23 stycznia 2020

Jakub Kujawa
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Obliczanie całek $\int_a^b f(x)\,dx$ metodą Romberga.

Projekt nr 2

1 Opis metody

Do obliczania całek $\int_a^b f(x)\,dx$ zastosujemy metodę opracowaną w 1955 roku przez Wernera Romberga, która opiera się na wykorzystaniu złożonego wzoru trapezów:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h_n \sum_{i=0}^{n}{}'' f(a+ih) \tag{1}$$

gdzie n jest liczbą przedziałów o równej długości, na które dzielimy odcinek $[a,b]$ oraz

$$h_n = \frac{b-a}{n}$$

Symbol

$$\sum{}''$$

oznacza sumę, której skrajne składniki są dzielone na 2.
W naszym przypadku odcinek $[a,b]$ będzie dzielony na 2^n przedziałów o równej długości. Zatem do wzoru (1) będziemy podstawiali

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Niech

$$R(n,0) = h_n \sum_{i=0}^{2^n}{}'' f(a+ih) \tag{2}$$

Najprostsze wyrażenie, od którego zaczniemy, to

$$R(0,0) = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

Aby uniknąć wielokrotnego obliczania wartości funkcji f w tych samych punktach, skorzystamy z rekurencyjnego wyznaczania

$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a+(2i-1)h_n) \tag{3}$$

ponieważ w $R(n,0)$ występują wartości potrzebne do wyliczenia $R(n-1,0)$. Wartości funkcji f w tych punktach musimy podzielić na 2 oraz dodać do nich wartości pośrednie $a+h_n, a+3h_n, a+5h_n$ itd, co można odczytać we wzorze (3).
Przybliżenia $R(n,0)$ tworzą pierwszą kolumnę przybliżeń całki. Kolejne kolumny wyliczymy stosując poniższy wzór dla $m > 0$, który wynika ze wzoru Eulera-Maclaurina oraz ekstrapolacji Richardsona:

$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m-1}[R(n,m-1) - R(n-1,m-1)] \tag{4}$$

Wobec tego dzięki wzorom (2), (3), (4) znajdziemy wszystkie elementy tablicy trójkątnej:

$$\begin{array}{llll} R(0,0) & & & \\ R(1,0) & R(1,1) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ R(n,0) & R(n,1) & \dots & R(n,n) \end{array}$$

która zawiera coraz lepsze przybliżenia szukanej wartości całki. Najlepsze przybliżenie, to $R(n,n)$. Wartości z tablicy trójkątnej będą obliczane kolejno wierszami, zaczynając od pierwszego.
Obliczając kolejne przybliżenia będziemy badać błędy względem funkcji $integral(f,a,b)$ wbudowanej w program Matlab. Funkcja ta wyznacza wartość całki z funkcji f na przedziale $[a,b]$. Na podstawie wyznaczonych błędów względnych oraz bezwzględnych zostanie przeprowadzona analiza metody.

2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. $Romberg(f,a,b,M) = [x,R]$:
przyjmuje za argumenty funkcję f, końce przedziału $[a,b]$, na którym wyznaczamy wartość całki, oraz liczbę M, która określa na ile odcinków będzie dzielony przedział $[a,b]$ (na 2^M równych odcinków). Wyznacza wartość $\int_a^b f(x)\,dx$ metodą Romberga oraz tablicę R, w której umieszczone są kolejnych przybliżenia wartości badanej całki.

2. $testRomberg(f, a, b, n, s)$:
przyjmuje za argumenty funkcję f, końce przedziału $[a, b]$, na którym wyznaczamy wartość całki, liczby całkowite n oraz s. Testuje metodę Romberga dla wartości M od 1 do n z krokiem co s. Dla każdego M wypisuje tabelę w formacie LaTex i tworzy wykresy błędów względnych i bezwzględnych.

3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych funkcji:

1. $f(x) = 1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = tg(x)$
4. $f(x) = x^{-1}$
5. $f(x) = |x|$
6. $f(x) = \ln x$

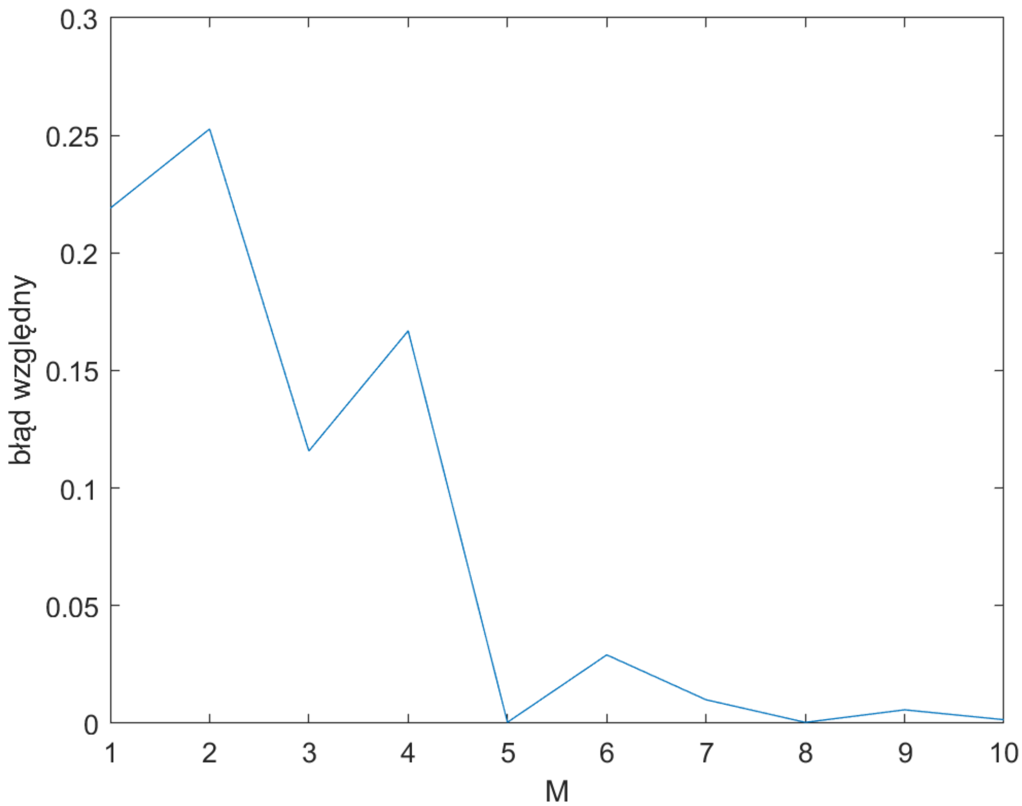
3.1 $f(x) = 1 + sin(\frac{1}{x})$

Sprawdzamy dla przedziałów $(10^{-3}, 1)$,$(10^{-4}, 1)$,$(10^{-5}, 1)$,$(10^{-6}, 1)$

3.1.1 Przedział $(10^{-3}, 1)$

Tabela 1: Tabela dla $\int_{10^{-3}}^{1} 1 + \sin\frac{1}{x} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.83234e+00$	$1.50307e+00$	$3.29275e-01$	$2.19069e-01$
2	$1.88292e+00$	$1.50307e+00$	$3.79858e-01$	$2.52722e-01$
3	$1.32904e+00$	$1.50307e+00$	$1.74031e-01$	$1.15784e-01$
4	$1.75390e+00$	$1.50307e+00$	$2.50838e-01$	$1.66884e-01$
5	$1.50368e+00$	$1.50307e+00$	$6.16420e-04$	$4.10109e-04$
6	$1.45937e+00$	$1.50307e+00$	$4.37013e-02$	$2.90748e-02$
7	$1.51810e+00$	$1.50307e+00$	$1.50307e-02$	$1.00000e-02$
8	$1.50249e+00$	$1.50307e+00$	$5.75817e-04$	$3.83095e-04$
9	$1.49449e+00$	$1.50307e+00$	$8.57592e-03$	$5.70562e-03$
10	$1.50079e+00$	$1.50307e+00$	$2.28148e-03$	$1.51789e-03$

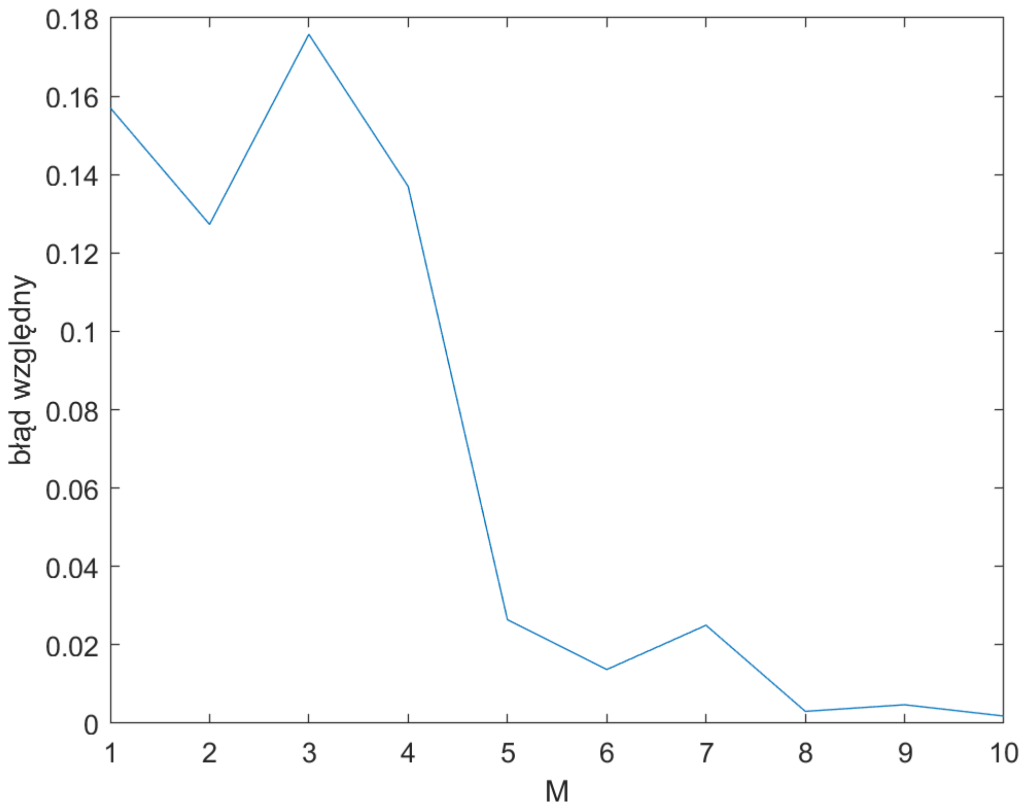


Rysunek 1: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-3}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$ metodą Romberga

3.1.2 Przedział $(10^{-4}, 1)$

Tabela 2: Tabela dla $\int_{10^{-4}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.26780e+00$	$1.50397e+00$	$2.36166e-01$	$1.57028e-01$
2	$1.69539e+00$	$1.50397e+00$	$1.91427e-01$	$1.27281e-01$
3	$1.23957e+00$	$1.50397e+00$	$2.64395e-01$	$1.75798e-01$
4	$1.70998e+00$	$1.50397e+00$	$2.06014e-01$	$1.36980e-01$
5	$1.46424e+00$	$1.50397e+00$	$3.97289e-02$	$2.64161e-02$
6	$1.48336e+00$	$1.50397e+00$	$2.06074e-02$	$1.37020e-02$
7	$1.54157e+00$	$1.50397e+00$	$3.76039e-02$	$2.50031e-02$
8	$1.50853e+00$	$1.50397e+00$	$4.55822e-03$	$3.03080e-03$
9	$1.49687e+00$	$1.50397e+00$	$7.09600e-03$	$4.71819e-03$
10	$1.50673e+00$	$1.50397e+00$	$2.76236e-03$	$1.83671e-03$

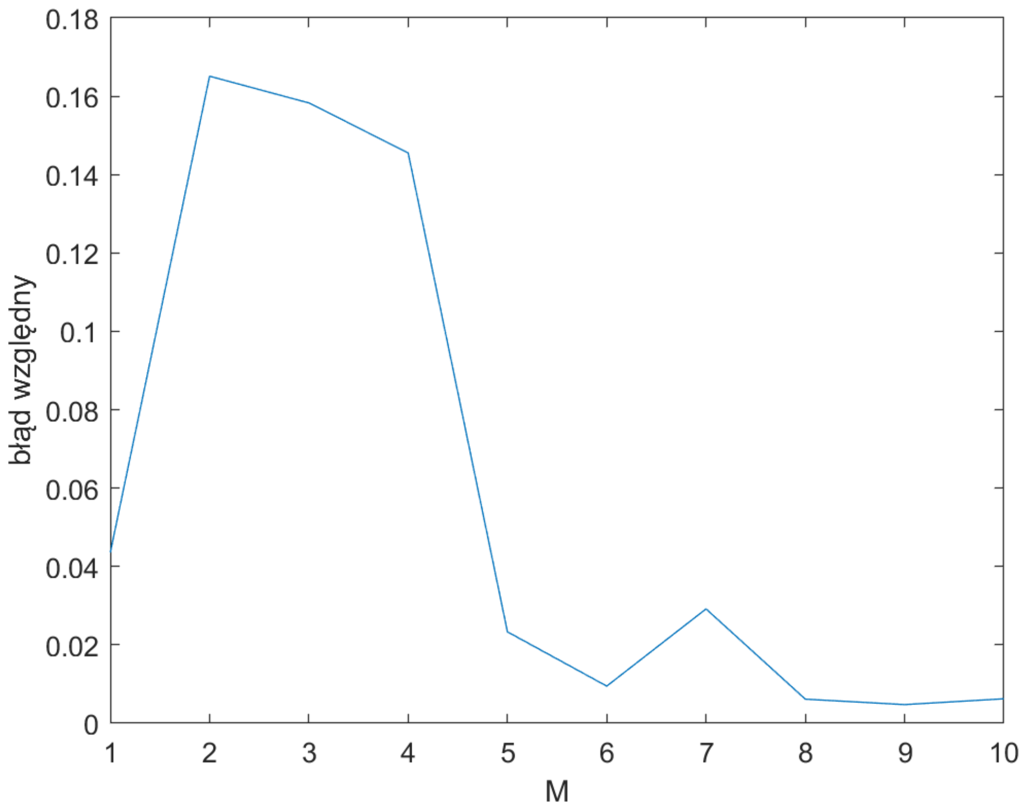


Rysunek 2: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-4}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$ metodą Romberga

3.1.3 Przedział $(10^{-5}, 1)$

Tabela 3: Tabela dla $\int_{10^{-5}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.43860e+00$	$1.50406e+00$	$6.54608e-02$	$4.35228e-02$
2	$1.75239e+00$	$1.50406e+00$	$2.48333e-01$	$1.65109e-01$
3	$1.26598e+00$	$1.50406e+00$	$2.38080e-01$	$1.58292e-01$
4	$1.72296e+00$	$1.50406e+00$	$2.18901e-01$	$1.45540e-01$
5	$1.46897e+00$	$1.50406e+00$	$3.50854e-02$	$2.33272e-02$
6	$1.48980e+00$	$1.50406e+00$	$1.42549e-02$	$9.47764e-03$
7	$1.54794e+00$	$1.50406e+00$	$4.38814e-02$	$2.91754e-02$
8	$1.51330e+00$	$1.50406e+00$	$9.24697e-03$	$6.14802e-03$
9	$1.49689e+00$	$1.50406e+00$	$7.16514e-03$	$4.76388e-03$
10	$1.51345e+00$	$1.50406e+00$	$9.39073e-03$	$6.24360e-03$

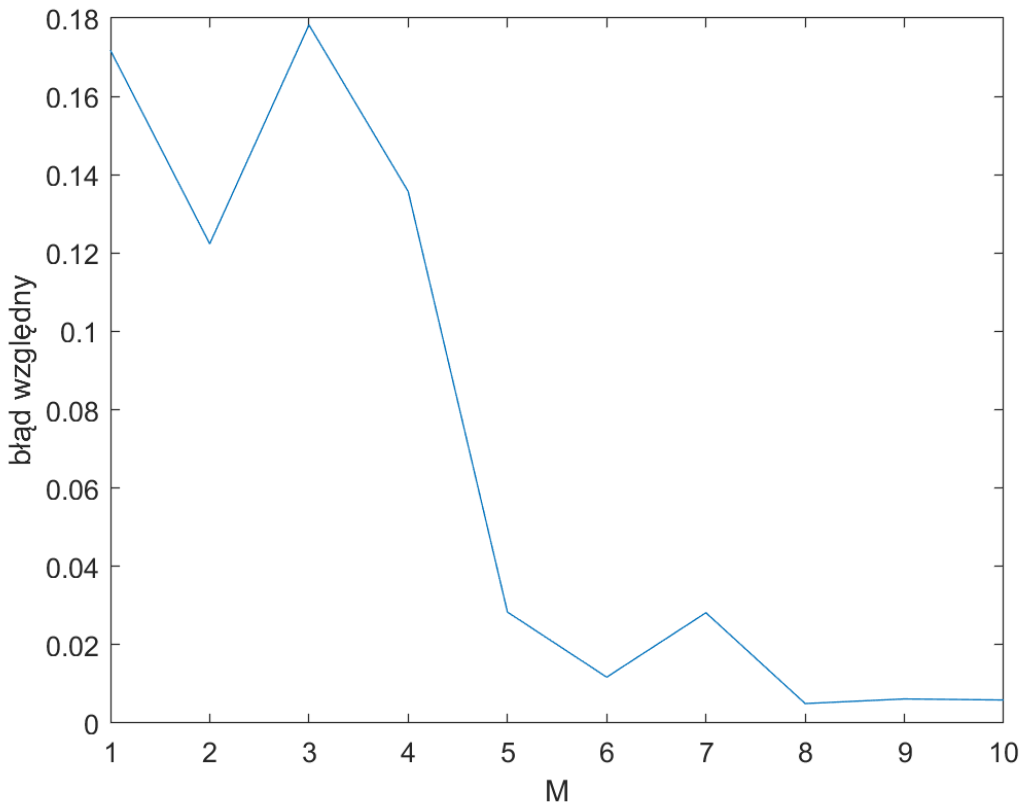


Rysunek 3: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-5}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$ metodą Romberga

3.1.4 Przedział $(10^{-6}, 1)$

Tabela 4: Tabela dla $\int_{10^{-6}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.83234e+00$	$1.50307e+00$	$3.29275e-01$	$2.19069e-01$
2	$1.88292e+00$	$1.50307e+00$	$3.79858e-01$	$2.52722e-01$
3	$1.32904e+00$	$1.50307e+00$	$1.74031e-01$	$1.15784e-01$
4	$1.75390e+00$	$1.50307e+00$	$2.50838e-01$	$1.66884e-01$
5	$1.50368e+00$	$1.50307e+00$	$6.16420e-04$	$4.10109e-04$
6	$1.45937e+00$	$1.50307e+00$	$4.37013e-02$	$2.90748e-02$
7	$1.51810e+00$	$1.50307e+00$	$1.50307e-02$	$1.00000e-02$
8	$1.50249e+00$	$1.50307e+00$	$5.75817e-04$	$3.83095e-04$
9	$1.49449e+00$	$1.50307e+00$	$8.57592e-03$	$5.70562e-03$
10	$1.50079e+00$	$1.50307e+00$	$2.28148e-03$	$1.51789e-03$



Rysunek 4: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-6}}^{1} 1+\sin\frac{1}{x}dx$ metodą Romberga

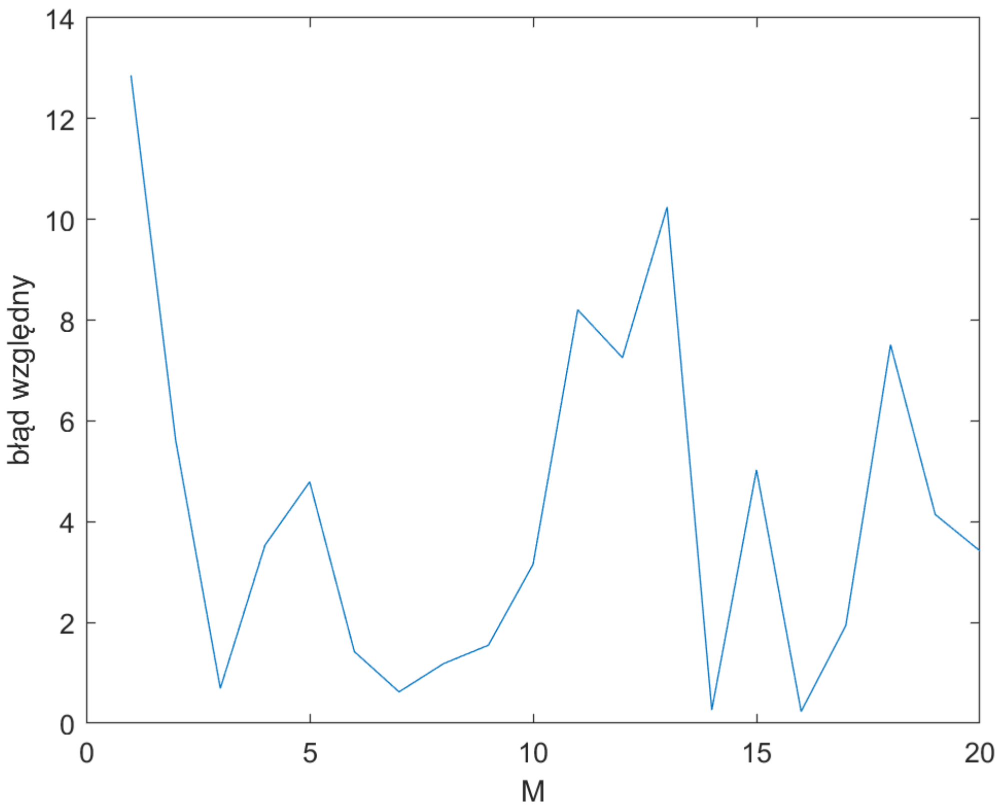
.

3.2 $f(x) = \sin(x)$

Sprawdzenie dla przedziałów $[0, 2\pi]$ oraz $[o, \pi]$

Tabela 5: Tabela dla $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

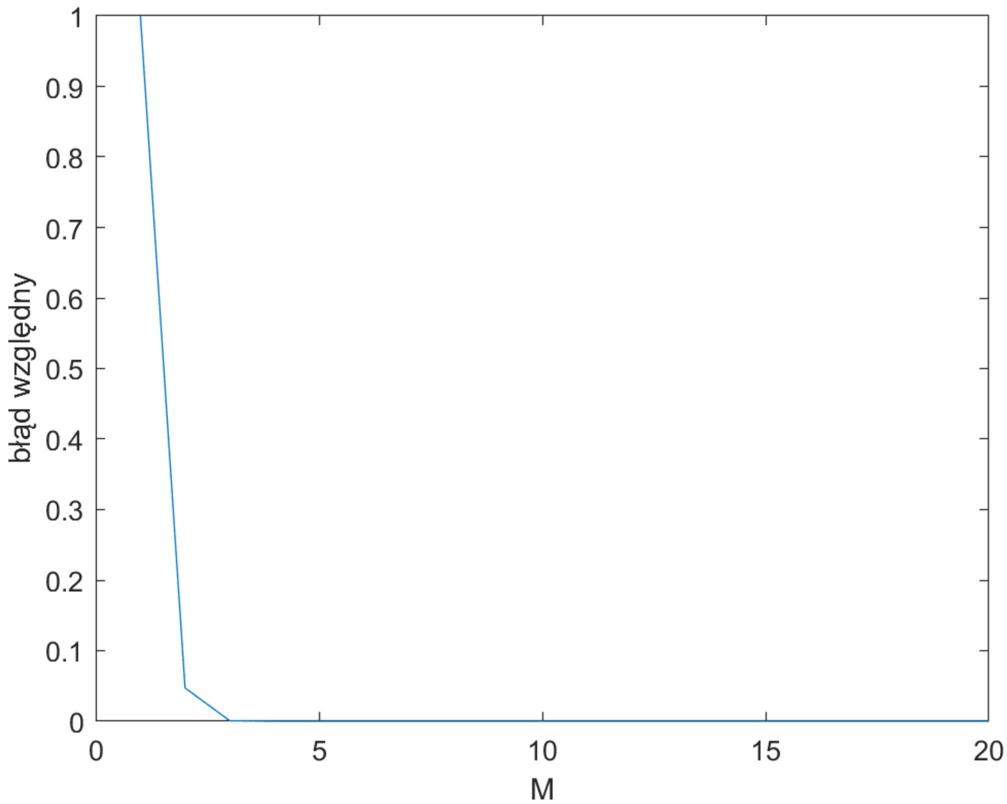
M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$-7.69468e-16$	$-5.55112e-17$	$7.13957e-16$	$1.28615e+01$
2	$2.56489e-16$	$-5.55112e-17$	$3.12001e-16$	$5.62050e+00$
3	$-1.70993e-17$	$-5.55112e-17$	$3.84119e-17$	$6.91966e-01$
4	$-2.51692e-16$	$-5.55112e-17$	$1.96181e-16$	$3.53407e+00$
5	$2.10462e-16$	$-5.55112e-17$	$2.65973e-16$	$4.79135e+00$
6	$2.34544e-17$	$-5.55112e-17$	$7.89655e-17$	$1.42252e+00$
7	$-9.00888e-17$	$-5.55112e-17$	$3.45776e-17$	$6.22895e-01$
8	$1.02755e-17$	$-5.55112e-17$	$6.57866e-17$	$1.18511e+00$
9	$-1.41478e-16$	$-5.55112e-17$	$8.59667e-17$	$1.54864e+00$
10	$-2.30603e-16$	$-5.55112e-17$	$1.75092e-16$	$3.15417e+00$
11	$3.99984e-16$	$-5.55112e-17$	$4.55495e-16$	$8.20548e+00$
12	$3.47263e-16$	$-5.55112e-17$	$4.02774e-16$	$7.25574e+00$
13	$5.13150e-16$	$-5.55112e-17$	$5.68661e-16$	$1.02441e+01$
14	$-4.08115e-17$	$-5.55112e-17$	$1.46996e-17$	$2.64805e-01$
15	$-3.34600e-16$	$-5.55112e-17$	$2.79088e-16$	$5.02761e+00$
16	$-4.25196e-17$	$-5.55112e-17$	$1.29915e-17$	$2.34034e-01$
17	$5.21761e-17$	$-5.55112e-17$	$1.07687e-16$	$1.93992e+00$
18	$3.61441e-16$	$-5.55112e-17$	$4.16952e-16$	$7.51114e+00$
19	$1.74492e-16$	$-5.55112e-17$	$2.30003e-16$	$4.14336e+00$
20	$-2.45431e-16$	$-5.55112e-17$	$1.89920e-16$	$3.42129e+00$



Rysunek 5: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_0^{2\pi} \sin x$ metodą Romberga

Tabela 6: Tabela dla $\int_0^\pi \sin x dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.92367e-16$	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$1.00000e+00$
2	$2.09440e+00$	$2.00000e+00$	$9.43951e-02$	$4.71976e-02$
3	$1.99857e+00$	$2.00000e+00$	$1.42927e-03$	$7.14634e-04$
4	$2.00001e+00$	$2.00000e+00$	$5.54998e-06$	$2.77499e-06$
5	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$5.41271e-09$	$2.70635e-09$
6	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$1.32139e-12$	$6.60694e-13$
7	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$6.66134e-16$	$3.33067e-16$
8	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.22045e-16$	$1.11022e-16$
9	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$4.44089e-16$	$2.22045e-16$
10	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$0.00000e+00$	$0.00000e+00$
11	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$4.44089e-16$	$2.22045e-16$
12	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.44249e-15$	$1.22125e-15$
13	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$1.99840e-15$	$9.99201e-16$
14	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.22045e-16$	$1.11022e-16$
15	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.88658e-15$	$1.44329e-15$
16	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$4.21885e-15$	$2.10942e-15$
17	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.22045e-16$	$1.11022e-16$
18	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.88658e-15$	$1.44329e-15$
19	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$2.70894e-14$	$1.35447e-14$
20	$2.00000e+00$	$2.00000e+00$	$1.53211e-14$	$7.66054e-15$



Rysunek 6: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_0^\pi \sin x$ metodą Romberga

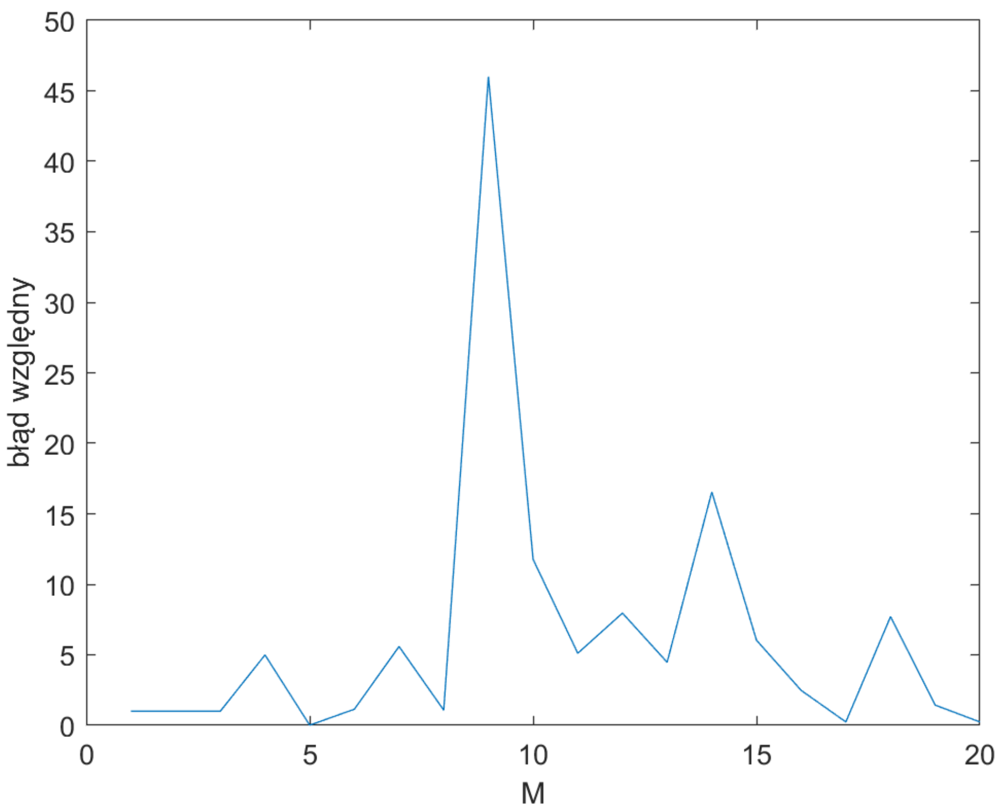
.

3.3 $f(x) = tg(x)$

Sprawdzenie dla przedziałów $[0, \frac{0{,}99\pi}{2}]$ oraz $[-\frac{0{,}99\pi}{2}, \frac{0{,}99\pi}{2}]$

Tabela 7: Tabela dla $\int_{-\frac{0{,}99\pi}{2}}^{\frac{0{,}99\pi}{2}} tg(x)dx$

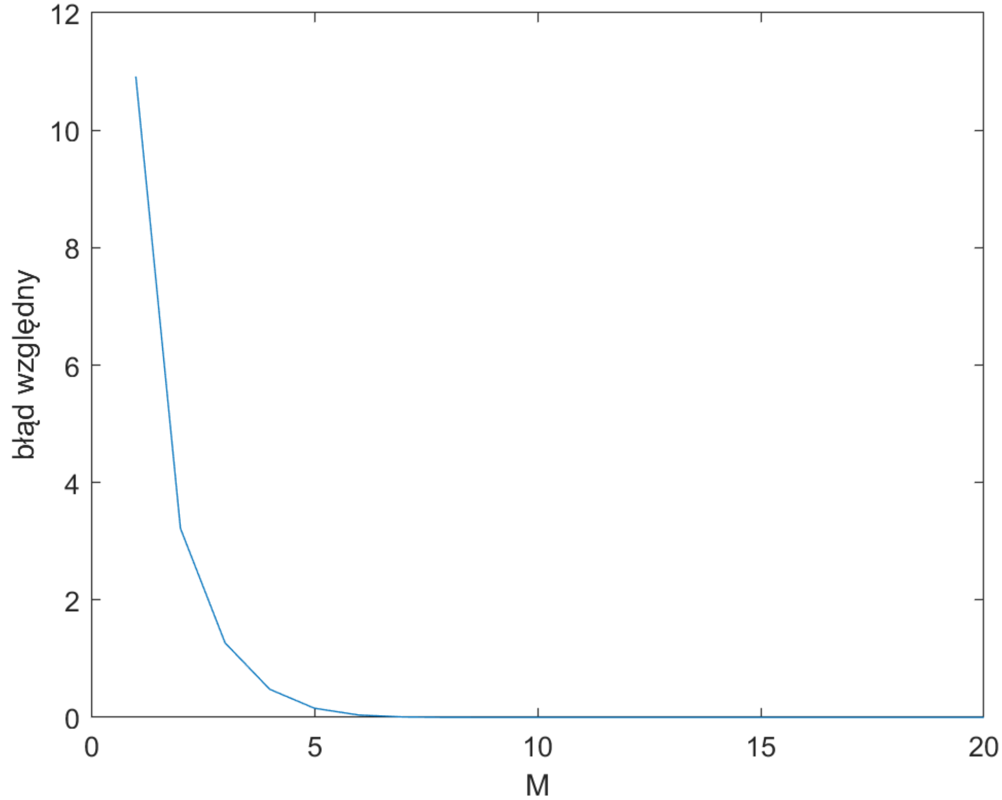
M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$0.00000e+00$	$-1.66533e-16$	$1.66533e-16$	$1.00000e+00$
2	$0.00000e+00$	$-1.66533e-16$	$1.66533e-16$	$1.00000e+00$
3	$0.00000e+00$	$-1.66533e-16$	$1.66533e-16$	$1.00000e+00$
4	$-9.97774e-16$	$-1.66533e-16$	$8.31241e-16$	$4.99143e+00$
5	$-1.68252e-16$	$-1.66533e-16$	$1.71863e-18$	$1.03200e-02$
6	$-3.56558e-16$	$-1.66533e-16$	$1.90024e-16$	$1.14106e+00$
7	$-1.09731e-15$	$-1.66533e-16$	$9.30772e-16$	$5.58910e+00$
8	$-3.45315e-16$	$-1.66533e-16$	$1.78782e-16$	$1.07355e+00$
9	$7.49472e-15$	$-1.66533e-16$	$7.66125e-15$	$4.60043e+01$
10	$-2.12673e-15$	$-1.66533e-16$	$1.96019e-15$	$1.17706e+01$
11	$6.84248e-16$	$-1.66533e-16$	$8.50781e-16$	$5.10877e+00$
12	$1.15889e-15$	$-1.66533e-16$	$1.32542e-15$	$7.95887e+00$
13	$5.78013e-16$	$-1.66533e-16$	$7.44547e-16$	$4.47085e+00$
14	$-2.92274e-15$	$-1.66533e-16$	$2.75621e-15$	$1.65505e+01$
15	$8.38394e-16$	$-1.66533e-16$	$1.00493e-15$	$6.03439e+00$
16	$2.45863e-16$	$-1.66533e-16$	$4.12397e-16$	$2.47636e+00$
17	$-1.26976e-16$	$-1.66533e-16$	$3.95577e-17$	$2.37536e-01$
18	$1.11703e-15$	$-1.66533e-16$	$1.28356e-15$	$7.70752e+00$
19	$-4.04998e-16$	$-1.66533e-16$	$2.38465e-16$	$1.43193e+00$
20	$-2.06147e-16$	$-1.66533e-16$	$3.96135e-17$	$2.37871e-01$



Rysunek 7: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{-\frac{0,99\pi}{2}}^{\frac{0,99\pi}{2}} tg(x)dx$ metodą Romberga

Tabela 8: Tabela dla $\int_0^{\frac{0,99\pi}{2}} tg(x)dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$4.94959e+01$	$4.15363e+00$	$4.53423e+01$	$1.09163e+01$
2	$1.75192e+01$	$4.15363e+00$	$1.33656e+01$	$3.21781e+00$
3	$9.42158e+00$	$4.15363e+00$	$5.26795e+00$	$1.26828e+00$
4	$6.14049e+00$	$4.15363e+00$	$1.98686e+00$	$4.78343e-01$
5	$4.79897e+00$	$4.15363e+00$	$6.45342e-01$	$1.55368e-01$
6	$4.31677e+00$	$4.15363e+00$	$1.63141e-01$	$3.92768e-02$
7	$4.18191e+00$	$4.15363e+00$	$2.82769e-02$	$6.80776e-03$
8	$4.15652e+00$	$4.15363e+00$	$2.89548e-03$	$6.97097e-04$
9	$4.15378e+00$	$4.15363e+00$	$1.50800e-04$	$3.63056e-05$
10	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$3.51208e-06$	$8.45546e-07$
11	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$3.31122e-08$	$7.97188e-09$
12	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$1.17343e-10$	$2.82508e-11$
13	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$1.15463e-13$	$2.77982e-14$
14	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$2.84217e-14$	$6.84262e-15$
15	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$3.01981e-14$	$7.27029e-15$
16	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$2.39808e-14$	$5.77346e-15$
17	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$3.46390e-14$	$8.33945e-15$
18	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$3.46390e-14$	$8.33945e-15$
19	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$2.39808e-14$	$5.77346e-15$
20	$4.15363e+00$	$4.15363e+00$	$1.33227e-14$	$3.20748e-15$



Rysunek 8: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_0^{\frac{0,99\pi}{2}} tg(x)dx$ metodą Romberga

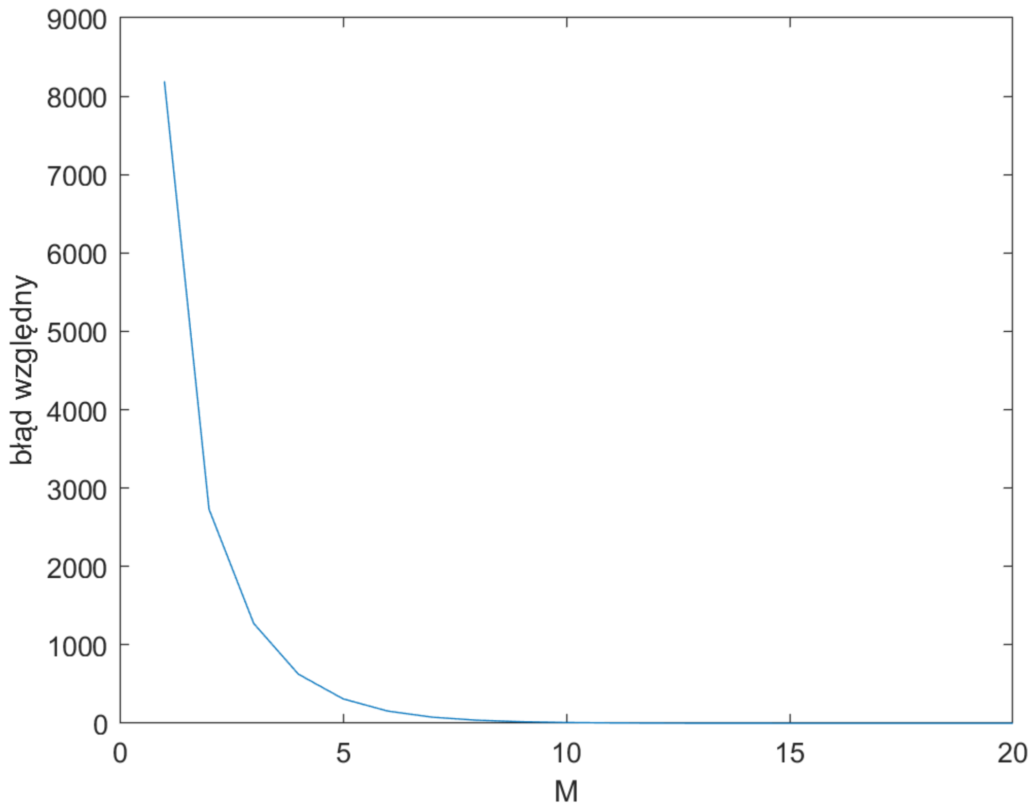
.

3.4 $f(x) = x^{-1}$

Sprawdzenie dla przedziału $[10^{-5}, 2]$

Tabela 9: Tabela dla $\int_{10^{-5}}^{2} x^{-1} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.00000e+05$	$1.22061e+01$	$9.99878e+04$	$8.19164e+03$
2	$3.33347e+04$	$1.22061e+01$	$3.33225e+04$	$2.72999e+03$
3	$1.55577e+04$	$1.22061e+01$	$1.55455e+04$	$1.27359e+03$
4	$7.65723e+03$	$1.22061e+01$	$7.64502e+03$	$6.26329e+02$
5	$3.81577e+03$	$1.22061e+01$	$3.80357e+03$	$3.11613e+02$
6	$1.90854e+03$	$1.22061e+01$	$1.89633e+03$	$1.55360e+02$
7	$9.56896e+02$	$1.22061e+01$	$9.44690e+02$	$7.73951e+01$
8	$4.81625e+02$	$1.22061e+01$	$4.69419e+02$	$3.84578e+01$
9	$2.44361e+02$	$1.22061e+01$	$2.32155e+02$	$1.90196e+01$
10	$1.26076e+02$	$1.22061e+01$	$1.13870e+02$	$9.32899e+00$
11	$6.72774e+01$	$1.22061e+01$	$5.50713e+01$	$4.51179e+00$
12	$3.82169e+01$	$1.22061e+01$	$2.60108e+01$	$2.13097e+00$
13	$2.40182e+01$	$1.22061e+01$	$1.18122e+01$	$9.67728e-01$
14	$1.72364e+01$	$1.22061e+01$	$5.03032e+00$	$4.12116e-01$
15	$1.41369e+01$	$1.22061e+01$	$1.93085e+00$	$1.58187e-01$
16	$1.28342e+01$	$1.22061e+01$	$6.28176e-01$	$5.14642e-02$
17	$1.23642e+01$	$1.22061e+01$	$1.58099e-01$	$1.29525e-02$
18	$1.22332e+01$	$1.22061e+01$	$2.71754e-02$	$2.22638e-03$
19	$1.22088e+01$	$1.22061e+01$	$2.75027e-03$	$2.25319e-04$
20	$1.22062e+01$	$1.22061e+01$	$1.41156e-04$	$1.15644e-05$



Rysunek 9: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-5}}^{2} x^{-1}dx$ metodą Romberga

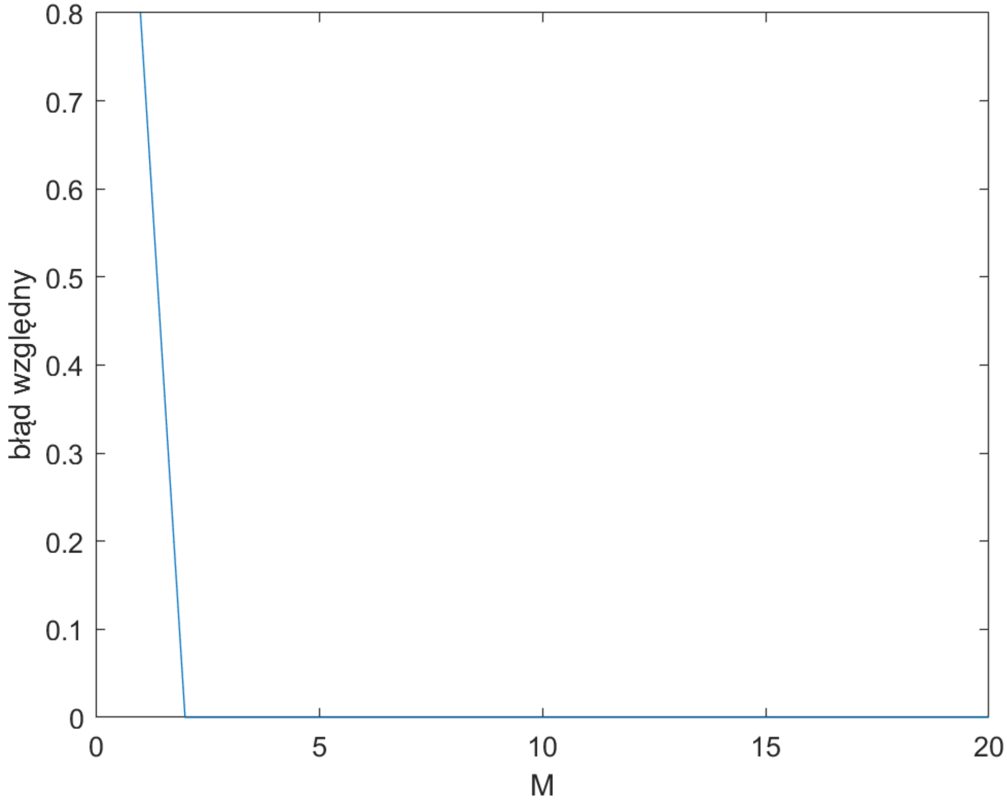
.

3.5 $f(x) = |x|$

Sprawdzenie dla przedziału $[-1, 2]$

Tabela 10: Tabela dla $\int_{-1}^{2} |x| dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$4.50000e+00$	$2.50000e+00$	$2.00000e+00$	$8.00000e-01$
2	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
3	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
4	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
5	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
6	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
7	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
8	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
9	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
10	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
11	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
12	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
13	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
14	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
15	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
16	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
17	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
18	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
19	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$
20	$2.50000e+00$	$2.50000e+00$	$4.18100e-07$	$1.67240e-07$



Rysunek 10: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{-1}^{2} |x|dx$ metodą Romberga

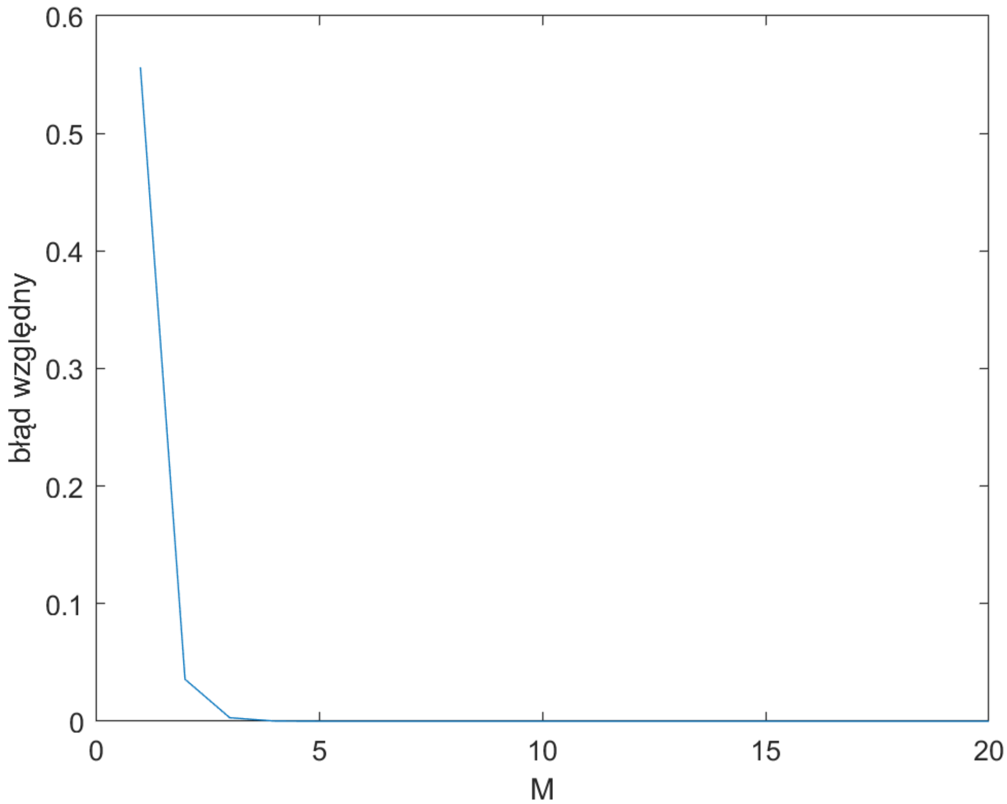
.

3.6 $f(x) = ln(x)$

Sprawdzenie dla przedziału $[0.5, 3]$

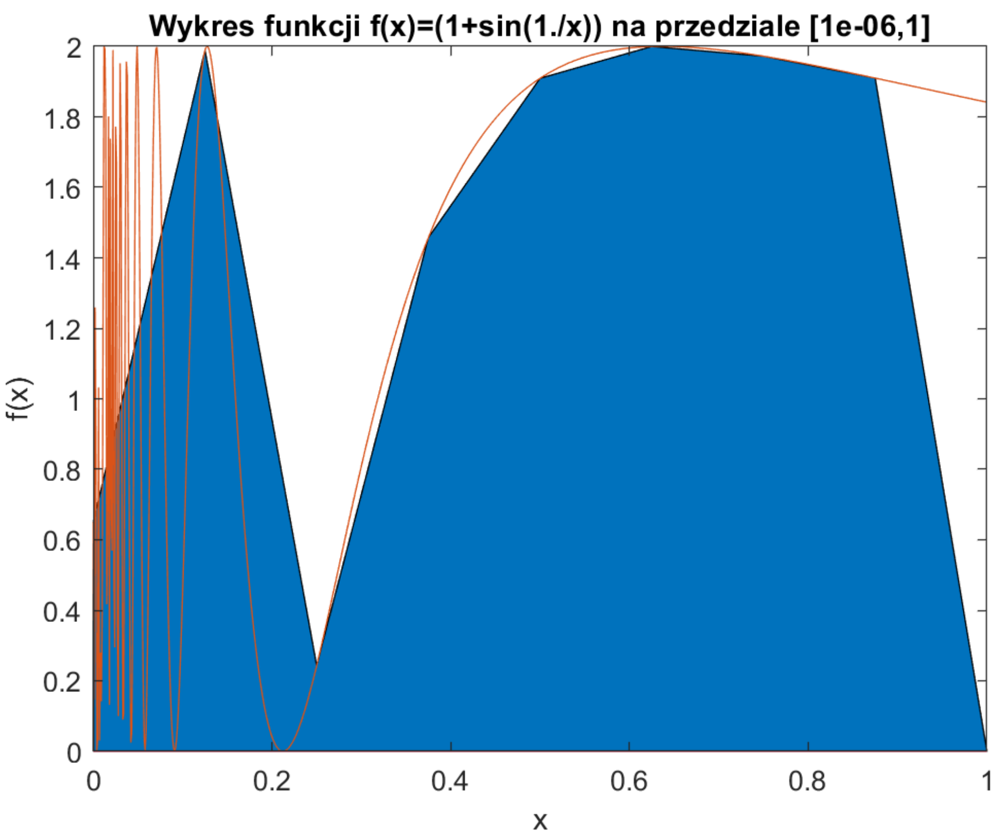
Tabela 11: Tabela dla $\int_{0.5}^{3} \ln x dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$5.06831e-01$	$1.14241e+00$	$6.35579e-01$	$5.56349e-01$
2	$1.10164e+00$	$1.14241e+00$	$4.07737e-02$	$3.56909e-02$
3	$1.13896e+00$	$1.14241e+00$	$3.44878e-03$	$3.01886e-03$
4	$1.14221e+00$	$1.14241e+00$	$1.96782e-04$	$1.72252e-04$
5	$1.14240e+00$	$1.14241e+00$	$5.94359e-06$	$5.20268e-06$
6	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$8.17907e-08$	$7.15949e-08$
7	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$4.61816e-10$	$4.04247e-10$
8	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$9.91873e-13$	$8.68228e-13$
9	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$8.88178e-16$	$7.77460e-16$
10	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$2.22045e-16$	$1.94365e-16$
11	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$0.00000e+00$	$0.00000e+00$
12	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$1.11022e-15$	$9.71825e-16$
13	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$0.00000e+00$	$0.00000e+00$
14	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$0.00000e+00$	$0.00000e+00$
15	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$1.77636e-15$	$1.55492e-15$
16	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$3.77476e-15$	$3.30420e-15$
17	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$2.22045e-16$	$1.94365e-16$
18	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$3.77476e-15$	$3.30420e-15$
19	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$4.66294e-15$	$4.08166e-15$
20	$1.14241e+00$	$1.14241e+00$	$8.21565e-15$	$7.19150e-15$

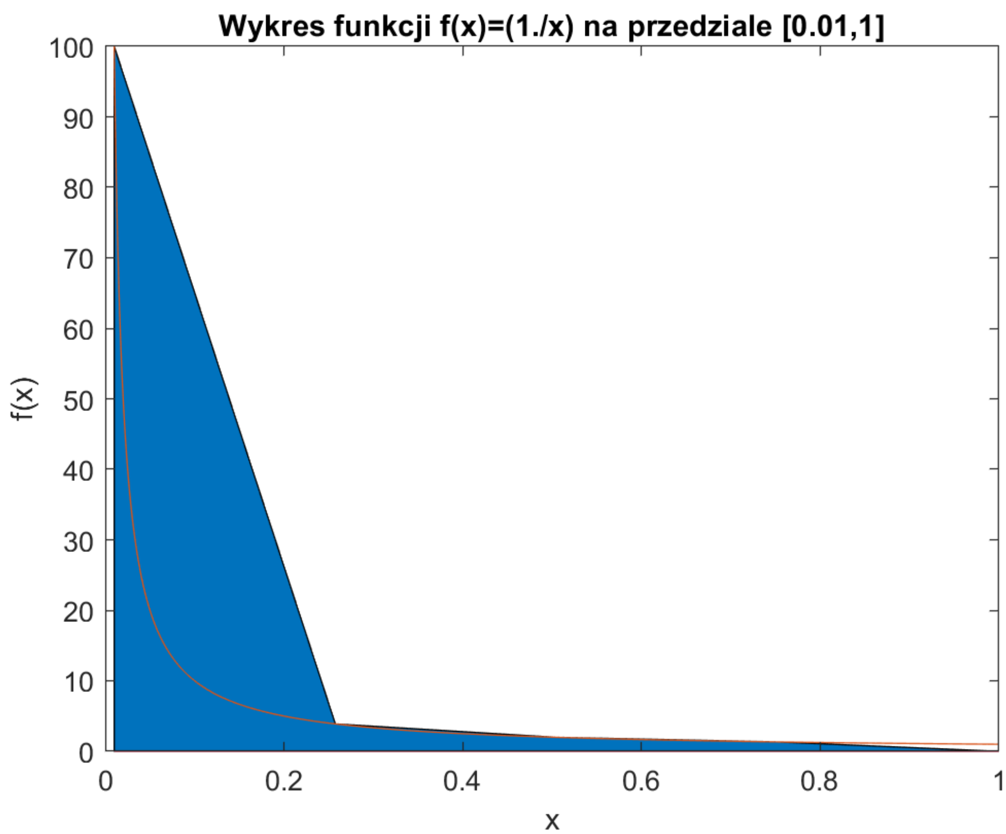


Rysunek 11: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^{3} \ln x dx$ metodą Romberga

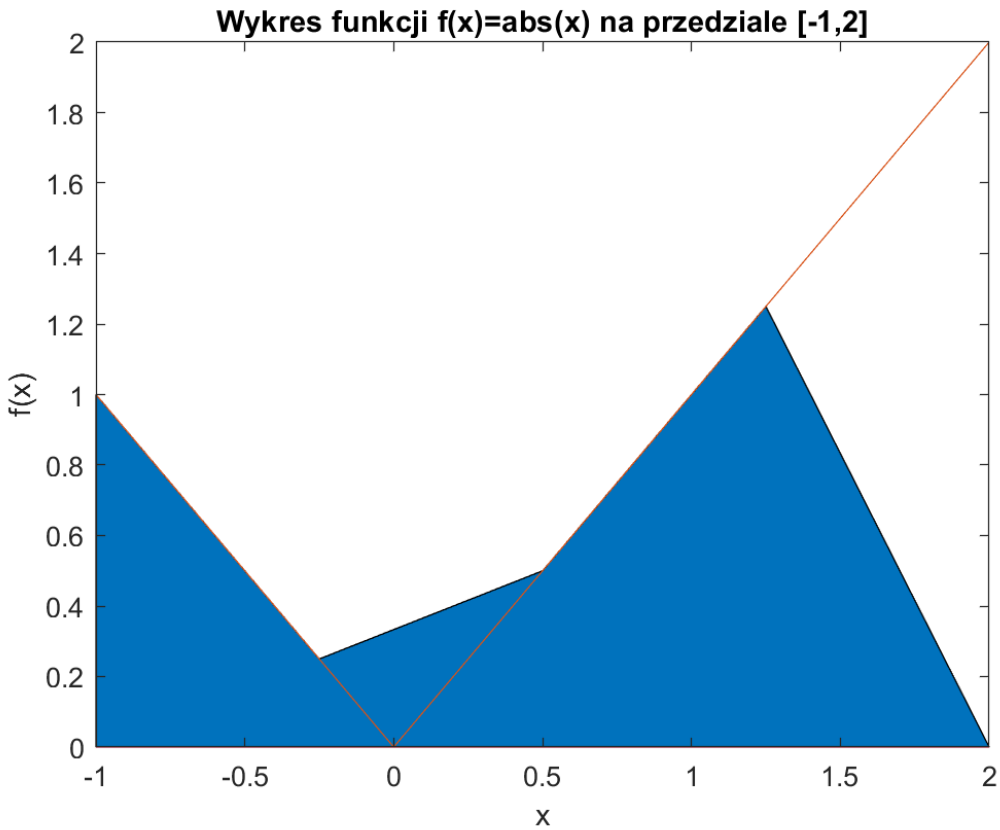
4 Analiza wyników



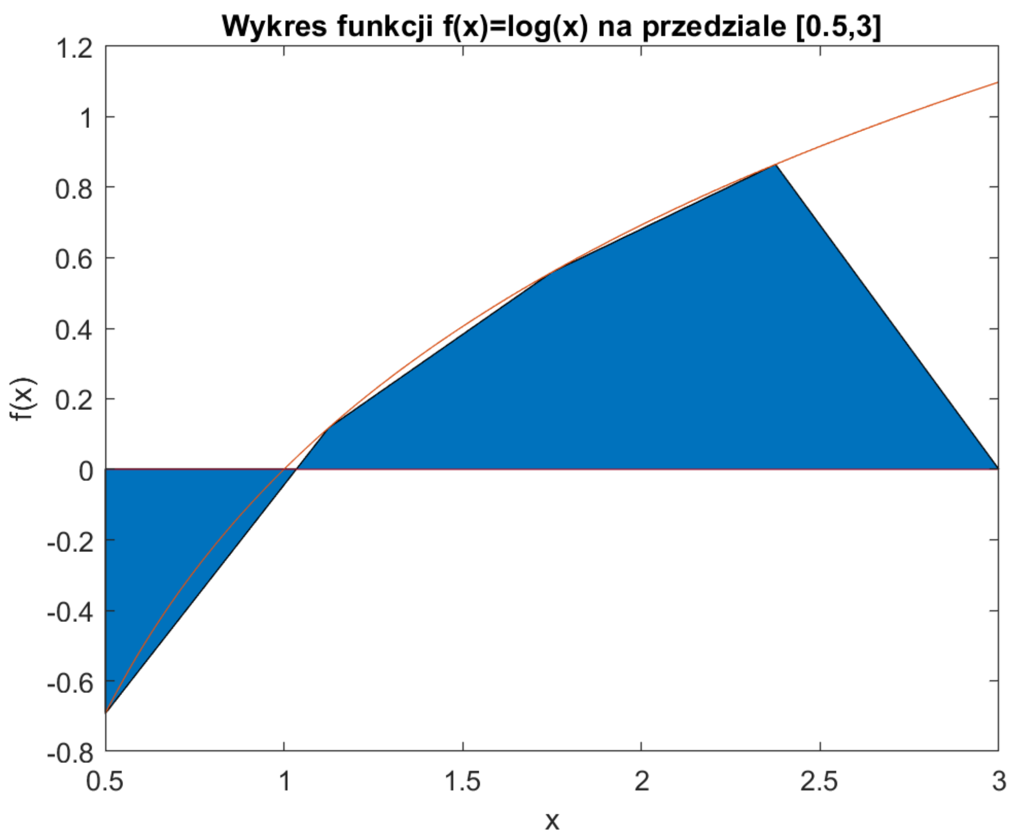
Rysunek 12: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^{3} \ln x dx$ metodą Romberga



Rysunek 13: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^{3} \ln x dx$ metodą Romberga



Rysunek 14: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^{3} \ln x dx$ metodą Romberga



Rysunek 15: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^{3} \ln x dx$ metodą Romberga