Formelblatt (Mechanik/Schwingungen) *WS2022-2023*

Translation		*Rotation*	
Ort, Weg [m]	$\vec{r}$	Winkel [Rad]	φ
Geschwindigkeit [m/s]	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit [Rad/s]	$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)$
Beschleunigung [m/s^2]	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$	Winkelbeschleunigung [Rad/s^2]	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
Masse [kg]	$\vec{r}_{Schwerpunkt} = \frac{1}{m_{ges}} \begin{cases} \sum_i \vec{r}_i m_i \ \text{(Punktmasse)} \\ \int \vec{r}\, dm \ \text{(ausgedehnter Körper)} \end{cases}$	Massenträgheitsmoment; [kg m^2] Satz von Steiner	$J = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \Delta m = \int_m r^2 dm$ $J_A = J_S + ms^2$
Kraft [N]	$\vec{F} = m\vec{a}$	Drehmoment [N m]	$\vec{M} = J\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$
Arbeit [J]	$W = \int_{Weg} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \int_{Weg} F cos\theta \cdot dr$	Arbeit [J]	$W = \int_{Winkel} \vec{M} \cdot d\,\vec{\varphi}$
Leistung [W]	$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Leistung [W]	$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Translationsenergie [J]	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie	$E_{rotation} = \frac{1}{2} J \omega^2$
Impuls [kg m/s] Mit äußeren Kräften (Kraftstoß) Ohne äußere Kräfte	$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{F}_{ges}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{ges}}{dt}$ $\vec{p}_{ges} = const.$ $\sum \vec{P}_{vor} = \sum \vec{P}_{nach}$ $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$	Drehimpuls [kg m^2/s] Mit äußeren Drehmomenten Ohne äußere Momente	$\vec{L} = J\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{M}_{ges}^{ext} = \frac{d\vec{L}_{ges}}{dt}$ $\vec{L}_{ges} = const.$ $\sum \vec{L}_{vor} = \sum \vec{L}_{nach}$ $E_{rotation} = \frac{L^2}{2J}$
Bewegungsgleichung (Translation)	$\sum_i \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}$	Bewegungsgleichung (Rotation)	$\sum_i \vec{M}_i = J\ddot{\vec{\varphi}}$
Wichtige Erhaltungsgrößen der Mechanik: Energie, Impuls, Drehimpuls			

Kinematik: a = const, $x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$, $v = v_o + at$, $v^2 - v_o^2 = 2as$

Der schiefe Wurf: $x = x_o + v_o cos\theta \cdot t$, $y = y_o + v_o sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$, $v_x = v_o cos\theta$, $v_y = v_o sin\theta - gt$

$y = y_o + tan\theta \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 cos^2\theta} x^2$

Die Kreisbewegung:

Ortsvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}$

Bahngeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$,

Bahnbeschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

mit der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

und der Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

Die aufgebrachte Kraft wirkt gegen das Kraftfeld: $W = \int_{Weg} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = -\int_{Weg} \vec{F}_{Feld} \cdot d\,\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_{Feld} = -\begin{pmatrix} \partial E_{pot}/\partial x \\ \partial E_{pot}/\partial y \\ \partial E_{pot}/\partial z \end{pmatrix} = -gradE_{pot} = -\vec{\nabla} E_{pot}, \qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Kraftfelder /Kraftmodelle

Gewichtskraft: $\vec{F}_g = m\vec{g}$, Gravitationskraft: $\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}}$

Federkraft: $F = -Dx$, Reibungskraft: $F_R = \mu F_N$, $F_{R,Stokes} = 6\pi\eta r v$, $F_{R,Newton} = \frac{1}{2} c_W A \rho v^2$

Oberflächenspannung: $\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}$ $p_{Seifenblase} = \frac{4\sigma}{r}$, $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r\rho g}$

Auftriebskraft: $F_{auftrieb} = \rho_{Flüssigkeit} \cdot V_{Körper} \cdot g$

Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft: $F_{zp} = m a_r = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$, $\vec{F}_{ZP} = -\vec{F}_{ZF} = -m\vec{a}_r$

$\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$

Massenträgheitsmoment:

- Dünnwandiger Hohlzylinder: $J = mr^2$, Vollzylinder: $J = \frac{1}{2}mr^2$; Quader: $J = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
- Dünner Stab (Mittelpunkt): $J = \frac{1}{12}ml^2$, Kugel (massiv): $J = \frac{2}{5}mR^2$, Kugelschale: $J = \frac{2}{3}mR^2$

Schlupffreie Rotationsbewegung: $x_c = r\theta$, $\dot{x}_c = r\dot{\vartheta}$ $\ddot{x}_c = r\ddot{\theta}$

Elastizitätsmodul: $\sigma = E\varepsilon$, $E = \frac{\Delta F}{A} \cdot \frac{l}{\Delta l}$

Poissionsche Zahl (Querkontraktion): $\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$

Schermodul: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, Rückstellmoment: $D = \frac{M}{\varphi} = G\frac{\pi}{2}\frac{R^4}{l}$

Kompressibilität: $\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$, Schwerdruck: $P_{Schwere} = \rho_{Flüssigkeit} \cdot g \cdot h$

Barometrische Höhenformel: $p(h) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right)$, $\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right)$, $V(h) = V_0 \cdot \exp\left(\frac{h}{h_0}\right)$, $\frac{1}{h_0} = \frac{Mg}{RT}, h_0 = 8000m$

Bernoulli-Gleichung: $P_S + \rho_{Flüssigkeit} \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho_{Strömmung} \cdot v^2 = const.$

Kontinuitätsgleichung: $const. = \dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot A \cdot v$ $\left[\frac{kg}{s}\right]$

$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz}$ bei Strömung in x-Richtung mit Geschwindigkeitsgefälle in z

Rohr: $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$, $\dot{V} = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}R^4$ (Hagen-Poiseuille'sches Gesetz)

Schwingungen: $x(t) = A_0 cos(\omega t + \varphi)$, $A_0 = \sqrt{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2}}$, $\varphi = arctan(-\frac{v(0)}{\omega \cdot x(0)})$

$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{D}}, \sqrt{\frac{l}{g}}, \sqrt{\frac{J}{mgs}}, \sqrt{\frac{J}{D^*}},$

Gedämpfte Schwingungen: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_O^2 x = 0$, $\delta = \frac{r}{2m}, \omega_O^2 = \frac{D}{m}$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$, $x(t) = A_O e^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \varphi_O\right)$

Logarithmisches Dekrement: $\Lambda = \ln\frac{s_n}{s_{n+1}} = \delta \cdot T$

Gütefaktor: $Q = \frac{2\pi \cdot Energie}{Energieverlust / Periode} = \frac{E\omega}{-\dot{E}} = \frac{\omega}{2\delta} \approx \frac{\sqrt{Dm}}{r} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

Erzwungene Schwingungen: $m\ddot{s} + r\dot{s} + D \cdot s = \hat{F}_E \cos\left(\omega_E t\right)$

$x_E = \frac{F_E}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}$, $\varphi(\omega_E) = arctan(\frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2})$

Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c\right)^2 + \dots}$$

$\boldsymbol{z = f(a, b, c, \dots.)}$

Standardabweichung

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Standardabweichung des Mittelwertes: $\epsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Formelsammlung Technische Mechanik / Statik

Freiheitsgrad	$f = \sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{j=1}^{m} u_j$ ($f_i = 3$ (Ebene), u_j : Wertigkeit Gelenk / Lager j)
Gleichgewicht	$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_P = \sum \mathbf{M}_{Pi} = \mathbf{0}$ (Bezugspunkt P beliebig)
Schwerpunkt	$x_S = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}, \quad y_S = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}, \quad z_S = \frac{\int_A z\,dA}{\int_A dA}$ bei zusammengesetzten Geometrien $x_S = \frac{\sum x_{S,i} A_i}{\sum A_i}, \quad y_S = ...$ (für Flächen; für Linien, Volumen, … ersetze Symbol A durch l, V …)
Querstreckenlast	$F_R = \int q\,d\xi$ (Resultierende), $\xi_R = \frac{1}{F_R}\int \xi\,q\,d\xi$ (Position für Äquivalenz; ξ ist geeignete Koordinate, Beispiel: vom linken Rand der Streckenlast nach rechts)
Normalsteckenlast	ersetze q durch n
Haftreibung	$H \le \mu_0 N$ (Coulombsches Reibmodell, μ_0: Haftreibungskoeffizient)
Schnittgrößen	$N = -\int n\,d\xi,\ Q = -\int q\,d\xi,\ M_b = \int Q\,d\xi$ (ξ geeignete Koordinate) oder: Aufschneiden und Gleichgewicht
Spannung	$\sigma = \frac{N}{A_0},\ \tau = \frac{Q}{A_0}$ (A_0 unverformte Querschnittsfläche)
Verformung	$\varepsilon = \frac{du}{dx},\quad \gamma = \frac{du}{dy},\quad \sigma = \varepsilon E$ (Dehnung, Scherung, Hooke; E : E-Modul)
Zug-Druck	$\varepsilon_i = [\sigma_i - \nu(\sigma_{q1} + \sigma_{q2})]/E + \alpha_t\,\Delta T$ ($i = x, y, z$, q_1, q_2 sind Querrichtungen zu i, ν Querdehnzahl, α_t Temperaturausdehnungskoeffizient)
Scherung	$\tau = \frac{Q}{A_0}$
Biegung	$\sigma_{\max} = \frac{\lvert M_b \rvert}{I_{yy}} e$ (I_{yy} : axiales Flächenträgheitsmoment bezüglich y , e : maximaler vertikaler Abstand von neutraler Faser = Randfaserabstand) $w'' = -\frac{M_b}{E I_{yy}}$ oder $w'''' = \frac{q}{E I_{yy}}$ (Biegelinie der neutralen Faser)
Torsion	$\tau_{\max} = \frac{\lvert M_t \rvert}{I_P} r,\quad \varphi = \frac{M_t\,l}{G I_P}$ ($I_P = \frac{1}{2} r^4 \pi$: polares Flächenträgheitsmoment bezüglich Kreismittelpunkt, r : Radius des Kreisquerschnitts