 + c^2)$$

hvor a , b og c alle er vilkårlige reelle tal.

2.1 Løsning

Vi omskriver højresiden:

$$(ab + ac + bc)(a^2 + b^2 + c^2) = ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) + abc(a + b + c)$$

Idet vi flytter alle led over på venstresiden, så kan uligheden skrives som:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - ab(a^2 + b^2) - ac(a^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2) \geq 0$$

Vi laver nu følgende omskrivninger af venstresiden i denne ulighed:

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - ab(a^2 + b^2) - ac(a^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2) \\ = & a^4 + a^2 bc - a^3 b - a^3 c + b^4 + b^2 ac - b^3 a - b^3 c + c^4 + c^2 ab - c^3 a - c^3 b \\ = & a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - a)(b - c) + c^2(c - a)(c - b) \\ = & (a - b)(a^2(a - c) - b^2(b - c)) + c^2(a - c)(b - c) \end{aligned}$$

Vi skal nu vise at dette udtryk aldrig kan være negativt. Da udtrykket er symmetrisk ved permutation af de tre variabler, så kan vi uden tab af generalitet antage, at $a \geq b \geq c$. Med denne antagelse er det tydeligt, at begge led er ikke-negative, og vi har vist det ønskede.

3 Opgave 2c

Bevis følgende ulighed:

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ac}{a+2b+c} + \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

hvor a , b og c er ikke-negative reelle tal.

3.1 Løsning

Ved at gange uligheden med $4(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$ og flytte alle led over på højresiden, så får vi følgende ækvivalente ulighed:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 2abc(a+b+c) + ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) - 6a^2b^2 - 6a^2c^2 - 6b^2c^2 \geq 0$$

Vi vil nu vise, at denne ulighed er sand.

Fra opgave 2b har vi vist, at

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) - ab(a^2 + b^2) - ac(a^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2) \geq 0 \quad (1)$$

Endvidere er det tydeligt, at

$$ab(a-b)^2 + ac(a-c)^2 + bc(b-c)^2 \geq 0$$

hvilket kan omskrives til

$$ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \geq 0 \quad (2)$$

Ved nu at lægge 2 gange uligheden (1) sammen med 3 gange uligheden (2) så får vi det ønskede resultat.