12 grudnia 2019

Jakub Kujawa
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Rozwiązywanie układu równań liniowych XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolittle'a (tj. poprzez rozkład $A = UL$, gdzie U jest macierzą trójkątną górną, a L macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej). Wyznaczanie macierzy A^{-1} oraz $det(A)$ na podstawie rozkładu.

Projekt nr 1

1 Opis metody

Rozwiązanie układu równań XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolitle'a opiera się na wyznaczeniu macierzy $L \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ oraz $U \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ takich, że L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na glównej przekątnej, a U macierzą trójkątną górną oraz A=UL.
Niech:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Poszczególne elementy macierzy wyznaczamy ze wzorów:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} u_{ik} l_{kj} \tag{1}$$

oraz

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} l_{kj}}{u_{ii}} \tag{2}$$

gdzie wzór (1) stosujemy dla $i \leq j$, a wzór (2) dla $i > j$. Schemat wyznaczania opiera się na naprzemiennym obliczaniu wartości elementów macierzy U w n-tej kolumnie, wartości elementów w n-tym wierszu macierzy L, n-1-szej kolumnie macierzy U, n-1-szym wierszu macierzy L itd.
Po wyznaczeniu macierzy L oraz U należy rozwiązać następujące równania:

$$YL = B \tag{3}$$

oraz

$$XU = Y \tag{4}$$

gdzie $Y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$.
Macierz Y z równania (3) wyznacza się za pomocą wzoru

$$y_{ij} = b_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} y_{ik} l_{kj}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od n-tej.
Natomiast macierz X z równania (4) wyznacza się za pomocą wzoru

$$x_{ij} = \frac{y_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} x_{ik} u_{ki}}{u_{jj}}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od pierwszej.

Wyznacznik macierzy A wyznaczymy dzięki zależności:

$$det(A) = det(UL) = det(U) * det(L)$$

Natomiast z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i} = 1$$

Zatem

$$det(A) = det(U)$$

Wyznaczając odwrotność macierzy A również skorzystamy z wyznaczonych wcześniej macierzy L i U:

$$A^{-1} = (UL)^{-1} = L^{-1}U^{-1}$$

gdzie L^{-1} i U^{-1} istnieją tylko, gdy $det(U) \neq 0$, czyli gdy żadna wartość na głównej przekątnej macierzy U nie jest równa 0.
Niech

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} l'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l'_{21} & l'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l'_{31} & l'_{32} & l'_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l'_{n1} & l'_{n2} & l'_{n3} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} & \dots & u'_{1n} \\ 0 & u'_{22} & u'_{23} & \dots & u'_{2n} \\ 0 & 0 & u'_{33} & \dots & u'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$l'_{ii} = 1$$

oraz

$$u'_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}$$

Pozostałe elementy macierzy L^{-1} oraz U^{-1} wyznaczymy, wykorzystując wzory:

$$l'_{ij} = -\sum_{k=j+1}^{n} l_{ik}l'_{kj}$$

oraz

$$u'_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}u'_{kj}}{u_{ii}}$$

gdzie elementy macierzy L^{-1} wyznaczamy wierszami od pierwszego do n-tego, a elementy macierzy U^{-1} wierszami od n-tego do pierwszego.

Wykorzystując program do wyliczenia macierzy X nie unikniemy błędów obliczeniowych. Ich analizę oprzemy na wyliczeniach:

i) wskaźnika uwarunkowania macierzy A:

$$cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$$

ii) błędu rozkładu:

$$e_{dec} = \frac{\|A - UL\|}{\|A\|}$$

iii) błędu względnego:

$$e_{rel} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|}$$

iv) współczynnika stabilości:

$$wsp_{stab} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\| cond(A)}$$

v) współczynnika poprawności:

$$wsp_{popr} = \frac{\|B - XA\|}{\|A\|\|X\|}$$

gdzie Z jest dokładnym rozwiązaniem układu, X rozwiązaniem obliczonym numerycznie przybliżeniem wyznaczonym naszym algorytmem,a A^{-1} wyznaczoną przez nas odwrotnością macierzy A.

2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. mdoolittle(A)=[U,L]:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej rozkład UL

2. invmd(A)=[Ai]:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej odwrotność za pomocą rozkładu UL

3. solvemd(A,B)=[X]:
   przyjmuje za argument macierze kwadratowe o tych samych wymiarach A oraz B i wyznacza rozwiązanie układu nierówności XA=B za pomocą rozkładu UL

4. detmd(A)=d:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej wyznacznik za pomocą rozkładu UL

5. edec(A,p)=e:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A oraz p-normę i wyznacza błąd rozkładu macierzy A zmodyfikowaną metodą Doolittle'a korzystając z p-normy

6. erel(A,B,p)=e:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza błąd względny (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolittle'a

7. wsppopr(A,B,p)=w:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza współczynnik poprawności (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolitle'a

8. wspstab(A,B,p)=w:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza współczynnik stabilności (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolitle'a względem rozwiązania $X = B \cdot A^{-1}$

3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych typów macierzy:

1. Macierz Hilberta:
   Tworzymy ją za pomocą funkcji hilb(n), która tworzy macierz kwadratową Hilberta o n kolumnach i wierszach

2. Macierz Wilkinsona:
   Tworzymy ją za pomocą funkcji wilkinson(n), która tworzy macierz kwadratową Wilkinsona o n kolumnach i wierszach.

3. Macierz magiczna:
   Tworzymy ją za pomocą funkcji magic(n), która tworzy macierz kwadratową magiczną o n kolumnach i wierszach.

Wyniki będziemy sprawdzać dla 2 określonych macierzy B:

1. opcja pierwsza:
   macierz Hilberta o wymiarach takich jak macierz A

2. opcja druga:
   macierz wilkinsona o wymiarach takich jak macierz A

Tabela 1: Macierz Hilberta i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	524.0568	0	$3.6864e-15$	$7.0343e-18$	0
5	$4.7661e+05$	$3.9960e-16$	$1.6140e-12$	$3.3864e-18$	$2.2474e-16$
7	$4.7537e+08$	$6.4816e-16$	$3.3720e-09$	$7.0934e-18$	$1.3677e-16$
9	$4.9315e+11$	$5.9270e-15$	$3.6043e-06$	$7.3086e-18$	$4.8327e-17$
11	$5.2202e+14$	$3.7619e-14$	0.0037	$7.1253e-18$	$6.4185e-17$

Tabela 2: Macierz Wilkinsona i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	2	0	1	0.5	$3.3161e-17$
5	7.4897	0	1	0.1335	$5.2256e-17$
7	14.0383	$2.9515e-17$	1	0.0712	$3.4306e-17$
9	18.6369	$2.3387e-17$	1	0.0537	$3.0899e-17$
11	22.6370	$1.9321e-17$	1	0.0442	$3.9526e-17$

Tabela 3: Macierz Magiczna i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	1	0.2309	$8.0675e-17$
5	5.4618	$1.0931e-16$	1	0.1831	$1.1443e-16$
7	7.1113	$9.4498e-16$	1	0.1406	$2.4545e-16$
9	9.1017	$1.8403e-15$	1	0.1099	$2.9130e-16$
11	11.1021	0.9180	1	0.0901	0.0774

Tabela 4: Macierz Hilberta i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	1	0.2309	$8.0675e-17$
5	$4.7661e+05$	$3.9960e-16$	$4.3481e+05$	0.9123	$1.4980e-17$
7	$4.7537e+08$	$6.4816e-16$	$4.4717e+08$	0.9407	$5.4010e-18$
9	$4.9315e+11$	$5.9270e-15$	$6.1403e+11$	1.2451	$1.0786e-17$
11	$5.2202e+14$	$3.7619e-14$	$7.9062e+14$	1.5145	$9.7706e-18$

Tabela 5: Macierz Wilkinsona i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	2	0	0	0	0
5	7.4897	0	$4.1633e-17$	$5.5588e-18$	0
7	14.0383	$2.9515e-17$	$9.0653e-17$	$6.4575e-18$	0
9	18.6369	$2.3387e-17$	$2.0414e-16$	$1.0964e-17$	$1.3865e-33$
11	22.6370	$1.9321e-17$	$2.1708e-16$	$9.5894e-18$	$3.8642e-17$

Tabela 6: Macierz Magiczna i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	0.9822	0.2269	$2.4016e-16$
5	5.4618	$1.0931e-16$	0.9993	0.1830	$1.9806e-16$
7	7.1113	$9.4498e-16$	0.9999	0.1406	$4.4752e-16$
9	9.1017	$1.8403e-15$	1	0.1099	$4.4632e-16$
11	11.1021	0.9180	0.9999	0.0901	0.1154

Dokładne rozwiązania dla n=5 w każdym z powyższych przypadków:

1. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

   rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

3. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

4. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:
1.0e+05 *

$$X = \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:
1.0e+05 *

$$X = \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

5. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

4 Analiza wyników

Cos tu sie zanalizuje, ale chyba dopiero po poprawieniu invmd.

Literatura

[1] G. Dahlquist and Å. Björck, Metody numeryczne, PWN, Warszawa, 1983.

[2] J. i M. Jankowscy, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1, WNT, Warszawa, 1981.

Wszelkie pytania i wnioski prosimy kierować na adres:

wrubelki@wp.pl