

12 grudnia 2019

Jakub Kujawa  
Mikołaj Kowalski  
Grupa G8

**Rozwiązywanie układu równań liniowych  $XA=B$ ,  
gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , zmodyfikowaną metodą  
Doolittle'a (tj. poprzez rozkład  $A = UL$ , gdzie  $U$  jest  
macierzą trójkątną górną, a  $L$  macierzą trójkątną  
dolną z jedynkami na głównej przekątnej).  
Wyznaczanie macierzy  $A^{-1}$  oraz  $\det(A)$  na podstawie  
rozkładu.**

Projekt nr 1

## 1 Opis metody

Rozwiązanie układu równań  $XA=B$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , zmodyfikowaną metodą Doolittle'a opiera się na wyznaczeniu macierzy  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  oraz  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  takich, że  $L$  jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej, a  $U$  macierzą trójkątną górną oraz  $A=UL$ .

Niech:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Poszczególne elementy macierzy wyznaczamy ze wzorów:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=j+1}^n u_{ik} l_{kj} \quad (1)$$

oraz

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} l_{kj}}{u_{ii}} \quad (2)$$

gdzie wzór (1) stosujemy dla  $i \leq j$ , a wzór (2) dla  $i > j$ . Schemat wyznaczania opiera się na naprzemiennym obliczaniu wartości elementów macierzy U w n-tej kolumnie, wartości elementów w n-tym wierszu macierzy L, n-1-szej kolumnie macierzy U, n-1-szym wierszu macierzy L itd.

Po wyznaczeniu macierzy L oraz U należy rozwiązać następujące równania:

$$YL = B \quad (3)$$

oraz

$$XU = Y \quad (4)$$

gdzie  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Macierz Y z równania (3) wyznacza się za pomocą wzoru

$$y_{ij} = b_{ij} - \sum_{k=j+1}^n y_{ik} l_{kj}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od n-tej.

Natomiast macierz X z równania (4) wyznacza się za pomocą wzoru

$$x_{ij} = \frac{y_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} x_{ik} u_{ki}}{u_{jj}}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od pierwszej.

Wyznacznik macierzy A wyznaczymy dzięki zależności:

$$\det(A) = \det(UL) = \det(U) \cdot \det(L)$$

Natomiast z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n l_{i,i} = 1$$

Zatem

$$\det(A) = \det(U)$$

Wyznaczając odwrotność macierzy A również skorzystamy z wyznaczonych wcześniej macierzy L i U:

$$A^{-1} = (UL)^{-1} = L^{-1}U^{-1}$$

gdzie  $L^{-1}$  i  $U^{-1}$  istnieją tylko, gdy  $\det(U) \neq 0$ , czyli gdy żadna wartość na głównej przekątnej macierzy U nie jest równa 0.

Niech

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} l'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l'_{21} & l'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l'_{31} & l'_{32} & l'_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l'_{n1} & l'_{n2} & l'_{n3} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} & \dots & u'_{1n} \\ 0 & u'_{22} & u'_{23} & \dots & u'_{2n} \\ 0 & 0 & u'_{33} & \dots & u'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$l'_{ii} = \frac{1}{l_{ii}}$$

oraz

$$u'_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}$$

Pozostałe elementy macierzy  $L^{-1}$  oraz  $U^{-1}$  wyznaczymy, wykorzystując wzory:

$$l'_{ij} = -\frac{\sum_{k=j+1}^n l_{ik}l'_{kj}}{l_{ii}}$$

oraz

$$u'_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^n u_{ik}u'_{kj}}{u_{ii}}$$

gdzie elementy macierzy  $L^{-1}$  wyznaczamy wierszami od pierwszego do n-tego, a elementy macierzy  $U^{-1}$  wierszami od n-tego do pierwszego.

Wykorzystując program do wyliczenia macierzy X nie unikniemy błędów obliczeniowych. Ich analizę oprzemy na wyliczeniach:

i) wskaźnika uwarunkowania macierzy A:

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

ii) błędu rozkładu:

$$e_{dec} = \frac{\|A - UL\|}{\|A\|}$$

iii) błędu względnego:

$$e_{rel} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|}$$

iv) współczynnika stabilności:

$$wsp_{stab} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|cond(A)}$$

v) współczynnika poprawności:

$$wsp_{popr} = \frac{\|B - XA\|}{\|A\|\|X\|}$$

gdzie  $Z$  jest dokładnym rozwiązaniem układu,  $X$  rozwiązaniem obliczonym numerycznie przybliżeniem wyznaczonym naszym algorytmem, a  $A^{-1}$  wyznaczoną przez nas odwrotnością macierzy  $A$ .

## 2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. `mdoolittle(A)=[U,L]`:  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$  i wyznacza jej rozkład  $UL$
2. `invmd(A)=[Ai]`:  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$  i wyznacza jej odwrotność za pomocą rozkładu  $UL$
3. `solvemd(A,B)=[X]`:  
przyjmuje za argument macierze kwadratowe o tych samych wymiarach  $A$  oraz  $B$  i wyznacza rozwiązanie układu nierówności  $XA=B$  za pomocą rozkładu  $UL$
4. `detmd(A)=d`:  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$  i wyznacza jej wyznacznik za pomocą rozkładu  $UL$
5. `edec(A,p)=e`:  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$  oraz  $p$ -normę i wyznacza błąd rozkładu macierzy  $A$  zmodyfikowaną metodą Doolittle'a korzystając z  $p$ -normy

6.  $\text{erel}(A, B, p) = e$ :  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$ , macierz kwadratową  $B$  oraz  $p$ -normę i wyznacza błąd względny (korzystając z  $p$ -normy) rozwiązania układu  $XA=B$  zmodyfikowaną metodą Doolittle'a
7.  $\text{wspopr}(A, B, p) = w$ :  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$ , macierz kwadratową  $B$  oraz  $p$ -normę i wyznacza współczynnik poprawności (korzystając z  $p$ -normy) rozwiązania układu  $XA=B$  zmodyfikowaną metodą Doolittle'a
8.  $\text{wspstab}(A, B, p) = w$ :  
przyjmuje za argument macierz kwadratową  $A$ , macierz kwadratową  $B$  oraz  $p$ -normę i wyznacza współczynnik stabilności (korzystając z  $p$ -normy) rozwiązania układu  $XA=B$  zmodyfikowaną metodą Doolittle'a względem rozwiązania  $X = B \cdot A^{-1}$

### 3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych typów macierzy:

1. Macierz Hilberta:  
Tworzymy ją za pomocą funkcji  $\text{hilb}(n)$ , która tworzy macierz kwadratową Hilberta o  $n$  kolumnach i wierszach
2. Macierz Wilkinsona:  
Tworzymy ją za pomocą funkcji  $\text{wilkinson}(n)$ , która tworzy macierz kwadratową Wilkinsona o  $n$  kolumnach i wierszach.
3. Macierz magiczna:  
Tworzymy ją za pomocą funkcji  $\text{magic}(n)$ , która tworzy macierz kwadratową magiczną o  $n$  kolumnach i wierszach.

Wyniki będziemy sprawdzać dla 2 określonych macierzy  $B$ :

1. opcja pierwsza:  
macierz Hilberta o wymiarach takich jak macierz  $A$
2. opcja druga:  
macierz wilkinsona o wymiarach takich jak macierz  $A$

Tabela 1: Macierz Hilberta i opcja pierwsza macierzy B

$n$	$\text{cond}(A)$	$e_{dec}$	$e_{rel}$	$wsp_{stab}$	$wsp_{popr}$
3	524.0568	0	$3.6864e - 15$	$7.0343e - 18$	0
5	476607.2502	$3.996e - 16$	$1.626e - 12$	$3.4116e - 18$	$2.2474e - 16$
7	475367356.9114	$6.4816e - 16$	$4.4031e - 09$	$9.2625e - 18$	$1.3677e - 16$
9	493153404551.0121	$5.9273e - 15$	$3.8852e - 06$	$7.8783e - 18$	$2.6221e - 16$
11	522020733204514.8	$3.7619e - 14$	0.0041508	$7.9515e - 18$	$6.4185e - 17$

Tabela 2: Macierz Wilkinsona i opcja pierwsza macierzy B

$n$	$\text{cond}(A)$	$e_{dec}$	$e_{rel}$	$wsp_{stab}$	$wsp_{popr}$
3	2	0	$8.6818e - 17$	$4.3409e - 17$	$3.3161e - 17$
5	7.4897	0	$2.9763e - 16$	$3.9739e - 17$	$5.2256e - 17$
7	14.0383	$2.9515e - 17$	$3.505e - 16$	$2.4967e - 17$	$3.4306e - 17$
9	18.6369	$2.3387e - 17$	$1.7965e - 16$	$9.6396e - 18$	$3.0899e - 17$
11	22.637	$1.9321e - 17$	$3.1076e - 16$	$1.3728e - 17$	$3.9526e - 17$

Tabela 3: Macierz Magiczna i opcja pierwsza macierzy B

$n$	$\text{cond}(A)$	$e_{dec}$	$e_{rel}$	$wsp_{stab}$	$wsp_{popr}$
3	4.3301	0	$1.6984e - 16$	$3.9224e - 17$	$8.0675e - 17$
5	5.4618	$1.0931e - 16$	$5.8306e - 16$	$1.0675e - 16$	$1.1443e - 16$
7	7.1113	$9.4498e - 16$	$1.2273e - 15$	$1.7259e - 16$	$2.4545e - 16$
9	9.1017	$1.3065e - 15$	$1.4625e - 15$	$1.6068e - 16$	$1.9008e - 16$
11	11.1021	0.91799	0.84061	0.075716	0.077411

Tabela 4: Macierz Hilberta i opcja druga macierzy B

$n$	$\text{cond}(A)$	$e_{dec}$	$e_{rel}$	$wsp_{stab}$	$wsp_{popr}$
3	524.0568	0	$3.6864e - 15$	$7.0343e - 18$	0
5	476607.2502	$3.996e - 16$	$1.626e - 12$	$3.4116e - 18$	$2.2474e - 16$
7	475367356.9114	$6.4816e - 16$	$4.4031e - 09$	$9.2625e - 18$	$1.3677e - 16$
9	493153404551.0121	$5.9273e - 15$	$3.8852e - 06$	$7.8783e - 18$	$2.6221e - 16$
11	522020733204514.8	$3.7619e - 14$	0.0041508	$7.9515e - 18$	$6.4185e - 17$

Tabela 5: Macierz Wilkinsona i opcja druga macierzy B

$n$	$\text{cond}(A)$	$e_{dec}$	$e_{rel}$	$wsp_{stab}$	$wsp_{popr}$
3	2	0	$8.6818e - 17$	$4.3409e - 17$	$3.3161e - 17$
5	7.4897	0	$2.9763e - 16$	$3.9739e - 17$	$5.2256e - 17$
7	14.0383	$2.9515e - 17$	$3.505e - 16$	$2.4967e - 17$	$3.4306e - 17$
9	18.6369	$2.3387e - 17$	$1.7965e - 16$	$9.6396e - 18$	$3.0899e - 17$
11	22.637	$1.9321e - 17$	$3.1076e - 16$	$1.3728e - 17$	$3.9526e - 17$

Tabela 6: Macierz Magiczna i opcja druga macierzy B

$n$	$\text{cond}(A)$	$e_{dec}$	$e_{rel}$	$wsp_{stab}$	$wsp_{popr}$
3	4.3301	0	$1.6984e - 16$	$3.9224e - 17$	$8.0675e - 17$
5	5.4618	$1.0931e - 16$	$5.8306e - 16$	$1.0675e - 16$	$1.1443e - 16$
7	7.1113	$9.4498e - 16$	$1.2273e - 15$	$1.7259e - 16$	$2.4545e - 16$
9	9.1017	$1.3065e - 15$	$1.4625e - 15$	$1.6068e - 16$	$1.9008e - 16$
11	11.1021	0.91799	0.84061	0.075716	0.077411

Dokładne rozwiązania dla  $n=5$  w każdym z powyższych przypadków:

1. przypadek:

rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. przypadek:

rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

3. przypadek:

rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

4. przypadek:

rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = (1.0e + 05) \cdot \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = (1.0e + 05) \cdot \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

5. przypadek:

rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. przypadek:

rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

Tabela 7: Wyznacznik macierzy Hilberta w zależności od n

$n$	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	0.00046296	0.00046296	$8.1315e-19$	$1.7564e-15$
5	$3.7493e-12$	$3.7493e-12$	$6.0294e-24$	$1.6081e-12$
7	$4.8358e-25$	$4.8358e-25$	$8.6363e-34$	$1.7859e-09$
9	$9.7203e-43$	$9.7203e-43$	$5.5712e-49$	$5.7315e-07$
11	$3.0226e-65$	$3.027e-65$	$4.3512e-68$	0.0014375

Tabela 8: Wyznacznik macierzy Wilkinsona w zależności od n

$n$	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	-2	-2	0	0
5	-4	-4	0	0
7	-20	-20	0	0
9	-252	-252	$5.6843e-14$	$2.2557e-16$
11	-5610	-5610	$1.819e-12$	$3.2424e-16$

Tabela 9: Wyznacznik macierzy magicznej w zależności od n

$n$	$\det_{md}(A)$	$\det(A)$	błąd bezwzględny	błąd względny
3	-360	-360	0	0
5	5070000	5070000	0	0
7	-348052801600.0001	-348052801599.9999	0.00018311	$5.2609e - 16$
9	$7.5035738059e + 16$	$7.5035738059e + 16$	32	$4.2646e - 16$
11	$-3.8390999159e + 22$	$-4.1037749689e + 22$	$2.64675052985e + 21$	0.064496

Wyniki odwracania macierzy funkcją  $inv_{md}$  porównamy z wynikami funkcji wbudowanej  $inv$  dla  $n=5$  i  $n=7$  każdego typu macierzy:

1. Macierz Hilberta:

(a)  $n=5$ :

$$inv_{md}(A) = (1.0e + 05) \cdot \begin{pmatrix} 0.0002 & -0.0030 & 0.0105 & -0.0140 & 0.0063 \\ -0.0030 & 0.0480 & -0.1890 & 0.2688 & -0.1260 \\ 0.0105 & -0.1890 & 0.7938 & -1.1760 & 0.5670 \\ -0.0140 & 0.2688 & -1.1760 & 1.7920 & -0.8820 \\ 0.0063 & -0.1260 & 0.5670 & -0.8820 & 0.4410 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = (1.0e + 05) \cdot \begin{pmatrix} 0.0002 & -0.0030 & 0.0105 & -0.0140 & 0.0063 \\ -0.0030 & 0.0480 & -0.1890 & 0.2688 & -0.1260 \\ 0.0105 & -0.1890 & 0.7938 & -1.1760 & 0.5670 \\ -0.0140 & 0.2688 & -1.1760 & 1.7920 & -0.8820 \\ 0.0063 & -0.1260 & 0.5670 & -0.8820 & 0.4410 \end{pmatrix}.$$

(b)  $n=7$ :

Warning: Matrix is singular to working precision.

$$inv_{md}(A) =$$

$$(1.0e + 08) \cdot \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0004 & -0.0032 & 0.0113 & -0.0194 & 0.0160 & -0.0050 \\ 0.0001 & -0.0032 & 0.0286 & -0.1058 & 0.1871 & -0.1572 & 0.0505 \\ -0.0003 & 0.0113 & -0.1058 & 0.4032 & -0.7277 & 0.6209 & -0.2018 \\ 0.0005 & -0.0194 & 0.1871 & -0.7277 & 1.3340 & -1.1526 & 0.3784 \\ -0.0004 & 0.0160 & -0.1572 & 0.6209 & -1.1526 & 1.0059 & -0.3330 \\ 0.0001 & -0.0050 & 0.0505 & -0.2018 & 0.3784 & -0.3330 & 0.1110 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) =$$

$$(1.0e + 08) \cdot \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0004 & -0.0032 & 0.0113 & -0.0194 & 0.0160 & -0.0050 \\ 0.0001 & -0.0032 & 0.0286 & -0.1058 & 0.1871 & -0.1572 & 0.0505 \\ -0.0003 & 0.0113 & -0.1058 & 0.4032 & -0.7277 & 0.6209 & -0.2018 \\ 0.0005 & -0.0194 & 0.1871 & -0.7277 & 1.3340 & -1.1526 & 0.3784 \\ -0.0004 & 0.0160 & -0.1572 & 0.6209 & -1.1526 & 1.0059 & -0.3330 \\ 0.0001 & -0.0050 & 0.0505 & -0.2018 & 0.3784 & -0.3330 & 0.1110 \end{pmatrix}.$$

2. Macierz Wilkinsona:

(a) n=5:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.7500 & -0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & -1.000 & 0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0.5000 & -1.000 & 0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.5000 & 0.7500 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.7500 & -0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & -1.000 & 0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0.5000 & -1.000 & 0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.5000 & 0.7500 \end{pmatrix}.$$

(b) n=7:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.4500 & -0.3500 & 0.2500 & 0.1000 & -0.2500 & 0.1500 & -0.5000 \\ -0.3500 & 1.0500 & -0.7500 & -0.3000 & 0.7500 & -0.4500 & 0.1500 \\ 0.2500 & -0.7500 & 1.2500 & 0.5000 & -1.2500 & 0.7500 & -0.2500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.5000 & -0.2000 & 0.5000 & -0.3000 & 0.1000 \\ -0.2500 & 0.7500 & -1.2500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & 0.2500 \\ 0.1500 & -0.4500 & 0.7500 & -0.3000 & -0.7500 & 1.0500 & -0.3500 \\ -0.5000 & 0.1500 & -0.2500 & 0.1000 & 0.2500 & -0.3500 & 0.4500 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.4500 & -0.3500 & 0.2500 & 0.1000 & -0.2500 & 0.1500 & -0.5000 \\ -0.3500 & 1.0500 & -0.7500 & -0.3000 & 0.7500 & -0.4500 & 0.1500 \\ 0.2500 & -0.7500 & 1.2500 & 0.5000 & -1.2500 & 0.7500 & -0.2500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.5000 & -0.2000 & 0.5000 & -0.3000 & 0.1000 \\ -0.2500 & 0.7500 & -1.2500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & 0.2500 \\ 0.1500 & -0.4500 & 0.7500 & -0.3000 & -0.7500 & 1.0500 & -0.3500 \\ -0.5000 & 0.1500 & -0.2500 & 0.1000 & 0.2500 & -0.3500 & 0.4500 \end{pmatrix}.$$

3. Macierz Magiczna:

(a)  $n=5$ :

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} -0.0049 & 0.0512 & -0.0354 & 0.0012 & 0.0034 \\ 0.0431 & -0.0373 & -0.0046 & 0.0127 & 0.0015 \\ -0.0303 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0364 \\ 0.0047 & -0.0065 & 0.0108 & 0.0435 & -0.0370 \\ 0.0028 & 0.0050 & 0.0415 & -0.0450 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} -0.0049 & 0.0512 & -0.0354 & 0.0012 & 0.0034 \\ 0.0431 & -0.0373 & -0.0046 & 0.0127 & 0.0015 \\ -0.0303 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0364 \\ 0.0047 & -0.0065 & 0.0108 & 0.0435 & -0.0370 \\ 0.0028 & 0.0050 & 0.0415 & -0.0450 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

(b)  $n=7$ :

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0008 & 0.0212 & -0.0195 & -0.0021 & 0.0041 & 0.0004 \\ -0.0021 & 0.0241 & -0.0195 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0008 \\ 0.0212 & -0.0191 & 0.0004 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0008 & 0.0008 \\ -0.0170 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0187 \\ 0.0008 & 0.0008 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0012 & 0.0207 & -0.0195 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0212 & -0.0224 & 0.0037 \\ 0.0012 & -0.0025 & 0.0037 & 0.0212 & -0.0195 & 0.0008 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0008 & 0.0212 & -0.0195 & -0.0021 & 0.0041 & 0.0004 \\ -0.0021 & 0.0241 & -0.0195 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0008 \\ 0.0212 & -0.0191 & 0.0004 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0008 & 0.0008 \\ -0.0170 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0187 \\ 0.0008 & 0.0008 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0012 & 0.0207 & -0.0195 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0212 & -0.0224 & 0.0037 \\ 0.0012 & -0.0025 & 0.0037 & 0.0212 & -0.0195 & 0.0008 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

## 4 Analiza wyników

Z tabeli 1 widzimy, że błędy w dużym stopniu zależą od wskaźnika uwarunkowania macierzy. Dla coraz większego  $n$  wspomniany wskaźnik macierzy Hilberta rośnie bardzo szybko, co powoduje szybko wzrastające błędy dla coraz większych  $n$ . Szczególnie widoczne jest to dla błędu względnego  $e_{rel}$  oraz błędu rozkładu  $e_{dec}$ . Natomiast współczynnik stabilności oraz współczynnik poprawności zmieniają się w o wiele mniejszym stopniu.

Wyniki w tabeli 2 potwierdzają wywnioskowane spostrzeżenie. To samo można stwierdzić analizując wyniki w tabeli 3. Jednak widocznym jest nagły wzrost błędu dla  $n=11$ . Z tego powodu zbadamy dodatkowo zachowanie błędów dla Macierzy Magicznej w zależności od rozmiaru tej macierzy. Dodatkowo wykonamy badanie zależności wartości wskaźnika uwarunkowania, błędu względnego oraz współczynnika stabilności od wymiarów macierzy dla macierzy Hilberta.

Rysunek 1: Zależność wskaźnika uwarunkowania macierzy Hilberta od wymiarów macierzy

Na powyższych wykresach możemy dostrzec tendencję do liniowego wzrostu wskaźnika uwarunkowania Macierzy Magicznej dla  $n$  nieparzystego. Natomiast dla  $n$  parzystego wartości wskaźnika uwarunkowania zmieniają się w sposób znaczny malejąc, by dla kolejnej wartości znów wzrosnąć. To może być przyczyną nagłego wzrostu błędów dla  $n$  większego od 9.

Z wykresów ukazujących zależność między współczynnikiem stabilności, a wielkością macierzy Hilberta można wywnioskować, że zmiana współczynnika stabilności nie zależy od parzystości wymiarów macierzy. Widzimy również tendencję do zbliżania się wartości tego współczynnika do zera dla coraz większych  $n$ .

Analizując błędy między wyznacznikiem obliczonym funkcją `detmd` a `det`, dochodzimy do wniosku, że wielkość błędu w sposób ścisły zależy od wskaźnika uwarunkowania macierzy oraz dodatkowo dla Macierzy Magicznej od jej wielkości - dla  $n$  większych od 9 błąd drastycznie rośnie.

Natomiast dla funkcji `invmd` oraz `inv` możemy spostrzec wypisanie przez program ostrzeżenia o wyznaczniku macierzy bliskiemu wartości 0 dla macierzy Hilberta o wymiarach  $7 \times 7$ , co zwraca nam uwagę na możliwe błędy dla macierzy o niewielkich wartościach wyznacznika. Jednak dla badanych wartości  $n$  błędy między wynikami otrzymanymi tymi dwoma funkcjami są niezauważalne bez dogłębniejszej analizy.

## Spis treści

1	Opis metody	1
2	Opis programu obliczeniowego	4
3	Przykłady obliczeniowe	5

