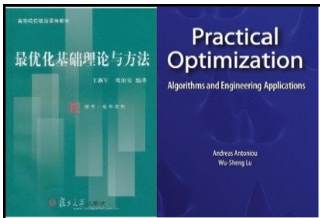
M05M11084 最优化理论、算法与应用

7-2 线性规划问题的内点法

讲义和程序下载
（随课程进度更新）

链接：
https://pan.baidu.com/s/1NynYva56GiPsj2gLI59k0Q?pwd=yuan
提取码：yuan



线性规划问题的内点法

参考：

1.应用最优化方法及MATLAB实现，第9章，刘兴高

2. Practical Optimization Algorithms and Engineering Applications, Chapter 12, A. Antoniou, W. LU

1. 线性规划的原问题与对偶问题
2. 原-对偶可行路径跟踪法
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

1. 线性规划的原问题与对偶问题
   ① 原-对偶解
   ② 原-对偶解的存在性
   ③ 原-对偶解的严格可行性
   ④ 对偶间隔
   ⑤ 中心路径
2. 原-对偶可行路径跟踪法
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & f_p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Primal problem

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^2$

$A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank} A = m < n$

$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0} \in \mathcal{R}^n$

内点法与单纯形法

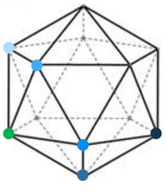
几何观点：线性规划的可行域是凸多面体，其顶点和基可行解一一对应

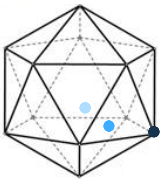
单纯形法的求解过程：从凸多面体某个顶点开始，沿着凸多面体上彼此相邻的顶点前进，最终找到使目标函数取最优值的顶点

内点法的求解过程：从凸多面体内部的某个点出发，逐渐逼近最优解对应的顶点

计算量：内点法的每迭代一次的计算量，比单纯形的大一些； 适合小规模问题

单纯形的迭代次数，比内点法的多得多。 适合大规模问题





线性规划的原问题与对偶问题

Primal

$$\begin{aligned} \min f(x) &= c^T x \\ \text{s.t.}\ Ax &= b \qquad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{R}^{m\times n}, x \in \mathcal{R}^n, b \in \mathcal{R}^m, c \in \mathcal{R}^n$

Dual

$$\begin{aligned} \max h(\lambda) &= b^T\lambda \\ \text{s.t.}\ A^T\lambda + \mu &= c \qquad (D) \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathcal{R}^m, \mu \in \mathcal{R}^n$

有关线性规划(P)问题的解与(D)问题解的两个基本问题：
(1) 两组解存在的条件？
(2) 原始和对偶的可行点和可行解是如何关联的？

- 如果LP问题的可行域非空，称该问题是可行的
- 如果存在$x > 0$，使$Ax = b$，称(P)问题是严格可行的
- 如果存在$\lambda \in \mathcal{R}, \mu > 0$，使$A^T\lambda + \mu = c$，称$(D)$问题是严格可行的

原-对偶解 primal-dual solution

x^* 是(P) 问题的解 当且仅当 存在λ^* 和 $\mu^* \geq 0$，使得

$$\begin{aligned} A^T\lambda^* + \mu^* &= c \\ Ax^* &= b \\ x_i^*\mu_i^* &= 0 \quad i = 1, \dots, n \\ x^* \geq 0, \mu^* &\geq 0 \end{aligned}$$

KKT Condition

对(P) 问题，x^* 是解， λ^* 和 μ^* 是Lagrange 乘子

对(D) 问题， $\{\lambda^*, \mu^*\}$ 是解， x^* 是Lagrange 乘子

- $\{x^*, \lambda^*, \mu^*\}$ 称为原-对偶解
- $\{x^*, \lambda^*, \mu^*\}$ 是原-对偶解的充要条件是x^* 是(P) 问题的解 ，且$\{\lambda^*, \mu^*\}$ 是(D) 问题的解

$$f(x^*) = c^T x^* = (A^T\lambda^* + \mu^*)^T x^* = \lambda^{*T} A x^* = \lambda^{*T} b = h(\lambda^*)$$

定理 原-对偶解的存在性

如果(P) 问题和(D) 问题都是可行的，那么，原-对偶解存在

证明　如果x是 (P) 问题的可行点，$\{\lambda, \mu\}$是 (D) 问题的可行点，那么

$$h(\lambda) = \lambda^T b \leq \lambda^T b + \mu^T x = \lambda^T A x + \mu^T x = (A^T\lambda + \mu)^T x = c^T x = f(x)$$

因为 $f(x) = c^T x$ 在可行域中有下界， 存在$\{x^*, \lambda^*, \mu^*\}$ 满足KKT 条件

x^*是(P) 问题的解

$h(\lambda)$有上界， $\{\lambda^*, \mu^*\}$是(D) 问题的解

因此， $\{x^*, \lambda^*, \mu^*\}$ 是原-对偶解

对偶间隔　$\delta(x, \lambda) = c^T x - b^T \lambda \geq 0$

$\delta(x^*, \lambda^*) = 0$

定理 原-对偶解的严格可行性

如果(P) 问题和(D) 问题都是可行的，那么

(a) 若(D) 问题严格可行，则 (P) 问题的解是有界的

(b) 若(P) 问题严格可行，则 (D) 问题的解是有界的

(c) 若(P) 问题和(D) 问题都是严格可行的，则原-对偶解是有界的

证明 显然，(a) 和 (b)成立，即可得 (c)

现证明 (a)，注意 (P) 问题的解存在性定理

设 $\{\lambda,\mu\}$ 对(D) 问题是严格可行的，x 对(P) 问题是严格可行的，x^*是(P) 问题的解

可得 $$\mu^T x^* = (c - A^T\lambda)^T x^* = c^T x^* - \lambda^T A x^* = c^T x^* - \lambda^T b \le c^T x - \lambda^T b = \mu^T x$$

因为$x^* \ge 0$ 和 $\mu > 0$，则 $\mu_i^* x_i^* \le \mu^T x^* \le \mu^T x$

$$x_i^* \le \frac{1}{\mu_i^*}\mu^T x \le \max_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{\mu_i^*}\right)\mu^T x \quad \Longrightarrow x^* \text{ 有界}$$

类似可证(b)

对偶间隔 Duality gap

$$\begin{aligned} &\min f(x) = c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \qquad (P) \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max h(\lambda) = b^T\lambda \\ &\text{s.t.}\, A^T\lambda + \mu = c \qquad (D) \\ &\quad \mu \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(x,\lambda) &= c^T x - b^T\lambda \\ &= (A^T\lambda + \mu)^T x - b^T\lambda \\ &= \mu^T x + \lambda^T A x - b^T\lambda \\ &= \mu^T x + \lambda^T b - b^T\lambda \\ &= \mu^T x \quad \ge 0 \end{aligned}$$

中心路径 Central path

设 $\{x, \lambda, \mu\}$ 满足条件(1)，是原-对偶解

$$\begin{aligned} Ax &= b & x &\geq 0 \\ A^T\lambda + \mu &= c & \mu &\geq 0 \\ X\mu &= 0 \\ X &= \mathrm{diag}\{x_1, \dots, x_n\} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x \in \mathcal{R}^n, \lambda \in \mathcal{R}^m, \mu \in \mathcal{R}^n$$

标准的线性规划问题的中心路径定义为 $\{x(\tau), \lambda(\tau), \mu(\tau)\}$，满足条件(2)

$$\begin{aligned} Ax &= b & x &> 0 \\ A^T\lambda + \mu &= c & \mu &> 0 \\ X\mu &= \tau e \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\tau > 0, \tau \in \mathcal{R}, e = \mathbf{1}$$

- ✓ 当 τ 变化时，相应的点$\{x(\tau), \lambda(\tau), \mu(\tau)\}$在$\mathcal{R}^n$、$\mathcal{R}^m$、$\mathcal{R}^n$空间中形成轨迹，称为中心路径，与原-对偶解密切相关
- ✓ 中心路径上每一点都是严格可行的（由(2)中：$x > 0$和$\mu > 0$ 可得）
- ✓ 中心路径在(P)问题的、(D)问题的可行域的内部，并且，当$\tau \to 0$时，中心路径趋于原-对偶解

$$\delta\big(x(\tau), \lambda(\tau)\big) = \mu(\tau)^T x(\tau) = n\tau \to 0 \qquad (2) \to (1) \qquad \text{as } \tau \to 0$$

$$\{x(\tau), \lambda(\tau), \mu(\tau)\} \to \{x^*, \lambda^*, \mu^*\}$$

Example 12.1

Sketch the central path of the LP problem

$$\begin{aligned} &\min f(x) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ &\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$c = [-2 \quad 1 \quad -3]^T, A = [1 \quad 1 \quad 1], b = 1$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T\lambda + \mu &= c \\ X\mu &= \tau e \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ \lambda + \mu_1 &= -2 \\ \lambda + \mu_2 &= 1 \\ \lambda + \mu_3 &= -3 \\ x_1\mu_1 &= \tau \\ x_2\mu_2 &= \tau \\ x_3\mu_3 &= \tau \\ x_i > 0, \mu_i &> 0 \end{aligned}$$

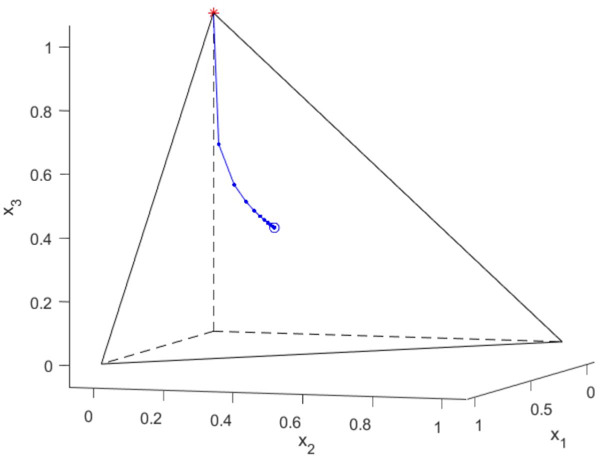
$$\begin{aligned} \mu_1 &= -2 - \lambda \\ \mu_2 &= 1 - \lambda \\ \mu_3 &= -3 - \lambda \end{aligned} \xrightarrow{\mu_i > 0} \lambda < -3$$

$$x_1 = \frac{\tau}{\mu_1} = \frac{\tau}{-2-\lambda}, \quad x_2 = \frac{\tau}{\mu_2} = \frac{\tau}{1-\lambda}, \quad x_3 = \frac{\tau}{\mu_3} = \frac{\tau}{-3-\lambda}$$

$$\frac{\tau}{-2-\lambda} + \frac{\tau}{1-\lambda} + \frac{\tau}{-3-\lambda} = 1$$

$$\frac{1}{\tau}\lambda^3 + \left(\frac{4}{\tau} + 3\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{\tau} + 8\right)\lambda + \left(1 - \frac{6}{\tau}\right) = 0$$

$$\tau_0 = 5 \quad \to \quad \tau_f = 10^{-4}$$



$$\frac{1}{\tau}\lambda^3+\left(\frac{4}{\tau}+3\right)\lambda^2+\left(\frac{1}{\tau}+8\right)\lambda+\left(1-\frac{6}{\tau}\right)=0$$

$$\tau_0=5 \quad\rightarrow\quad \tau_f=10^{-4}$$

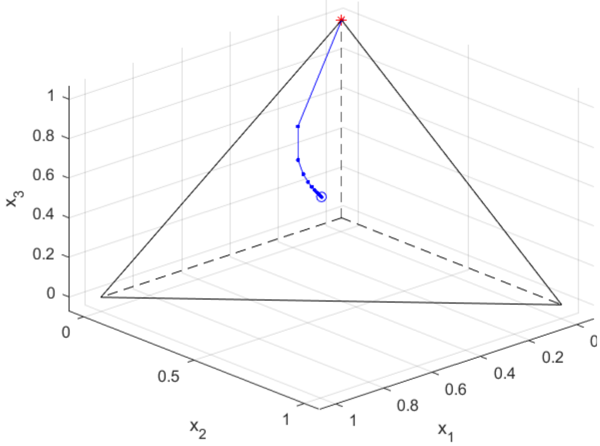
对$(\tau_f-\tau_0)$ 10等分，解一元三次方程，得λ

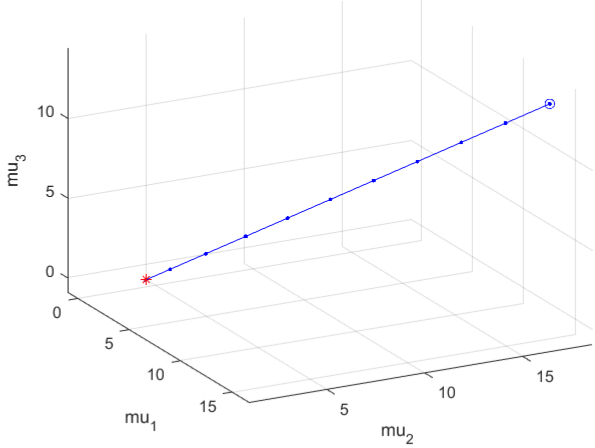
$$x_1=\frac{\tau}{\mu_1}=\frac{\tau}{-2-\lambda}$$
$$x_2=\frac{\tau}{\mu_2}=\frac{\tau}{1-\lambda}$$
$$x_3=\frac{\tau}{\mu_3}=\frac{\tau}{-3-\lambda}$$

得出$x(\lambda_k)$

Example_12_1_LUwusheng.m

x1 =	0.3445	0.3453	0.3462	0.3471	0.3481	0.3488	0.3487	0.3459	0.3333	0.2767	0.0001
x2 =	0.2855	0.2807	0.2748	0.2675	0.2582	0.2459	0.2290	0.2045	0.1667	0.1040	0.0000
x3 =	0.3700	0.3740	0.3790	0.3853	0.3937	0.4053	0.4223	0.4496	0.5000	0.6193	0.9999
f =	-1.5135	-1.5319	-1.5545	-1.5828	-1.6192	-1.6677	-1.7355	-1.8362	-2.0000	-2.3072	-2.9998





例 画出线性规划问题的中心路径

$$\max f(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t.}\, 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 6$$
$$x_3 \le 4$$
$$\boldsymbol{x} \ge 0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c} - A^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \\ X\boldsymbol{\mu} = \tau\boldsymbol{e} \end{cases}$$

解： $\min -f(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 - 5x_3$

$$\text{s.t.}\, 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 6$$
$$x_3 + x_5 = 4$$
$$\boldsymbol{x} \ge 0$$

$$\boldsymbol{c} = [-1 \;\; -1 \;\; -5 \;\; 0 \;\; 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = [6 \;\; 4]^T$$

$$-1 + 3\lambda_1 - \mu_1 = 0$$
$$-1 + 2\lambda_1 - \mu_2 = 0$$
$$-5 + \frac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_3 = 0$$
$$\lambda_1 - \mu_4 = 0$$
$$\lambda_2 - \mu_5 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 6$$
$$x_3 + x_5 = 4$$

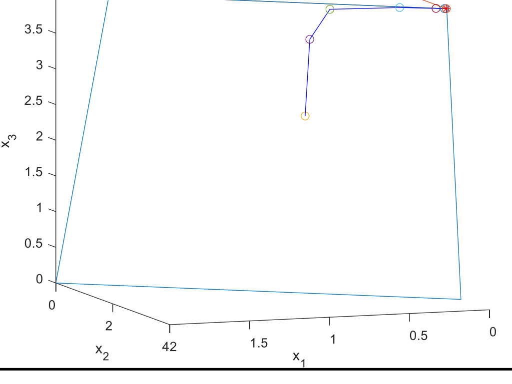
$$\mu_i x_i = \tau, \qquad i = 1,2,\dots,5$$

Example_9_1_XinggaoLiu.m

$$\begin{cases} -1 + \dfrac{3\tau}{6 - 3x_1 - 2x_2 - x_3/4} - \dfrac{\tau}{x_1} = 0 \\ -1 + \dfrac{2\tau}{6 - 3x_1 - 2x_2 - x_3/4} - \dfrac{\tau}{x_2} = 0 \\ -1 + \dfrac{\tau}{4(6 - 3x_1 - 2x_2 - x_3/4)} + \dfrac{\tau}{4 - x_3} - \dfrac{\tau}{x_3} = 0 \end{cases}$$

K=7

x_min =
    0.0020
    2.4959
    3.9998



内点罚函数法

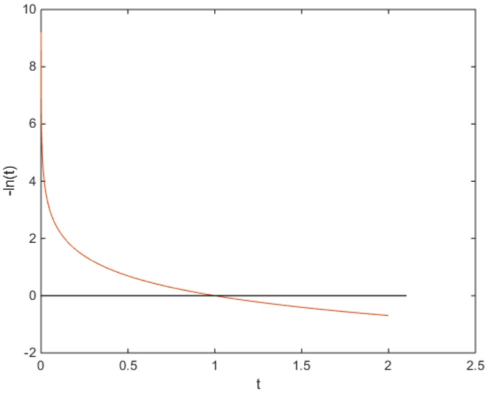
障碍罚函数法，内点罚函数法

$$\min f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \tau\sum_{j=1}^{n}\ln x_j$$

$$\text{s.t.}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

每次迭代都获得中心路径上的点，
并趋于最优解点

其KKT条件就是 条件(1)



现代内点法中，最成功的是 原-对偶路径跟踪法
每次迭代的点不一定在中心路径上，但是，能够围绕或跟踪中心路径直至找到最优解点

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \tau\sum_{j=1}^{n}\ln x_j - \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{c}^T - \sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j} - \boldsymbol{\lambda}^T A = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j} - A^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{c} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$$

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\mu_i x_i = 0, i = 1,\ldots,n \longrightarrow \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j} = \tau X^{-1}\boldsymbol{e} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j}-A^T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{c}^T-\sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j}-\boldsymbol{\lambda}^T A=0$$

$$A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j}\right]^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^T A\boldsymbol{x}=0$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\tau}{x_j}\right]^T\boldsymbol{x}&=[\tau X^{-1}\boldsymbol{e}\,]^T\boldsymbol{x}\\&=\tau\boldsymbol{e}^T[X^{-1}\,]^T\boldsymbol{x}\\&=\tau\boldsymbol{e}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1}&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\\&=\tau\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}\\&=n\tau\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-n\tau-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}=0$$

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}=n\tau$$

对偶间隔 $\delta_{PD}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}$

$$=n\tau$$

M05M11084 最优化理论、算法与应用

7-2 线性规划问题的内点法

1. 线性规划的原问题与对偶问题

2. 原-对偶可行路径跟踪法

①问题形式

②原-对偶可行路径跟踪法的基本原理

- ✓ 原问题(P_I)与其对偶问题的关系
- ✓ 扰动KKT条件的线性化及求解
- ✓ 步长求解
- ✓ 中心参数的更新公式

③原-对偶可行路径跟踪法的计算步骤

3. 原-对偶非可行路径跟踪法

4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

问题形式

原问题

$$\begin{aligned} \min f_P(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n \\ \text{s.t.}\, A_E\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_E & A_E \in \mathcal{R}^{m_1\times n}, \boldsymbol{b}_E \in \mathcal{R}^{m_1} \qquad \operatorname{rank} A_E = m_1 < n \qquad (P_I) \\ A_I\boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{b}_I & A_I \in \mathcal{R}^{m_2\times n}, \boldsymbol{b}_I \in \mathcal{R}^{m_2} \end{aligned}$$

引入松弛变量

$$\begin{aligned} \min f_P(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^{m_2} \qquad \text{变量为}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix} \\ \text{s.t.}\, A_E\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_E \\ A_I\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b}_I \\ \boldsymbol{y} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\min f_P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\ A_E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_E$$
$$A_I\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_I$$

$$\longrightarrow$$

$$\min f_P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\ A_E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_E$$
$$A_I\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_I$$
$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

$$L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}_E^T(A_E\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_E) - \boldsymbol{\lambda}_I^T(A_I\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_I - \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{y}$$

精确KKT条件

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E - A_I^T\boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{0}$$
$$\nabla_{\boldsymbol{y}}L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\lambda}_I - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$$
$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}_E}L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = -A_E\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_E = \boldsymbol{0}$$
$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}_I}L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = -A_I\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_I + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$
$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}}L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = -\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}$$
$$M\boldsymbol{y} = 0$$
$$\boldsymbol{\mu} \geq 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E - A_I^T\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0}$$
$$A_E\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_E = \boldsymbol{0} \qquad (KKT)$$
$$A_I\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_I - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$
$$M\boldsymbol{y} = 0$$

$$M = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_2}\}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_E \\ \boldsymbol{\lambda}_I\end{bmatrix}$$

$$f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$$

$$\begin{aligned}
f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}_E^T(A_E\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_E) - \boldsymbol{\lambda}_I^T(A_I\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_I - \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{y} \\
&= [\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{\lambda}_E^T A_E - \boldsymbol{\lambda}_I^T A_I]\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{\lambda}_I^T - \boldsymbol{\mu}^T)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\lambda}_E^T\boldsymbol{b}_E + \boldsymbol{\lambda}_I^T\boldsymbol{b}_I \\
&= [\boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E - A_I^T\boldsymbol{\lambda}_I]^T\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{\lambda}_I - \boldsymbol{\mu}]^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\lambda}_E^T\boldsymbol{b}_E + \boldsymbol{\lambda}_I^T\boldsymbol{b}_I \\
&= \boldsymbol{\lambda}_E^T\boldsymbol{b}_E + \boldsymbol{\lambda}_I^T\boldsymbol{b}_I \\
&= \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}_E + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{b}_I
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E - A_I^T\boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_I - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{Let } \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_E$$

$$f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = L_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$$
$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E - A_I^T\boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_I - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0}$$

令$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_E$，代入$\boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{\mu}$

$$\Longrightarrow$$

$$\max f_D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}_E + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{b}_I$$
$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0} \qquad (D)$$

1. 线性规划的原问题与对偶问题
2. 原-对偶可行路径跟踪法
   ①问题形式
   ②原-对偶可行路径跟踪法的基本原理
      ✓ 原问题(P_I)与其对偶问题的关系
      ✓ 扰动KKT条件的线性化及求解
      ✓ 步长求解
      ✓ 中心参数的更新公式
   ③原-对偶可行路径跟踪法的计算步骤
   ④实例测试
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

✓原问题(P_I)与其对偶问题的关系

$$\begin{aligned} \max f_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}_E+\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{b}_I \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{c}-A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E-A_I^T\boldsymbol{\lambda}_I &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\lambda}_I-\boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\mu} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

令$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_E$，代入$\boldsymbol{\lambda}_I=\boldsymbol{\mu}$

$$\begin{aligned} \max f_D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}_E+\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{b}_I \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{\mu} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad (D)$$

设点$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是原问题可行域的内点，点$(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$是对偶问题可行域的内点，
则中心路径上的点$\boldsymbol{z}(\tau)=[\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{y}(\tau),\boldsymbol{\lambda}(\tau),\boldsymbol{\mu}(\tau)]$ 满足

扰动KKT条件

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}-A_E^T\boldsymbol{\lambda}-A_I^T\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\mu}\geq\boldsymbol{0} && \text{DF} \\ &A_E\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0} && \\ &A_I\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}_I,\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0} && \text{PF} \\ &MY\boldsymbol{e}=\tau\boldsymbol{e} && \end{aligned} \qquad (KKT_\tau)$$

$$Y=\operatorname{diag}\{y_1,y_2,\dots,y_{m_2}\} \quad \boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

运算

$$MY\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}\mu_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mu_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & y_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_1 y_1\\ \vdots\\ \mu_m y_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{\mu}\circ\boldsymbol{y}$$

$$\begin{bmatrix}\mu_1 y_1\\ \vdots\\ \mu_m y_m\end{bmatrix}=MY\boldsymbol{e}=\tau\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}\tau\\ \vdots\\ \tau\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{m_2}\mu_i y_i=m_2\tau$$

$\tau\to 0$时，扰动KKT条件 $\to$ 精确KKT条件

$\boldsymbol{z}(\tau)=[\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{y}(\tau),\boldsymbol{\lambda}(\tau),\boldsymbol{\mu}(\tau)]\ \to$ 原-对偶问题的最优解

从对偶间隔的角度看，

$$\begin{aligned}\delta_{PD}&=f_P(\boldsymbol{x})-f_D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\\ &=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}_E-\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{b}_I\\ &=(A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E-A_I^T\boldsymbol{\lambda}_I)^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^T(A_E\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\mu}^T(A_I\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &=\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{y}\\ &=m_2\tau\to 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}-A_E^T\boldsymbol{\lambda}_E-A_I^T\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\mu}\geq\boldsymbol{0}\\ &A_E\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\ &A_I\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_I-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\\ &M\boldsymbol{y}=0\end{aligned}\quad(KKT)\quad\xrightarrow{\tau\to 0}\quad\begin{aligned}&\boldsymbol{c}-A_E^T\boldsymbol{\lambda}-A_I^T\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\mu}\geq\boldsymbol{0}\\ &A_E\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\ &A_I\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}_I,\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\\ &MY\boldsymbol{e}=\tau\boldsymbol{e}\end{aligned}\quad(KKT_\tau)$$

✓扰动KKT条件的线性化及求解

(1) 对当前迭代点$\boldsymbol{z}^k=[\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{\lambda}^k,\boldsymbol{\mu}^k]^T$做适当的扰动$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k=\left[\boldsymbol{\delta}_x^k,\boldsymbol{\delta}_y^k,\boldsymbol{\delta}_\lambda^k,\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right]^T$，得到下一个迭代点$\boldsymbol{z}^{k+1}=[\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{\lambda}^{k+1},\boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T$

$$\boldsymbol{z}^{k+1}=\boldsymbol{z}^k+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k$$

(2) 在可行路径跟踪法中，当前点$\boldsymbol{z}^k$是可行域的内点，满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}-A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k-A_I^T\boldsymbol{\mu}^k=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{\mu}^k\geq\boldsymbol{0}\\&A_E\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\&A_I\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}_I-\boldsymbol{y}^k=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{y}^k\geq\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

将点$\boldsymbol{z}^{k+1}$带入扰动KKT条件(KKT_τ)，略去关于扰动量的二次项$\boldsymbol{\delta}_y^k\circ\boldsymbol{\delta}_\mu^k$，得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}-A_E^T\left(\boldsymbol{\lambda}^k+\boldsymbol{\delta}_\lambda^k\right)-A_I^T\left(\boldsymbol{\mu}^k+\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right)=\boldsymbol{0}\\&A_E\left(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\delta}_x^k\right)-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\&A_I\left(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\delta}_x^k\right)-\left(\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{\delta}_y^k\right)=\boldsymbol{b}_I\\&M^{k+1}Y^{k+1}\boldsymbol{e}\approx M^kY^k\boldsymbol{e}+M^k\boldsymbol{\delta}_y^k+Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k=\tau^{k+1}\boldsymbol{e}\end{aligned}$$

化简这四个方程

前三个方程
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}-A_E^T\left(\boldsymbol{\lambda}^k+\boldsymbol{\delta}_\lambda^k\right)-A_I^T\left(\boldsymbol{\mu}^k+\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right)=\boldsymbol{0}\\&A_E\left(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\delta}_x^k\right)-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\&A_I\left(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\delta}_x^k\right)-\left(\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{\delta}_y^k\right)=\boldsymbol{b}_I\end{aligned}$$

$$\downarrow\quad\begin{aligned}&\boldsymbol{c}-A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k-A_I^T\boldsymbol{\mu}^k=\boldsymbol{0}\\&A_E\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\&A_I\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}_I-\boldsymbol{y}^k=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k+A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k=\boldsymbol{0}\\&A_E\boldsymbol{\delta}_x^k=\boldsymbol{0}\\&A_I\boldsymbol{\delta}_x^k-\boldsymbol{\delta}_y^k=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

第四个方程

$$M^{k+1}Y^{k+1}\boldsymbol{e} = (M^k + \Delta M^k)(Y^k + \Delta Y^k)\boldsymbol{e}$$

$$= M^kY^k\boldsymbol{e} + \Delta M^kY^k\boldsymbol{e} + M^k\Delta Y^k\boldsymbol{e} + \Delta M^k\Delta Y^k\boldsymbol{e}$$

$$= M^kY^k\boldsymbol{e} + Y^k\Delta M^k\boldsymbol{e} + M^k\Delta Y^k\boldsymbol{e} + \Delta M^k\Delta Y^k\boldsymbol{e}$$

$$= M^kY^k\boldsymbol{e} + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k + M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + \boldsymbol{\delta}_y^k \circ \boldsymbol{\delta}_\mu^k$$

略去

$$\approx M^kY^k\boldsymbol{e} + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k + M^k\boldsymbol{\delta}_y^k$$

略去关于扰动量的二次项$\boldsymbol{\delta}_y^k \circ \boldsymbol{\delta}_\mu^k$后

$$M^{k+1}Y^{k+1}\boldsymbol{e} \approx M^kY^k\boldsymbol{e} + M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \tau^{k+1}\boldsymbol{e}$$

$$M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \tau^{k+1}\boldsymbol{e} - M^kY^k\boldsymbol{e}$$

化简后，得方程组

$$\begin{aligned}
&A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \mathbf{0}\\
&A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = \mathbf{0}\\
&A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k = \mathbf{0}\\
&M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \tau^{k+1}\boldsymbol{e} - M^kY^k\boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\delta}_z^k = [\boldsymbol{\delta}_x^k, \boldsymbol{\delta}_y^k, \boldsymbol{\delta}_\lambda^k, \boldsymbol{\delta}_\mu^k]^T$$

方程组的矩阵式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & M^k & \mathbf{0} & Y^k \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_z^k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tau^{k+1}\boldsymbol{e} - M^kY^k\boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

左乘 $-(Y^k)^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -(Y^k)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_z^k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e} + (Y^k)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中，矩阵运算

$$\left(Y^k\right)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix} y_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_m^k \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mu_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_m^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_m^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{y_1^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{y_m^k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_m^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_m^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\mu_1^k}{y_1^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\mu_m^k}{y_m^k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_m^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mu_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_m^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\mu}^k$$

$$\boldsymbol{\mu}^k=\begin{bmatrix} \mu_1^k \\ \vdots \\ \mu_m^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e}+\left(Y^k\right)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\left(Y^k\right)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\mu}^k$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{\delta}_y^k \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \\ \boldsymbol{\delta}_\mu^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_y^k&=-\tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e}+\left(Y^k\right)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e}\\&=\boldsymbol{\mu}^k-\tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta}_y^k=A_I\boldsymbol{\delta}_x^k$$
$$\boldsymbol{\delta}_\mu^k=\boldsymbol{v}_y^k-\left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_y^k$$

(3) 简化方程组 $$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$-\left(Y^k\right)^{-1}M^k$	$\mathbf{0}$	$-I$	$-\boldsymbol{v}_y^k$
A_E	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
A_I	$-I$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

$-\left(M^k\right)^{-1}Y^k \times ② \Longrightarrow ②$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	I	$\mathbf{0}$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$
A_E	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
A_I	$-I$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	I	$\mathbf{0}$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$
A_E	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
A_I	$-I$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

$② + ④ \Longrightarrow ④$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	I	$\mathbf{0}$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$
A_E	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
A_I	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$

$H^k = A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I$ $\boldsymbol{p}^k = -A_I^T\boldsymbol{v}_y^k$ $A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^k \times ④ - ① \Longrightarrow ④$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	I	$\mathbf{0}$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k$	$\left(M^k\right)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$
A_E	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
H^k	$\mathbf{0}$	$-A_E^T$	$\mathbf{0}$	$-\boldsymbol{p}^k$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	I	$\mathbf{0}$	$(M^k)^{-1}Y^k$	$(M^k)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$
A_E	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
H^k	$\mathbf{0}$	$-A_E^T$	$\mathbf{0}$	$-\boldsymbol{p}^{(k)}$

$\times(-1)$

$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{\delta}_y^k \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \\ \boldsymbol{\delta}_\mu^k \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A_E^T	A_I^T	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	I	$\mathbf{0}$	$(M^k)^{-1}Y^k$	$(M^k)^{-1}Y^k\boldsymbol{v}_y^k$
$-A_E$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
H^k	$\mathbf{0}$	$-A_E^T$	$\mathbf{0}$	$-\boldsymbol{p}^k$

$$H^k = A_I^T (Y^k)^{-1} M^k A_I \qquad \boldsymbol{p}^k = -A_I^T \boldsymbol{v}_y^k$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} H^k & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} & -A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = \mathbf{0} \\ & H^k\boldsymbol{\delta}_x^k - A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\boldsymbol{p}^k \end{aligned}$$

二次规划与方程组之间的关系

$$\min q(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T Q\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{p} \quad \text{s.t.}\ A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\min q(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T Q\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{p} \quad \text{s.t.}\ -A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

$$\downarrow$$

$$L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T Q\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\lambda}^T(-A\boldsymbol{u})$$

$$\nabla L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) = Q\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

$$-A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & -A\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \\ & Q\boldsymbol{u} - A^T\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = \mathbf{0} \\ & H^k\boldsymbol{\delta}_x^k - A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\boldsymbol{p}^k \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} & \min \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta}_x^k]^T H^k \boldsymbol{\delta}_x^k + [\boldsymbol{\delta}_x^k]^T\boldsymbol{p}^k \\ & \text{s.t.}\ A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(4) 求解二次规划问题，得到$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$

$$\min \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta}_x^k]^T H^k \boldsymbol{\delta}_x^k + [\boldsymbol{\delta}_x^k]^T \boldsymbol{p}^k$$
$$\text{s.t.}\, A_E \boldsymbol{\delta}_x^k = \mathbf{0}$$

调用MATLAB函数quadprog

可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$
计算稳定性好，效率高

直接解

$$-A_E \boldsymbol{\delta}_x^k = \mathbf{0}$$
$$H^k \boldsymbol{\delta}_x^k - A_E^T \boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\boldsymbol{p}^k$$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\delta}_x^k - \left(H^k\right)^{-1} A_E^T \boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\left(H^k\right)^{-1} \boldsymbol{p}^k$$

$$\underbrace{A_E \boldsymbol{\delta}_x^k}_{0} - A_E\left(H^k\right)^{-1} A_E^T \boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -A_E\left(H^k\right)^{-1} \boldsymbol{p}^k$$

$$\left[A_E\left(H^k\right)^{-1} A_E^T\right] \boldsymbol{\delta}_\lambda^k = A_E\left(H^k\right)^{-1} \boldsymbol{p}^k$$

解线性方程组，得 $\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$

$$\boldsymbol{\delta}_x^k = \left(H^k\right)^{-1} A_E^T \boldsymbol{\delta}_\lambda^k - \left(H^k\right)^{-1} \boldsymbol{p}^k$$

一般不用此方法，
因，矩阵求拟不稳定

(5) 求解$\boldsymbol{\delta}_y^k$和$\boldsymbol{\delta}_\mu^k$

$$\boldsymbol{\delta}_y^k = A_I \boldsymbol{\delta}_x^k$$
$$\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \boldsymbol{v}_y^k - \left(Y^k\right)^{-1} M^k \boldsymbol{\delta}_y^k$$

这样，新的迭代点为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_y^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k \end{cases}$$

步长求解

原-对偶可行路径跟踪法要求所有迭代点$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$都满足$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_y^k > 0 \\ \boldsymbol{\mu}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{P,\min}^k = \min\left\{ -\frac{\left(\boldsymbol{y}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2 \right\} \\ \alpha_P^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{P,\min}^k\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{D,\min}^k = \min\left\{ -\frac{\left(\boldsymbol{\mu}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2 \right\} \\ \alpha_D^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{D,\min}^k\right\} \end{cases}$$

通常

$$c = 1 - 10^{-3}$$
$$1 - 10^{-3} \leq c \leq 1 - 10^{-6}$$

也有采用
$$\alpha^k = \min\left\{\alpha_P^k, \alpha_D^k\right\}$$

中心参数的更新公式

中心参数：缩减因子$\tau \to 0$

需要满足：

①保证下一个迭代点$\boldsymbol{z}^{k+1} = [\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T$仍满足$\boldsymbol{y}^{k+1} > 0$和$\boldsymbol{\mu}^{k+1} > 0$

②使得对偶间隔δ_{PD}越来越小

③使得迭代点离中心轨迹越来越近

研究成果：

$$\sigma^k = \frac{m_2}{m_2 + \rho}, \qquad \rho > \sqrt{m_2}$$
$$\tau^{k+1} = \sigma^k \tau^k = \frac{m_2 \tau^k}{m_2 + \rho}$$

原-对偶可行路径跟踪法的计算步骤

步骤1： 输入参数$\boldsymbol{c}, A_E, \boldsymbol{b}_E, A_I, \boldsymbol{b}_I$，选定初始点$\boldsymbol{z}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)$
设定精度tol，令$k = 0$

步骤2： 计算缩减因子

$$\sigma^k = \frac{m_2}{m_2+\rho}, \qquad \rho > \sqrt{m_2}$$

$$\tau^{k+1} = \sigma^k \tau^k = \frac{m_2 \tau^k}{m_2+\rho}$$

求解$\boldsymbol{\delta}_x^k$ 和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$

$$\min \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta}_x^k]^T H^k \boldsymbol{\delta}_x^k + [\boldsymbol{\delta}_x^k]^T \boldsymbol{p}^k$$
$$\text{s.t.}\ A_E \boldsymbol{\delta}_x^k = \boldsymbol{0}$$

$$H^k = A_I^T \left(Y^k\right)^{-1} M^k A_I$$
$$\boldsymbol{p}^k = -A_I^T \boldsymbol{v}_y^k$$

调用MATLAB函数quadprog

可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$
计算稳定性好，效率高

求解$\boldsymbol{\delta}_y^k$和$\boldsymbol{\delta}_\mu^k$

$$\boldsymbol{\delta}_y^k = A_I \boldsymbol{\delta}_x^k$$
$$\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \boldsymbol{v}_y^k - \left(Y^k\right)^{-1} M^k \boldsymbol{\delta}_y^k$$

步骤3： 计算步长

$$\begin{cases} \alpha_{P,\min}^k = \min\left\{-\dfrac{(\boldsymbol{y}^k)_i}{(\boldsymbol{\delta}_y^k)_i} \middle| (\boldsymbol{\delta}_y^k)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_P^k = \min\{1, c\cdot\alpha_{P,\min}^k\} \end{cases}$$

通常
$c = 1 - 10^{-3}$

$$\begin{cases} \alpha_{D,\min}^k = \min\left\{-\dfrac{(\boldsymbol{\mu}^k)_i}{(\boldsymbol{\delta}_{\mu}^k)_i} \middle| (\boldsymbol{\delta}_{\mu}^k)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_D^k = \min\{1, c\cdot\alpha_{D,\min}^k\} \end{cases}$$

步骤4： 计算新的迭代点

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha_P^k\boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^k + \alpha_P^k\boldsymbol{\delta}_y^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha_D^k\boldsymbol{\delta}_\lambda^k \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \alpha_D^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k \end{cases}$$

步骤5： 计算新的对偶间隔 $\delta_{PD}^{k+1} = [\boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T\boldsymbol{y}^{k+1}$

步骤6： 如果$\delta_{PD}^{k+1} < tol$，迭代终止；
$f(\boldsymbol{x}^{k+1}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1}$为目标函数极小值，$\boldsymbol{z}^{k+1}$为原-对偶解。
否则，$k = k+1$，转到步骤2

1. 线性规划的原问题与对偶问题

2. 原-对偶可行路径跟踪法

①问题形式

②原-对偶可行路径跟踪法的基本原理

③原-对偶可行路径跟踪法的计算步骤

④实例测试

3. 原-对偶非可行路径跟踪法

4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

例9.2 用原-对偶可行路径跟踪法求解

$$\begin{aligned} \max f(x) &= x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.}\ 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 &\le 6 \\ x_3 &\le 4 \\ \boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min -f(x) &= -x_1 - x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t.}\ -3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{4}x_3 &\ge -6 \\ -x_3 &\ge -4 \\ \boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

初始点$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.612, 0.9269, 2.0349)$, $tol = 1 \times 10^{-4}$

example_9_2_XinggaoLiu.m

x_optimal =
0.0000
2.4999
4.0000

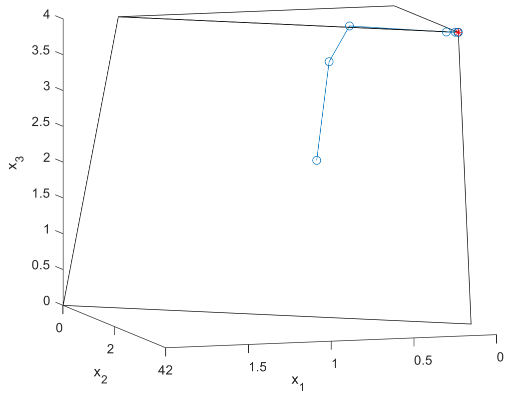
y_optimal =
0.0000
0.0000
0.0000
2.5000
4.0000

f_optimal = 22.4999

k = 8

lamda_optimal = [ ]

mu_optimal =
0.5000
4.8750
0.5000
0.0000
0.0000



M05M11084 最优化理论、算法与应用

7-2 线性规划问题的内点法

1. 线性规划的原问题与对偶问题

2. 原-对偶可行路径跟踪法

3. 原-对偶非可行路径跟踪法

①原-对偶非可行路径跟踪法的基本原理

②原-对偶非可行路径跟踪法的计算步骤

③实例测试

4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

1. 线性规划的原问题与对偶问题

2. 原-对偶可行路径跟踪法

3. 原-对偶非可行路径跟踪法

①原-对偶非可行路径跟踪法的基本原理

- ✓ 扰动KKT条件的线性化及求解
- ✓ 步长和中心参数计算

②原-对偶非可行路径跟踪法的计算步骤

③实例测试

4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

扰动KKT条件的线性化及求解

(1) 对当前迭代点$\boldsymbol{z}^k=[\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{\lambda}^k,\boldsymbol{\mu}^k]^T$做适当的扰动$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k=\left[\boldsymbol{\delta}_x^k,\boldsymbol{\delta}_y^k,\boldsymbol{\delta}_\lambda^k,\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right]^T$，得到下一个迭代点$\boldsymbol{z}^{k+1}=[\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{\lambda}^{k+1},\boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T$

$$\boldsymbol{z}^{k+1}=\boldsymbol{z}^k+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k$$

(2) 将点$\boldsymbol{z}^{k+1}$带入扰动KKT条件，略去关于扰动量的二次项，得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}-A_E^T\left(\boldsymbol{\lambda}^k+\boldsymbol{\delta}_\lambda^k\right)-A_I^T\left(\boldsymbol{\mu}^k+\boldsymbol{\delta}_\mu^k\right)=\boldsymbol{0}\\
&A_E\left(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\delta}_x^k\right)-\boldsymbol{b}_E=\boldsymbol{0}\\
&A_I\left(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\delta}_x^k\right)-\left(\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{\delta}_y^k\right)=\boldsymbol{b}_I\\
&M^{k+1}Y^{k+1}\boldsymbol{e}\approx M^kY^k\boldsymbol{e}+M^k\boldsymbol{\delta}_y^k+Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k=\tau^{k+1}\boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

其中，矩阵运算

$$\begin{aligned}
\left(Y^k\right)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e}&=\begin{bmatrix}y_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&y_m^k\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\mu_m^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&y_m^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{1}{y_1^k}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\frac{1}{y_m^k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\mu_m^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&y_m^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{\mu_1^k}{y_1^k}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\frac{\mu_m^k}{y_m^k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&y_m^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\mu_1^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\mu_m^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\\
&=\boldsymbol{\mu}^k
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\mu}^k=\begin{bmatrix}\mu_1^k\\\vdots\\\mu_m^k\end{bmatrix}$$

注意：当前点$\boldsymbol{z}^k$不是可行域的内点

含有$\boldsymbol{\delta}$的项放在左边

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c} - A_E^T(\boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\delta}_\lambda^k) - A_I^T(\boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\delta}_\mu^k) = \boldsymbol{0}\\
&A_E(\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\delta}_x^k) - \boldsymbol{b}_E = \boldsymbol{0}\\
&A_I(\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\delta}_x^k) - (\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{\delta}_y^k) = \boldsymbol{b}_I\\
&M^k Y^k \boldsymbol{e} + M^k \boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k = \tau^{k+1}\boldsymbol{e}
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k - A_I^T\boldsymbol{\mu}^k\\
A_E\boldsymbol{\delta}_x^k &= \boldsymbol{b}_E - A_E\boldsymbol{x}^k\\
A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k &= \boldsymbol{b}_I - A_I\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y}^k\\
M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \tau^{k+1}\boldsymbol{e} - M^kY^k\boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

对第4个方程，左乘$(Y^k)^{-1}$

$$(Y^k)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + \boldsymbol{\delta}_\mu^k = \tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e} - (Y^k)^{-1}M^kY^k\boldsymbol{e} = \tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\mu}^k$$

$$\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k - A_I^T\boldsymbol{\mu}^k &\triangleq \boldsymbol{v}_x^k\\
A_E\boldsymbol{\delta}_x^k &= \boldsymbol{b}_E - A_E\boldsymbol{x}^k &\triangleq -\boldsymbol{v}_\lambda^k\\
A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k &= \boldsymbol{b}_I - A_I\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y}^k &\triangleq \boldsymbol{v}_\mu^k\\
(Y^k)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + \boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\mu}^k &\triangleq -\boldsymbol{v}_y^k
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \boldsymbol{v}_x^k\\
-(Y^k)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_y^k - \boldsymbol{\delta}_\mu^k &= -\boldsymbol{v}_y^k\\
A_E\boldsymbol{\delta}_x^k &= -\boldsymbol{v}_\lambda^k\\
A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k &= \boldsymbol{v}_\mu^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \boldsymbol{v}_x^k\\
-(Y^k)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_y^k - \boldsymbol{\delta}_\mu^k &= -\boldsymbol{v}_y^k\\
A_E\boldsymbol{\delta}_x^k &= -\boldsymbol{v}_\lambda^k\\
A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k &= \boldsymbol{v}_\mu^k
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & A_E^T & A_I^T\\
\boldsymbol{0} & -(Y^k)^{-1}M^k & \boldsymbol{0} & -I\\
A_E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
A_I & -I & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}
\end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_z^k =
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{v}_x^k\\ -\boldsymbol{v}_y^k\\ -\boldsymbol{v}_\lambda^k\\ \boldsymbol{v}_\mu^k
\end{bmatrix}$$

注意：$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1})$不要求是原问题的可行点，
$(\boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1})$也不要求是对偶问题的可行点

当$\boldsymbol{v}_\lambda^k = \boldsymbol{v}_\mu^k = 0$时，$\boldsymbol{x}^k$是原问题的可行点

$$\begin{bmatrix}
\boldsymbol{v}_x^k\\ -\boldsymbol{v}_y^k\\ -\boldsymbol{v}_\lambda^k\\ \boldsymbol{v}_\mu^k
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k - A_I^T\boldsymbol{\mu}^k\\
\boldsymbol{\mu}^k - \tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e}\\
\boldsymbol{b}_E - A_E\boldsymbol{x}^k\\
\boldsymbol{b}_I - A_I\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y}^k
\end{bmatrix}$$

(3) 简化方程组，求解扰动向量

类似地，可得

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^T\left[\boldsymbol{v}_y^k + \left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{v}_\mu^k\right] - \boldsymbol{v}_x^k \\ \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} H^k & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}^k \\ \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} H^k\boldsymbol{\delta}_x^k - A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\boldsymbol{p}^k \\ -A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{array}$$

$$H^k = A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I$$

$$\boldsymbol{p}^k = \boldsymbol{v}_x^k - A_I^T\left[\boldsymbol{v}_y^k + \left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{v}_\mu^k\right]$$

(4) 求解二次规划问题，得到$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$

$$\min \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta}_x^k]^T H^k\boldsymbol{\delta}_x^k + [\boldsymbol{\delta}_x^k]^T\boldsymbol{p}^k$$
$$\text{s.t.}\ A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = -\boldsymbol{v}_\lambda^k$$

调用MATLAB函数quadprog

可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$
计算稳定性好，效率高

直接解

$$\begin{array}{l} H^k\boldsymbol{\delta}_x^k - A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\boldsymbol{p}^k \\ -A_E\boldsymbol{\delta}_x^k = \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{array}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\delta}_x^k - \left(H^k\right)^{-1}A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}^k$$

$$A_E\boldsymbol{\delta}_x^k - A_E\left(H^k\right)^{-1}A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = -A_E\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}^k$$

$$\left[A_E\left(H^k\right)^{-1}A_E^T\right]\boldsymbol{\delta}_\lambda^k = A_E\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}^k - \boldsymbol{v}_\lambda^k$$

解线性方程组，得 $\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$

$$\boldsymbol{\delta}_x^k = \left(H^k\right)^{-1}A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k - \left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}^k$$

步长和中心参数计算

$\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$

$$\begin{cases} \alpha_{P,min}^k = \min\left\{-\dfrac{(\boldsymbol{y}^k)_i}{(\boldsymbol{\delta}_y^k)_i} \middle| (\boldsymbol{\delta}_y^k)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_P^k = \min\{1, c \cdot \alpha_{P,min}^k\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{D,min}^k = \min\left\{-\dfrac{(\boldsymbol{\mu}^k)_i}{(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k)_i} \middle| (\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_D^k = \min\{1, c \cdot \alpha_{D,min}^k\} \end{cases}$$

通常

$$c = 1 - 10^{-3}$$

$$1 - 10^{-3} \leq c \leq 1 - 10^{-6}$$

$$\sigma^k = \frac{m_2}{m_2 + \rho}, \qquad \rho > \sqrt{m_2}$$

$$\tau^{k+1} = \sigma^k \tau^k = \frac{m_2 \tau^k}{m_2 + \rho}$$

1. 线性规划的原问题与对偶问题
2. 原-对偶可行路径跟踪法
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
   ①原-对偶非可行路径跟踪法的基本原理
   ②原-对偶非可行路径跟踪法的计算步骤
   ③实例测试
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

原-对偶非可行路径跟踪法的计算步骤

步骤1：输入参数$\boldsymbol{c}, A_E, \boldsymbol{b}_E, A_I, \boldsymbol{b}_I$，选定初始点$\boldsymbol{z}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)$
设定精度tol，令$k = 0$

步骤2：计算缩减因子

$$\sigma^k = \frac{m_2}{m_2 + \rho}, \qquad \rho > \sqrt{m_2}$$

$$\tau^{k+1} = \sigma^k \tau^k = \frac{m_2 \tau^k}{m_2 + \rho}$$

求解$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$

$$\min \frac{1}{2} [\boldsymbol{\delta}_x^k]^T H^k \boldsymbol{\delta}_x^k + [\boldsymbol{\delta}_x^k]^T \boldsymbol{p}^k$$
$$\mathrm{s.t.}\ A_E \boldsymbol{\delta}_x^k = -\boldsymbol{v}_\lambda^k$$

调用MATLAB函数quadprog
可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_x^k$和$\boldsymbol{\delta}_\lambda^k$
计算稳定性好，效率高

求解$\boldsymbol{\delta}_y^k$和$\boldsymbol{\delta}_\mu^k$

$$\boldsymbol{\delta}_y^k = A_I \boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{v}_\mu^k$$
$$\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \boldsymbol{v}_y^k - \left(Y^k\right)^{-1} M^k \boldsymbol{\delta}_y^k$$

步骤3：计算步长

$$\begin{cases} \alpha_{P,\min}^k = \min\left\{ -\dfrac{\left(\boldsymbol{y}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2 \right\} \\ \alpha_P^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{P,\min}^k\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{D,\min}^k = \min\left\{ -\dfrac{\left(\boldsymbol{\mu}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2 \right\} \\ \alpha_D^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{D,\min}^k\right\} \end{cases}$$

通常
$c = 1 - 10^{-3}$

步骤4：计算新的迭代点

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_y^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k \end{cases}$$

步骤5：计算新的对偶间隔 $\delta_{PD}^{k+1} = [\boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T \boldsymbol{y}^{k+1}$

步骤6：如果$\delta_{PD}^{k+1} < tol$，$f\left(\boldsymbol{x}^{k+1}\right) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^{k+1}$，$\boldsymbol{z}^{k+1}$为目标函数极小值和原-对偶解；
迭代终止。
否则，$k = k + 1$，转到步骤2

1. 线性规划的原问题与对偶问题
2. 原-对偶可行路径跟踪法
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
   ①原-对偶非可行路径跟踪法的基本原理
   ②原-对偶非可行路径跟踪法的计算步骤
   ③实例测试
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

例9.5 用原-对偶可行路径跟踪法求解

$$\max f(x) = x_1 + x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 6$$
$$x_3 \le 4$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

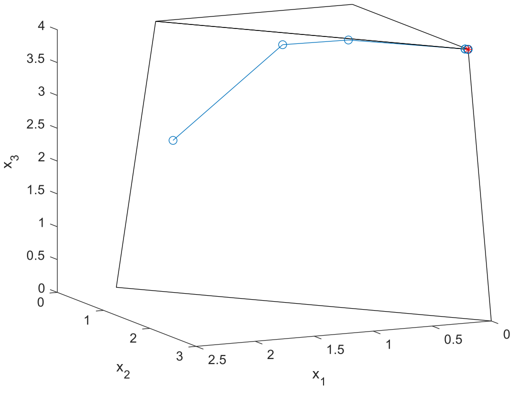
$$\min -f(x) = -x_1 - x_2 - 5x_3$$
$$\text{s.t. } -3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{4}x_3 \ge -6$$
$$-x_3 \ge -4$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

初始点$\boldsymbol{x}^0 = (2.5,2.5,3)$, $tol = 1 \times 10^{-4}$

example_9_5_XinggaoLiu.m

```
x_optimal =
    0.0000
    2.5000
    4.0000

y_optimal =
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    2.5000
    4.0000

f_optimal=22.5000

k = 8
```

```
lamda_optimal =
  空的 0×1 double 列向量

mu_optimal =
    0.5000
    4.8750
    0.5000
    0.0000
    0.0000
```



M05M11084 最优化理论、算法与应用

7-2 线性规划问题的内点法

1. 线性规划的原问题与对偶问题
2. 原-对偶可行路径跟踪法
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法

1. 线性规划的原问题与对偶问题
2. 原-对偶可行路径跟踪法
3. 原-对偶非可行路径跟踪法
4. 带预测校正的原-对偶路径跟踪法
   ①基本原理
   ②计算步骤
   ③实例测试

基本原理

Mehrotra方法借鉴常微分法方程数值解法中的预测校正思想:

对当前迭代点$\boldsymbol{z}^k=[\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{\lambda}^k,\boldsymbol{\mu}^k]^T$，做适当的扰动$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k=\boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k+\boldsymbol{\delta}_{\text{cor}}^k$，

得到下一个迭代点 $\boldsymbol{z}^{k+1}=[\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{\lambda}^{k+1},\boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T$

$$\boldsymbol{z}^{k+1}=\boldsymbol{z}^k+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k$$

$$\boldsymbol{z}^{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{k+1}\\ \boldsymbol{y}^{k+1}\\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1}\\ \boldsymbol{\mu}^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{k}\\ \boldsymbol{y}^{k}\\ \boldsymbol{\lambda}^{k}\\ \boldsymbol{\mu}^{k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{x,\text{pre}}^k+\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{y,\text{pre}}^k+\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{pre}}^k+\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{pre}}^k+\boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{cor}}^k\end{bmatrix}$$

预测方向,仿射方向

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{x,\text{pre}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{y,\text{pre}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{pre}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{pre}}^k\end{bmatrix}$$

校正方向

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{cor}}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k\\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{cor}}^k\end{bmatrix}$$

校正方向补偿线性化的误差，使得搜索方向靠近中心路径

(1) 扰动KKT条件的展开与分解

前面的方法中，最后一个条件，略去了扰动的二次项

$M^{k+1}Y^{k+1}\boldsymbol{e} \approx M^kY^k\boldsymbol{e} + M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k$

保留

事实上 $M^{k+1}Y^{k+1}\boldsymbol{e} = M^kY^k\boldsymbol{e} + M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k + \Delta Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c} - A_E^T(\boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\delta}_\lambda^k) - A_I^T(\boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\delta}_\mu^k) = \boldsymbol{0}\\
&A_E(\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\delta}_x^k) - \boldsymbol{b}_E = \boldsymbol{0}\\
&A_I(\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\delta}_x^k) - (\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{\delta}_y^k) = \boldsymbol{b}_I\\
&M^kY^k\boldsymbol{e} + M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k + \Delta Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k = \tau^{k+1}\boldsymbol{e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k - A_I^T\boldsymbol{\mu}^k\\
A_E\boldsymbol{\delta}_x^k &= \boldsymbol{b}_E - A_E\boldsymbol{x}^k\\
A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k &= \boldsymbol{b}_I - A_I\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y}^k\\
M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= M^kY^k\boldsymbol{e} - \Delta Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k - \tau^{k+1}\boldsymbol{e}
\end{aligned}
$$

(1) 扰动KKT条件的展开与分解

$$
\begin{aligned}
A_E^T\boldsymbol{\delta}_\lambda^k + A_I^T\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= \boldsymbol{c} - A_E^T\boldsymbol{\lambda}^k - A_I^T\boldsymbol{\mu}^k\\
A_E\boldsymbol{\delta}_x^k &= \boldsymbol{b}_E - A_E\boldsymbol{x}^k\\
A_I\boldsymbol{\delta}_x^k - \boldsymbol{\delta}_y^k &= \boldsymbol{b}_I - A_I\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y}^k\\
M^k\boldsymbol{\delta}_y^k + Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k &= M^kY^k\boldsymbol{e} - \Delta Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k - \tau^{k+1}\boldsymbol{e}
\end{aligned}
$$

左乘$-(Y^k)^{-1}$

$$
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & A_E^T & A_I^T\\
\boldsymbol{0} & -(Y^k)^{-1}M^k & \boldsymbol{0} & -I\\
A_E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
A_I & -I & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}
\end{bmatrix}
\boldsymbol{\delta}_z^k =
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{v}_x^k\\
\boldsymbol{\mu}^k + (Y^k)^{-1}\Delta Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k - \tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e}\\
-\boldsymbol{v}_\lambda^k\\
\boldsymbol{v}_\mu^k
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & A_E^T & A_I^T\\
\boldsymbol{0} & -(Y^k)^{-1}M^k & \boldsymbol{0} & -I\\
A_E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
A_I & -I & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}
\end{bmatrix}
(\boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k + \boldsymbol{\delta}_{\text{cor}}^k) =
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{v}_x^k\\
\boldsymbol{\mu}^k\\
-\boldsymbol{v}_\lambda^k\\
\boldsymbol{v}_\mu^k
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0\\
(Y^k)^{-1}\Delta Y^k\boldsymbol{\delta}_\mu^k - \tau^{k+1}(Y^k)^{-1}\boldsymbol{e}\\
0\\
0
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\left(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{pre}}^k + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{cor}}^k\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_x^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \\ -\boldsymbol{v}_\lambda^k \\ \boldsymbol{v}_\mu^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(Y^k\right)^{-1}\Delta Y^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k - \tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

分成两个方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_x^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \\ -\boldsymbol{v}_\lambda^k \\ \boldsymbol{v}_\mu^k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{pre}}^k$$

?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{cor}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left(Y^k\right)^{-1}\Delta Y^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k - \tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{cor}}^k$$

取 $\Delta Y^k \approx \Delta Y_{\mathrm{pre}}^k$， $\boldsymbol{\delta}_\mu^k \approx \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k$

$$-\boldsymbol{v}_y^k = \left(Y^k\right)^{-1}\Delta Y_{\mathrm{pre}}^k \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k - \tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e}$$

预测方向、校正方向的方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_x^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \\ -\boldsymbol{v}_\lambda^k \\ \boldsymbol{v}_\mu^k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{pre}}^k \qquad \text{预测方向}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_E^T & A_I^T \\ \mathbf{0} & -\left(Y^k\right)^{-1}M^k & \mathbf{0} & -I \\ A_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_I & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{cor}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{cor}}^k \qquad \text{校正方向}$$

$$-\boldsymbol{v}_y^k = \left(Y^k\right)^{-1}\Delta Y_{\mathrm{pre}}^k \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k - \tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e}$$

(2) 简化方程组，求解扰动向量

类似地，可得预测方向

$$\begin{bmatrix} A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^T\left[-\boldsymbol{\mu}^k + \left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{v}_\mu^k\right] - \boldsymbol{v}_x^k \\ \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H^k & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} H^k &= A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I \\ \boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k &= \boldsymbol{v}_x^k - A_I^T\left[-\boldsymbol{\mu}^k + \left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{v}_\mu^k\right] \end{aligned}$$

求解$\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k$ 和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k$

$$\min \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k\right]^T H^k\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k + \left[\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k\right]^T\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k$$
$$\mathrm{s.t.}\ A_E\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k = -\boldsymbol{v}_\lambda^k$$

调用MATLAB函数quadprog

同时可得，$\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k$和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k$

计算稳定性好，效率高

求解$\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^k$和$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k$

$$\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^k = A_I\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k - \boldsymbol{v}_\mu^k$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^k = -\boldsymbol{\mu}^k - \left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^k$$

另一种解方程组的方法

不常用

当$A_E \neq \emptyset$时

$$\begin{bmatrix} H^k & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k \\ \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} H^k & -A_E^T & -\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k \\ -A_E & \mathbf{0} & \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} I & -\left(H^k\right)^{-1}A_E^T & -\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k \\ -A_E & \mathbf{0} & \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{matrix} \qquad \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^k = \left(H^k\right)^{-1}\left[A_E^T\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k - \boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k\right]$$

$$\begin{matrix} A_E & -A_E\left(H^k\right)^{-1}A_E^T & -A_E\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k \\ -A_E & \mathbf{0} & \boldsymbol{v}_\lambda^{(k)} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{0} & -A_E\left(H^k\right)^{-1}A_E^T & \boldsymbol{v}_\lambda^k - A_E\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k \\ -A_E & \mathbf{0} & \boldsymbol{v}_\lambda^k \end{matrix} \qquad A_E\left(H^k\right)^{-1}A_E^T\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k = A_E\left(H^k\right)^{-1}\boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^k - \boldsymbol{v}_\lambda^k$$

解线性方程组，得到$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^k$

另一种解方程组的方法

不常用

当$A_E=\emptyset$时

$$\begin{bmatrix} H^k & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\text{pre}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{pre}}^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}_{\text{pre}}^k \\ \boldsymbol{v}_{\lambda}^k \end{bmatrix}$$

$$H^k\boldsymbol{\delta}_{x,\text{pre}}^k=-\boldsymbol{p}_{\text{pre}}^k$$

解线性方程组，得到$\boldsymbol{\delta}_{x,\text{pre}}^k$

$$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{pre}}^k=\emptyset$$

校正方向

$$\begin{bmatrix} A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_I^T\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$H^k=A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I$$

$$\boldsymbol{p}_{\text{cor}}^k=-A_I^T\boldsymbol{v}_y^k$$

$$\begin{bmatrix} H^k & -A_E^T \\ -A_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k \\ \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_I^T\boldsymbol{v}_y^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

求解$\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k$ 和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k$

$$\min\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k\right]^TH^k\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k+\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k\right]^T\boldsymbol{p}_{\text{cor}}^k$$

$$\text{s.t.}\,A_E\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k=-\boldsymbol{v}_{\lambda}^k$$

调用MATLAB函数quadprog

可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k$和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k$

计算稳定性好，效率高

求解$\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k$和$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{cor}}^k$

$$\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k=A_I\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{cor}}^k=\boldsymbol{v}_y^k-\left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k$$

计算步长 沿扰动方向$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k$的步长计算

$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k = \boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k + \boldsymbol{\delta}_{\text{cor}}^k$$

$$\begin{cases} \alpha_{P,\min}^k = \min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{y}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_P^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{P,\min}^k\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{D,\min}^k = \min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{\mu}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_D^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{D,\min}^k\right\} \end{cases}$$

通常

$$c = 1 - 10^{-3}$$

$$1 - 10^{-3} \le c \le 1 - 10^{-6}$$

计算步长 沿预测方向$\boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k$的步长 用于计算中心参数

$$\begin{cases} \alpha_{P,\text{pre},\min}^k = \min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{y}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_{y,\text{pre}}^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_{y,\text{pre}}^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_{P,\text{pre}}^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{P,\text{pre},\min}^{(k)}\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{D,\text{pre},\min}^k = \min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{\mu}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu},\text{pre}}^k\right)_i} \middle| \left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu},\text{pre}}^k\right)_i < 0, i = 1,2,\dots,m_2\right\} \\ \alpha_{D,\text{pre}}^k = \min\left\{1, c \cdot \alpha_{D,\text{pre},\min}^k\right\} \end{cases}$$

通常

$$c = 1 - 10^{-3}$$

$$1 - 10^{-3} \le c \le 1 - 10^{-6}$$

计算中心参数

参数τ估计（Mehrotra方法）　　启发式公式，无严格理论

$$\sigma^k = \left(\frac{\tau_{\text{pre}}^k}{\tau^k}\right)^3$$

$$\tau_{\text{pre}}^k = \frac{1}{m_2}\left[\left(\boldsymbol{\mu}^k + \alpha_{D,\text{pre}}^k \boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{pre}}^k\right)^T \left(\boldsymbol{y}^k + \alpha_{P,\text{pre}}^k \boldsymbol{\delta}_{y,\text{pre}}^k\right)\right]$$

$$\tau^k = \frac{\left(\boldsymbol{\mu}^k\right)^T \boldsymbol{y}^k}{m_2}$$

$$\tau^{k+1} = \sigma^k \tau^k$$

带预测校正的原-对偶路径跟踪法的计算步骤

步骤1：输入参数$\boldsymbol{c}, A_E, \boldsymbol{b}_E, A_I, \boldsymbol{b}_I$，选定初始点$\boldsymbol{z}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)$
设定精度tol，令$k = 0$

步骤2：计算预测（仿射）方向$\boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k$

①计算参数

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_x^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \\ -\boldsymbol{v}_\lambda^k \\ \boldsymbol{v}_\mu^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} - A_E^T \boldsymbol{\lambda}^k - A_I^T \boldsymbol{\mu}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \\ \boldsymbol{b}_E - A_E \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{b}_I - A_I \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y}^k \end{bmatrix}$$

$$H^k = A_I^T \left(Y^k\right)^{-1} M^k A_I$$

$$\boldsymbol{p}_{\text{pre}}^k = \boldsymbol{v}_x^k - A_I^T \left[-\boldsymbol{\mu}^k + \left(Y^k\right)^{-1} M^k \boldsymbol{v}_\mu^k\right]$$

步骤2：计算预测（仿射）方向 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{pre}}^{k}=\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}\quad \boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}\quad \boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^{k}\quad \boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^{k}\right]^{T}$

②求解$\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}$ 和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^{k}$

$$\min \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}\right]^{T} H^{k} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}+\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}\right]^{T} \boldsymbol{p}_{\mathrm{pre}}^{k}$$
$$\text{s.t.}\, A_{E} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}=-\boldsymbol{v}_{\lambda}^{k}$$

调用MATLAB函数quadprog

可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}$和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\mathrm{pre}}^{k}$
计算稳定性好，效率高

③求解$\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}$和$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^{k}$

$$\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}=A_{I} \boldsymbol{\delta}_{x,\mathrm{pre}}^{k}-\boldsymbol{v}_{\mu}^{k}$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^{k}=-\boldsymbol{\mu}^{k}-\left(Y^{k}\right)^{-1} M^{k} \boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}$$

步骤3：计算预测（仿射）方向的步长$\alpha_{P,\mathrm{pre}}^{k}$和$\alpha_{D,\mathrm{pre}}^{k}$

$$\begin{cases}\alpha_{P,\mathrm{pre,min}}^{k}=\min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{y}^{k}\right)_{i}}{\left(\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}\right)_{i}}\middle|\left(\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}\right)_{i}<0, i=1,2,\ldots,m_{2}\right\}\\ \alpha_{P,\mathrm{pre}}^{k}=\min\left\{1, c\cdot\alpha_{P,\mathrm{pre,min}}^{k}\right\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_{D,\mathrm{pre,min}}^{k}=\min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{\mu}^{k}\right)_{i}}{\left(\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^{k}\right)_{i}}\middle|\left(\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^{k}\right)_{i}<0, i=1,2,\ldots,m_{2}\right\}\\ \alpha_{D,\mathrm{pre}}^{k}=\min\left\{1, c\cdot\alpha_{D,\mathrm{pre,min}}^{k}\right\}\end{cases}$$

通常

$$c=1-10^{-3}$$
$$1-10^{-3}\leq c\leq 1-10^{-6}$$

步骤4：计算中心参数σ^{k}与缩减因子τ^{k+1}

$$\sigma^{k}=\left(\frac{\tau_{\mathrm{pre}}^{k}}{\tau^{k}}\right)^{3}$$

$$\tau^{k+1}=\sigma^{k}\tau^{k}$$

$$\tau_{\mathrm{pre}}^{k}=\frac{1}{m_{2}}\left[\left(\boldsymbol{\mu}^{k}+\alpha_{D,\mathrm{pre}}^{k}\boldsymbol{\delta}_{\mu,\mathrm{pre}}^{k}\right)^{T}\left(\boldsymbol{y}^{k}+\alpha_{P,\mathrm{pre}}^{k}\boldsymbol{\delta}_{y,\mathrm{pre}}^{k}\right)\right]$$

$$\tau^{k}=\frac{\left(\boldsymbol{\mu}^{k}\right)^{T}\boldsymbol{y}^{k}}{m_{2}}$$

步骤5： 计算校正方向$\boldsymbol{\delta}_{\text{cor}}^k$，以及搜索方向$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k$

①计算参数 $\boldsymbol{v}_y^k = \tau^{k+1}\left(Y^k\right)^{-1}\boldsymbol{e} - \left(Y^k\right)^{-1}\Delta Y_{\text{pre}}^k\boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{pre}}^k$

$H^k = A_I^T\left(Y^k\right)^{-1}M^kA_I$

$\boldsymbol{p}_{\text{cor}}^k = -A_I^T\boldsymbol{v}_y^k$

②求解$\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k$ 和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k$

$$\min \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k\right]^T H^k\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k + \left[\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k\right]^T\boldsymbol{p}_{\text{cor}}^k$$
$$\text{s.t.}\, A_E\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k = \boldsymbol{0}$$

调用MATLAB函数quadprog

可以同时得到，$\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k$和$\boldsymbol{\delta}_{\lambda,\text{cor}}^k$

计算稳定性好，效率高

③求解$\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k$和$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{cor}}^k$

$$\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k = A_I\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^k$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mu,\text{cor}}^k = \boldsymbol{v}_y^k - \left(Y^k\right)^{-1}M^k\boldsymbol{\delta}_{y,\text{cor}}^k$$

注意：if $A_E = []$; $\boldsymbol{\delta}_{x,\text{cor}}^{(k)} = []$

④计算搜索方向 $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k = \boldsymbol{\delta}_{\text{pre}}^k + \boldsymbol{\delta}_{\text{cor}}^k$

步骤6： 计算搜索方向$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{z}}^k$的步长$\alpha_P^k$和$\alpha_D^k$

$$\begin{cases} \alpha_{P,\min}^k = \min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{y}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i}\middle|\left(\boldsymbol{\delta}_y^k\right)_i < 0, i = 1,2,\ldots,m_2\right\} \\ \alpha_P^k = \min\left\{1, c\cdot\alpha_{P,\min}^k\right\} \end{cases}$$

通常
$c = 1 - 10^{-3}$

$$\begin{cases} \alpha_{D,\min}^k = \min\left\{-\dfrac{\left(\boldsymbol{\mu}^k\right)_i}{\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k\right)_i}\middle|\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\mu}}^k\right)_i < 0, i = 1,2,\ldots,m_2\right\} \\ \alpha_D^k = \min\left\{1, c\cdot\alpha_{D,\min}^k\right\} \end{cases}$$

步骤7：计算新的迭代点

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_x^k \\ \boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^k + \alpha_P^k \boldsymbol{\delta}_y^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\lambda^k \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \alpha_D^k \boldsymbol{\delta}_\mu^k \end{cases}$$

步骤8：计算新的对偶间隔　$\delta_{PD}^{k+1} = [\boldsymbol{\mu}^{k+1}]^T \boldsymbol{y}^{k+1}$

步骤9：如果$\delta_{PD}^{k+1} < tol$，$f\left(\boldsymbol{x}^{k+1}\right) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^{k+1}$，$\boldsymbol{z}^{k+1}$为目标函数极小值和原-对偶解；
迭代终止
否则，$k = k + 1$，转到步骤2

实例测试

例9.8 用原-对偶可行路径跟踪法求解

$$\begin{gathered} \max f(x) = x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \mathrm{s.t.}\ 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 6 \\ x_3 \le 4 \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{gathered}$$

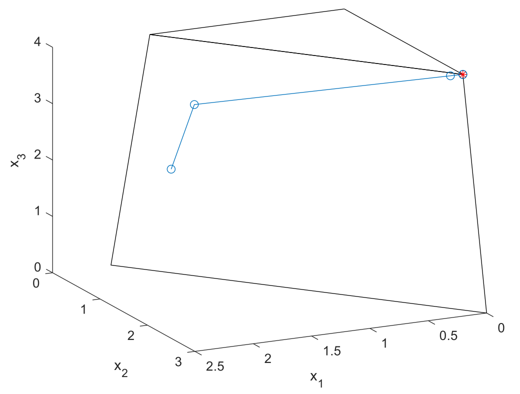
$$\begin{gathered} \min -f(x) = -x_1 - x_2 - 5x_3 \\ \mathrm{s.t.} -3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{4}x_3 \ge -6 \\ -x_3 \ge -4 \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{gathered}$$

初始点$\boldsymbol{x}^0 = (2.5, 2.5, 3)$, $tol = 1 \times 10^{-4}$

example_9_8_XinggaoLiu.m

```
x_optimal =
    0.0000
    2.5000
    4.0000

y_optimal =
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    2.5000
    4.0000

f_optimal = 22.5000

k =  4
```

```
lamda_optimal =
  空的 0×1 double 列向量

mu_optimal =
    0.5000
    4.8750
    0.5000
    0.0000
    0.0000
```



作业

9-1

9-3

9-4