12 grudnia 2019

Jakub Kujawa
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Rozwiązywanie układu równań liniowych XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolittle'a (tj. poprzez rozkład $A = UL$, gdzie U jest macierzą trójkątną górną, a L macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej). Wyznaczanie macierzy A^{-1} oraz $det(A)$ na podstawie rozkładu.

Projekt nr 1

1 Opis metody

Rozwiązanie układu równań XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolitle'a opiera się na wyznaczeniu macierzy $L \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ oraz $U \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ takich, że L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na glównej przekątnej, a U macierzą trójkątną górną oraz A=UL.
Niech:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Poszczególne elementy macierzy wyznaczamy ze wzorów:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} u_{ik} l_{kj} \tag{1}$$

oraz

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} l_{kj}}{u_{ii}} \tag{2}$$

gdzie wzór (1) stosujemy dla $i \leq j$, a wzór (2) dla $i > j$. Schemat wyznaczania opiera się na naprzemiennym obliczaniu wartości elementów macierzy U w n-tej kolumnie, wartości elementów w n-tym wierszu macierzy L, n-1-szej kolumnie macierzy U, n-1-szym wierszu macierzy L itd.
Po wyznaczeniu macierzy L oraz U należy rozwiązać następujące równania:

$$YL = B \tag{3}$$

oraz

$$XU = Y \tag{4}$$

gdzie $Y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$.
Macierz Y z równania (3) wyznacza się za pomocą wzoru

$$y_{ij} = b_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} y_{ik} l_{kj}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od n-tej.
Natomiast macierz X z równania (4) wyznacza się za pomocą wzoru

$$x_{ij} = \frac{y_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} x_{ik} u_{ki}}{u_{jj}}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od pierwszej.

Wyznacznik macierzy A wyznaczymy dzięki zależności:

$$det(A) = det(UL) = det(U) \cdot det(L)$$

Natomiast z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i} = 1$$

Zatem

$$det(A) = det(U)$$

Wyznaczając odwrotność macierzy A również skorzystamy z wyznaczonych wcześniej macierzy L i U:

$$A^{-1} = (UL)^{-1} = L^{-1}U^{-1}$$

gdzie L^{-1} i U^{-1} istnieją tylko, gdy $det(U) \neq 0$, czyli gdy żadna wartość na głównej przekątnej macierzy U nie jest równa 0.
Niech

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} l'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l'_{21} & l'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l'_{31} & l'_{32} & l'_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l'_{n1} & l'_{n2} & l'_{n3} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} & \dots & u'_{1n} \\ 0 & u'_{22} & u'_{23} & \dots & u'_{2n} \\ 0 & 0 & u'_{33} & \dots & u'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$l'_{ii} = \frac{1}{l_{ii}}$$

oraz

$$u'_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}$$

Pozostałe elementy macierzy L^{-1} oraz U^{-1} wyznaczymy, wykorzystując wzory:

$$l'_{ij} = -\frac{\sum_{k=j+1}^{n} l_{ik} l'_{kj}}{l_{ii}}$$

oraz

$$u'_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} u'_{kj}}{u_{ii}}$$

gdzie elementy macierzy L^{-1} wyznaczamy wierszami od pierwszego do n-tego, a elementy macierzy U^{-1} wierszami od n-tego do pierwszego.

Wykorzystując program do wyliczenia macierzy X nie unikniemy błędów obliczeniowych. Ich analizę oprzemy na wyliczeniach:

i) wskaźnika uwarunkowania macierzy A:

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

ii) błędu rozkładu:

$$e_{dec} = \frac{\|A - UL\|}{\|A\|}$$

iii) błędu względnego:

$$e_{rel} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|}$$

iv) współczynnika stabilości:

$$wsp_{stab} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\| cond(A)}$$

v) współczynnika poprawności:

$$wsp_{popr} = \frac{\|B - XA\|}{\|A\|\|X\|}$$

gdzie Z jest dokładnym rozwiązaniem układu, X rozwiązaniem obliczonym numerycznie przybliżeniem wyznaczonym naszym algorytmem,a A^{-1} wyznaczoną przez nas odwrotnością macierzy A.

2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. mdoolittle(A)=[U,L]:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej rozkład UL

2. invmd(A)=[Ai]:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej odwrotność za pomocą rozkładu UL

3. solvemd(A,B)=[X]:
   przyjmuje za argument macierze kwadratowe o tych samych wymiarach A oraz B i wyznacza rozwiązanie układu nierówności XA=B za pomocą rozkładu UL

4. detmd(A)=d:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej wyznacznik za pomocą rozkładu UL

5. edec(A,p)=e:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A oraz p-normę i wyznacza błąd rozkładu macierzy A zmodyfikowaną metodą Doolittle'a korzystając z p-normy

6. erel(A,B,p)=e:
przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza bład względny (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolittle'a

7. wsppopr(A,B,p)=w:
przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza współczynnik poprawności (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolitle'a

8. wspstab(A,B,p)=w:
przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza współczynnik stabilności (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolitle'a względem rozwiązania $X = B \cdot A^{-1}$

3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych typów macierzy:

1. Macierz Hilberta:
Tworzymy ją za pomocą funkcji hilb(n), która tworzy macierz kwadratową Hilberta o n kolumnach i wierszach

2. Macierz Wilkinsona:
Tworzymy ją za pomocą funkcji wilkinson(n), która tworzy macierz kwadratową Wilkinsona o n kolumnach i wierszach.

3. Macierz magiczna:
Tworzymy ją za pomocą funkcji magic(n), która tworzy macierz kwadratową magiczną o n kolumnach i wierszach.

Wyniki będziemy sprawdzać dla 2 określonych macierzy B:

1. opcja pierwsza:
macierz Hilberta o wymiarach takich jak macierz A

2. opcja druga:
macierz wilkinsona o wymiarach takich jak macierz A

Tabela 1: Macierz Hilberta i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	524.0568	0	$3.6864e-15$	$7.0343e-18$	0
5	476607.2502	$3.996e-16$	$1.626e-12$	$3.4116e-18$	$2.2474e-16$
7	475367356.9114	$6.4816e-16$	$4.4031e-09$	$9.2625e-18$	$1.3677e-16$
9	493153404551.0121	$5.9273e-15$	$3.8852e-06$	$7.8783e-18$	$2.6221e-16$
11	522020733204514.8	$3.7619e-14$	0.0041508	$7.9515e-18$	$6.4185e-17$

Tabela 2: Macierz Wilkinsona i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	2	0	$8.6818e-17$	$4.3409e-17$	$3.3161e-17$
5	7.4897	0	$2.9763e-16$	$3.9739e-17$	$5.2256e-17$
7	14.0383	$2.9515e-17$	$3.505e-16$	$2.4967e-17$	$3.4306e-17$
9	18.6369	$2.3387e-17$	$1.7965e-16$	$9.6396e-18$	$3.0899e-17$
11	22.637	$1.9321e-17$	$3.1076e-16$	$1.3728e-17$	$3.9526e-17$

Tabela 3: Macierz Magiczna i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	$1.6984e-16$	$3.9224e-17$	$8.0675e-17$
5	5.4618	$1.0931e-16$	$5.8306e-16$	$1.0675e-16$	$1.1443e-16$
7	7.1113	$9.4498e-16$	$1.2273e-15$	$1.7259e-16$	$2.4545e-16$
9	9.1017	$1.3065e-15$	$1.4625e-15$	$1.6068e-16$	$1.9008e-16$
11	11.1021	0.91799	0.84061	0.075716	0.077411

Tabela 4: Macierz Hilberta i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	524.0568	0	$3.6864e-15$	$7.0343e-18$	0
5	476607.2502	$3.996e-16$	$1.626e-12$	$3.4116e-18$	$2.2474e-16$
7	475367356.9114	$6.4816e-16$	$4.4031e-09$	$9.2625e-18$	$1.3677e-16$
9	493153404551.0121	$5.9273e-15$	$3.8852e-06$	$7.8783e-18$	$2.6221e-16$
11	522020733204514.8	$3.7619e-14$	0.0041508	$7.9515e-18$	$6.4185e-17$

.

Tabela 5: Macierz Wilkinsona i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	2	0	$8.6818e-17$	$4.3409e-17$	$3.3161e-17$
5	7.4897	0	$2.9763e-16$	$3.9739e-17$	$5.2256e-17$
7	14.0383	$2.9515e-17$	$3.505e-16$	$2.4967e-17$	$3.4306e-17$
9	18.6369	$2.3387e-17$	$1.7965e-16$	$9.6396e-18$	$3.0899e-17$
11	22.637	$1.9321e-17$	$3.1076e-16$	$1.3728e-17$	$3.9526e-17$

Tabela 6: Macierz Magiczna i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	$1.6984e-16$	$3.9224e-17$	$8.0675e-17$
5	5.4618	$1.0931e-16$	$5.8306e-16$	$1.0675e-16$	$1.1443e-16$
7	7.1113	$9.4498e-16$	$1.2273e-15$	$1.7259e-16$	$2.4545e-16$
9	9.1017	$1.3065e-15$	$1.4625e-15$	$1.6068e-16$	$1.9008e-16$
11	11.1021	0.91799	0.84061	0.075716	0.077411

Dokładne rozwiązania dla n=5 w każdym z powyższych przypadków:

1. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

   rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

3. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

4. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = (1.0e+05) \cdot \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = (1.0e+05) \cdot \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

5. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

Tabela 7: Wyznacznik macierzy Hilberta w zależności od n

n	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	0.00046296	0.00046296	$8.1315e-19$	$1.7564e-15$
5	$3.7493e-12$	$3.7493e-12$	$6.0294e-24$	$1.6081e-12$
7	$4.8358e-25$	$4.8358e-25$	$8.6363e-34$	$1.7859e-09$
9	$9.7203e-43$	$9.7203e-43$	$5.5712e-49$	$5.7315e-07$
11	$3.0226e-65$	$3.027e-65$	$4.3512e-68$	0.0014375

Tabela 8: Wyznacznik macierzy Wilkinsona w zależności od n

n	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	-2	-2	0	0
5	-4	-4	0	0
7	-20	-20	0	0
9	-252	-252	$5.6843e-14$	$2.2557e-16$
11	-5610	-5610	$1.819e-12$	$3.2424e-16$

Tabela 9: Wyznacznik macierzy magicznej w zależności od n

n	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	-360	-360	0	0
5	5070000	5070000	0	0
7	-348052801600.0001	-348052801599.9999	0.00018311	$5.2609e-16$
9	$7.5035738059e+16$	$7.5035738059e+16$	32	$4.2646e-16$
11	$-3.8390999159e+22$	$-4.1037749689e+22$	$2.64675052985e+21$	0.064496

Wyniki odwracania macierzy funkcją invmd porównamy z wynikami funkcji wbudowanej inv dla n=5 i n=7 każdego typu macierzy:

1. Macierz Hilberta:

   (a) n=5:

$$invmd(A) = (1.0e+05)\cdot \begin{pmatrix} 0.0002 & -0.0030 & 0.0105 & -0.0140 & 0.0063 \\ -0.0030 & 0.0480 & -0.1890 & 0.2688 & -0.1260 \\ 0.0105 & -0.1890 & 0.7938 & -1.1760 & 0.5670 \\ -0.0140 & 0.2688 & -1.1760 & 1.7920 & -0.8820 \\ 0.0063 & -0.1260 & 0.5670 & -0.8820 & 0.4410 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = (1.0e+05)\cdot \begin{pmatrix} 0.0002 & -0.0030 & 0.0105 & -0.0140 & 0.0063 \\ -0.0030 & 0.0480 & -0.1890 & 0.2688 & -0.1260 \\ 0.0105 & -0.1890 & 0.7938 & -1.1760 & 0.5670 \\ -0.0140 & 0.2688 & -1.1760 & 1.7920 & -0.8820 \\ 0.0063 & -0.1260 & 0.5670 & -0.8820 & 0.4410 \end{pmatrix}.$$

   (b) n=7:
   Warning: Matrix is singular to working precision.

$$invmd(A) =$$

$$(1.0e+08)\cdot \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0004 & -0.0032 & 0.0113 & -0.0194 & 0.0160 & -0.0050 \\ 0.0001 & -0.0032 & 0.0286 & -0.1058 & 0.1871 & -0.1572 & 0.0505 \\ -0.0003 & 0.0113 & -0.1058 & 0.4032 & -0.7277 & 0.6209 & -0.2018 \\ 0.0005 & -0.0194 & 0.1871 & -0.7277 & 1.3340 & -1.1526 & 0.3784 \\ -0.0004 & 0.0160 & -0.1572 & 0.6209 & -1.1526 & 1.0059 & -0.3330 \\ 0.0001 & -0.0050 & 0.0505 & -0.2018 & 0.3784 & -0.3330 & 0.1110 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) =$$

$$(1.0e+08)\cdot\begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0004 & -0.0032 & 0.0113 & -0.0194 & 0.0160 & -0.0050 \\ 0.0001 & -0.0032 & 0.0286 & -0.1058 & 0.1871 & -0.1572 & 0.0505 \\ -0.0003 & 0.0113 & -0.1058 & 0.4032 & -0.7277 & 0.6209 & -0.2018 \\ 0.0005 & -0.0194 & 0.1871 & -0.7277 & 1.3340 & -1.1526 & 0.3784 \\ -0.0004 & 0.0160 & -0.1572 & 0.6209 & -1.1526 & 1.0059 & -0.3330 \\ 0.0001 & -0.0050 & 0.0505 & -0.2018 & 0.3784 & -0.3330 & 0.1110 \end{pmatrix}.$$

2. Macierz Wilkinsona:

   (a) n=5:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.7500 & -0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & -1.000 & 0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0.5000 & -1.000 & 0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.5000 & 0.7500 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.7500 & -0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & -1.000 & 0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0.5000 & -1.000 & 0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.5000 & 0.7500 \end{pmatrix}.$$

   (b) n=7:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.4500 & -0.3500 & 0.2500 & 0.1000 & -0.2500 & 0.1500 & -0.5000 \\ -0.3500 & 1.0500 & -0.7500 & -0.3000 & 0.7500 & -0.4500 & 0.1500 \\ 0.2500 & -0.7500 & 1.2500 & 0.5000 & -1.2500 & 0.7500 & -0.2500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.5000 & -0.2000 & 0.5000 & -0.3000 & 0.1000 \\ -0.2500 & 0.7500 & -1.2500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & 0.2500 \\ 0.1500 & -0.4500 & 0.7500 & -0.3000 & -0.7500 & 1.0500 & -0.3500 \\ -0.5000 & 0.1500 & -0.2500 & 0.1000 & 0.2500 & -0.3500 & 0.4500 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.4500 & -0.3500 & 0.2500 & 0.1000 & -0.2500 & 0.1500 & -0.5000 \\ -0.3500 & 1.0500 & -0.7500 & -0.3000 & 0.7500 & -0.4500 & 0.1500 \\ 0.2500 & -0.7500 & 1.2500 & 0.5000 & -1.2500 & 0.7500 & -0.2500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.5000 & -0.2000 & 0.5000 & -0.3000 & 0.1000 \\ -0.2500 & 0.7500 & -1.2500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & 0.2500 \\ 0.1500 & -0.4500 & 0.7500 & -0.3000 & -0.7500 & 1.0500 & -0.3500 \\ -0.5000 & 0.1500 & -0.2500 & 0.1000 & 0.2500 & -0.3500 & 0.4500 \end{pmatrix}.$$

3. Macierz Magiczna:

(a) n=5:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} -0.0049 & 0.0512 & -0.0354 & 0.0012 & 0.0034 \\ 0.0431 & -0.0373 & -0.0046 & 0.0127 & 0.0015 \\ -0.0303 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0364 \\ 0.0047 & -0.0065 & 0.0108 & 0.0435 & -0.0370 \\ 0.0028 & 0.0050 & 0.0415 & -0.0450 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} -0.0049 & 0.0512 & -0.0354 & 0.0012 & 0.0034 \\ 0.0431 & -0.0373 & -0.0046 & 0.0127 & 0.0015 \\ -0.0303 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0364 \\ 0.0047 & -0.0065 & 0.0108 & 0.0435 & -0.0370 \\ 0.0028 & 0.0050 & 0.0415 & -0.0450 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

(b) n=7:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0008 & 0.0212 & -0.0195 & -0.0021 & 0.0041 & 0.0004 \\ -0.0021 & 0.0241 & -0.0195 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0008 \\ 0.0212 & -0.0191 & 0.0004 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0008 & 0.0008 \\ -0.0170 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0187 \\ 0.0008 & 0.0008 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0012 & 0.0207 & -0.0195 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0212 & -0.0224 & 0.0037 \\ 0.0012 & -0.0025 & 0.0037 & 0.0212 & -0.0195 & 0.0008 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0008 & 0.0212 & -0.0195 & -0.0021 & 0.0041 & 0.0004 \\ -0.0021 & 0.0241 & -0.0195 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0008 \\ 0.0212 & -0.0191 & 0.0004 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0008 & 0.0008 \\ -0.0170 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0187 \\ 0.0008 & 0.0008 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0012 & 0.0207 & -0.0195 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0212 & -0.0224 & 0.0037 \\ 0.0012 & -0.0025 & 0.0037 & 0.0212 & -0.0195 & 0.0008 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

4 Analiza wyników

Z tabeli 1 widzimy, że błędy w dużym stopniu zależą od wskaźnika uwarunkowania macierzy. Dla coraz większego n wspomniany wskaźnik macierzy Hilberta rośnie bardzo szybko, co powoduje szybko wzrastające błędy dla co raz większych n.
Wyniki w tabeli 2 potwierdzają wywnioskowane spostrzeżenie. To samo można stwierdzić analizując wyniki w tabeli 3. Jednak widocznym jest nagły wzrost błędu dla n=11.

Literatura

[1] G. Dahlquist and Å. Björck, Metody numeryczne, PWN, Warszawa, 1983.

[2] J. i M. Jankowscy, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1, WNT, Warszawa, 1981.

Wszelkie pytania i wnioski prosimy kierować na adres:

wrubelki@wp.pl