

Alle opgaverne i dette dokument er omskrivninger af resultater fra dokumentet <https://www.tjhsst.edu/~2010bhamrick/files/dumbassing.pdf>

## 1 Opgave 2a

Bevis følgende ulighed:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

hvor  $a$  og  $b$  er ikke-negative reelle tal.

### 1.1 Løsning

Vi benytter først den aritmetiske-geometriske ulighed på tallene  $a^3$ ,  $a^3$  og  $b^3$  til at få:

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 a^3 b^3}$$

Dette reducerer til

$$\frac{2a^3 + b^3}{3} \geq a^2 b$$

Ved at ombytte  $a$  og  $b$  og lægge til, så giver det

$$a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2$$

hvilket er det ønskede.

## 2 Opgave 2b

Bevis følgende ulighed:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$$

hvor  $a$ ,  $b$  og  $c$  er ikke-negative reelle tal.

### 2.1 Løsning

Vi trækker højresiden fra venstresiden, så vi i stedet for skal vise

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 0$$

Nu udnytter vi følgende identitet:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$$

til at omskrive venstresiden i uligheden:

$$\begin{aligned}
& 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \\
= & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(a + c) - c^2(a + b) \\
= & a(a^2 - a(b + c) + bc) + b(b^2 - b(a + c) + ac) + c(c^2 - c(a + b) + ab) \\
= & a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \\
= & (a - b)(a(a - c) - b(b - c)) + c(a - c)(b - c)
\end{aligned}$$

Vi skal nu vise at dette udtryk aldrig kan være negativt. Da udtrykket er symmetrisk ved permutation af de tre variabler, så kan vi uden tab af generalitet antage, at  $a \geq b \geq c$ . Med denne antagelse er det tydeligt, at begge led er ikke-negative, og vi har vist det ønskede. Dette er et specialtilfælde af Schur's inequality.

## 3 Opgave 2c

Bevis følgende ulighed:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2abc(a + b + c) \geq (ab + ac + bc)(a^2 + b^2 + c^2)$$

hvor  $a$ ,  $b$  og  $c$  alle er vilkårlige reelle tal.

### 3.1 Løsning

Vi omskriver højresiden:

$$(ab + ac + bc)(a^2 + b^2 + c^2) = ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) + abc(a + b + c)$$

Idet vi flytter alle led over på venstresiden, så kan uligheden skrives som:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - ab(a^2 + b^2) - ac(a^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2) \geq 0$$

Vi laver nu følgende omskrivninger af venstresiden i denne ulighed:

$$\begin{aligned}
& a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - ab(a^2 + b^2) - ac(a^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2) \\
= & a^4 + a^2bc - a^3b - a^3c + b^4 + b^2ac - b^3a - b^3c + c^4 + c^2ab - c^3a - c^3b \\
= & a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - a)(b - c) + c^2(c - a)(c - b) \\
= & (a - b)(a^2(a - c) - b^2(b - c)) + c^2(a - c)(b - c)
\end{aligned}$$

Vi skal nu vise at dette udtryk aldrig kan være negativt. Da udtrykket er symmetrisk ved permutation af de tre variabler, så kan vi uden tab af generalitet antage, at  $a \geq b \geq c$ . Med denne antagelse er det tydeligt, at begge led er ikke-negative, og vi har vist det ønskede. Dette er et specialtilfælde af Schur's inequality.

## 4 Opgave 2d

Bevis følgende ulighed:

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ac}{a+2b+c} + \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

hvor  $a$ ,  $b$  og  $c$  er ikke-negative reelle tal.

### 4.1 Løsning

Ved at gange uligheden med  $4(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$  og flytte alle led over på højresiden, så får vi følgende ækvivalente ulighed:

$$0 \leq (2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)(a+b+c) - 4bc(a+2b+c)(a+b+2c) \\ - 4ac(2a+b+c)(a+b+2c) - 4ab(2a+b+c)(a+2b+c)$$

Vi vil nu vise, at højresiden i denne ulighed er ikke-negativ. Højresiden ganges ud og kan – efter en del mellemregninger – skrives som

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 2abc(a+b+c) \\ + ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) - 6a^2b^2 - 6a^2c^2 - 6b^2c^2$$

Fra opgave 2c har vi vist, at

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) - ab(a^2 + b^2) - ac(a^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2) \geq 0 \quad (1)$$

Endvidere er det tydeligt, at

$$ab(a-b)^2 + ac(a-c)^2 + bc(b-c)^2 \geq 0$$

hvilket kan omskrives til

$$ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \geq 0 \quad (2)$$

Ved nu at lægge 2 gange uligheden (1) sammen med 3 gange uligheden (2) så får vi det ønskede resultat.