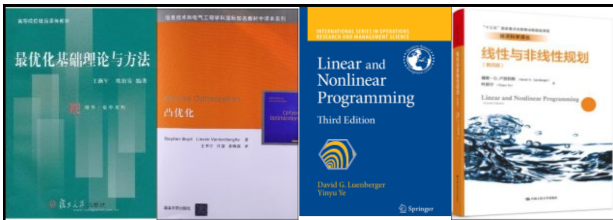
M05M11084 # 最优化理论、算法与应用

7-1 线性规划

讲义和程序下载
（随课程进度更新）

链接：
https://pan.baidu.com/s/1NynYva56GiPsj2gLI59k0Q?pwd=yuan
提取码：yuan



线性规划 1

参考:
1.最优化基础理论与方法，第六章，王燕军等
2. Convex Optimization, Chapter 2, Stephen Boyd
3. Linear and Nonlinear Programming, B2, 3rd ed., David G. Luenberger, Yinyu Ye

1.线性规划的标准形式

2.线性规划可行域的几何特点
- ①可行域是多面体
- ②极点与极方向
- ③多面体的几何分解
- ④最优解与极点的关系

3.单纯形法

4.对偶单纯形法

1.线性规划的标准形式
2.线性规划可行域的几何特点
3.单纯形法
4.对偶单纯形法

线性规划

线性规划：目标函数为变量的线性函数
约束条件为线性等式或线性不等式约束

标准形式：
$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \\ &\quad\quad x \geq 0 \end{aligned} \qquad (LP)$$

$c, x \in \mathcal{R}^n, A \in \mathcal{R}^{m\times n}, b \in \mathcal{R}^m$
假设系数矩阵A行满秩，即 $\operatorname{rank} A = m$

一般形式：
$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, a_i^T x \geq b_i\,, i = 1,2,\dots,l \\ &\quad\quad a_i^T x = b_i, i = l+1, l+2, \dots, m \\ &\quad\quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

以下讨论围绕标准形式展开

几点说明

线性规划：目标函数为变量的线性函数

约束条件为线性等式或线性不等式约束

标准形式：

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\ Ax = b \\ &\quad\ \ x \geq 0 \end{aligned} \qquad (LP)$$

$c, x \in \mathcal{R}^n, A \in \mathcal{R}^{m\times n}, b \in \mathcal{R}^m$

假设系数矩阵A行满秩，即 $\operatorname{rank} A = m$

几点说明：

1. 若$\operatorname{rank} A \neq m$，有两种情况：

①方程组$Ax = b$无解，没有可行点，问题无解

②方程组中有多余的方程，可剔除，不影响可行域

几点说明

线性规划：目标函数为变量的线性函数

约束条件为线性等式或线性不等式约束

标准形式：

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\ Ax = b \\ &\quad\ \ x \geq 0 \end{aligned} \qquad (LP)$$

$c, x \in \mathcal{R}^n, A \in \mathcal{R}^{m\times n}, b \in \mathcal{R}^m$

假设系数矩阵A行满秩，即 $\operatorname{rank} A = m$

几点说明：

2. 一般的线性规划形式转化为标准形式

① 极小化目标函数 $\max c^T x \xLongleftrightarrow{\tilde{c}=-c} \min \tilde{c}^T x$

② 不等式转化为等式

$a_i^T x \geq b_i \iff a_i^T x - s_i = b_i, s_i \geq 0$

$a_i^T x \leq b_i \iff a_i^T x + s_i = b_i, s_i \geq 0$

③ 添加非负约束 $x_i \in \mathcal{R} \iff x_i = x_i^+ - x_i^-, x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$

2. 线性规划可行域的几何特点

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \qquad (LP) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

①可行域是多面体

②多面体的基本性质

③多面体的几何分解

④最优解与极点的关系

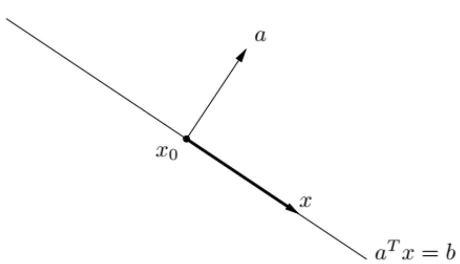
REVIEW

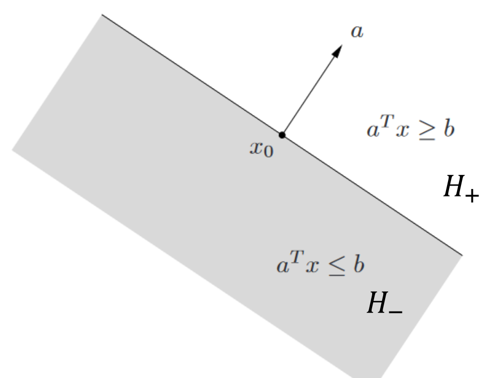
超平面与半空间

定义 $a \neq 0 \in \mathcal{R}^n, b \in \mathcal{R}$

超平面hyperplane $\{x \in \mathcal{R}^n | a^T x = b\}$

半空间halfspace $\{x \in \mathcal{R}^n | a^T x \geq b\}$ 或 $\{x \in \mathcal{R}^n | a^T x \leq b\}$





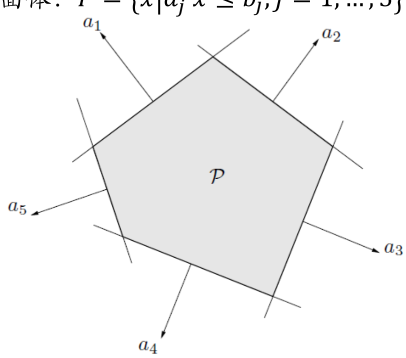
REVIEW

多面体

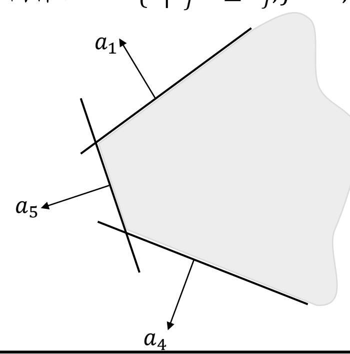
多面体polyhedron：$\{x|a_j^T x \le b_j, j=1,\dots,m; c_j^T x = d_j, j=1,\dots,p\}$

- ✓ 有限个半空间和超平面的交集，凸集
- ✓ 可能是有界的，也可能是无解的
- ✓ 仿射集（如：子空间、超平面、直线），射线，线段和半空间都是多面体

多面体：$P=\{x|a_j^T x \le b_j, j=1,\dots,5\}$



多面体：$P=\{x|a_j^T x \le b_j, j=1,4,5\}$



REVIEW

单纯形　　多面体中重要的一族

设$k+1$个点$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathcal{R}^n$是仿射无关的，即$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_0, \cdots, \boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_0$线性无关，单纯形定义为

$$C=\mathrm{Conv}\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}=\{\theta_0\boldsymbol{v}_0+\theta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\theta_k\boldsymbol{v}_k | \boldsymbol{\theta}\ge 0, \mathbf{1}^T\boldsymbol{\theta}=1\}$$

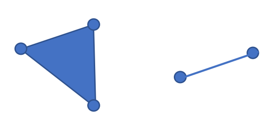
Example 2.5 几种单纯形

①1维单纯形是线段

②2维单纯形是三角形

③3维单纯形是四面体

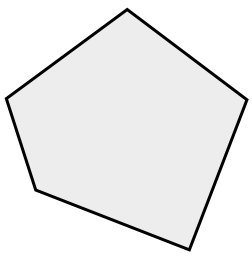
$\mathcal{R}^2$中的单纯形

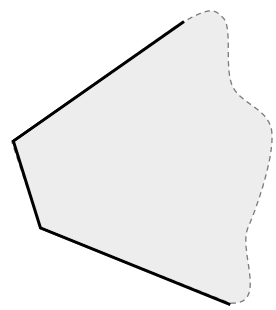


①可行域是多面体

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \qquad (LP) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

可行域 $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$是多面体 $\Longleftarrow$ 超平面的交集





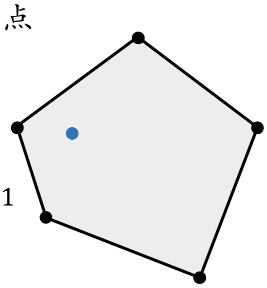
①可行域是多面体

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \qquad (LP) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

可行域 $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$是多面体 $\Longleftarrow$ 超平面的交集

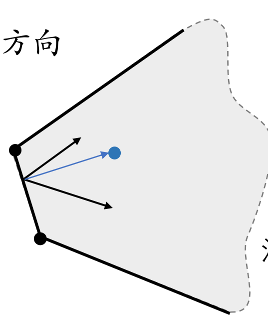
典型的点

$x = \lambda^T v$
$\lambda \geq 0, \mathbf{1}^T \lambda = 1$



点 = 顶点的凸组合

典型的方向



$x = \lambda^T v + \mu^T d$
$\lambda \geq 0, \mathbf{1}^T \lambda = 1$
$\mu \geq 0$

沿着“方向”的点都在S内

点 = 顶点的凸组合 + “方向”的锥组合

2. 线性规划可行域的几何特点

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\ Ax = b \qquad (LP) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

①可行域是多面体

②多面体的基本性质

③多面体的几何分解

④最优解与极点的关系

②多面体的基本性质

(1)极点:
extreme point

给定非空凸集$C \subset \mathcal{R}^n$，$x \in C$，若对$\lambda \in (0,1)$及$x_1, x_2 \in C$，由$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$，可推出$x = x_1 = x_2$，则称$x$为$C$的极点

x不在集合C中其它两点的连接线段上

(2)无界方向:
recession direction

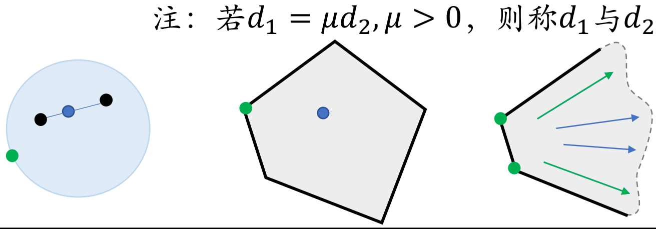
设非空凸集C，非零向量d对任意$x \in C$均有$x + \mu d \in C$，$\forall \mu > 0$，称d为集合C的无界方向

(3)极方向:
extreme direction

若无界方向d不能表示成另外两个无界方向的正线性组合，即不存在$\mu_1, \mu_2 > 0$，使得$d = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$，则称$d$为$C$的极方向

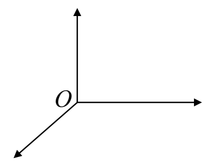
注：若$d_1 = \mu d_2, \mu > 0$，则称d_1与d_2为同一方向

例:



例：

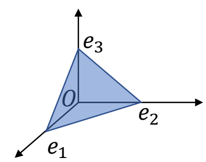
$C=\mathcal{R}_+^n$，极点 $x=0$；极方向 $e_j, j=1,\dots,n$



$P=\{x\in\mathcal{R}^n|1^Tx=1, x\geq 0\}$

极点 $e_j, j=1,\dots,n$; O

极方向 无



多面体$S=\{x|Ax=b, x\geq 0\}$的极点、极方向如何呢?

多面体的极点=$\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$，最多有$C_n^m$个

考虑多面体$S=\{x|Ax=b, x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩

(1) $x\in S$是S的极点当且仅当$x=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$，其中$A=[B \quad N]$，$B$可逆且$B^{-1}b>0$

极点最多有C_n^m个

说明： $A\in\mathcal{R}^{3\times 5}, \operatorname{rank}A=3$ $\quad A=[a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5]$

假设a_1, a_3, a_5线性无关

基矩阵 B $\quad B=[a_1 \quad a_3 \quad a_5]$

非基矩阵 N $\quad N=[a_2 \quad a_4]$

基变量 x_B $\quad x_B=[x_1 \quad x_3 \quad x_5]^T$

非基变量 x_N $\quad x_N=[x_2 \quad x_4]^T$

$x=[x_B \quad x_N]^T$ $\quad Bx_B+Nx_N=b$

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=b$$

$$\underbrace{a_1x_1+a_3x_3+a_5x_5}_{Bx_B}+\underbrace{a_2x_2+a_4x_4}_{Nx_N}=b$$

$$[B \quad N]\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=b$$

多面体的极点 $=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$，最多有 C_n^m 个

考虑多面体 $S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$ 行满秩

(1) $x\in S$ 是 S 的极点当且仅当 $x=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$，其中 $A=[B\quad N]$，B 可逆且 $B^{-1}b>0$

极点最多有 C_n^m 个

说明:

基矩阵 B

非基矩阵 N

基变量 x_B

非基变量 x_N

$x=[x_B\quad x_N]^T$ $\quad Bx_B+Nx_N=b \quad \exists\ B^{-1}$

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \xRightarrow{令x_N=0} \underbrace{\tilde{x}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}}^{基解} \xRightarrow{B^{-1}b>0} 基可行解$$

多面体的极点 $=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$，最多有 C_n^m 个

考虑多面体 $S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$ 行满秩

(1) $x\in S$ 是 S 的极点当且仅当 $x=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$，其中 $A=[B\quad N]$，B 可逆且 $B^{-1}b>0$

极点最多有 C_n^m 个

证明: $\Longleftarrow$ $\quad Ax=[B\quad N]\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}=b \quad\Rightarrow\quad x\in S$

不妨设 $x=\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)\bar{x}\quad \lambda\in(0,1)$; $\tilde{x},\bar{x}\in S$ $\qquad A\tilde{x}=b,\tilde{x}\geq 0$, $A\bar{x}=b,\bar{x}\geq 0$

$$\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\tilde{x}_B\\\tilde{x}_N\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}\bar{x}_B\\\bar{x}_N\end{bmatrix} \qquad \tilde{x}_N\geq 0,\ \bar{x}_N\geq 0$$

$$0=\lambda\tilde{x}_N+(1-\lambda)\bar{x}_N \xRightarrow{\lambda>0,1-\lambda>0} \tilde{x}_N=0,\ \bar{x}_N=0$$

$$A\tilde{x}=[B\quad N]\begin{bmatrix}\tilde{x}_B\\0\end{bmatrix}=b \Rightarrow \tilde{x}_B=B^{-1}b$$

$$A\bar{x}=[B\quad N]\begin{bmatrix}\bar{x}_B\\0\end{bmatrix}=b \Rightarrow \bar{x}_B=B^{-1}b$$

$\Rightarrow x=\tilde{x}=\bar{x} \quad\Rightarrow x$ 是极点

多面体的极点 = $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$，最多有 C_n^m 个

考虑多面体 $S=\{x|Ax=b, x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$ 行满秩

(1) $x\in S$ 是 S 的极点当且仅当 $x=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $A=[B\quad N]$，B 可逆且 $B^{-1}b>0$

极点最多有 C_n^m 个

证明：$\Longrightarrow$ 对于 $x=[x_1\quad\cdots\quad x_n]^T$，可将其 k 个"正的元素"放在左端，"0元素"放在右端

$k\leq m \quad \because \operatorname{rank} A=m$

简单起见，不妨设 $x=[x_1\quad\cdots\quad x_k\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T$，$x_i>0, i=1,\ldots,k$;

设 $A=[a_1\quad\cdots\quad a_n] \quad\Longrightarrow\quad \boxed{a_1,\cdots,a_k \text{ 线性无关}}$

假设存在不全为零的 $\theta_1,\cdots,\theta_k$，使 $\theta_1a_1+\cdots+\theta_ka_k=0$

令 $\theta=[\theta_1\quad\cdots\quad\theta_k\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T \qquad A\theta=\theta_1a_1+\cdots+\theta_ka_k=0$

取 $\tilde{x}=x+\varepsilon\theta, \bar{x}=x-\varepsilon\theta$，$\varepsilon>0$

$A\tilde{x}=Ax+\varepsilon A\theta=b$

$A\bar{x}=Ax-\varepsilon A\theta=b$

$x=\frac{1}{2}\tilde{x}+\frac{1}{2}\bar{x} \qquad x$ 不是极点

选取充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $\tilde{x},\bar{x}\geq 0$

$\tilde{x}\in S$

$\bar{x}\in S$

多面体的极点 = $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$，最多有 C_n^m 个

考虑多面体 $S=\{x|Ax=b, x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$ 行满秩

(1) $x\in S$ 是 S 的极点当且仅当 $x=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $A=[B\quad N]$，B 可逆且 $B^{-1}b>0$

极点最多有 C_n^m 个

证明：$\Longrightarrow$ $a_1,\cdots,a_k$ 线性无关 $\quad k\leq m$

$\because \operatorname{rank} A=m \qquad a_{k+1},\cdots,a_n$ 中必存在 $m-k$ 个列与 $a_1,\cdots,a_k$ 线性无关

简单起见，不妨设为 $a_{k+1},\cdots,a_m$

令 $B=[a_1\quad\cdots\quad a_m], N=[a_{m+1}\quad\cdots\quad a_n]$

$[B\quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}=b \quad\Longrightarrow\quad Bx_B=b \Longrightarrow x_B=B^{-1}b$

$x_B=[x_1\quad\cdots\quad x_k\quad \underbrace{0\quad\cdots\quad 0}_{m-k\text{个}}]^T$

$x=[x_1\quad\cdots\quad x_k\quad \underbrace{0\quad\cdots\quad 0}_{n-k\text{个}}]^T=[x_B\quad \underbrace{0}_{n-m\text{个}}]^T$

矩阵 A 的 n 列中 m 个线性无关的列的不同组合最多有 C_n^m，即可以构成最多有 C_n^m 个不同的矩阵 B

极点最多有 C_n^m 个

多面体的极点 至少存在一个

✓ 非空多面体$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩，则集合$S$至少存在一个极点

证明 取$x\in S$，不失一般性，设$x=[x_1\ \cdots\ x_k\ 0\ \cdots\ 0]^T$，$x_i>0, i=1,\dots,k$

记$A=[a_1\ \cdots\ a_n]$

若$a_1,\cdots,a_k$线性无关，则由上证明可知，x是S的一个极点

若$a_1,\cdots,a_k$线性相关，则存在不全为零的$\theta_1,\cdots,\theta_k$，使 $\theta_1 a_1+\cdots+\theta_k a_k=0$

且至少有一个$\theta_i>0$

令 $$\alpha=\min\left\{\frac{x_i}{\theta_i}\middle|\theta_i>0, i=1,\dots,k\right\}=\frac{x_j}{\theta_j}$$

构造$\bar{x}$，$$\bar{x}_i=\begin{cases}x_i-\alpha\theta_i & i=1,\dots,k\\ 0 & i=k+1,\dots,n\end{cases}$$

$\bar{x}\geq 0$

$\bar{x}_i=0, i=j,k+1,k+2,\dots,n$

$$A\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{x}_i=\sum_{i=1}^{k}a_i(x_i-\alpha\theta_i)=b$$

因此，$\bar{x}\in S$，其非零分量至多有$k-1$个

重复该过程直至得到点$\tilde{x}\in S$，其非零分量对应的A的列线性无关，此时$\tilde{x}$是S的一个极点

多面体的无界方向 $Ad=0, d\geq 0$ 且 $d\neq 0$

考虑多面体$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩

(2) $d\neq 0$是S的无界方向当且仅当$Ad=0, d\geq 0$

说明： 根据凸集无界方向的定义可知，

$\forall x\in S, x+\lambda d\in S$ $\quad\lambda>0, x\geq 0\Rightarrow d\geq 0$

$Ax=b, Ax+\lambda Ad=b$ $\quad Ad=0$

多面体的极方向 $= t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

考虑多面体$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩

(3) ✓ $d\in\mathcal{R}^n$是S的极方向当且仅当存在矩阵A的分解$A=[B\quad N]$使 $d=t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

其中，$t>0$，$B^{-1}a_j\leq 0$，a_j为矩阵N的第j列

$e_j\in\mathcal{R}^{n-m}$的第j个分量为1，其余分量为零

✓ 有限个极方向

说明：a_j为矩阵N的第j列

$e_j\in\mathcal{R}^{n-m}$的第j个分量为1，其余分量为零　$Ne_j=a_j$

d与td为同一方向，可以取 $t=1$

实际中，如果对于某种分解$A=[B\quad N]$，找到N中的第j列a_j，满足$B^{-1}a_j\leq 0$，
那么，就找到一个对应的极方向d

矩阵A的一种分解至多对应一个极方向，
矩阵A的n列中找出m列线性无关的列构成矩阵B　因此，极方向最多有C_n^m个

如果目标函数值在这个极方向上是下降的，那么，$\min c^Tx\to-\infty$

多面体的极方向 $= t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

(3) ✓ $d\in\mathcal{R}^n$是S的极方向当且仅当存在矩阵A的分解$A=[B\quad N]$使 $d=t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

其中，$t>0$，$B^{-1}a_j\leq 0$，a_j为矩阵N的第j列

$e_j\in\mathcal{R}^{n-m}$的第j个分量为1，其余分量为零

✓ 有限个极方向

证明：$\Leftarrow$ $B^{-1}a_j\leq 0 \implies d\geq 0$　$Ad=t[B\quad N]\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}=t(-a_j+\underbrace{Ne_j}_{=a_j})=0$　d是S的无界方向

设 $d=\lambda_1\tilde{d}+\lambda_2\bar{d}$，其中$\lambda_1,\lambda_2>0$，$\tilde{d},\bar{d}$为$S$的无界方向，即，$A\tilde{d}=0,A\bar{d}=0$，$\tilde{d},\bar{d}\geq 0$

由于d有$n-m-1$个零分量，则$\tilde{d},\bar{d}$对应的分量也均为零

因此，存在$\tilde{\alpha},\bar{\alpha}>0$，使得 $\tilde{d}=\tilde{\alpha}\begin{bmatrix}\tilde{d}_1\\ e_j\end{bmatrix},\bar{d}=\bar{\alpha}\begin{bmatrix}\bar{d}_1\\ e_j\end{bmatrix}$　$\tilde{d}=\tilde{\alpha}\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix},\bar{d}=\bar{\alpha}\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

由于 $A\tilde{d}=0,A\bar{d}=0$，即，$\tilde{\alpha}[B\quad N]\begin{bmatrix}\tilde{d}_1\\ e_j\end{bmatrix}=0,\bar{\alpha}[B\quad N]\begin{bmatrix}\bar{d}_1\\ e_j\end{bmatrix}=0$　$\tilde{d}_1=\bar{d}_1=-B^{-1}a_j$

因此，d为集合S的极方向　$\tilde{d},\bar{d}$与d为同一方向

多面体的极方向 $= t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

(3) ✓ $d\in\mathcal{R}^n$是S的极方向当且仅当存在矩阵A的分解$A=[B\quad N]$使 $d=t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

其中，$t>0$，$B^{-1}a_j\le 0$，a_j为矩阵N的第j列

$e_j\in\mathcal{R}^{n-m}$的第j个分量为1，其余分量为零

✓ 有限个极方向

证明: $\Longrightarrow$ 设d是S的极方向　　记$A=[a_1\quad\cdots\quad a_n]$

不妨设$d=[d_1\quad\cdots\quad d_k\quad 0\quad\cdots\quad 0\ d_j\ 0\quad\cdots\quad 0]^T$，其中$d_i>0, i=1,\dots,k; d_j>0$

下证$a_1,\cdots,a_k$线性无关

不妨假设 $a_1,\cdots,a_k$ 线性相关，则存在不全为零的$\theta_1,\cdots,\theta_k$，使 $\theta_1a_1+\cdots+\theta_ka_k=0$

令$\theta=[\theta_1\quad\cdots\quad\theta_k\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T$　　$A\theta=\theta_1a_1+\cdots+\theta_ka_k=0$

取 $\tilde{d}=d+\varepsilon\theta, \bar{d}=d-\varepsilon\theta$，$\varepsilon>0$　　$d=\frac{1}{2}\tilde{d}+\frac{1}{2}\bar{d}$　　d不是极方向

选取充分小的$\varepsilon>0$，使得 $\tilde{d},\bar{d}\ge 0$

$A\tilde{d}=Ad+\varepsilon A\theta=0$
$A\bar{d}=Ad-\varepsilon A\theta=0$　　$\tilde{d}$，$\bar{d}$为S的无界方向

多面体的极方向 $= t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

(3) ✓ $d\in\mathcal{R}^n$是S的极方向当且仅当存在矩阵A的分解$A=[B\quad N]$使 $d=t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

其中，$t>0$，$B^{-1}a_j\le 0$，a_j为矩阵N的第j列

$e_j\in\mathcal{R}^{n-m}$的第j个分量为1，其余分量为零

✓ 有限个极方向

证明: $\Longrightarrow$ 设d是S的极方向　　记$A=[a_1\quad\cdots\quad a_n]$

不妨设$d=[d_1\quad\cdots\quad d_k\quad 0\quad\cdots\quad 0\ d_j\ 0\quad\cdots\quad 0]^T$，其中$d_i>0, i=1,\dots,k; d_j>0$

$a_1,\cdots,a_k$线性无关　　$a_{k+1},\cdots,a_n$中必存在$m-k$个列与$a_1,\cdots,a_k$线性无关

简单起见，不妨设为$a_{k+1},\cdots,a_m$

令$B=[a_1\quad\cdots\quad a_m], N=[a_{m+1}\quad\cdots\quad a_n]$

假设$j\le m$，即，$d=[d_B\quad d_N]^T=[\underbrace{d_1\quad\cdots\quad d_k\quad 0\quad\cdots\quad 0\ d_j\ 0\quad\cdots}_{m\text{个}\ d_B}\quad 0]^T$　　$d_N=\mathbf{0}$

则　$Bd_B=Ad=0$　B可逆，所以，$d_B=0\ \Longrightarrow\ d=0$

而 d是S的极方向 $\Longrightarrow\ d\neq 0$　　矛盾　　所以，$j>m$

多面体的极方向 $= t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

③ ✓ $d\in\mathcal{R}^n$ 是 S 的极方向当且仅当存在矩阵 A 的分解 $A=[B\quad N]$ 使 $d=t\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$

其中，$t>0$，$B^{-1}a_j\le 0$，a_j 为矩阵 N 的第 j 列

$e_j\in\mathcal{R}^{n-m}$ 的第 j 个分量为1，其余分量为零

✓ 有限个极方向

证明: $\Longrightarrow$ 设 d 是 S 的极方向　　记 $A=[a_1\quad\cdots\quad a_n]$

不妨设 $d=\begin{bmatrix}d_1 & \cdots & d_k & 0 & \cdots & 0 & d_j & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$，其中 $d_i>0, i=1,\dots,k; d_j>0$

$a_1,\cdots,a_k$ 线性无关　　$a_{k+1},\cdots,a_n$ 中必存在 $m-k$ 个列与 $a_1,\cdots,a_k$ 线性无关

简单起见，不妨设为 $a_{k+1},\cdots,a_m$

令 $B=[a_1\quad\cdots\quad a_m], N=[a_{m+1}\quad\cdots\quad a_n]$

所以 $j>m$，即，$d=[d_B\quad d_N]^T=\begin{bmatrix}\underbrace{d_1\ \cdots\ d_k\ 0\ \cdots}_{m\text{个 } d_B} & \underbrace{0\ d_j\ 0\ \cdots\ 0}_{d_N}\end{bmatrix}^T$

$Ad=Bd_B+d_ja_j=0$

$d_B=-d_jB^{-1}a_j$

$d=d_j\begin{bmatrix}-B^{-1}a_j\\ e_j\end{bmatrix}$，　$B^{-1}a_j\le 0$　　$t=d_j>0$

2. 线性规划可行域的几何特点

$$\begin{aligned}&\min c^Tx\\ &\text{s.t. } Ax=b \qquad (LP)\\ &\qquad x\ge 0\end{aligned}$$

①可行域是多面体

②多面体的基本性质

③多面体的几何分解

④最优解与极点的关系

③多面体的几何分解 多面体内的点 = 极点的凸组合 +极方向的锥组合

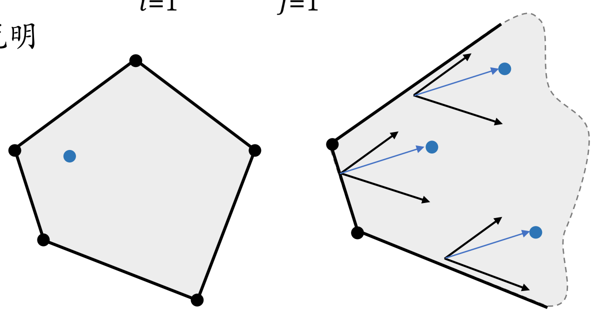
设$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$非空，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩

假设S的极点为$x_1,\dots,x_k$，极方向为$d_1,\dots,d_l$，则$x\in S$当且仅当

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{l}\mu_j d_j \qquad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\lambda_i\geq 0,i=1,\dots,k \quad \mu_j\geq 0,j=1,\dots l$$

$$\mathbf{1}^T\lambda=1,\lambda\geq 0;\mu\geq 0$$

说明



点 = 极点的凸组合 点 = 极点的凸组合 +极方向的锥组合

$$c^Tx=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i c^T x_i+\sum_{j=1}^{l}\mu_j c^T d_j$$

若$c^Td_j<0$，$c^Tx\to-\infty$

若$c^Td_j\geq 0$，$\min c^Tx \Leftrightarrow \min\sum_{i=1}^{k}\lambda_i c^T x_i$

$$\Leftrightarrow \min c^T x_i$$

单纯形法

设$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$非空，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩

假设S的极点为$x_1,\dots,x_k$，极方向为$d_1,\dots,d_l$，则$x\in S$当且仅当

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{l}\mu_j d_j \qquad \mathbf{1}^T\lambda=1,\lambda\geq 0;\mu\geq 0$$

推论:

- ✓ 集合S无界当且仅当S至少存在一个极方向
- ✓ 集合S有界当且仅当它可表示为有限个极点的凸组合

证明借助于:

- ✓ 凸集
- ✓ 支撑平面
- ✓ 分离定理

证明参考

3. Linear and Nonlinear Programming, 4th ed., B2, David G. Luenberger

2. 线性规划可行域的几何特点

$$\min c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax = b \quad x \geq 0 \qquad (LP)$$

①可行域是多面体

②多面体的基本性质

③多面体的几何分解

④最优解与极点的关系

考虑标准形式的线性规划：

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\ Ax = b \qquad (LP) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

其中， $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$行满秩
可行集$S = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$

假设可行集S的极点为$x_1, \dots, x_k$，极方向为$d_1, \dots, d_l$，则

1. 线性规划(LP)有最优解当且仅当$c^T d_j \geq 0, j = 1, \dots, l$
2. 若线性规划(LP)有最优解，则必可在某个极点上达到

说明

$$\min c^T x = \min\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j c^T d_j\right) \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k \quad \mu_j \geq 0, j = 1, \dots l$$

$$= \min \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x_i + \min \sum_{j=1}^{l} \mu_j c^T d_j$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\min c^T x_i) \geq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)(\min c^T x_i) = \min c^T x_i$$

1.线性规划的标准形式

2.线性规划可行域的几何特点

3.单纯形法

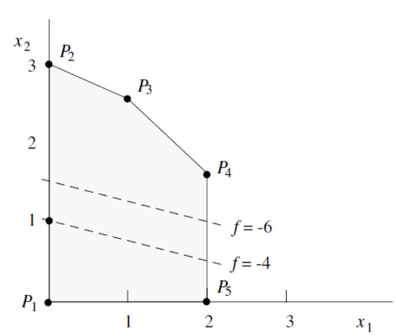
4.对偶单纯形法

单纯形法的朴素算法

1. 列举所有出所有的极点$x_1, \dots, x_k$，极方向$d_1, \dots, d_l$
2. 判断$c^T d_j \geq 0, j = 1, \dots, l$是否成立?
3. 寻找$x^* = \{x_i | \min c^T x_i, i = 1, \dots, k\}$
4. 计算目标函数值$f^* = c^T x^*$

最多C_n^m次

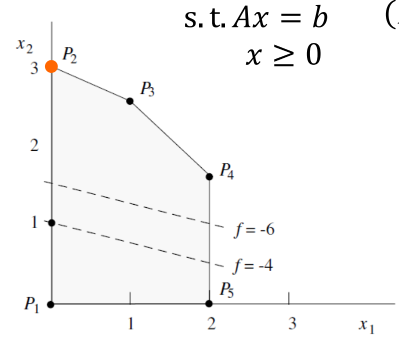
例
$$\begin{aligned} &\min f(x) = -x_1 - 4x_2 \\ &\text{s.t. } -x_1 \geq -2 \\ &\quad -x_1 - x_2 + 3.5 \geq 0 \\ &\quad -x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\min f(x) = -x_1 - 4x_2$$
$$\text{s.t. } -x_1 \geq -2$$
$$-x_1 - x_2 + 3.5 \geq 0$$
$$-x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$c = [-1, -4, 0, 0, 0]^T$$

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax = b \qquad (LP)$$
$$x \geq 0$$



$$\min f(x) = c^T x$$
$$\text{s.t. } -x_1 - x_3 = -2$$
$$-x_1 - x_2 - x_4 = -3.5$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_5 = -6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_4 \geq 0$$

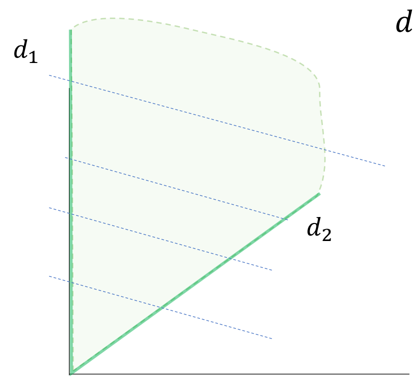
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\min f(x) = c^T x$$
$$\text{s.t. } x_1 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 3.5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_4 \geq 0$$

P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
P_1	0	0	2	3.5	6	0
P_2	0	3	2	0.5	0	-12
P_3	1	2.5	1	0	0	-11
P_4	2	1.5	0	0	1	-8
P_5	2	0	0	1.5	4	-2

$$\min f(x) = -x_1 - 4x_2 \quad \to -\infty$$
$$\text{s.t. } -x_1 + x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$d = t \begin{bmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{bmatrix}$$

$$\min f(x) = -x_1 - 4x_2$$
$$\text{s.t. } -x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$A = [-1 \quad 1 \quad -1]$$
$$b = 0$$
$$c = [-1 \quad -4 \quad 0]^T$$

$$d_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$$
$$d_2 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\left.\begin{array}{l} c^T d_1 = -4 < 0 \\ c^T d_2 = -5 < 0 \end{array}\right\} \quad f \to -\infty$$

单纯形法的关键

① 找到一个初始的基可行解作为当前的基可行解

② 判断当前的基可行解是问题的最优解

③ 当前的基可行解不是最优解，寻找更优的另一个基可行解

④ 单纯形法的收敛性及收敛速度 略 最多C_n^m次 当变量、约束多时，计算量很大

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \qquad (LP) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

可行集$S = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$

$A \in \mathcal{R}^{m \times n}$行满秩

✓ 基本可行解的分析

可行集$S = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$，$A \in \mathcal{R}^{m \times n}$行满秩

$A = [B \quad N]$, $\exists B^{-1}$ 称B为A的一组基

$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ 基 变 量 / 非基变量 $c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$

$[B \quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \qquad \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \geq 0$

$Bx_B + Nx_N = b$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$\bar{x}_B = \bar{b} = B^{-1}b,\ \bar{x}_N = 0$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 基本解

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N \\ &= \bar{f} + \mu^T x_N \end{aligned}$$

$\mu = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ 检验数向量

若$\mu \geq 0$，那么，$\min f = \bar{f}$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$为最优解

当$B^{-1}b \geq 0$时，$x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \in S$ 基本可行解 其目标函数值 $\bar{f} = c_B^T B^{-1} b$

当$B^{-1}b \geq 0$时，称B为A的一组可行基

可以得出②和③

②判断基可行解是问题的最优解

可行集$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩

考虑线性规划的基本可行解 $\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$

$\bar{x}$是最优解当且仅当检验数(reduced cost) 非负， $\mu=c_N^T-c_B^TB^{-1}N\geq 0$

记号说明 向量$z\in\mathcal{R}^n$， $z=(z_1,\dots,z_n)=[z_1 \ \cdots \ z_n]^T=\begin{bmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}$ $I=\{1,\dots,n\}$

$z\geq 0 \iff z_i\geq 0, \quad i=1,\dots,n$

$z\geq 0 \iff z_i\geq 0, \quad \forall i\in I$

向量≥ 0 等价于 其每一个分量≥ 0

$z\ngeq 0 \iff z_i<0, \quad \exists i\in I$ 向量$\ngeq 0$ 等价于 其至少有一个分量<0

$z=0 \iff z_i=0, \quad \forall i\in I$ 向量$=0$ 等价于 其任意一个分量$=0$

$z\neq 0 \iff z_i\neq 0, \quad \exists i\in I$ 向量$\neq 0$ 等价于 其至少有一个分量$\neq 0$

③ 当前的基可行解不是最优解，寻找更优的另一个基可行解

可行集$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩 $\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}\geq 0$ 基可行解

若$\bar{x}$非最优解，即$\mu=c_N^T-c_B^TB^{-1}N\ngeq 0 \xRightarrow{\exists j} c_j-c_B^TB^{-1}a_j<0$， a_j是N的第j列

让N的第j列进入基变量

取 $d_j=\begin{bmatrix}-\bar{a}_j\\e_j\end{bmatrix}$ ，则 $Ad_j=0$ $Ad_j=[B \quad N]d_j=-BB^{-1}a_j+\underline{Ne_j}=-a_j+\underline{a_j}=0$

$c^Td_j<0$ $c^Td_j=[c_B^T \ c_N^T]d_j=-c_B^TB^{-1}a_j+\underline{c_N^Te_j}=-c_B^TB^{-1}a_j+\underline{c_j}<0$

取 $x=\bar{x}+\lambda d_j$，$\lambda>0 \xRightarrow{Ax=b} c^Tx=c^T\bar{x}+\lambda c^Td_j<c^T\bar{x} \xRightarrow{\text{if } x\geq 0}$ 可行解x使目标函数值更优

$\bar{a}_j=B^{-1}a_j$ ，分两种情况讨论:

(1) 若$\bar{a}_j\leq 0$，

(2) 若$\bar{a}_j\nleq 0$，

③ 当前的基可行解不是最优解，寻找更优的另一个基可行解

可行集$S=\{x|Ax=b,x\ge 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩 $\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}\ge 0$ 基可行解

若$\bar{x}$非最优解，即$\mu=c_N^T-c_B^TB^{-1}N\ngeq 0 \overset{\exists j}{\Longrightarrow} c_j-c_B^TB^{-1}a_j<0$，$a_j$是$N$的第$j$列

取 $d_j=\begin{bmatrix}-\bar{a}_j\\e_j\end{bmatrix}$ ，则 $Ad_j=0$

$c^Td_j<0$

取 $x=\bar{x}+\lambda d_j$，$\lambda>0$

$\bar{a}_j=B^{-1}a_j$ ，分两种情况讨论:

(1) 若$\bar{a}_j\le 0$，

(2) 若$\bar{a}_j\nleq 0$ ，

(1) 若$\bar{a}_j\le 0$，则$d_j\ge 0$为可行集S的一个极方向

对于任意$\lambda>0$，均有$x=\bar{x}+\lambda d_j\ge 0$

当$\lambda\to+\infty$， $c^Tx=c^T\bar{x}+\lambda c^Td_j\to-\infty$，$LP$不存在最优解

③ 当前的基可行解不是最优解，寻找更优的另一个基可行解

可行集$S=\{x|Ax=b,x\ge 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩 $\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}\ge 0$ 基可行解

若$\bar{x}$非最优解，即$\mu=c_N^T-c_B^TB^{-1}N\ngeq 0 \overset{\exists j}{\Longrightarrow} c_j-c_B^TB^{-1}a_j<0$，$a_j$是$N$的第$j$列

取 $d_j=\begin{bmatrix}-\bar{a}_j\\e_j\end{bmatrix}$ ，则 $Ad_j=0$

$c^Td_j<0$

取 $x=\bar{x}+\lambda d_j$，$\lambda>0$

$\bar{a}_j=B^{-1}a_j$ ，分两种情况讨论:

(1) 若$\bar{a}_j\le 0$，

(2) 若$\bar{a}_j\nleq 0$ ，

(1) 若$\bar{a}_j\le 0$，则$d_j\ge 0$为可行集S的一个极方向

LP不存在最优解

(2) 若$\bar{a}_j\nleq 0$ ，为保证$x=\bar{x}+\lambda d_j\ge 0$，只需$\bar{b}-\lambda\bar{a}_j\ge 0$

$$x=\bar{x}+\lambda d_j=\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-\bar{a}_j\\e_j\end{bmatrix}\ge 0 \qquad \bar{b}=B^{-1}b\ge 0$$

注意$\bar{b}$和$\bar{a}_j$为列向量，$\bar{b}-\lambda\bar{a}_j\ge 0 \iff \bar{b}_i-\lambda\bar{a}_{ij}\ge 0$

若$\bar{a}_{ij}\le 0$，则 $\bar{b}_i-\lambda\bar{a}_{ij}\ge 0$，无需再考虑；

只考虑$\bar{a}_{ij}>0$的情况，找出最小的λ，以保证所有分量大于0

计算 $\bar{\lambda}=\min\left\{\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}\middle|\bar{a}_{ij}>0,i=1,\dots,m\right\}=\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rj}}>0$

令$x=\bar{x}+\bar{\lambda}d_j$，$\underset{\text{出基}}{x_r=0}$， $\underset{\text{进基}}{x_j=\bar{\lambda}}$ x至多有m个非零元素

③ 当前的基可行解不是最优解，寻找更优的另一个基可行解

可行集$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$行满秩　　$\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}\geq 0$ 基可行解

若$\bar{x}$非最优解，即$\mu=c_N^T-c_B^TB^{-1}N\ngeq 0$ $\xrightarrow{\exists j}$ $c_j-c_B^TB^{-1}a_j<0$，a_j是N的第j列

取 $d_j=\begin{bmatrix}-\bar{a}_j\\e_j\end{bmatrix}$ ，则 $Ad_j=0$

$c^Td_j<0$

取 $x=\bar{x}+\lambda d_j$，$\lambda>0$

$\bar{a}_j=B^{-1}a_j$ ，分两种情况讨论：

(1) 若$\bar{a}_j\leq 0$，则$d_j\geq 0$为可行集S的一个极方向，LP不存在最优解　　$\bar{b}=B^{-1}b$

(2) 若$\bar{a}_j\nleq 0$ ，计算 $\bar{\lambda}=\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}\middle|\bar{a}_{ij}>0,i=1,\dots,m\right\}=\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rj}}>0$ 令$x=\bar{x}+\bar{\lambda}d_j$，$x_r=0$，$x_j=\bar{\lambda}$

出基　进基

① 找到一个初始的基可行解作为当前的基可行解

$$\begin{aligned}\min\ & c^Tx\\ \text{s.t.}\ & Ax=b\\ & x\geq 0\end{aligned}\qquad (LP)$$

(1) 大M法

$$\begin{aligned}\min\ & c^Tx+M\cdot\mathbf{1}^Ts\\ \text{s.t.}\ & Ax+s=b\\ & x,s\geq 0\end{aligned}\qquad (LP-M)$$

初始基本可行解：$\begin{bmatrix}x\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}$

若$s^*=0$，最优解x^*

(2) 两阶段法

$$\begin{aligned}\min\ & \mathbf{1}^Ts\\ \text{s.t.}\ & Ax+s=b\\ & x,s\geq 0\end{aligned}\qquad (LP-I)$$

基本可行解：$\begin{bmatrix}x\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\bar{x}\\\bar{s}\end{bmatrix}$

若$\bar{s}=0$，初始基本可行解$\bar{x}$　再解(LP)

单纯形法

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\, Ax = b \qquad (LP) \\ &\quad\; x \geq 0 \end{aligned}$$

寻找A的一组基B，满足：①可行性，$B^{-1}b \geq 0$

②最优性，$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$

单纯形法：在可行基中迭代直至找到满足最优性条件的基

满足①和②的 $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 为最优解

Linear Programming Simplex Algorithm

(1) Given $A = [B \quad N], \exists B^{-1}$ and $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) Calculate Reduced Cost $\bar{c} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

If $\bar{c} \geq 0, x^* = x$ STOP

(3) Choose j

$c_j - c_B^T B^{-1} a_j = \{c_i - c_B^T B^{-1} a_i | c_i - c_B^T B^{-1} a_i < 0, i \in \text{index}\, N\}$ $\boxed{j = \{i \in \text{index}\, N \,|\, c_i - c_B^T B^{-1} a_i < 0\}}$

$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$

If $\bar{a}_j \leq 0$ then

$x^* = Nan, f^* = -\infty$ STOP

else

x_j Entering Variable

endif

(4) $\bar{b} = B^{-1} b$

Calculate $\bar{\lambda} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \middle| \bar{a}_{ij} > 0, i = 1, \ldots, m \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rj}} > 0$

x_r Leaving Variable

$x := x + \lambda d_j$, $d_j = \begin{bmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{bmatrix}$

GOTO (2)

1.线性规划的标准形式

2.线性规划可行域的几何特点

3.单纯形法

4.对偶单纯形法

①弱对偶定理
②强对偶定理
③互补松弛条件
④对偶单纯形算法

对偶

$$\begin{aligned}&\min c^T x\\ &\text{s.t.}\, Ax = b \\ &\quad\ \ x \geq 0\end{aligned} \qquad (LP)$$

$$\begin{aligned}&\max b^T y\\ &\text{s.t.}\, A^T y \leq c\end{aligned} \qquad (LD)$$

①弱对偶定理 设x和y分别为线性规划问题(LP)和对偶问题(LD)的可行解，
则$c^T x \geq b^T y$

$$c^T x \geq (A^T y)^T x = y^T A x = b^T y$$

若一个无界，另一个则无可行解

②强对偶定理 设问题(LP)或对偶问题(LD)存在最优解，则另一个也存在最优解，
且，$v(LP) = v(LD)$，其中，$v(*)$为问题$(*)$的最优值

③互补松弛条件 设x和y分别为问题(LP)和对偶问题(LD)的可行解，记$u = c - A^T y$
x和y分别为问题(LP)和(LD)的最优解当且仅当$u_i x_i = 0, i = 1, \ldots, n$

② $v(LP) = v(LD)$

$$\min c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax = b,\ x \ge 0 \qquad (LP)$$

$$\max b^T y \quad \text{s.t.}\ A^T y \le c \qquad (LD)$$

② $v(LP) = v(LD)$

不妨设(LP)存在最优解$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{f} = c_B^T B^{-1} b = v(LP)$

检验数 $\mu = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ge 0$

取 $\bar{y}^T = c_B^T B^{-1}$

则 $\bar{y}^T A = c_B^T B^{-1} [B \quad N]$

$= [c_B^T \quad c_B^T B^{-1} N]$

$\le [c_B^T \quad c_N^T]$ $\qquad A^T \bar{y} \le c$

$b^T \bar{y} = \bar{y}^T b = c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}$

根据弱对偶定理，$c^T x \ge b^T y$

所以，$\bar{y}$是(LD)的最优解

且 $v(LP) = v(LD)$

③ x为问题(LP)、y为(LD)的最优解 $\Leftrightarrow$ $u_i x_i = 0, i = 1, \dots, n$ $\quad u = c - A^T y$

$$\min c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax = b,\ x \ge 0 \qquad (LP)$$

$$\max b^T y \quad \text{s.t.}\ A^T y \le c \qquad (LD)$$

③ x为问题(LP)、y为(LD)的最优解 $\Leftrightarrow$ $u_i x_i = 0, i = 1, \dots, n$ $\quad u = c - A^T y$

x为(LP) 、y为(LD)的可行解

$Ax = b, x \ge 0, A^T y \le c$

$c^T x - b^T y = c^T x - x^T A y = (c - A^T y)^T x = u^T x$

x为(LP)、y为(LD)的最优解 $\Leftrightarrow$ 根据强对偶定理，$c^T x = b^T y$

$\Leftrightarrow u_i x_i = 0, i = 1, \dots, n$

④对偶单纯形算法

$$\min c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax = b,\ x \geq 0 \qquad (LP)$$

$$\max b^T y \quad \text{s.t.}\ A^T y \leq c \qquad (LD)$$

A的一组基B，满足:

原问题的可行性， $B^{-1}b \geq 0$

原问题的最优性，$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$

原问题最优性 $\Leftrightarrow$ 对偶问题可行性

单纯形法：在可行基中迭代直至找到满足最优性的基

对偶单纯形法：在对偶可行基中迭代直至找到满足原始可行性的基

对偶单纯形算法的主要思想

假设B是一组对偶可行基，即$\bar{c} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$成立

✓ 若$B^{-1}b \geq 0$，则$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$和$\bar{y} = c_B^T B^{-1}$分别为 (LP)和 (LD)的最优解，

且 $\bar{f} = c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = c_B^T B^{-1} b$

✓ 若$B^{-1}b \ngeq 0$，记$\bar{b} = B^{-1}b$，则存在某个r满足$\bar{b}_r < 0$，讨论如下:

令$\mathcal{B}$，$\mathcal{N}$分别表示B和N所对应的列标集合，记$\bar{a}_i = B^{-1}a_i$，考虑以下两种情况:

(1) 若对于任意$i \in \mathcal{N}$，均有$\bar{a}_{ir} \geq 0$

第r个约束方程 $x_r + \sum_{i\in\mathcal{N}} \bar{a}_{ir} x_i = \bar{b}_r$ 则 $x_r = \bar{b}_r - \sum_{i\in\mathcal{N}} \bar{a}_{ir} x_i < 0$ 则原问题(LP)无可行解

(2)若存在某些$i \in \mathcal{N}$，使$\bar{a}_{ir} < 0$

对偶单纯形算法的主要思想

假设B是一组对偶可行基，即$\bar{c} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$成立

- ✓ 若$B^{-1}b \geq 0$，则$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$和$\bar{y} = c_B^T B^{-1}$分别为 (LP)和 (LD)的最优解，

  且 $\bar{f} = c^T\bar{x} = b^T\bar{y} = c_B^T B^{-1} b$

- ✓ 若$B^{-1}b \ngeq 0$，记$\bar{b} = B^{-1}b$，则存在某个r满足$\bar{b}_r < 0$，讨论如下：

  令$\mathcal{B}$，$\mathcal{N}$分别表示B和N所对应的列标集合，记$\bar{a}_i = B^{-1}a_i$，考虑以下两种情况：

(1) 若对于任意$i \in \mathcal{N}$，均有$\bar{a}_{ir} \geq 0$ 则原问题(LP)无可行解

(2)若存在某些$i \in \mathcal{N}$，使$\bar{a}_{ir} < 0$ 计算 $\lambda = \min\left\{\frac{\bar{c}_i}{|\bar{a}_{ir}|}\middle|\bar{a}_{ir} < 0, i \in \mathcal{N}\right\} = \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{jr}|} > 0$

保证 $\tilde{c}_i = \bar{c}_i + \lambda\bar{a}_{ir} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$

新的检验数 $\tilde{c} = c_{\tilde{N}}^T - c_{\tilde{B}}^T \tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ $\tilde{c}_r = \lambda$

构造新基$\tilde{B}$，其指标集$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{j\} \setminus \{r\}$，记$A = [\tilde{B} \quad \tilde{N}]$

$\tilde{N}$的指标集$\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \cup \{r\} \setminus \{j\}$

基$\tilde{B}$为对偶可行基

对偶单纯形算法 Linear Programming Dual simplex algorithm

(1) Given: B Dual feasible basis; $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$ Column index set of matrix B and N

(2) Calculate $\bar{b} = B^{-1}b$

If $\bar{b} \geq 0$, $x^* = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix}$ STOP

(3) Choose r $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i | \bar{b}_i < 0, i \in \mathcal{N}\}$

$\bar{a}_i = B^{-1}a_i, i \in \mathcal{N}$

If $\bar{a}_{ir} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}$ then
 $x^* = Nan, f^* = -\infty$ STOP
else
 x_r Leaving Variable
endif

(4) Reduced Cost $\bar{c} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

Calculate $\bar{\lambda} = \min\left\{\frac{\bar{c}_i}{|\bar{a}_{ir}|}\middle|\bar{a}_{ir} < 0, i \in \mathcal{N}\right\} = \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{jr}|} > 0$

x_j Entering Variable

$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{j\} \setminus \{r\}$ $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \cup \{r\} \setminus \{j\}$

$\mathcal{B}$ New Dual feasible basis

GOTO (2)