Rapport de mi-semestre projet Math-Info

Repositoire du projet

Auteurs

Nom	Prénom	Courriel	Groupe	Github
AIT BELKACEM	Moncef Karim	moncef.ait-belkacem@universite-paris-saclay.fr	LDDIM2	MK8BK
AMADI	Bilal	bilal.amadi@universite-paris-saclay.fr	LDDIM2	bilaldjoss
LABOURET	Lucas	lucas.labouret@universite-paris-saclay.fr	LDDIM2	Lucas-Labouret

Introduction

Ceci est le rapport de mi-semestre de l'UE "Projet Math-informatique" en L1 LDDIM à l'université Paris-Saclay.

Le but de cette UE est de découvrir la démarche de modélisation d'un problème scientifique grâce à l'outil informatique.

Sujet

Nous avons choisi le sujet Labyrinthe

```
from PIL.Image import open
sujet = open("data/docs/sujetP1.png")
sujet
```

1. Étude théorique du problème

1.1. **Définitions.** On considère une grille rectangulaire de taille $n \times m$. Le bord du rectangle est appelé *enceinte*, chaque case est appelée une *cellule*. Des *murs* peuvent être placés sur le côté des cellules. On appelle un ensemble *enceinte+murs* un *pseudo-labyrinthe*, voir les exemples Figure 1.

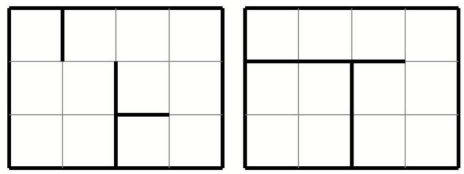
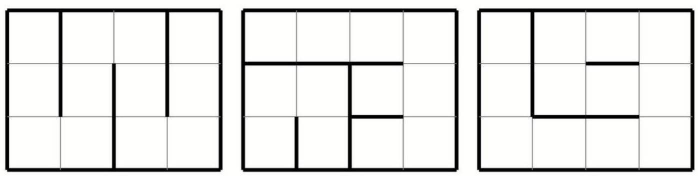


Figure 1. Deux exemples de pseudos-labyrinthes de taille 4×3

Pour être un *labyrinthe*, un pseudo-labyrinthe doit vérifier deux conditions :

(1) l'espace à l'intérieur de l'enceinte est connexe : il existe toujours un chemin entre deux cellules données,

(2) si l'on rajoute un mur où que ce soit, alors il perd sa connexité.



(a) (b) (c)

Figure 2. Exemple et contre-exemples de labyrinthes

Dans la figure 2, seul (a) est un labyrinthe. En effet, (b) ne satisfait pas la condition (1) et (c) ne vérifie pas la condition (2).

1.2. **Questions.**

(1) Dessinez tous les pseudo-labyrinthes de taille 2×2 (vous devez en trouver 16). Combien sont des labyrinthes ?

(2) Quel est le nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$?

(3) Si $m = 1$, combien existe-t-il de pseudo labyrinthme de taille $n \times 1$?

(4) Observez les cas $m = 2$ et $m = 3$ et donnez la formule générale pour le nombre de pseudo labyrinthe de taille $n \times m$ en justifiant votre réponse.

(5) Dessinez tous les labyrinthes de taille 3×2. Vous devez en trouver 15.

(6) En comptant les murs de chacun de ces labyrinthes, que remarquez-vous ?

(7) Soit L un labyrinthe, on suppose que la sortie se trouve dans la cellule en haut à gauche. Prouvez que si je choisis une cellule c quelconque de L, alors il existe un unique chemin qui va de c à la sortie sans passer plus d'une fois sur chacune des cases (il faut prouver que ce chemin existe et qu'il est unique).

(8) En utilisant le résultat précédent, il est possible de prouver que pour un labyrinthe de taille $n \times m$, il existe exactement $n \times m - 1$ bordures entre cellules qui ne sont pas des murs (on ne vous demande pas la preuve). Un pseudo-labyrinthe possédant le "bon" nombre de murs est-il toujours un labyrinthe ? Conjecturez des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe.

Réponses

Définitions

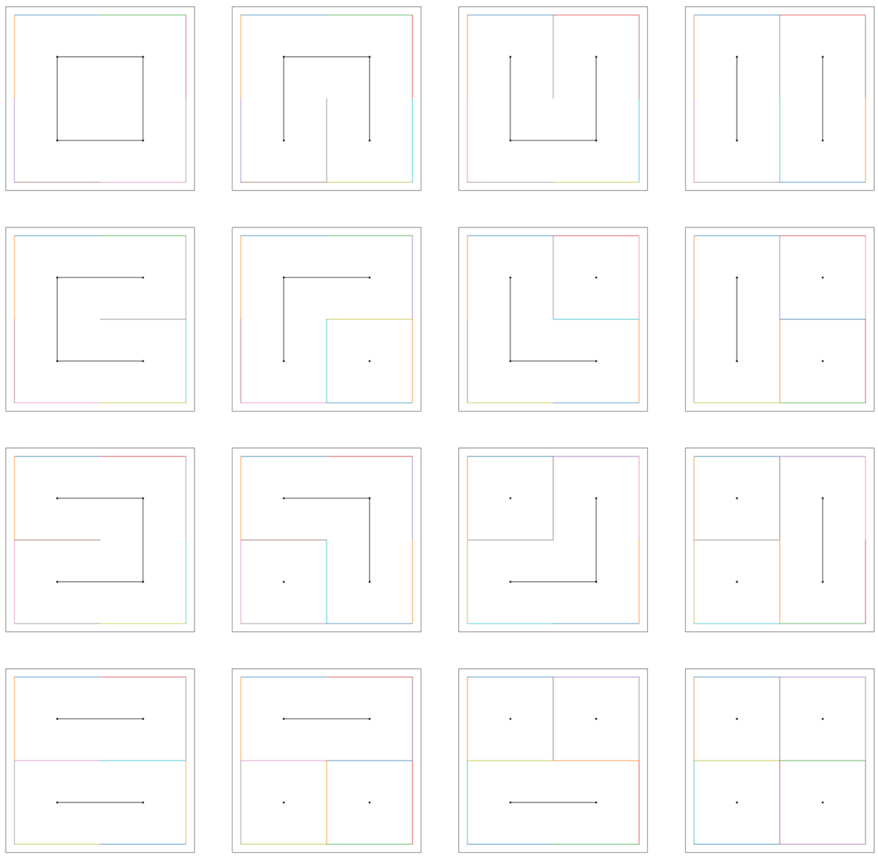
On représente un labyrinthe de deux manières :

- Une grille de n × m cases séparées ou non par des murs
- Un graphe de n × m nœuds connectés ou non par des arrêtes

Question 1.1

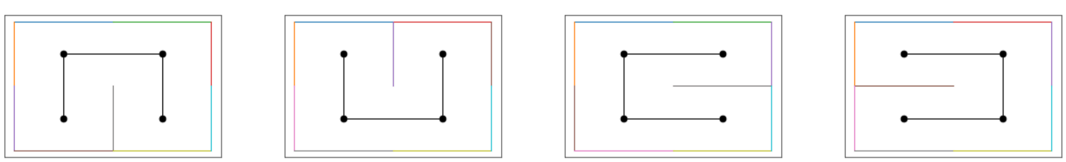
Pseudo-labyrinthes de taille 2×2

```
open("data/2x2/TotalSmall.png")
```



Labyrinthes de taille 2×2

```
open("data/docs/1.1.png")
```

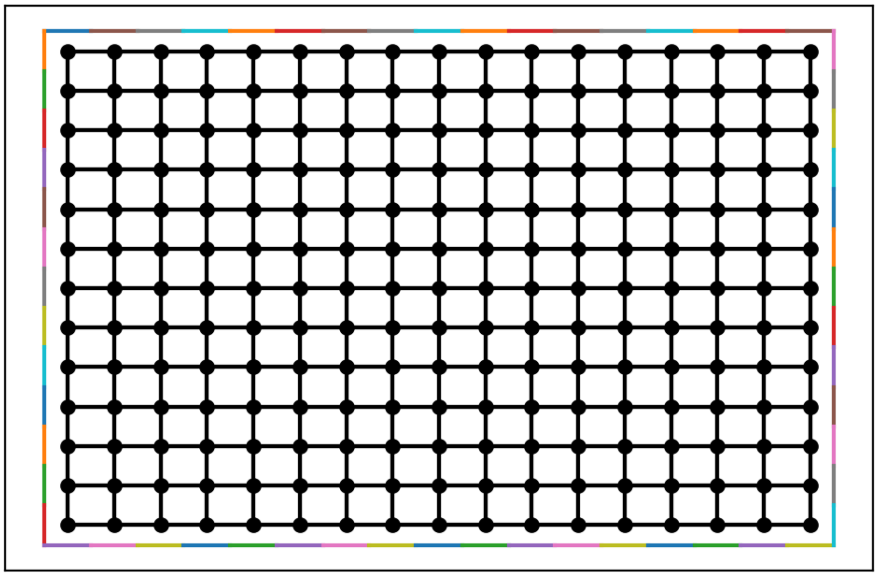


Question 1.2

Le nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$ est égal au nombre maximal d'arrêtes du graphe associé.

En l'occurence $M = n(m-1) + m(n-1)$

```
open("data/docs/17x13_full.png")
```



Question 1.3

On applique simplement la formule pour $m=1$:

$M = n(m-1) + m(n-1) = n \times (1-1) + 1 \times (n-1) = n \times 0 + 1 \times (n-1) = n-1$

On sait alors que le nombre d'emplacements de murs dans un pseudo-labyrinthe de $n \times 1$ cases est $n-1$.

Chaque emplacement peut contenir ou non un mur. Donc le nombre de pseudo-labyrinthes de taille $n \times 1$ est 2^{n-1}

Question 1.4

On applique simplement la formule pour $n=2$ et $m=3$:

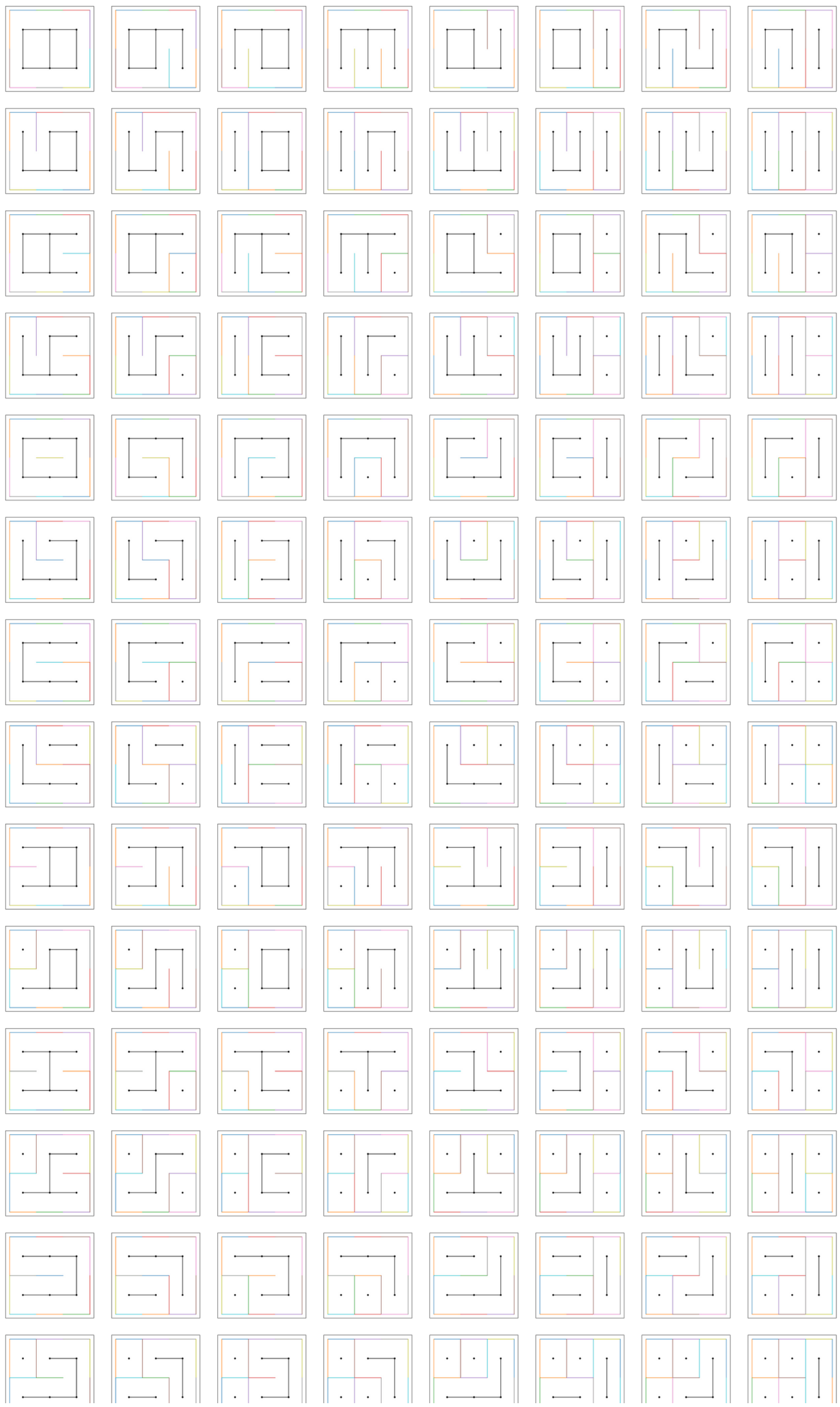
$M = n(m-1) + m(n-1) = 2 \times (3-1) + 3 \times (2-1) = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$

On sait alors que le nombre d'emplacements de murs dans un pseudo-labyrinthe de 2×3 cases est 7.

Chaque emplacement peut contenir ou non un mur.

Donc le nombre de pseudo-labyrinthes de taille 2×3 est $2^7 = 128$

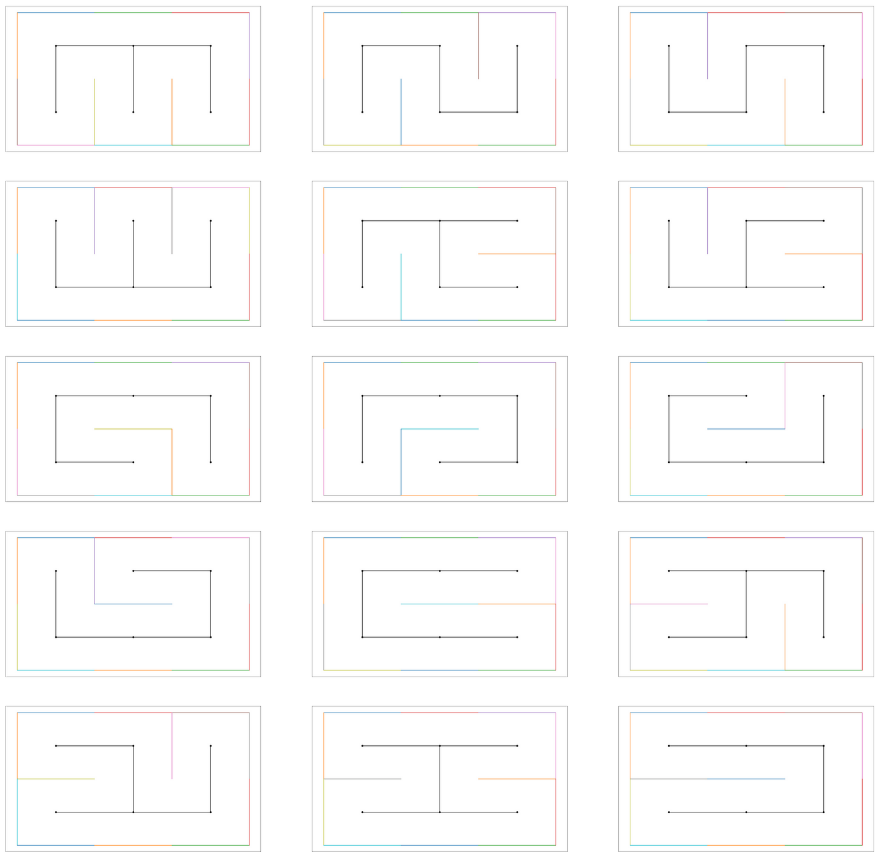
```
open("data/3x2/TotalSmall.png")
```



Plus generalement, il existe $2^{n(m-1)+m(n-1)}$ pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$.

Question 1.5

```
open("data/docs/3x2true.png")
```



Question 1.6

On remarque que tous les labyrinthes de taille 3×2 (resp. 2×3) ont deux murs.

Question 1.7

Pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe, il suffit :

- Qu’il soit connexe
- Que l'ajout d'un mur lui fasse perdre sa connexité

Il est trivial qu'il existe un chemin entre c et la sortie, car autrement le labyrinthe ne serait pas connexe.

On suppose par l'absurde qu'il existe deux chemins entre c et la sortie:

- En fermant un des deux chemins, on peut encore passer de c à la sortie en prenant le deuxième chemin.
- De plus, en partant des cellules antérieures a c ou situées sur le premier chemin, on peut joindre la sortie en rejoignant c et en prenant le second chemin.

  Donc le labyrinthe garde sa connexité $\Longrightarrow$ contradiction.

Nous avons ainsi prouve l'existence et l'unicité du chemin.

Question 1.8

Démonstration optionelle :

Soit L un labyrinthe. On peut alors le déplier en arbre ramifiée, dont chaque ramification est connectée par une seule cellule a la chaine principale.

Étant donnée un rameau, on le détache, puis on l'ajoute à l'extrémité du tronc, sans changement du nombre de murs.

Clairement le nombre de bordures sans murs est $(n \times m) - 1$ car le nombre totale de cellules est $(n \times m)$

Un pseudo-labyrinthe possédant le bon nombre de murs n'est pas forcément un labyrinthe.

Par contre-exemple:

Pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un vrai labyrinthe,

- il est nécessaire qu'il ait le bon nombre de murs,
- et il est suffisant qu'il soit de plus connexe.