M05M11084 最优化理论、算法与应用

1 概述

Course information

M05M11084机械工程中的最优化理论与方 培训

此二维码365天内有效（2024-11-14前）

钉钉扫一扫群二维码，立即加入群聊

主要内容

1. 基本理论与概念
2. 精确/非精确一维搜索方法
3. 无约束优化方法
4. 带约束的优化方法
5. 算法的Matlab实现
6. 工程应用实例

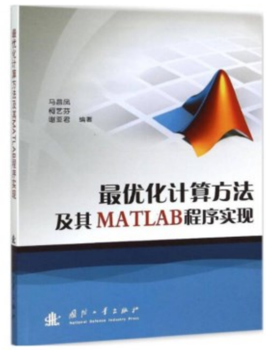
成绩 ＝0.4 作业（4次） ＋ 0.6 综合报告

作业： 4 次

综合报告：

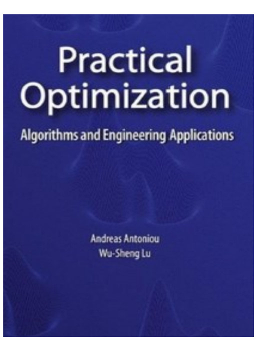
- 1~3人一组
- 自由选题
- 提交报告

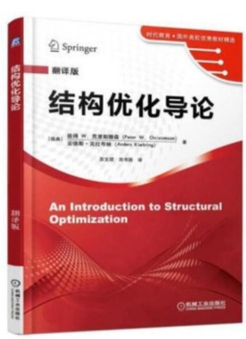
参考书



CVX RESEARCH

参考书 —— 工程应用实例





M05M11084

1 概述

1. 最优化方法的发展历史
2. 最优化问题举例
3. 最优化问题的数学模型及相关概念
4. 最优化方法的分类
5. 最优化方法的算法基本结构
6. 最优化算法的评价指标
7.最优化方法解决实际问题的关键步骤

最优化问题?

最优化问题：如何对有限资源进行有效分配和控制，并达到某种意义上的最优

- 对需求进行定性和定量分析
- 建立恰当的数学模型来描述该问题
- 设计合适的计算方法来寻找问题的最优解
- 探索研究模型和算法的理论性质
- 考察算法的计算性能

实际中，存在很多数学问题难以直接给出显式解，
借助于计算机技术，可以采用最优化模型进行求解（逼近）

发展历史

起点：17世纪，Newton 发明微积分并提出函数极值的概念
体系：18~19世纪，一批成果　理论研究　未实际应用
　　Lagrange 不等式约束 Lagrange乘子法
　　Cauchy　最速下降法
发展：
线性规划
　　20世纪初，Kantorovich 线性规划　生产组织与军队运输
　　20世纪40年代，Dantzing 单纯形方法，用计算机解决大规模线性规划问题
　　　　20世纪十大算法之一
　　　　现代最优化方法的起始标志
　　　　计算复杂度 指数级
　　1979，Khachiyan 多项式算法——椭球算法，不实用
　　1984，Karmarkar多项式算法，实用
　　20世纪90年代，基于Karmarkar算法的内点法，解决大规模线性规划问题

非线性规划

1951，Kuhn-Tucker（KT）条件 带约束优化问题的必要条件　起始标志

追溯到1939，Tarush的硕士论文

改为 K-K-T条件

Fletcher和Reeves 共轭梯度法

拟牛顿法，避免计算Hesse矩阵及逆矩阵

1963，Davidon-Fletcher-Powell（DFP）方法

1970，Broyden、Fletcher、Goldfarb、Shanno，更高效的拟牛顿法BFGS

广泛应用

多维带约束优化问题

1950s，二次规划

1960s，几何规划

1968，Fiacco和McCormick

序列无约束优化技术 Sequential unconstrained minimization technique SUMT

将带约束优化问题转换成一系列无约束优化问题求解

1978，序列二次规划 Sequential quadratic programming SQP = WHP

1963 Wilson提出，韩世平和Powell完善

20世纪90年代，内点法拓展到非线性优化

1990s，半定规划SDP, 二阶锥规划SOCP, 二次约束二次规划QCQP, . . .

New applications since 1990

- linear matrix inequality techniques in control
- support vector machine training via quadratic programming
- semidefinite programming relaxations in combinatorial optimization
- circuit design via geometric programming
- l_1-norm optimization for sparse signal reconstruction
- applications in structural optimization, statistics, signal processing, communications, image processing, computer vision, quantum information theory, finance, power distribution, . . .

例

桁架由两个钢管组成，上端穿在一起，下端分别固定在两个支点上. 两支点之间的距离为2s. 要确定桁架的高度、钢管的厚度和平均直径，使钢管能支撑2W的负荷，并使桁架本身的总重量最小

钢管的截面积$2\pi\frac{x_1}{2}x_2$，长度$\sqrt{s^2+x_3^2}$

密度ρ，重量　　$\rho\pi x_1 x_2\sqrt{s^2+x_3^2}$

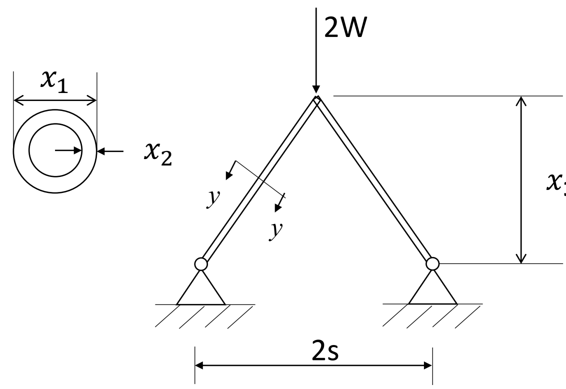
约束条件：

1.桁架高度不超过b_1，即$x_3 \le b_1$

2.平均钢管直径与厚度比不超过b_2，即$\frac{x_1}{x_2} \le b_2$

3.钢管的压应力不超过其弯曲应力，即

$$W\sqrt{s^2+x_3^2} \le b_3 x_1 x_2 x_3$$



4.平均直径，厚度，高度，还必须满足条件

$$W(s^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} \le b_4 x_1 x_3 (x_1^2+x_2^2)$$　　许应力

两杆桁架设计问题的非线性优化模型：

$$\min x_1 x_2 (s^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{s.t.}\ x_3 - b_1 \le 0$$

$$x_1 - b_2 x_2 \le 0$$

$$W(s^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} - b_3 x_1 x_2 x_3 \le 0$$

$$W(s^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} - b_4 x_1 x_3 (x_1^2+x_2^2) \le 0$$

$$x_1，x_2，x_3 \ge 0$$

例

某供应商国内有m个商品仓库$A_i, i=1,2,\cdots,m$。仓库可供应某种畅销产品，其最大供应量为$a_i, i=1,2,\cdots,m$。有n个商场$B_j, j=1,2,\cdots,n$，对这种畅销产品的需求量为$b_j, j=1,2,\cdots,n$.
从仓库A_i到商场B_j的运输成本为c_{ij}

运价	商场	1	2	$\cdots$	n	库存量
仓库	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
需求量		b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

假设产销平衡，要求总运费最小的调运方案
设 从仓库商品仓库A_i运输到商场B_j的商品数量为 x_{ij}

数学模型

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i=1,2,\cdots,m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{matrix}$$

运价	商场	1	2	$\cdots$	n	库存量
仓库	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
需求量		b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

变量：$n \times m$ 个

约束：$m + n + (n \times m)$ 个

$$
\begin{aligned}
&\min f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
&\text{s.t.}\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
&\qquad \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{x} = [x_{11} \ \cdots \ x_{1n} \ x_{21} \ \cdots \ x_{2n} \ \cdots\cdots \ x_{1m} \ \cdots \ x_{mn}]^T$$

$$\boldsymbol{c} = [c_{11} \ \cdots \ c_{1n} \ c_{21} \ \cdots \ c_{2n} \ \cdots\cdots \ c_{1m} \ \cdots \ c_{mn}]^T$$

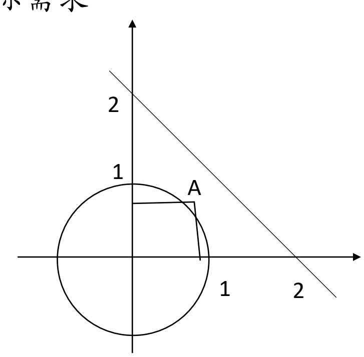
$$\boldsymbol{b} = [a_1 \ \cdots \ a_m \ b_1 \ \cdots \ b_n \ ]^T$$

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

例

实际工程中常出现一些非线性方程组，从理论数学的角度来说，是无解的；但是，从工程应用的角度，这些方程的近似解也能满足实际需求

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$



一个是圆，一个是直线，不相交，无解

采用最优化方法求解近似解

设 $f_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$

$f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0$

令 $F(\boldsymbol{x}) = f_1^2(\boldsymbol{x}) + f_2^2(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0.7937 \\ 0.7937 \end{bmatrix}$$

$$\min F(\boldsymbol{x})$$

1. 最优化方法的发展历史
2. 最优化问题举例
3. 最优化问题的数学模型及相关概念
4. 最优化方法的分类
5. 最优化方法的算法基本结构
6. 最优化算法的评价指标
7.最优化方法解决实际问题的关键步骤

最优化问题的数学模型及三要素

最优化问题：求多元函数在给定集合上的极值

数学模型: $\min f(\boldsymbol{x})$
$\text{s.t.}\ \boldsymbol{x} \in X$

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \middle| \begin{cases} h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i \in \mathcal{E} \\ g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j \in \mathcal{I} \end{cases} \right\}$$

- X 给定的集合 (可行集或可行域)
- f 目标函数，定义在集合X上的实值函数
- $\boldsymbol{x}$ 决策变量

s.t. subject to (受限于) 约束条件

约束指标集

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.}\, h_i(\boldsymbol{x}) = 0\,, i = 1, \dots, l$$
$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j = 1, \dots, m$$

$f, h_i, g_j\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$，一般是连续可微的, $i \in \mathcal{E}, j \in \mathcal{I}$

$f(\boldsymbol{x})$　目标函数

$h_i(\boldsymbol{x}), g_j(\boldsymbol{x})$　约束函数

$\mathcal{E} = \{i: h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \dots, l\}$　等式约束指标集

$\mathcal{I} = \{j: g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$　不等式约束指标集

$\mathcal{I}(\boldsymbol{x}) = \{j: g_j(\boldsymbol{x}) = 0, j \in \mathcal{I}\}$　点x处的不等式积极约束的指标集

可行点、非可行点、可行域

可行点$\boldsymbol{x}$：　$h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i \in \mathcal{E}$且$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j \in \mathcal{I}$

非可行点$\boldsymbol{x}$：$h_i(\boldsymbol{x}) \neq 0, i \in \mathcal{E}$或$g_j(\boldsymbol{x}) < 0, j \in \mathcal{I}$

可行域X：　$X = \left\{\boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{cases} h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i \in \mathcal{E} \\ g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j \in \mathcal{I} \end{cases}\right\}$

δ-邻域球:　$B(x, \delta) = \{y \mid \|y - x\|_2 \leq \delta\,, \delta > 0\}$

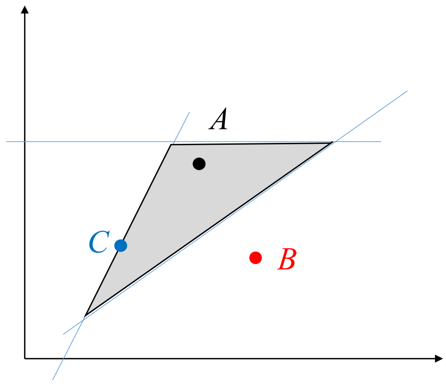
集合的边界:　$\operatorname{bd} X = \partial X = \{x \in X \mid \exists y \in B(x, \delta) \setminus X\}$

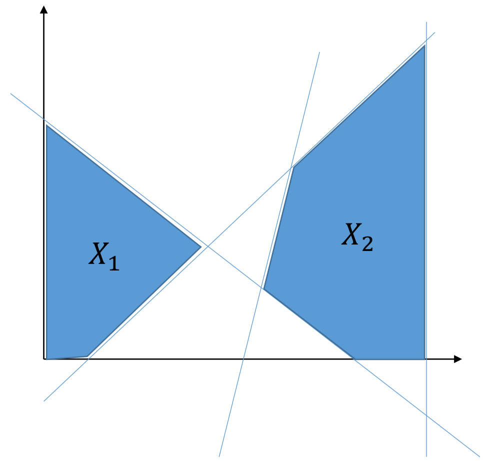
集合的内部:　$\operatorname{int} X = \{x \in X \mid \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subset X\}$

内　点:　集合内部的点 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} X$

边界点:　集合边界上的点 $\boldsymbol{x} \in \partial X$

外　点:　集合外的点 $\boldsymbol{x} \notin X$





$X = X_1 \cup X_2$

不同形式优化问题的转化

$$\max f(\boldsymbol{x}) \iff \min\big(-f(\boldsymbol{x})\big)$$

$$g(\boldsymbol{x}) < 0 \iff -g(\boldsymbol{x}) > 0$$

$$g(\boldsymbol{x}) \le 0 \iff -g(\boldsymbol{x}) \ge 0$$

$$h(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \begin{cases} h(\boldsymbol{x}) \ge 0 \\ -h(\boldsymbol{x}) \ge 0 \end{cases}$$

$$|ax + b| < c \iff \begin{cases} ax + b < c \\ -(ax + b) < c \end{cases}$$

最优化问题按照可行域分类

按照可行集，最优化问题大致的分类:

- 线性规划和非线性规划：可行集是有限维空间中的一个子集
- 组合优化或网络规划：　可行集中的元素是有限的
- 动态规划:　　　　　　　可行集是一个依赖时间的决策序列
- 最优控制:　　　　　　　可行集是无穷维空间中的一个连续子集

1. 最优化方法的发展历史
2. 最优化问题举例
3. 最优化问题的数学模型及相关概念
4. 最优化方法的分类
5. 最优化方法的算法基本结构
6. 最优化算法的评价指标
7. 最优化方法解决实际问题的关键步骤

迭代法的基本思想

不妨以无约束优化问题为例 $\min_{x \in \mathcal{R}^n} f(\boldsymbol{x})$

设对第k 次迭代，$\boldsymbol{x}^{(k)}$迭代点，$\boldsymbol{d}^{(k)}$ 搜索方向，α_k 步长

则第$k+1$次的迭代点

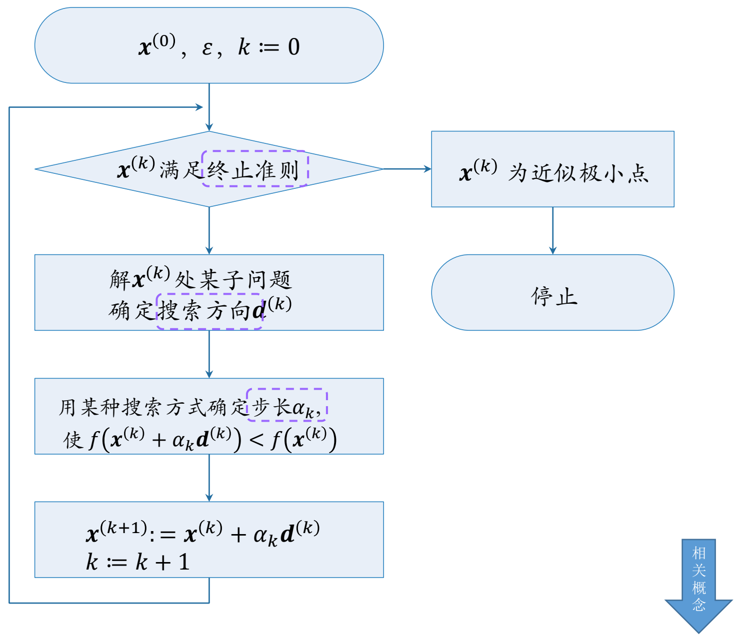
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{d}^{(k)}$$

给定初始点$\boldsymbol{x}^{(0)}$, 按照某迭代规则产生点列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$

若点列是有限的, 则最后一个点就是此问题的极小点

否则, 若$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是无穷点列, 存在极限点且此极限点为问题的极小点

算法框架



迭代终止条件

充分小的$\varepsilon > 0$

	绝对误差	相对误差	混合误差
位移	$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$	$\dfrac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k)}\right\|} < \varepsilon$	$\dfrac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\min\{1, \left\|x^{(k)}\right\|\}} < \varepsilon$
目标函数	$\left\|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})\right\| < \varepsilon$	$\dfrac{\left\|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})\right\|}{\left\|f(x^{(k)})\right\|} < \varepsilon$	$\dfrac{\left\|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})\right\|}{\min\{1, \left\|f(x^{(k)})\right\|\}} < \varepsilon$

目标函数的梯度　　$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| < \varepsilon$

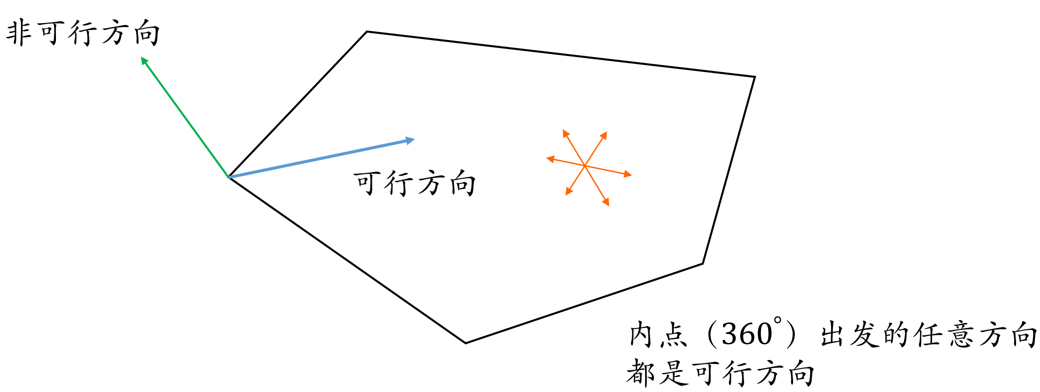
搜索方向——可行方向和下降方向

定义 设优化问题的可行域$X \subseteq \mathcal{R}^n$. 如果对点$\boldsymbol{x}^{(k)} \in X$处的搜索方向$\boldsymbol{d}^{(k)}$，存在实数$\gamma > 0$，使步长$\alpha_k \in (0,\gamma)$满足$\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{d}^{(k)} \in X$，那么称$\boldsymbol{d}^{(k)}$为$\boldsymbol{x}^{(k)}$处的可行方向

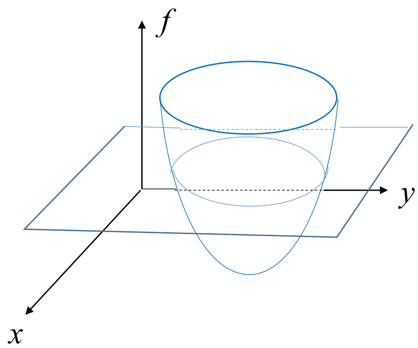
定义 如果对点$\boldsymbol{x}^{(k)}$处的搜索方向$\boldsymbol{d}^{(k)}$，存在实数$\gamma > 0$，使步长$\alpha_k \in (0,\gamma)$满足$f\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{d}^{(k)}\right) < f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$，那么称$\boldsymbol{d}^{(k)}$为$\boldsymbol{x}^{(k)}$处的下降方向

✓可行方向法：如果在迭代过程中得到的每一个方向都是可行方向

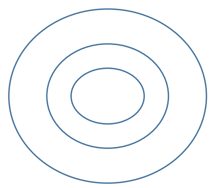
✓可行下降方法：如果在迭代过程中得到的每一个方向都是可行下降方向



α下等值集合与可行域



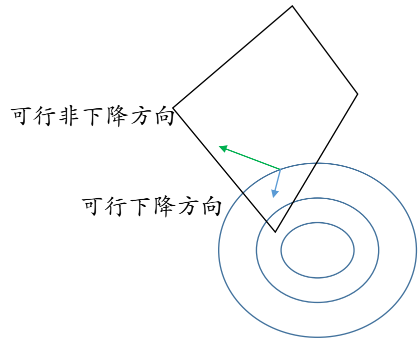
沿 $f(x) = c$ 做平面与曲面的交线



投影到 xy 平面

等值线

$L_\alpha = \{x \in X | f(x) \leq \alpha\}$



矢量点积的几何意义

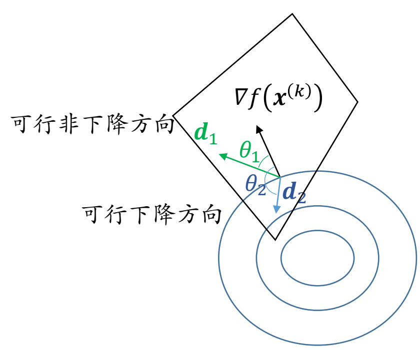
$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)$$

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{d}_1 = \left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\right\|\|\boldsymbol{d}_1\|\cos\theta_1 > 0$$

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{d}_2 = \left\|\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\right\|\|\boldsymbol{d}_2\|\cos\theta_2 < 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}$$



下降方向的一阶判定条件

函数的下降方向的充要条件

设函数$f(\boldsymbol{x})$在开集$\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$上一阶连续可微，则$\boldsymbol{d}^{(k)}$ 为$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^{(k)}$处下降方向的充要条件是

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{d}^{(k)} < 0$$

说明

泰勒展开式 $f\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(k)}\right) = f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) + \alpha \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{d}^{(k)} + o(\alpha)$

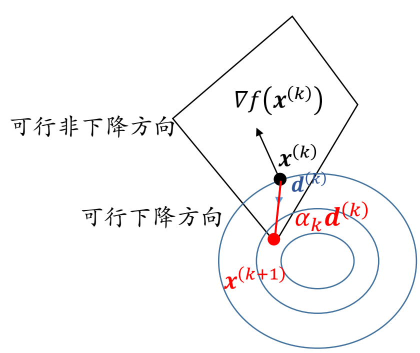
$$f\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(k)}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) = \alpha \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{d}^{(k)} + o(\alpha)$$

$$f\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(k)}\right) < f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \rightleftarrows \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{d}^{(k)} < 0$$

$\boldsymbol{d}^{(k)}$ 为下降方向

步长α

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{d}^{(k)}$$



6. 最优化算法的评价指标

- ✓ 时间复杂度--计算效率
- ✓ 空间复杂度--存储量
- ✓ 可靠程度--稳定性

定义 若某算法只有当初始点$\boldsymbol{x}^{(0)}$ 充分接近极小点$\boldsymbol{x}^*$ 时，由算法产生的点列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$才收敛于$\boldsymbol{x}^*$，则称该算法具有局部收敛性.

若对于任意的初始点$\boldsymbol{x}^{(0)}$，由算法产生的点列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$都收敛于$\boldsymbol{x}^*$，则称该算法具有全局收敛性.

算法的局部收敛速度(Q收敛)

设算法产生的点列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛于极小点$\boldsymbol{x}^*$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|^p}=c$

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">若</td><td colspan="2">称该算法具有</td><td colspan="2">称该算法是</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>$p=1$</td><td>$0<c<1$</td><td>Q-线性</td><td rowspan="4">收敛速度</td><td>线性</td><td rowspan="4">收敛的</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$p=1$</td><td>$c=1$</td><td>Q-超线性</td><td>超线性</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>$p=2$</td><td>$0<c<\infty$</td><td>Q-平方</td><td>平方</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>$p>2$</td><td>$0<c<\infty$</td><td>Q-p 阶</td><td>p 阶</td></tr>
</table>

容易证明：若算法超线性收敛的，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|}=1$

算法的R-收敛

设算法产生的点列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛于极小点$\boldsymbol{x}^*$

<table>
<tr><td colspan="2">若∃</td><td>使得</td><td colspan="2">称序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">常数
$c>0$</td><td>常数$q\in(0,1)$</td><td>$\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|\le cq^k$</td><td>$R$-线性</td><td rowspan="2">收敛到$\boldsymbol{x}^*$</td></tr>
<tr><td>正数列$\{q_k\}, q_k>0$
$\lim\limits_{k\to\infty} q_k=0$</td><td>$\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|\le c\prod\limits_{i=0}^{k}q_i$</td><td>$R$-超线性</td></tr>
</table>

1. 最优化方法的发展历史
2. 最优化问题举例
3. 最优化问题的数学模型及相关概念
4. 最优化方法的分类
5. 最优化方法的算法基本结构
6. 最优化算法的评价指标
7. 最优化方法解决实际问题的关键步骤

Course Project 要求

步骤1:建立模型

提出最优化问题，变量是什么?限制条件有哪些?目标是什么?——**提出问题**
建立最优化问题数学模型：确定变量，建立目标函数，列出约束条件——**建立模型**

步骤2:确定求解方法

分析模型，根据数学模型的性质，选择优化求解方法——**确定求解方法**

步骤3:计算机求解

编程序(或使用计算软件，CVX)，求最优解——**计算机求解**

步骤4:结果分析

对算法的可行性、收敛性、通用性、时效性、稳定性、灵敏性和误差等作出评价——**结果分析**

步骤5:实验数据或经典算例对比

Thanks

最优化问题求解方法的分类

- ①解析法（间接法）
  - 无约束
    - 古典微分法
    - 古典变分法
  - 有约束
    - 极大值原理
    - KKT定理
- ②数值算法（直接法）
  - 一维搜索法
    - 精确搜索法
      - 黄金分割法
      - 斐波那契法
      - 牛顿法
      - 割线法
      - 插值法
    - 非精确搜索法
      - $Armijo$法
      - $Wolfe$法
      - $Goldstein$法
  - 多维搜索法
    - 坐标轮换法
    - 步长加速法
    - 方向加速法
    - 单纯形法
    - 随机搜索法

- ③数值算法（梯度法）
  - 无约束梯度法
    - 最速下降法
    - 拟牛顿法
    - 共轭梯度法
    - 变尺度法
  - 有约束梯度法
    - 可行方向法
    - 梯度投影法
  - 化有约束为无约束
    - $SUMT$法
    - $SWIFT$法
    - 复形法

内点法

- ④多目标优化方法
  - 经典方法
  - 最优性条件
  - 梯度方法
- ⑤网络优化方法