12 grudnia 2019

Jakub Kujawa
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Rozwiązywanie układu równań liniowych XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolittle'a (tj. poprzez rozkład $A = UL$, gdzie U jest macierzą trójkątną górną, a L macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej). Wyznaczanie macierzy A^{-1} oraz $det(A)$ na podstawie rozkładu.

Projekt nr 1

Spis treści

1 Opis metody

Rozwiązanie układu równań XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolitle'a opiera się na wyznaczeniu macierzy $L \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$ oraz $U \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$ takich, że L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej, a U macierzą trójkątną górną oraz A=UL.
Niech:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Poszczególne elementy macierzy wyznaczamy ze wzorów:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} u_{ik} l_{kj} \tag{1}$$

oraz

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} l_{kj}}{u_{ii}} \tag{2}$$

gdzie wzór (1) stosujemy dla $i \leq j$, a wzór (2) dla $i > j$. Schemat wyznaczania opiera się na naprzemiennym obliczaniu wartości elementów macierzy U w n-tej kolumnie, wartości elementów w n-tym wierszu macierzy L, n-1-szej kolumnie macierzy U, n-1-szym wierszu macierzy L itd.
Po wyznaczeniu macierzy L oraz U należy rozwiązać następujące równania:

$$YL = B \tag{3}$$

oraz

$$XU = Y \tag{4}$$

gdzie $Y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$.
Macierz Y z równania (3) wyznacza się za pomocą wzoru

$$y_{ij} = b_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} y_{ik} l_{kj}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od n-tej.
Natomiast macierz X z równania (4) wyznacza się za pomocą wzoru

$$x_{ij} = \frac{y_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} x_{ik} u_{ki}}{u_{jj}}$$

wyznaczając kolejne kolumny macierzy zaczynając od pierwszej.

Wyznacznik macierzy A wyznaczymy dzięki zależności:

$$det(A) = det(UL) = det(U) \cdot det(L)$$

Natomiast z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i} = 1$$

Zatem

$$det(A) = det(U)$$

Wyznaczając odwrotność macierzy A również skorzystamy z wyznaczonych wcześniej macierzy L i U:

$$A^{-1} = (UL)^{-1} = L^{-1}U^{-1}$$

gdzie L^{-1} i U^{-1} istnieją tylko, gdy $det(U) \neq 0$, czyli gdy żadna wartość na głównej przekątnej macierzy U nie jest równa 0.
Niech

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} l'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l'_{21} & l'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l'_{31} & l'_{32} & l'_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l'_{n1} & l'_{n2} & l'_{n3} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} & \dots & u'_{1n} \\ 0 & u'_{22} & u'_{23} & \dots & u'_{2n} \\ 0 & 0 & u'_{33} & \dots & u'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$l'_{ii} = \frac{1}{l_{ii}}$$

oraz

$$u'_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}$$

Pozostałe elementy macierzy L^{-1} oraz U^{-1} wyznaczymy, wykorzystując wzory:

$$l'_{ij} = -\frac{\sum_{k=j+1}^{n} l_{ik} l'_{kj}}{l_{ii}}$$

oraz

$$u'_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} u'_{kj}}{u_{ii}}$$

gdzie elementy macierzy L^{-1} wyznaczamy wierszami od pierwszego do n-tego, a elementy macierzy U^{-1} wierszami od n-tego do pierwszego.

Wykorzystując program do wyliczenia macierzy X nie unikniemy błędów obliczeniowych. Ich analizę oprzemy na wyliczeniach:

i) wskaźnika uwarunkowania macierzy A:

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

ii) błędu rozkładu:

$$e_{dec} = \frac{\|A - UL\|}{\|A\|}$$

iii) błędu względnego:

$$e_{rel} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|}$$

iv) współczynnika stabilości:

$$wsp_{stab} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\| cond(A)}$$

v) współczynnika poprawności:

$$wsp_{popr} = \frac{\|B - XA\|}{\|A\| \|X\|}$$

gdzie Z jest dokładnym rozwiązaniem układu, X rozwiązaniem obliczonym numerycznie przybliżeniem wyznaczonym naszym algorytmem,a A^{-1} wyznaczoną przez nas odwrotnością macierzy A.

2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. mdoolittle(A)=[U,L]:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej rozkład UL

2. invmd(A)=[Ai]:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej odwrotność za pomocą rozkładu UL

3. solvemd(A,B)=[X]:
   przyjmuje za argument macierze kwadratowe o tych samych wymiarach A oraz B i wyznacza rozwiązanie układu nierówności XA=B za pomocą rozkładu UL

4. detmd(A)=d:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A i wyznacza jej wyznacznik za pomocą rozkładu UL

5. edec(A,p)=e:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A oraz p-normę i wyznacza błąd rozkładu macierzy A zmodyfikowaną metodą Doolittle'a korzystając z p-normy

6. erel(A,B,p)=e:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza bład względny (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolittle'a

7. wsppopr(A,B,p)=w:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza współczynnik poprawności (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolitle'a

8. wspstab(A,B,p)=w:
   przyjmuje za argument macierz kwadratową A, macierz kwadratową B oraz p-normę i wyznacza współczynnik stabilności (korzystając z p-normy) rozwiązania układu XA=B zmodyfikowaną metodą Doolitle'a względem rozwiązania $X = B \cdot A^{-1}$

3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych typów macierzy:

1. Macierz Hilberta:
   Tworzymy ją za pomocą funkcji hilb(n), która tworzy macierz kwadratową Hilberta o n kolumnach i wierszach

2. Macierz Wilkinsona:
   Tworzymy ją za pomocą funkcji wilkinson(n), która tworzy macierz kwadratową Wilkinsona o n kolumnach i wierszach.

3. Macierz magiczna:
   Tworzymy ją za pomocą funkcji magic(n), która tworzy macierz kwadratową magiczną o n kolumnach i wierszach.

Wyniki będziemy sprawdzać dla 2 określonych macierzy B:

1. opcja pierwsza:
   macierz Hilberta o wymiarach takich jak macierz A
2. opcja druga:
   macierz wilkinsona o wymiarach takich jak macierz A

Tabela 1: Macierz Hilberta i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	524.0568	0	$3.6864e-15$	$7.0343e-18$	0
5	476607.2502	$3.996e-16$	$1.626e-12$	$3.4116e-18$	$2.2474e-16$
7	475367356.9114	$6.4816e-16$	$4.4031e-09$	$9.2625e-18$	$1.3677e-16$
9	493153404551.0121	$5.9273e-15$	$3.8852e-06$	$7.8783e-18$	$2.6221e-16$
11	522020733204514.8	$3.7619e-14$	0.0041508	$7.9515e-18$	$6.4185e-17$

Tabela 2: Macierz Wilkinsona i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	2	0	$8.6818e-17$	$4.3409e-17$	$3.3161e-17$
5	7.4897	0	$2.9763e-16$	$3.9739e-17$	$5.2256e-17$
7	14.0383	$2.9515e-17$	$3.505e-16$	$2.4967e-17$	$3.4306e-17$
9	18.6369	$2.3387e-17$	$1.7965e-16$	$9.6396e-18$	$3.0899e-17$
11	22.637	$1.9321e-17$	$3.1076e-16$	$1.3728e-17$	$3.9526e-17$

Tabela 3: Macierz Magiczna i opcja pierwsza macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	$1.6984e-16$	$3.9224e-17$	$8.0675e-17$
5	5.4618	$1.0931e-16$	$5.8306e-16$	$1.0675e-16$	$1.1443e-16$
7	7.1113	$9.4498e-16$	$1.2273e-15$	$1.7259e-16$	$2.4545e-16$
9	9.1017	$1.3065e-15$	$1.4625e-15$	$1.6068e-16$	$1.9008e-16$
11	11.1021	0.91799	0.84061	0.075716	0.077411

Tabela 4: Macierz Hilberta i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	524.0568	0	$3.6864e-15$	$7.0343e-18$	0
5	476607.2502	$3.996e-16$	$1.626e-12$	$3.4116e-18$	$2.2474e-16$
7	475367356.9114	$6.4816e-16$	$4.4031e-09$	$9.2625e-18$	$1.3677e-16$
9	493153404551.0121	$5.9273e-15$	$3.8852e-06$	$7.8783e-18$	$2.6221e-16$
11	522020733204514.8	$3.7619e-14$	0.0041508	$7.9515e-18$	$6.4185e-17$

Tabela 5: Macierz Wilkinsona i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	2	0	$8.6818e-17$	$4.3409e-17$	$3.3161e-17$
5	7.4897	0	$2.9763e-16$	$3.9739e-17$	$5.2256e-17$
7	14.0383	$2.9515e-17$	$3.505e-16$	$2.4967e-17$	$3.4306e-17$
9	18.6369	$2.3387e-17$	$1.7965e-16$	$9.6396e-18$	$3.0899e-17$
11	22.637	$1.9321e-17$	$3.1076e-16$	$1.3728e-17$	$3.9526e-17$

Tabela 6: Macierz Magiczna i opcja druga macierzy B

n	cond(A)	e_{dec}	e_{rel}	wsp_{stab}	wsp_{popr}
3	4.3301	0	$1.6984e-16$	$3.9224e-17$	$8.0675e-17$
5	5.4618	$1.0931e-16$	$5.8306e-16$	$1.0675e-16$	$1.1443e-16$
7	7.1113	$9.4498e-16$	$1.2273e-15$	$1.7259e-16$	$2.4545e-16$
9	9.1017	$1.3065e-15$	$1.4625e-15$	$1.6068e-16$	$1.9008e-16$
11	11.1021	0.91799	0.84061	0.075716	0.077411

.

Dokładne rozwiązania dla n=5 w każdym z powyższych przypadków:

1. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

   rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

   rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.4917 & 0.0167 & -0.0083 & 0.3167 & -0.0583 \\ 0.2042 & 0.0917 & 0.0375 & 0.1583 & 0.0042 \\ 0.1226 & 0.0881 & 0.0393 & 0.1119 & 0.0155 \\ 0.0860 & 0.0780 & 0.0360 & 0.0887 & 0.0182 \\ 0.0657 & 0.0687 & 0.0323 & 0.0742 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

3. przypadek:
   rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

   rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0083 & 0.0329 & -0.0257 & 0.0104 & 0.0092 \\ 0.0057 & 0.0134 & -0.0094 & 0.0068 & 0.0057 \\ 0.0043 & 0.0080 & -0.0046 & 0.0050 & 0.0042 \\ 0.0034 & 0.0055 & -0.0025 & 0.0039 & 0.0033 \\ 0.0028 & 0.0042 & -0.0014 & 0.0032 & 0.0027 \end{pmatrix}.$$

4. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = (1.0e+05) \cdot \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = (1.0e+05) \cdot \begin{pmatrix} -0.0025 & 0.0420 & -0.1680 & 0.2408 & -0.1134 \\ 0.0077 & -0.1440 & 0.6153 & -0.9212 & 0.4473 \\ -0.0170 & 0.3168 & -1.3650 & 2.0608 & -1.0080 \\ 0.0028 & -0.0462 & 0.1848 & -0.2660 & 0.1260 \\ -0.0014 & 0.0168 & -0.0420 & 0.0280 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

5. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. przypadek:
rozwiązanie wyznaczone przez program:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

rozwiązanie dokładne:

$$X = \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0650 & -0.0754 & 0.0150 & 0.0083 \\ 0.0079 & 0.0169 & -0.0369 & 0.0169 & 0.0413 \\ 0.0478 & -0.0438 & 0.0062 & 0.0562 & -0.0355 \\ -0.0228 & 0.0015 & 0.0554 & 0.0015 & 0.0105 \\ 0.0102 & 0.0035 & 0.0938 & -0.0465 & -0.0148 \end{pmatrix}.$$

Tabela 7: Wyznacznik macierzy Hilberta w zależności od n

n	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	0.00046296	0.00046296	$8.1315e-19$	$1.7564e-15$
5	$3.7493e-12$	$3.7493e-12$	$6.0294e-24$	$1.6081e-12$
7	$4.8358e-25$	$4.8358e-25$	$8.6363e-34$	$1.7859e-09$
9	$9.7203e-43$	$9.7203e-43$	$5.5712e-49$	$5.7315e-07$
11	$3.0226e-65$	$3.027e-65$	$4.3512e-68$	0.0014375

Tabela 8: Wyznacznik macierzy Wilkinsona w zależności od n

n	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	-2	-2	0	0
5	-4	-4	0	0
7	-20	-20	0	0
9	-252	-252	$5.6843e-14$	$2.2557e-16$
11	-5610	-5610	$1.819e-12$	$3.2424e-16$

Tabela 9: Wyznacznik macierzy magicznej w zależności od n

n	detmd(A)	det(A)	błąd bezwzględny	błąd względny
3	-360	-360	0	0
5	5070000	5070000	0	0
7	-348052801600.0001	-348052801599.9999	0.00018311	$5.2609e-16$
9	$7.5035738059e+16$	$7.5035738059e+16$	32	$4.2646e-16$
11	$-3.8390999159e+22$	$-4.1037749689e+22$	$2.64675052985e+21$	0.064496

Wyniki odwracania macierzy funkcją invmd porównamy z wynikami funkcji wbudowanej inv dla n=5 i n=7 każdego typu macierzy:

1. Macierz Hilberta:

   (a) n=5:

$$invmd(A) = (1.0e+05)\cdot \begin{pmatrix} 0.0002 & -0.0030 & 0.0105 & -0.0140 & 0.0063 \\ -0.0030 & 0.0480 & -0.1890 & 0.2688 & -0.1260 \\ 0.0105 & -0.1890 & 0.7938 & -1.1760 & 0.5670 \\ -0.0140 & 0.2688 & -1.1760 & 1.7920 & -0.8820 \\ 0.0063 & -0.1260 & 0.5670 & -0.8820 & 0.4410 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = (1.0e+05)\cdot \begin{pmatrix} 0.0002 & -0.0030 & 0.0105 & -0.0140 & 0.0063 \\ -0.0030 & 0.0480 & -0.1890 & 0.2688 & -0.1260 \\ 0.0105 & -0.1890 & 0.7938 & -1.1760 & 0.5670 \\ -0.0140 & 0.2688 & -1.1760 & 1.7920 & -0.8820 \\ 0.0063 & -0.1260 & 0.5670 & -0.8820 & 0.4410 \end{pmatrix}.$$

(b) n=7:

Warning: Matrix is singular to working precision.

$$invmd(A) =$$

$$(1.0e+08)\cdot\begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0004 & -0.0032 & 0.0113 & -0.0194 & 0.0160 & -0.0050 \\ 0.0001 & -0.0032 & 0.0286 & -0.1058 & 0.1871 & -0.1572 & 0.0505 \\ -0.0003 & 0.0113 & -0.1058 & 0.4032 & -0.7277 & 0.6209 & -0.2018 \\ 0.0005 & -0.0194 & 0.1871 & -0.7277 & 1.3340 & -1.1526 & 0.3784 \\ -0.0004 & 0.0160 & -0.1572 & 0.6209 & -1.1526 & 1.0059 & -0.3330 \\ 0.0001 & -0.0050 & 0.0505 & -0.2018 & 0.3784 & -0.3330 & 0.1110 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) =$$

$$(1.0e+08)\cdot\begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0004 & -0.0032 & 0.0113 & -0.0194 & 0.0160 & -0.0050 \\ 0.0001 & -0.0032 & 0.0286 & -0.1058 & 0.1871 & -0.1572 & 0.0505 \\ -0.0003 & 0.0113 & -0.1058 & 0.4032 & -0.7277 & 0.6209 & -0.2018 \\ 0.0005 & -0.0194 & 0.1871 & -0.7277 & 1.3340 & -1.1526 & 0.3784 \\ -0.0004 & 0.0160 & -0.1572 & 0.6209 & -1.1526 & 1.0059 & -0.3330 \\ 0.0001 & -0.0050 & 0.0505 & -0.2018 & 0.3784 & -0.3330 & 0.1110 \end{pmatrix}.$$

2. Macierz Wilkinsona:

   (a) n=5:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.7500 & -0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & -1.000 & 0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0.5000 & -1.000 & 0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.5000 & 0.7500 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.7500 & -0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & -1.000 & 0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0.5000 & -1.000 & 0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.5000 & 0.7500 \end{pmatrix}.$$

(b) n=7:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.4500 & -0.3500 & 0.2500 & 0.1000 & -0.2500 & 0.1500 & -0.5000 \\ -0.3500 & 1.0500 & -0.7500 & -0.3000 & 0.7500 & -0.4500 & 0.1500 \\ 0.2500 & -0.7500 & 1.2500 & 0.5000 & -1.2500 & 0.7500 & -0.2500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.5000 & -0.2000 & 0.5000 & -0.3000 & 0.1000 \\ -0.2500 & 0.7500 & -1.2500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & 0.2500 \\ 0.1500 & -0.4500 & 0.7500 & -0.3000 & -0.7500 & 1.0500 & -0.3500 \\ -0.5000 & 0.1500 & -0.2500 & 0.1000 & 0.2500 & -0.3500 & 0.4500 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.4500 & -0.3500 & 0.2500 & 0.1000 & -0.2500 & 0.1500 & -0.5000 \\ -0.3500 & 1.0500 & -0.7500 & -0.3000 & 0.7500 & -0.4500 & 0.1500 \\ 0.2500 & -0.7500 & 1.2500 & 0.5000 & -1.2500 & 0.7500 & -0.2500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.5000 & -0.2000 & 0.5000 & -0.3000 & 0.1000 \\ -0.2500 & 0.7500 & -1.2500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & 0.2500 \\ 0.1500 & -0.4500 & 0.7500 & -0.3000 & -0.7500 & 1.0500 & -0.3500 \\ -0.5000 & 0.1500 & -0.2500 & 0.1000 & 0.2500 & -0.3500 & 0.4500 \end{pmatrix}.$$

3. Macierz Magiczna:

(a) n=5:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} -0.0049 & 0.0512 & -0.0354 & 0.0012 & 0.0034 \\ 0.0431 & -0.0373 & -0.0046 & 0.0127 & 0.0015 \\ -0.0303 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0364 \\ 0.0047 & -0.0065 & 0.0108 & 0.0435 & -0.0370 \\ 0.0028 & 0.0050 & 0.0415 & -0.0450 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

$$inv(A) = \begin{pmatrix} -0.0049 & 0.0512 & -0.0354 & 0.0012 & 0.0034 \\ 0.0431 & -0.0373 & -0.0046 & 0.0127 & 0.0015 \\ -0.0303 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0031 & 0.0364 \\ 0.0047 & -0.0065 & 0.0108 & 0.0435 & -0.0370 \\ 0.0028 & 0.0050 & 0.0415 & -0.0450 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

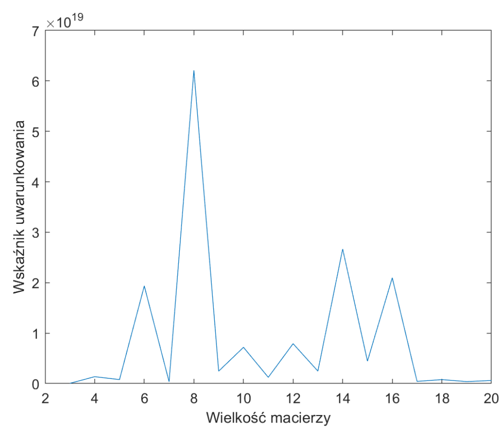
(b) n=7:

$$invmd(A) = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0008 & 0.0212 & -0.0195 & -0.0021 & 0.0041 & 0.0004 \\ -0.0021 & 0.0241 & -0.0195 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0008 \\ 0.0212 & -0.0191 & 0.0004 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0008 & 0.0008 \\ -0.0170 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0187 \\ 0.0008 & 0.0008 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0012 & 0.0207 & -0.0195 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0212 & -0.0224 & 0.0037 \\ 0.0012 & -0.0025 & 0.0037 & 0.0212 & -0.0195 & 0.0008 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

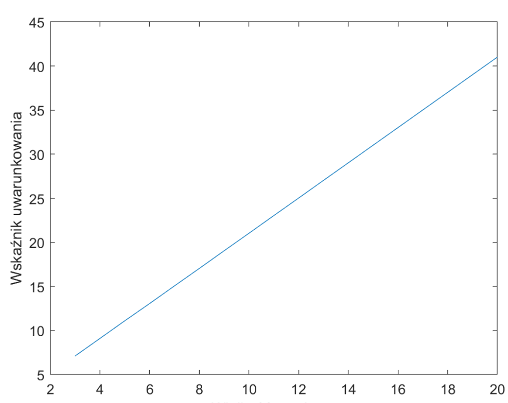
$$inv(A) = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0008 & 0.0212 & -0.0195 & -0.0021 & 0.0041 & 0.0004 \\ -0.0021 & 0.0241 & -0.0195 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0008 \\ 0.0212 & -0.0191 & 0.0004 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0008 & 0.0008 \\ -0.0170 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0187 \\ 0.0008 & 0.0008 & -0.0021 & 0.0037 & 0.0012 & 0.0207 & -0.0195 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0212 & -0.0224 & 0.0037 \\ 0.0012 & -0.0025 & 0.0037 & 0.0212 & -0.0195 & 0.0008 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

4 Analiza wyników

Z tabeli 1 widzimy, że błędy w dużym stopniu zależą od wskaźnika uwarunkowania macierzy. Dla coraz większego n wspomniany wskaźnik macierzy Hilberta rośnie bardzo szybko, co powoduje szybko wzrastające błędy dla coraz większych n. Szczególnie widoczne jest to dla błędu względnego e_{rel} oraz błędu rozkładu e_{dec}. Natomiast współczynnik stabilności oraz współczynnik poprawności zmieniają się w o wiele mniejszym stopniu.
Wyniki w tabeli 2 potwierdzają wywnioskowane spostrzeżenie. To samo można stwierdzić analizując wyniki w tabeli 3. Jednak widocznym jest nagły wzrost błędu dla n=11. Z tego powodu zbadamy dodatkowo zachowanie błędów dla Macierzy Magicznej w zależności od rozmiaru tej macierzy. Dodatkowo wykonamy badanie zależności wartości wskaźnika uwarunkowania, błedu względnego oraz współczynnika stabilności od wymiarów macierzy dla macierzy Hilberta.

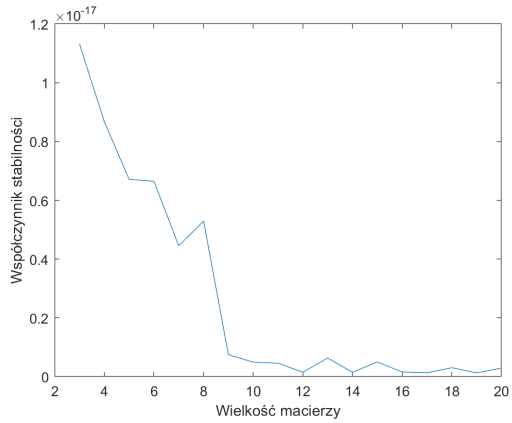


Rysunek 1: Zależność wskaźnika uwarunkowania macierzy magicznej od wymiarów macierzy (wymiar będący liczbą parzystą)

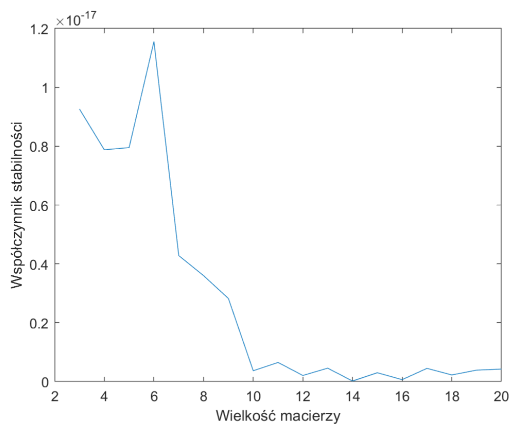


Rysunek 2: Zależność wskaźnika uwarunkowania macierzy magicznej od wymiarów macierzy (wymiar będący liczbą nieparzystą)

Na powyższych wykresach(Rysunek 1 oraz Rysunek 2) możemy dostrzec tendencję do liniowego wzrostu wskaźnika uwarunkowania Macierzy Magicznej dla n nieparzystego. Natomiast dla n parzystego wartości wskaźnika uwarunkowania nie przejawiają już takiego trendu. Zauważmy również że w obydwu przypadkach otrzymujemy wskaźniki uwarunkowania zupełnie różnego rzędu wielkości.(dla n parzystych nawet 10^{19}, a dla n nieparystych mamy wzrost liniowy).



Rysunek 3: Zależność współczynnika stabilności macierzy hilberta od wymiarów macierzy (wymiar będący liczbą parzystą)



Rysunek 4: Zależność współczynnika stabilności macierzy hilberta od wymiarów macierzy (wymiar będący liczbą nieparzystą)

Z wykresów ukazujących zależność między współczynnikiem stabilności, a wielkością macierzy Hilberta (Rysunek 3 i Rysunek 4) można wywnioskować, że zmiana współczynnika stabilności nie zależy od parzystości wymiarów macierzy. Widzimy również tendencję do zbliżania się wartości tego współczynnika do zera dla coraz większych n. Analizując błędy między wyznacznikiem obliczonym funkcją detmd a det(tabele nr 7, 9, 8), dochodzimy do wniosku, że wielkość błędu w sposób ścisły zależy od wskaźnika uwarunkowania macierzy oraz dodatkowo dla Macierzy Magicznej od jej wielkości - dla n większych od 9 błąd drastycznie rośnie.
Natomiast dla funkcji invmd oraz inv możemy spostrzec wypisanie przez program

ostrzeżenia o wyznaczniku macierzy bliskiemu wartości 0 dla macierzy Hilberta o wymiarach 7×7, co zwraca nam uwagę na możliwe błędy dla macierzy o niewielkich wartościach wyznacznika. Jednak dla badanych wartości n błędy między wynikami otrzymanymi tymi dwoma funkcjami są niezauważalne bez dogłębniejszej analizy.

5 Kod programu

5.1 mdoolittle.m

```
function [U,L]=mdoolittle(A)
%Wyznacza rozkład UL maicerzy A zmodyfikowaną metodą Doolittle'a
%Gdy det(A)=0 to metoda nie zadziała
%[U,L]=mdoolittle(A)
    if nargin<1
        error('Not enough input arguments.');
     end
     if nargin>1
        error('Too many input arguments.');
     end
     if size(A,1)~=size(A,2)
        error('Matrix must be square.');
     end
     U=zeros(size(A));
     L=zeros(size(A));
     n=size(A,1);
     for j=n:-1:1
        U(1:j,j)=A(1:j,j)-U(1:j,(j+1):n)*L((j+1):n,j);
        if abs(U(j,j))<eps
            warning('Division by zero!');
        end
        L(j,1:j)=(A(j,1:j)-U(j,(j+1):n)*L((j+1):n,1:j))./U(j,j);
     end
end
```

5.2 solvemd.m

```
function [X]=solvemd(A,B)
%Funkcja rozwiązuje układ XA=B zmodyfikowaną metodą Doolittle
    'a
%X=solvemd(A,B)
    if nargin<2
        error('Not enough input arguments.');
    end
    if nargin>2
        error('Too many input arguments.');
    end
    %X=B*invmd(A); tak nam nie wolno
    [U,L]=mdoolittle(A);
    n=size(A,1);
    %Rozwiązywanie Y*L=B
    Y=zeros(size(B));
    for j=n:(-1):1
        Y(1:n,j)=B(1:n,j)-Y(1:n,(j+1):n)*L((j+1):n,j);
    end
    %Rozwiązywanie X*U=Y
    X=zeros(size(B));
    for i=1:n
        if abs(U(i,i))<eps
            warning('Division by zero!')
        end
        X(1:n,i)=(Y(1:n,i)-X(1:n,1:(i-1))*U(1:(i-1),i))/U(i,i
            );
    end
end
```

5.3 invmd.m

```
function [Ai]=invmd(A)
%Funkcja wyznacza odwrotnoĹ“Ă macierzy korzystajÂąc ze zmodyfikowanej
%metody Doolittle'a
%A^(-1)=invmd(A)
    if nargin<1
        error('Not enough input arguments.');
    end
    if nargin>1
        error('Too many input arguments.');
    end
     if abs(detmd(A)) < eps
         warning('Matrix is singular to working precision.');
     end
    if size(A,1)~=size(A,2)
        error('Matrix must be square.');
    end

    [U,L]=mdoolittle(A);
    Ui=zeros(size(A));
    Li=zeros(size(A));
    n=size(A,1);

    %Odwracanie L
    for i=1:n
        if abs(L(i,i))<eps
            error('Division by zero!');
        end
        Li(i,i)=1/L(i,i);
        Li(i,1:(i-1))=(-L(i,1:(i-1))*Li(1:(i-1),1:(i-1)))/L(i,i);
    end
    %Odwracanie U
    for j=n:(-1):1
        if abs(U(j,j))<eps
            error('Division by zero!');
        end
        Ui(j,j)=1/U(j,j);
        Ui(j,(j+1):n)=(-U(j,(j+1):n)*Ui((j+1):n,(j+1):n))/U(j,j);
    end
    Ai=Li*Ui;
end
```

5.4 detmd.m

```
function d=detmd(A)
%Oblicza wyznacznik macierzy A korzystając z rozkładu zmodyfikowaną metodą
%Doolittle'a
%d=detmd(A)
    if nargin<1
        error('Not enough input arguments.');
    end
    if nargin>1
        error('Too many input arguments.');
    end
    if size(A,1)~=size(A,2)
        error('Matrix must be square.');
    end
    [U,~]=mdoolittle(A);
    d=det(U);
end
```