12 grudnia 2019

Jakub Kujawa
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Rozwiązywanie układu równań liniowych XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolittle'a (tj. poprzez rozkład $A = UL$, gdzie U jest macierzą trójkątną górną, a L macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej). Wyznaczanie macierzy A^{-1} oraz $det(A)$ na podstawie rozkładu.

Projekt nr 1

1 Opis metody

Rozwiązanie układu równań XA=B, gdzie $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, zmodyfikowaną metodą Doolitle'a opiera się na wyznaczeniu macierzy $L \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$ oraz $U \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$ takich, że L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na glównej przekątnej, a U macierzą trójkątną górną oraz A=UL.
Niech:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

oraz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Poszczególne elementy macierzy wyznaczamy ze wzorów:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=j+1}^{n} u_{ik} l_{kj} \tag{1}$$

oraz

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} l_{kj}}{u_{ii}} \tag{2}$$

gdzie wzór (1) stosujemy dla $i \leq j$, a wzór (2) dla $i > j$. Schemat wyznaczania opiera się na naprzemiennym obliczaniu wartości elementów macierzy U w n-tej kolumnie, wartości elementów w n-tym wierszu macierzy L, n-1-szej kolumnie macierzy U, n-1-szym wierszu macierzy L itd.

Po wyznaczeniu macierzy L oraz U należy rozwiązać następujące równania:

$$YL = B \tag{3}$$

oraz

$$XU = Y \tag{4}$$

gdzie $Y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$.

Macierz Y z równania (3) wyznacza się za pomocą algorytmu Backward Substitution. Natomiast macierz X z równania (4) wyznacza się za pomocą algrytmu Forward Substitution.

Wyznacznik macierzy A wyznaczymy dzięki prostej zależności:

$$det(A) = det(UL) = det(U) * det(L)$$

Natomiast z własności macierzy trójkątnych mamy:

$$det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

oraz

$$det(L) = 1$$

Zatem

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Wyznaczając odwrotność macierzy A również skorzystamy z wyznaczonych wcześniej macierzy L i U:

$$A^{-1} = (UL)^{-1} = L^{-1}U^{-1}$$

Natomiast L^{-1} oraz U^{-1} wyznaczymy, wykorzystując kolejny raz algorytmy odpowiednio Backward oraz Forward Substitution. Oczywiście odwrotności macierzy wyznaczymy pod warunkiem, że ich wyznacznik jest różny od zera.

Wykorzystując program do wyliczenia macierzy X nie unikniemy błędów obliczeniowych. Ich analizę oprzemy na wyliczeniach:

i) wskaźnika uwarunkowania macierzy A:

$$cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$$

ii) błędu rozkładu:

$$e_{dec} = \frac{\|A - UL\|}{\|A\|}$$

iii) błędu względnego:

$$e_{rel} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|}$$

iv) współczynnika stabilości:

$$wsp_{stab} = \frac{\|X - Z\|}{\|Z\|cond(A)}$$

v) współczynnika poprawności:

$$wsp_{popr} = \frac{\|B - XA\|}{\|X\|\|A\|}$$

vi) jakiegos kurna wpolczynnika prawego:

$$r_R = \frac{\|AA^{-1} - I\|}{\|A\|\|A^{-1}\|}$$

vii) jakiegos kurna wspolczynnika lewego:

$$r_L = \frac{\|A^{-1}A - I\|}{\|A\|\|A^{-1}\|}$$

gdzie Z jest dokładnym rozwiązaniem układu, X rozwiązaniem obliczonym numerycznie przybliżeniem wyznaczonym naszym algorytmem,a A^{-1} wyznaczoną przez nas odwrotnością macierzy A.

2 Opis programu obliczeniowego

/TODO
jak wyskakuje w programie

3 Przykłady obliczeniowe

Najważniejsze wyniki zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1: Moje wyniki

N	rozwiązanie dokładne	rozwiązanie przybliżone	błąd
10	1.6396	1.6395	1.6597$e-$04
12	6.4839	6.4839	6.2312$e-$05
14	6.4597	6.4597	8.8147$e-$05
16	1.0575	1.0674	1.2730$e-$04
18	3.0060	3.0061	4.3985$e-$04
20	7.1352	7.1351	7.6212$e-$04

Jakoś mało tych przykładów. O wiem, dodam obrazek.

4 Analiza wyników

Metoda zdaje się działać w większości przypadków. Niekiedy jednak nie działa, lub działa niepoprawnie. Przyczyny tego zjawiska sÄ... mi bliĹĽej nieznane. Może te elektrolityczne krasnoludki, które tak naprawdę wykonują obliczenia w komputerze, czasami strajkują. Trzeba je lepiej karmić.

Literatura

[1] G. Dahlquist and Å. Björck, Metody numeryczne, PWN, Warszawa, 1983.

[2] J. i M. Jankowscy, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1, WNT, Warszawa, 1981.

Wszelkie pytania i wnioski prosimy kierować na adres:

wrubelki@wp.pl