M05M11084

最优化理论、算法与应用

3精确一维搜索方法

M05M11084

3 一维优化精确方法

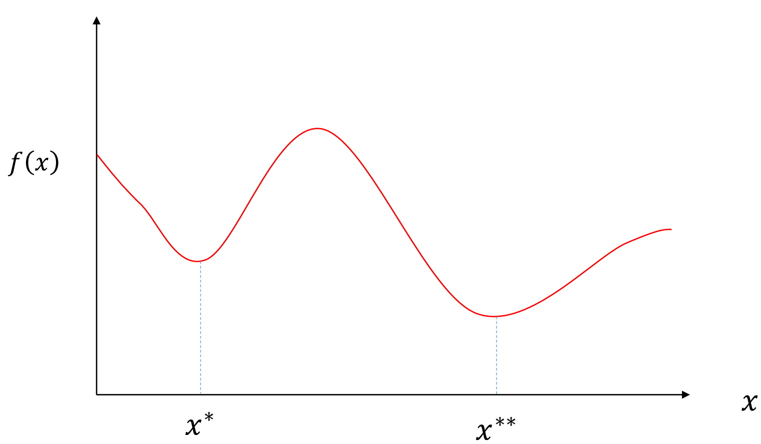
参考：

1. 应用最优化方法及MATLAB实现，刘兴高，第3章
2. 最优化导论，Edwin K.P., Chong著，孙志强等译，第7章

1. 引言
2. 区间消去法（搜索法）
3. 逼近方法
4. 划界法

一维无约束优化问题

$f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ $\min f(x)$



二维无约束优化问题

$f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R} \qquad \min_{x \in \mathcal{R}^2} f(x)$

问题：给定曲面上一点x^k，一个方向d^k，求步长α

得到新的一点 $x^k + \alpha d^k$

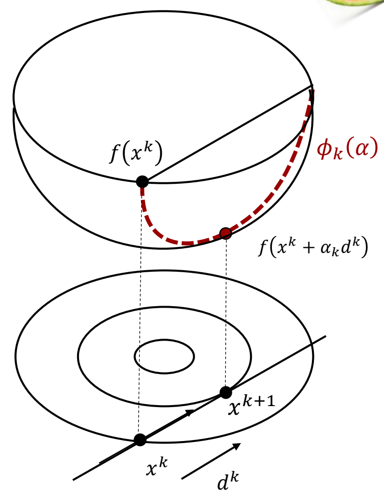
当步长α变化时，构成曲面上一条曲线

$$\phi_k(\alpha) \triangleq f(x^k + \alpha d^k)$$

求这条曲线上使$\phi_k(\alpha)$到达最小的那个步长

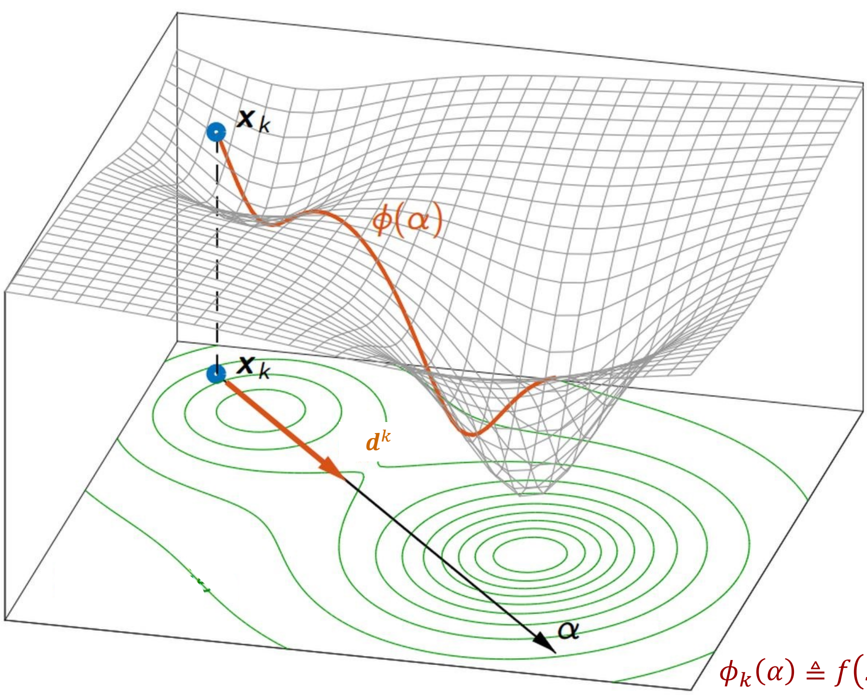
$$\alpha_k = \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}}\, \phi_k(\alpha)$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

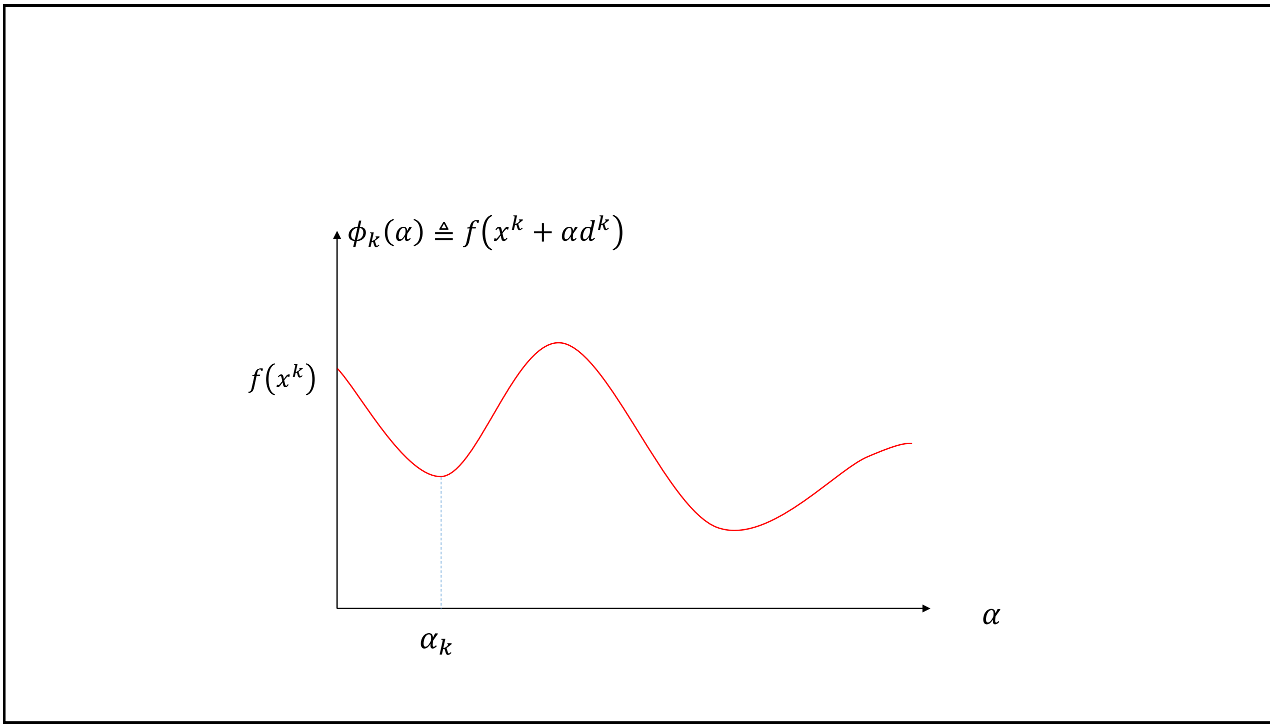


即，从曲面上点x^k出发，沿着d^k方向，走步长α_k，得到函数下降量最大的点x^{k+1}

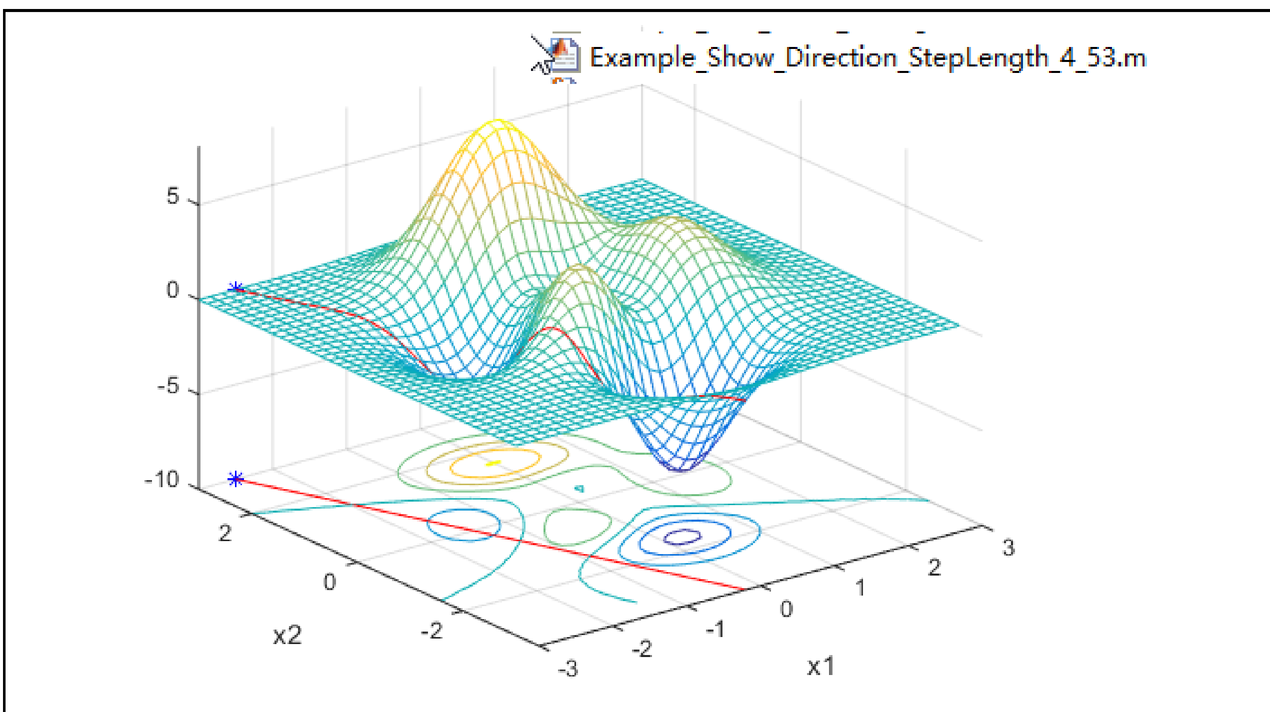
$$f(x^{k+1}) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha d^k)$$



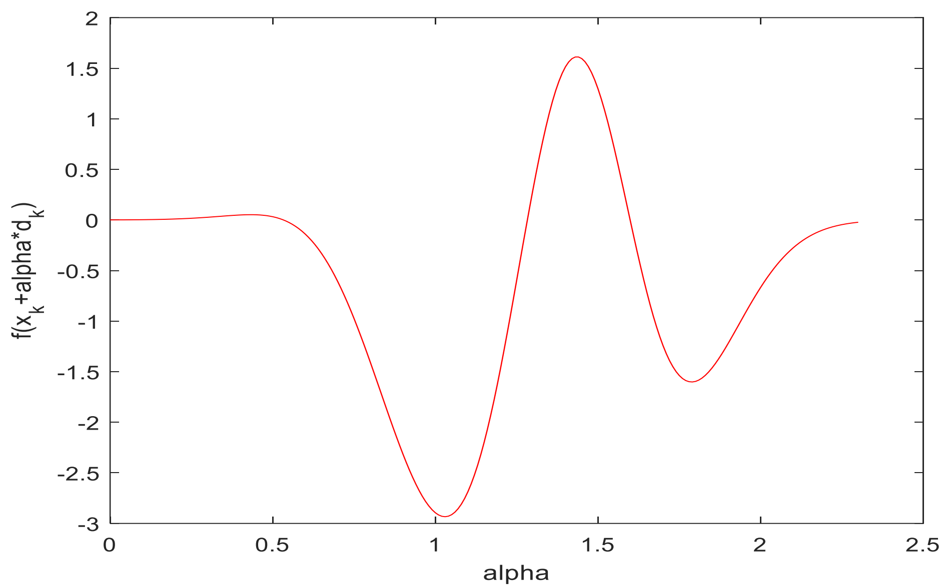
$$\phi_k(\alpha) \triangleq f(\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d}^k)$$



$\phi_k(\alpha) \triangleq f\left(x^k + \alpha d^k\right)$
$f(x^k)$
α_k
α



Example_Show_Direction_StepLength_4_53.m
5
0
-5
-10
2
0
-2
x2
-3
-2
-1
0
1
2
3
x1



扩展到n维函数

n维变量的函数 $f:\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} \quad \min_{x\in\mathcal{R}^n} f(\boldsymbol{x})$

给定：曲面上一点x^k，一个方向d^k，步长α

一维搜索

得到新的一点 $x^k + \alpha d^k$

当步长α变化时，构成曲面上一条曲线 $\phi_k(\alpha) \triangleq f\left(x^k + \alpha d^k\right)$

求这条曲线上使到达最小的那个步长 $\alpha_k = \underset{\alpha>0}{\operatorname{argmin}}\, \phi_k(\alpha)$

$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$

从曲面上点x^k出发，沿着d^k方向，走步长α_k，得到函数下降最大的一个点x^{k+1}

$$f\left(x^{k+1}\right) = \min_{\alpha>0} f\left(x^k + \alpha d^k\right)$$

精确一维优化问题描述

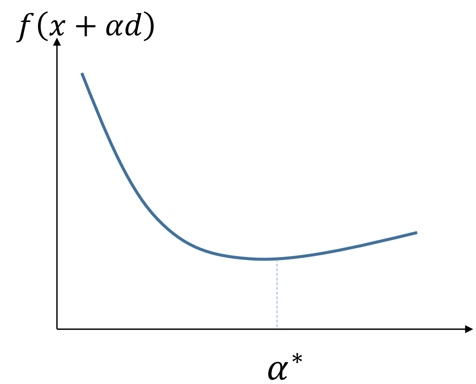
已知目标函数$f:\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$，求从点$x$出发、沿着下降方向$d$的最佳步长$\alpha^*$，使得$f(x+\alpha^* d)$取极小值

等价于：一维无约束优化问题

$$\min_{\alpha} f(x+\alpha d)$$

$$\alpha^* = \operatorname*{argmin}_{\alpha} f(x+\alpha d)$$

$$\phi(\alpha) = f(x+\alpha d)$$



怎么求解？

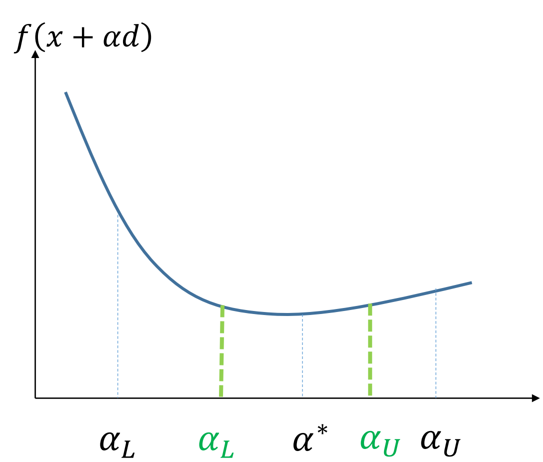
- 精确一维优化法
  - 区间消去法
    - 对分搜索法
    - 等间隔搜索法
    - 对称区间搜索法
      - Fibonacci法
      - 黄金分割法
  - 逼近方法
    - 曲线插值法
      - 二次逼近法
      - 三次逼近法
    - 牛顿法
    - 割线法
  - 划界法

区间消去法的基本思想

不定区间：含α^*的单峰区间$[\alpha_L \quad \alpha_U]$

单峰函数：$\phi(\alpha) = f(x + \alpha d)$，$\alpha \in [\alpha_L \quad \alpha_U]$

- 不断缩减不定区间的长度
  直至小于指定的精度
- 取其中点近似为极小点，即最佳步长α^*



区间消去的实现

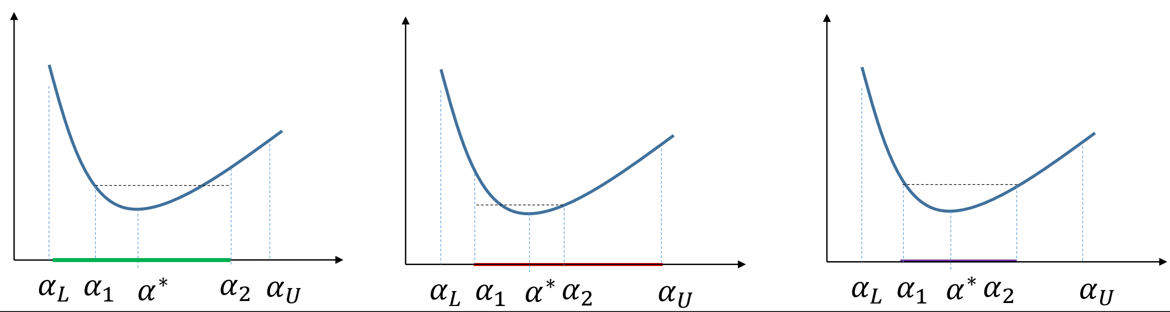
选取两个试探点$\alpha_1,\alpha_2 \in [\alpha_L \quad \alpha_U]$，$\alpha_1 < \alpha_2$，$[\alpha_L \quad \alpha_U]$是不定区间

根据单峰函数的性质

①若$f(x+\alpha_1 d) < f(x+\alpha_2 d)$，则$\alpha^* \in [\alpha_L \quad \alpha_2]$

②若$f(x+\alpha_1 d) > f(x+\alpha_2 d)$，则$\alpha^* \in [\alpha_1 \quad \alpha_U]$

③若$f(x+\alpha_1 d) = f(x+\alpha_2 d)$，则$\alpha^* \in [\alpha_1 \quad \alpha_2]$



区间消去的效率指标

① 不定区间的缩减率

$$\tau^k = \frac{\alpha_U^{k+1} - \alpha_L^{k+1}}{\alpha_U^k - \alpha_L^k}$$

$[\alpha_L \quad \alpha_U]$经过$k$次缩减后的不定区间为$[\alpha_L^k \quad \alpha_U^k]$

小

② 函数估计值次数

缩减一次不定区间所需计算目标函数值得次数

少

效率高

区间消去算法

Given $[\alpha_L^0 \quad \alpha_U^0]$，tolerance $tol > 0$，$k \leftarrow 0$;
while $|\alpha_U^k - \alpha_L^k| > tol$;
　Choose α_1, α_2:　$\alpha_L^k < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_U^k$
　Compute　$\phi_1 = \phi(\alpha_1), \phi_2 = \phi(\alpha_2)$
　If $\phi_1 < \phi_2$　$[\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}] = [\alpha_L^k \quad \alpha_2]$
　　else if $\phi_1 > \phi_2$　$[\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}] = [\alpha_1 \quad \alpha_U^k]$
　　else　$[\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}] = [\alpha_1 \quad \alpha_2]$
　end(if)
　$k \leftarrow k + 1$;
end (while)

$$a^* = \frac{1}{2}(\alpha_U^k + \alpha_L^k)$$

如何确定 α_1, α_2？

多种方法

- 对分搜索法
- 等间隔搜索法
- 对称区间搜索法
  - Fibonacci法
  - 黄金分割法

1. 引言
2. 区间消去法（搜索法）
    2.1 对分搜索法
    2.2 等间隔搜索法
    2.3 对称区间搜索法
    - Fibonacci法
    - 黄金分割法
3. 逼近方法
4. 划界法

2.1 对分搜索法

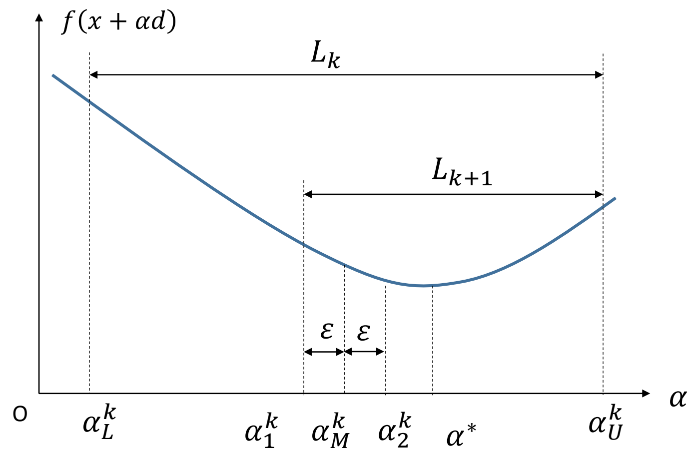
设初始不定区间$[\alpha_L \quad \alpha_U]$经过$k$次搜索缩减为$[\alpha_L^k \quad \alpha_U^k]$

中点：$\alpha_M^k = \frac{1}{2}\left(\alpha_L^k + \alpha_U^k\right)$

对α_M^k做微小的扰动 $\pm\varepsilon, \varepsilon > 0$

得到关于中点对称的两个试探步长：

$$\begin{cases} \alpha_1^k = \alpha_M^k - \varepsilon \\ \alpha_2^k = \alpha_M^k + \varepsilon \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha_1^k = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_L^k + \alpha_U^k\right) - \varepsilon \\ \alpha_2^k = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_L^k + \alpha_U^k\right) + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{比较} f\left(x + \alpha_1^k d\right) \text{和} f\left(x + \alpha_2^k d\right)$$

$[\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}]$

当不定区间长度小于指定精度 tol 时，

$\alpha^* =$ 中点

$$L_k = \alpha_U^k - \alpha_L^k$$

$$L_{k+1} = \alpha_U^{k+1} - \alpha_L^{k+1} = \frac{1}{2}L_k + \varepsilon$$

$$L_{k+1} = \frac{1}{2}L_k + \varepsilon$$

$$L_{k+1} = \frac{1}{2}L_k + \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L_{k-1} + \varepsilon\right) + \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2^2}L_{k-1} + \left(\frac{1}{2} + 1\right)\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}L_{k-2} + \varepsilon\right) + \left(\frac{1}{2} + 1\right)\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2^3}L_{k-2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\right)\varepsilon$$

$$\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}L_0 + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\right)\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}L_0 + \left(2 - \frac{1}{2^k}\right)\varepsilon \qquad < \frac{1}{2^{k+1}}L_0 + 2\varepsilon$$

$$S = \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$S = 2 - \frac{1}{2^k}$$

$$L_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}L_0 + 2\varepsilon$$

如果要求 $L_{k+1} < tol$，可由 $\frac{1}{2^{k+1}}L_0 + 2\varepsilon < tol$

$$\frac{L_0}{tol - 2\varepsilon} < 2^{k+1}$$

$$\ln\frac{L_0}{tol - 2\varepsilon} < (k+1)\ln 2$$

$$\ln\frac{L_0}{tol - 2\varepsilon} < (k+1)\ln 2$$

$$k + 1 > \frac{\ln L_0 - \ln(tol - 2\varepsilon)}{\ln 2}$$

$$k > 1.443(\ln L_0 - \ln(tol - 2\varepsilon)) - 1$$

$$tol > 2\varepsilon$$

$$\varepsilon = 0.1tol$$

算法的效率与难点

① 不定区间的缩减率略大于0.5，为

$$\tau^k = \frac{\alpha_U^{k+1} - \alpha_L^{k+1}}{\alpha_U^k - \alpha_L^k} = \frac{0.5\left(\alpha_U^k - \alpha_L^k\right) + \varepsilon}{\alpha_U^k - \alpha_L^k} = \frac{0.5L_k + \varepsilon}{L_k}$$

②函数值估计次数为2

对分搜索法的实现难点：$tol > 2\varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon < 0.5tol$

一般取：$\varepsilon = 0.1tol$

对分搜索算法

Given x、d、f，$[\alpha_L^0 \quad \alpha_U^0]$，tolerance $tol > 0$，$k \leftarrow 0$;

while $|\alpha_U^k - \alpha_L^k| > tol$;

Compute： $\alpha_M = \frac{1}{2}\left(\alpha_L^k + \alpha_U^k\right)$ $\quad \begin{cases} \alpha_1^k = \alpha_M - \varepsilon & f_1 = f\left(x + \alpha_1^k d\right) \\ \alpha_2^k = \alpha_M + \varepsilon & f_2 = f\left(x + \alpha_2^k d\right) \end{cases}$

If $f_1 < f_2$ $\quad [\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}] = [\alpha_L^k \quad \alpha_2]$

elseif $f_1 > f_2$ $\quad [\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}] = [\alpha_1 \quad \alpha_U^k]$

else $\quad [\alpha_L^{k+1} \quad \alpha_U^{k+1}] = [\alpha_1 \quad \alpha_2]$

end(if)

$k \leftarrow k + 1$;

end (while)

$$a^* = \frac{1}{2}\left(\alpha_U^k + \alpha_L^k\right)$$

Dichotomous_search.m

实例测试

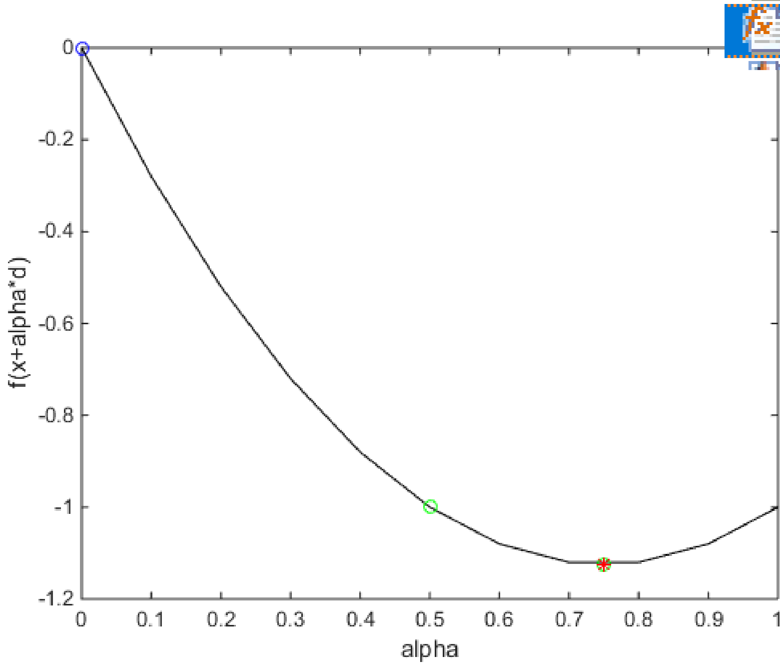
例3.1 已知函数$f(x)=2x^2-x-1$在当前点$x=-0.5$处的一个下降方向$d=1$和不定区间$\alpha^*\in[0\quad 1]$，用对分搜索法获取最佳步长（取$tol=1\times10^{-4}$）。

解：函数$f(x)$是凸函数，且$f(0.25)=-1.125$。

alpha_star =0.7500
x_next =0.2500
f_next =-1.1250
k =2

example_3_1_CH03.m

$\phi(\alpha)=f(-0.5+\alpha)$



example_3_1_CH03.m

例3.2 已知函数$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$在当前点$x^0 = (2,2)$处的一个下降方向$d = (-1,-1)$和不定区间$\alpha^* \in [0 \quad 2]$，用对分搜索法获取最佳步长（取$tol = 1 \times 10^{-6}$）。

解：函数$f(\boldsymbol{x})$是凸函数，且$f(0,0) = -1$。

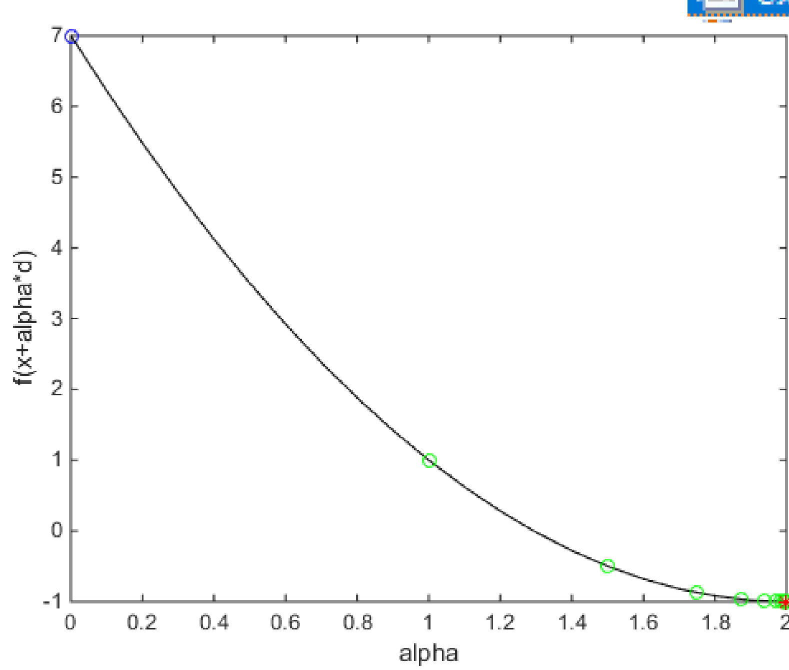
alpha_star =2.0000
x_next =1.0e-06 *[0.4778   0.4778]
f_next =-1.0000
k =21

example_3_2_CH03.m

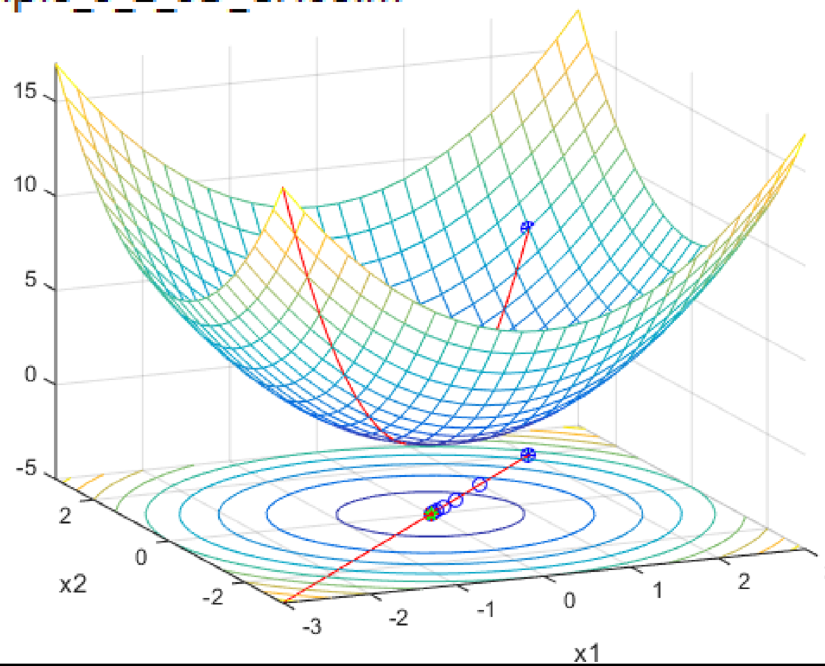
当tol的值由大变小时，数值解趋于解析解

$$\phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d) = (2-\alpha)^2 + (2-\alpha)^2 - 1$$

example_3_2_CH03.m



example_3_2_3D_CH03.m

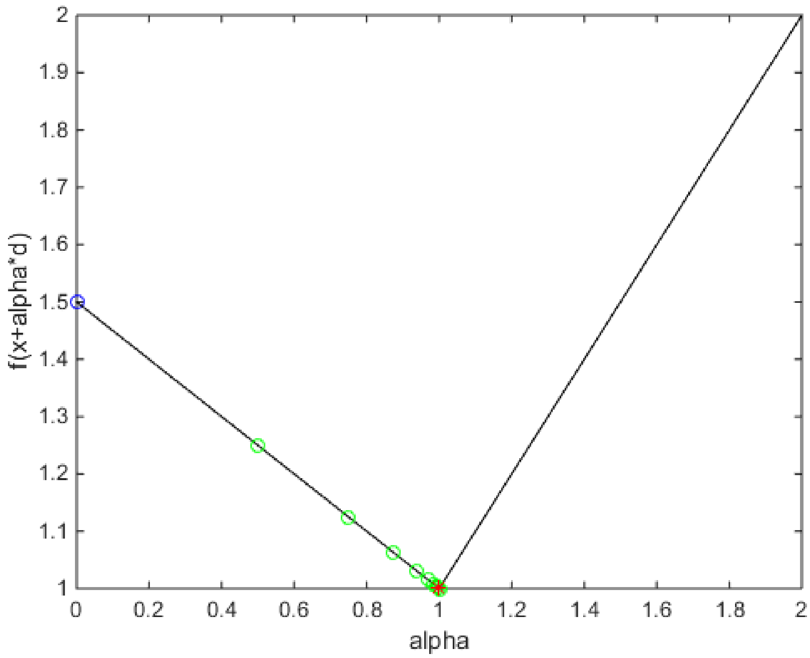


例3.3 已知函数$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}-x+3 & x\le 2\\ \frac{1}{2}x & x>2\end{cases}$在当前点$x=3$处的一个下降方向$d=-1$和不定区间$\alpha^*\in[0\quad 2]$，用对分搜索法获取最佳步长（取$tol=1\times10^{-4}$）。

解：函数$f(x)$是凸函数，且$f(2)=1$。

```
alpha_star =3.0519e-05
x_next =2.0000
f_next =1.0000
k =15
```

example_3_3_CH03.m



1. 引言
2. 区间消去法（搜索法）
   - 2.1 对分搜索法
   - **2.2 等间隔搜索法**
   - 2.3 对称区间搜索法
     - Fibonacci法
     - 黄金分割法
3. 逼近方法
4. 划界法

等间隔搜索的基本思想

将不定区间$[\alpha_L \quad \alpha_U]$ N等分，得到$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$，找出函数值最小点的$\alpha_M$，

则子区间$[\alpha_{M-1} \quad \alpha_{M+1}]$是包含最佳步长$\alpha^*$的单谷区间；

以此作为新的不定区间再进行N等分，……

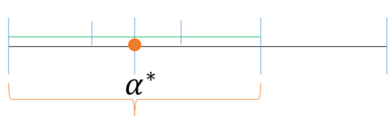
N	不定区间的缩减率	函数值估计次数
3	2/3 小	2 少
4	1/2 中	2 少
5	2/5 大	4 多

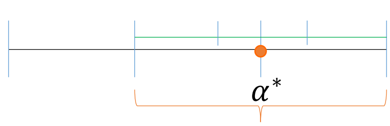
当$N = 4$时，就是三点等间隔搜索法

- 不定区间的缩减率为1/2
- 函数值估计次数2

效率最高

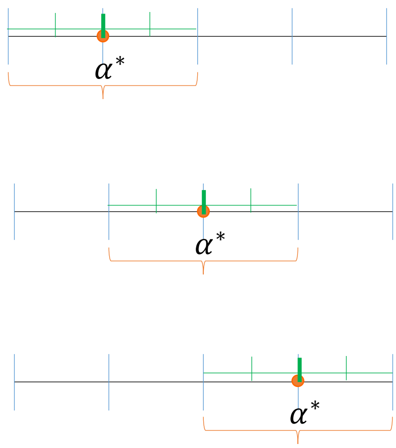
二点等间隔搜索法





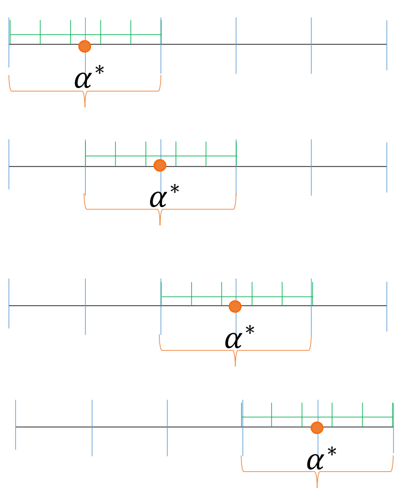
N	不定区间的缩减率	函数值估计次数
3	2/3	2

三点等间隔搜索法

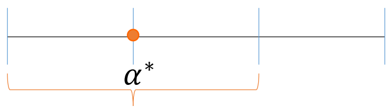


N	不定区间的缩减率	函数值估计次数
4	1/2	2

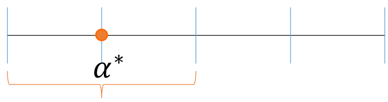
四点等间隔搜索法



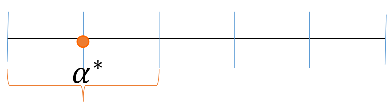
N	不定区间的缩减率	函数值估计次数
5	2/5	4



二点等间隔搜索法



三点等间隔搜索法



四点等间隔搜索法

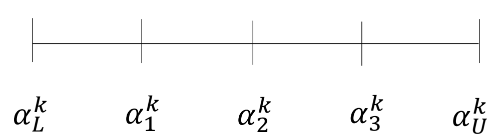
N	不定区间的缩减率	函数值估计次数
3	2/3	2
4	1/2	2
5	2/5	4

三点等间隔搜索法的详述

初始不定区间$[\alpha_L \quad \alpha_U]$经过$k$次搜索缩减为$[\alpha_L^k \quad \alpha_U^k]$，$L_k = \alpha_U^k - \alpha_L^k$

$$\begin{cases} \alpha_1^k = \alpha_L^k + \dfrac{1}{4} L_k \\ \alpha_2^k = \alpha_L^k + \dfrac{1}{2} L_k \\ \alpha_3^k = \alpha_L^k + \dfrac{3}{4} L_k \end{cases}$$

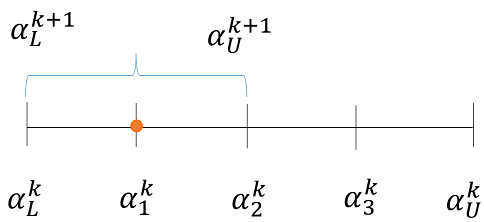
$$M = \underset{i=1,2,3}{\operatorname{argmin}} \{ i : f(x + \alpha_i^k d) \}$$

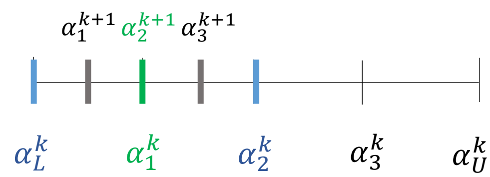


M	α_L^{k+1}	α_U^{k+1}	α_2^{k+1}	$f(x+\alpha_2^{k+1}d)$
1	α_L^k	α_2^k	α_1^k	$f(x+\alpha_1^k d)$
2	α_1^k	α_3^k	α_2^k	$f(x+\alpha_2^k d)$
3	α_2^k	α_U^k	α_3^k	$f(x+\alpha_3^k d)$

$$L_{k+1}=\frac{1}{2}L_k$$

继承第k次的结果
减少计算量

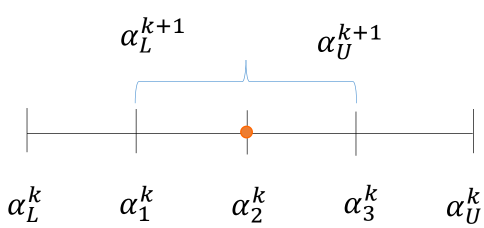


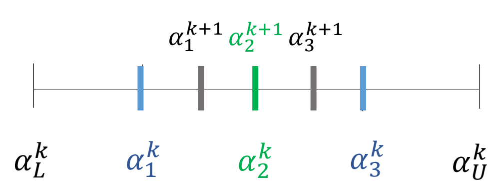


M	α_L^{k+1}	α_U^{k+1}	α_2^{k+1}	$f(x+\alpha_2^{k+1}d)$
1	α_L^k	α_2^k	α_1^k	$f(x+\alpha_1^k d)$
2	α_1^k	α_3^k	α_2^k	$f(x+\alpha_2^k d)$
3	α_2^k	α_U^k	α_3^k	$f(x+\alpha_3^k d)$

$$L_{k+1}=\frac{1}{2}L_k$$

继承第k次的结果
减少计算量

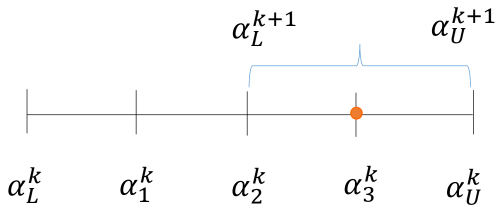


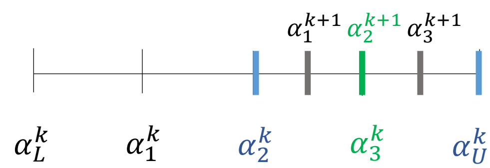


M	α_L^{k+1}	α_U^{k+1}	α_2^{k+1}	$f(x+\alpha_2^{k+1}d)$
1	α_L^k	α_2^k	α_1^k	$f(x+\alpha_1^k d)$
2	α_1^k	α_3^k	α_2^k	$f(x+\alpha_2^k d)$
3	α_2^k	α_U^k	α_3^k	$f(x+\alpha_3^k d)$

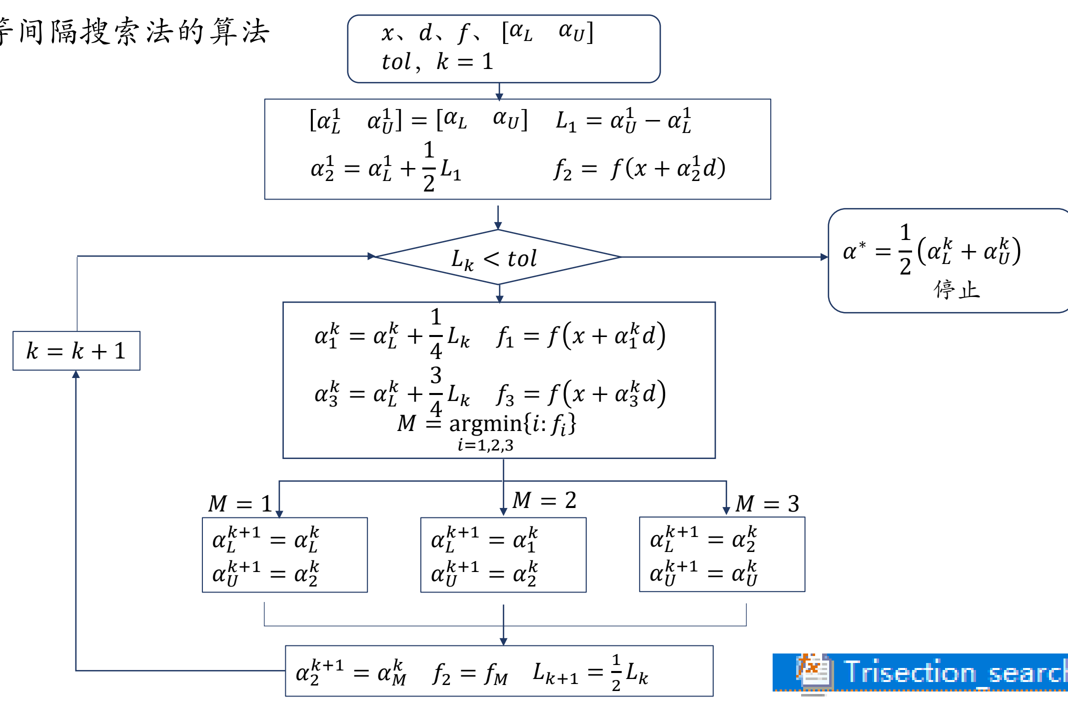
$$L_{k+1}=\frac{1}{2}L_k$$

继承第k次的结果
减少计算量





三点等间隔搜索法的算法



Trisection_search.m

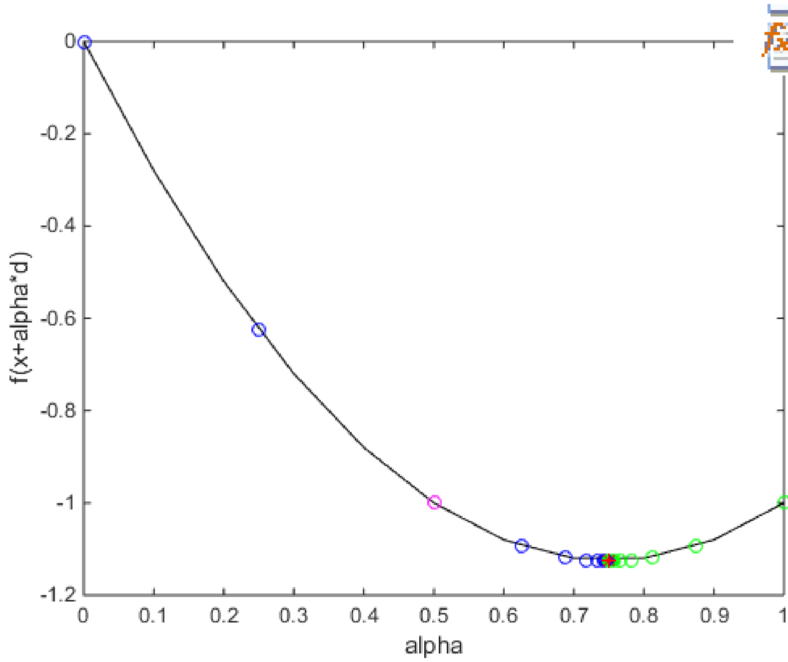
实例测试

例3.4 已知函数$f(x) = 2x^2 - x - 1$在当前点$x = -0.5$处的一个下降方向$d = 1$和不定区间$\alpha^* \in [0 \quad 1]$，用三点等分搜索法获取最佳步长（取$tol = 1 \times 10^{-4}$）

解：函数$f(x)$是凸函数，且$f(0.25) = -1.125$。

```
alpha_star =0.7500
x_next =0.2500
f_next =-1.1250
k =14
```

example_3_4_CH03.m



example_3_4_CH03.m

例3.5 已知函数$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$在当前点$x = (2,2)$处的一个下降方向$d = (-1,-1)$和不定区间$\alpha^* \in [0 \quad 2]$，用三点等分搜索法获取最佳步长（取$tol = 1 \times 10^{-6}$）

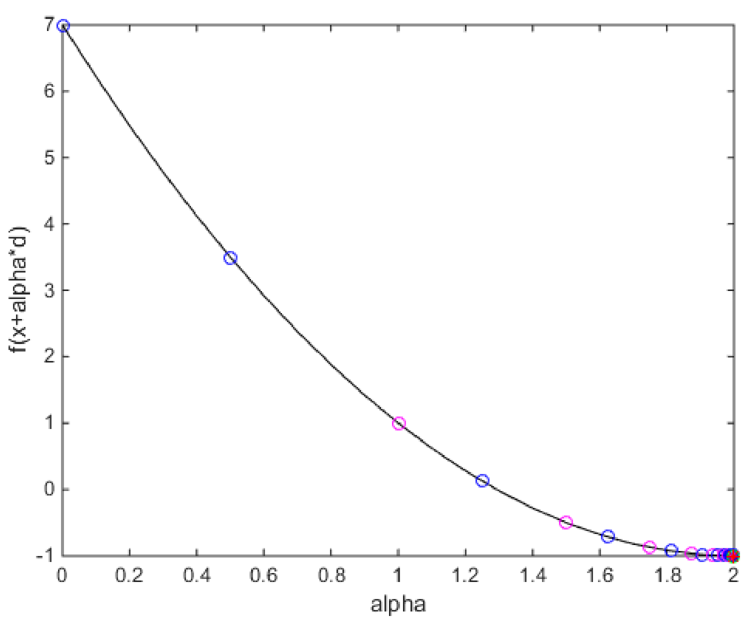
解：函数$f(x)$是凸函数，且$f(0,0) = -1$。

example_3_5_CH03.m

```
alpha_star =2.0000
x_next =1.0e-06 *[0.4768    0.4768]
f_next =-1.0000
k =21
```

改变tol的值，发现tol由大至小，数值解趋于解析解

example_3_5_CH03.m



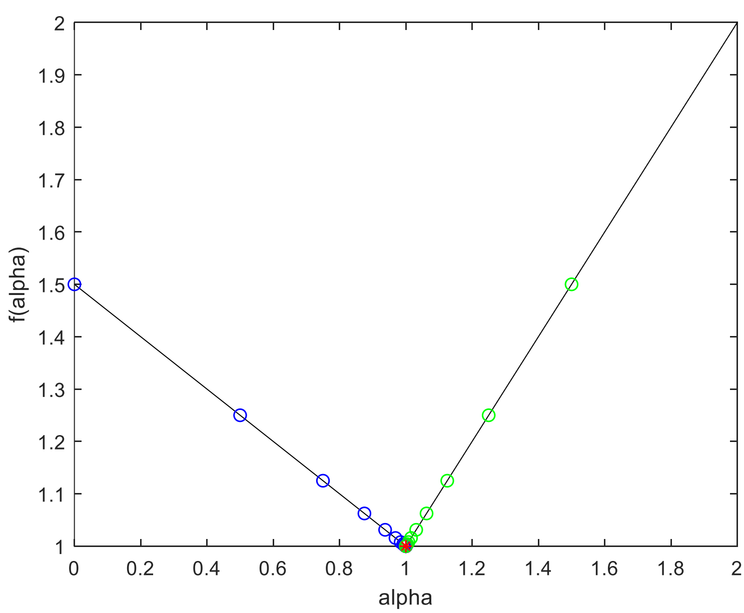
例3.6 已知函数$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -x+3 & x \le 2 \\ \frac{1}{2}x & x > 2 \end{cases}$在当前点$x = 3$处的一个下降方向$d = -1$和不定区间$\alpha^* \in [0 \quad 2]$，用三点等分搜索法获取最佳步长（取$tol = 1 \times 10^{-4}$）。

解： 函数$f(\boldsymbol{x})$是凸函数，且$f(2) = 1$。

```
alpha_star =3.0518e-05
x_next =2.0000
f_next =1.0000
k =15
```

example_3_6_CH03.m

example_3_6_CH03.m



1. 引言
2. 区间消去法（搜索法）
   2.1 对分搜索法
   2.2 等间隔搜索法
   2.3 对称区间搜索法
      • Fibonacci法
      • 黄金分割法
3. 逼近方法
4. 划界法

见下节
003-02 一维优化精确方法-对称搜索 逼近法 划界法