

23 stycznia 2020

Jakub Kujała
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Obliczanie całek $\int_a^b f(x) dx$ metodą Romberga.

Projekt nr 2

Spis treści

1	Opis metody	3
2	Opis programu obliczeniowego	4
3	Przykłady obliczeniowe	4
3.1	$f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{x})$	5
3.1.1	Przedział $(10^{-3}, 1)$	5
3.1.2	Przedział $(10^{-4}, 1)$	6
3.1.3	Przedział $(10^{-5}, 1)$	7
3.1.4	Przedział $(10^{-6}, 1)$	8
3.2	$f(x) = \sin(x)$	10
3.3	$f(x) = \operatorname{tg}(x)$	14
3.4	$f(x) = x^{-1}$	18
3.5	$f(x) = x $	20
3.6	$f(x) = \ln(x)$	22
4	Analiza wyników	24
5	Kod programu	28
5.1	romberg.m	28

1 Opis metody

Do obliczania całek $\int_a^b f(x) dx$ zastosujemy metodę opracowaną w 1955 roku przez Wernera Romberga, która opiera się na wykorzystaniu złożonego wzoru trapezów:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h_n \sum_{i=0}^n {}'' f(a + ih) \quad (1)$$

gdzie n jest liczbą przedziałów o równej długości, na które dzielimy odcinek $[a, b]$ oraz

$$h_n = \frac{b - a}{n}$$

Symbol

$$\sum {}''$$

oznacza sumę, której skrajne składniki są dzielone na 2.

W naszym przypadku odcinek $[a, b]$ będzie dzielony na 2^n przedziałów o równej długości. Zatem do wzoru (1) będziemy podstawiali

$$h_n = \frac{b - a}{2^n}$$

Niech

$$R(n, 0) = h_n \sum_{i=0}^{2^n} {}'' f(a + ih) \quad (2)$$

Najprostsze wyrażenie, od którego zaczniemy, to

$$R(0, 0) = \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)]$$

Aby uniknąć wielokrotnego obliczania wartości funkcji f w tych samych punktach, skorzystamy z rekurencyjnego wyznaczania

$$R(n, 0) = \frac{1}{2}R(n - 1, 0) + h_n \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i - 1)h_n) \quad (3)$$

ponieważ w $R(n, 0)$ występują wartości potrzebne do wyliczenia $R(n - 1, 0)$. Wartości funkcji f w tych punktach musimy podzielić na 2 oraz dodać do nich wartości pośrednie $a + h_n, a + 3h_n, a + 5h_n$ itd, co można odczytać we wzorze (3).

Przybliżenia $R(n, 0)$ tworzą pierwszą kolumnę przybliżeń całki. Kolejne kolumny wyliczymy stosując poniższy wzór dla $m > 0$, który wynika ze wzoru Eulera-Maclaurina oraz ekstrapolacji Richardsona:

$$R(n, m) = R(n, m - 1) + \frac{1}{4^m - 1}[R(n, m - 1) - R(n - 1, m - 1)] \quad (4)$$

Wobec tego dzięki wzorom (2), (3), (4) znajdziemy wszystkie elementy tablicy trójkątnej:

$$\begin{array}{cccc} R(0,0) & & & \\ R(1,0) & R(1,1) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ R(n,0) & R(n,1) & \dots & R(n,n) \end{array}$$

która zawiera coraz lepsze przybliżenia szukanej wartości całki. Najlepsze przybliżenie, to $R(n,n)$. Wartości z tablicy trójkątnej będą obliczane kolejno wierszami, zaczynając od pierwszego.

Obliczając kolejne przybliżenia będziemy badać błędy względem funkcji $integral(f, a, b)$ wbudowanej w program Matlab. Funkcja ta wyznacza wartość całki z funkcji f na przedziale $[a, b]$. Na podstawie wyznaczonych błędów względnych oraz bezwzględnych zostanie przeprowadzona analiza metody.

2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. $Romberg(f, a, b, M) = [x, R]$:
przyjmuje za argumenty funkcję f , końce przedziału $[a, b]$, na którym wyznaczamy wartość całki, oraz liczbę M , która określa na ile odcinków będzie dzielony przedział $[a, b]$ (na 2^M równych odcinków). Wyznacza wartość $\int_a^b f(x) dx$ metodą Romberga oraz tablicę R , w której umieszczone są kolejnych przybliżenia wartości badanej całki.
2. $testRomberg(f, a, b, n, s)$:
przyjmuje za argumenty funkcję f , końce przedziału $[a, b]$, na którym wyznaczamy wartość całki, liczby całkowite n oraz s . Testuje metodę Romberga dla wartości M od 1 do n z krokiem $co\ s$. Dla każdego M wypisuje tabelę w formacie LaTeX i tworzy wykresy błędów względnych i bezwzględnych.

3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych funkcji:

1. $f(x) = 1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = tg(x)$
4. $f(x) = x^{-1}$

5. $f(x) = |x|$

6. $f(x) = \ln x$

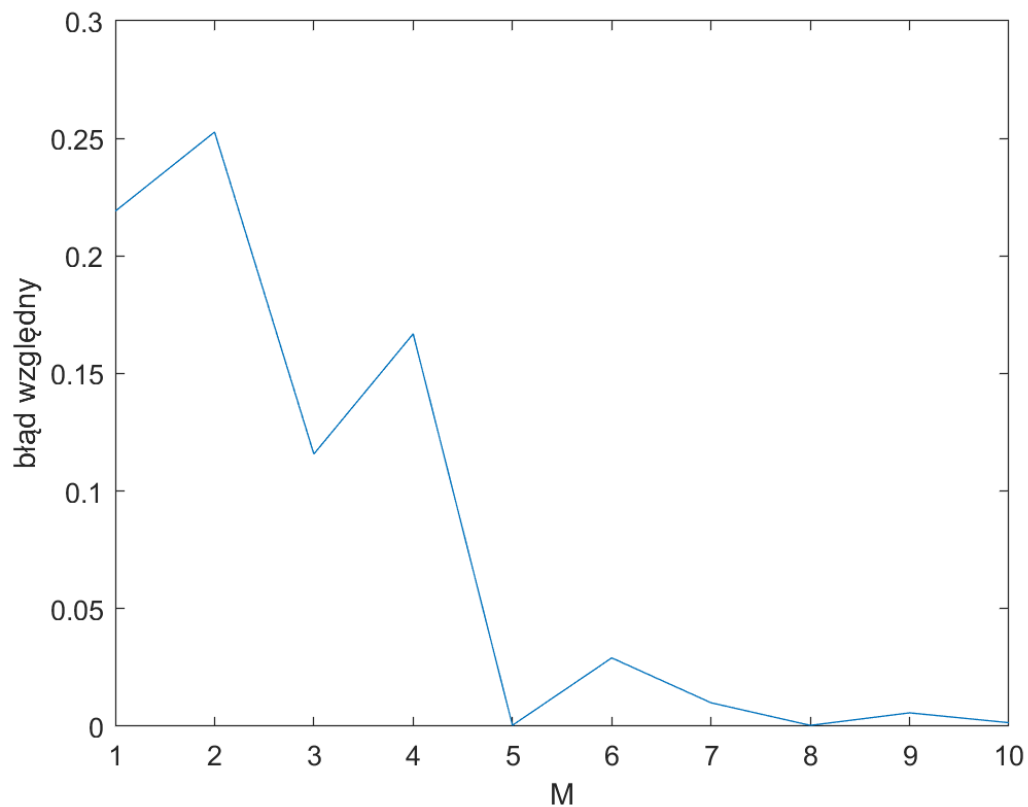
3.1 $f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{x})$

Sprawdzamy dla przedziałów $(10^{-3}, 1), (10^{-4}, 1), (10^{-5}, 1), (10^{-6}, 1)$

3.1.1 Przedział $(10^{-3}, 1)$

Tabela 1: Tabela dla $\int_{10^{-3}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.83234e + 00$	$1.50307e + 00$	$3.29275e - 01$	$2.19069e - 01$
2	$1.88292e + 00$	$1.50307e + 00$	$3.79858e - 01$	$2.52722e - 01$
3	$1.32904e + 00$	$1.50307e + 00$	$1.74031e - 01$	$1.15784e - 01$
4	$1.75390e + 00$	$1.50307e + 00$	$2.50838e - 01$	$1.66884e - 01$
5	$1.50368e + 00$	$1.50307e + 00$	$6.16420e - 04$	$4.10109e - 04$
6	$1.45937e + 00$	$1.50307e + 00$	$4.37013e - 02$	$2.90748e - 02$
7	$1.51810e + 00$	$1.50307e + 00$	$1.50307e - 02$	$1.00000e - 02$
8	$1.50249e + 00$	$1.50307e + 00$	$5.75817e - 04$	$3.83095e - 04$
9	$1.49449e + 00$	$1.50307e + 00$	$8.57592e - 03$	$5.70562e - 03$
10	$1.50079e + 00$	$1.50307e + 00$	$2.28148e - 03$	$1.51789e - 03$

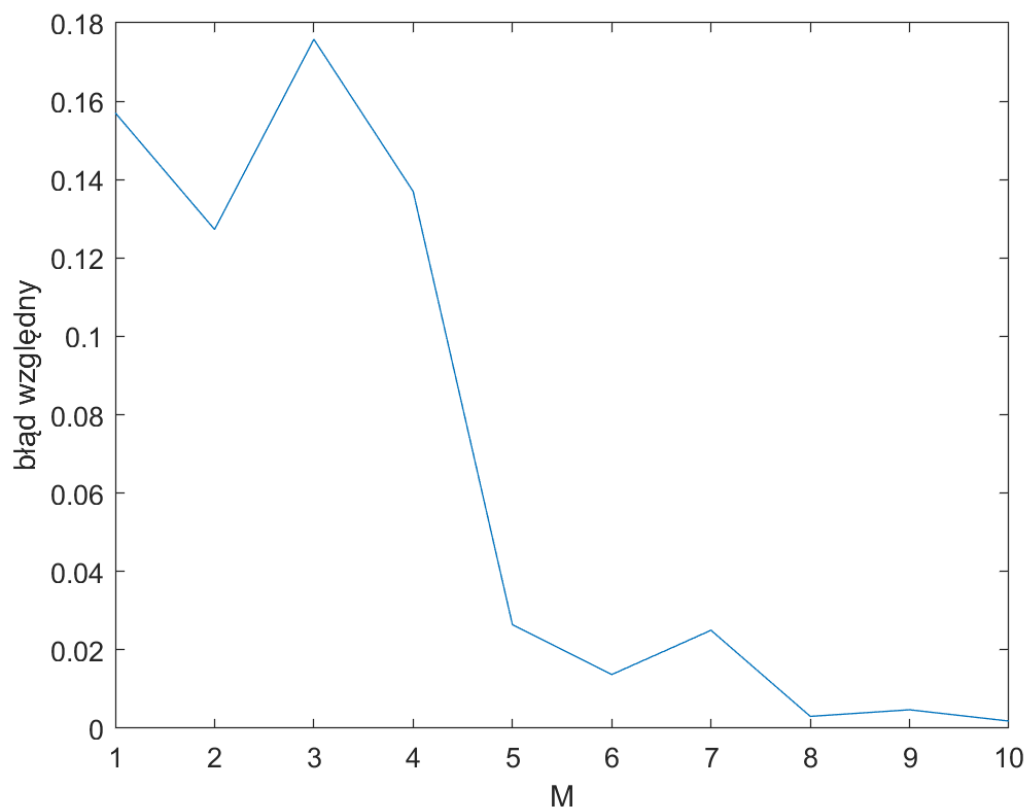


Rysunek 1: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-3}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$ metodą Romberga

3.1.2 Przedział $(10^{-4}, 1)$

Tabela 2: Tabela dla $\int_{10^{-4}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.26780e + 00$	$1.50397e + 00$	$2.36166e - 01$	$1.57028e - 01$
2	$1.69539e + 00$	$1.50397e + 00$	$1.91427e - 01$	$1.27281e - 01$
3	$1.23957e + 00$	$1.50397e + 00$	$2.64395e - 01$	$1.75798e - 01$
4	$1.70998e + 00$	$1.50397e + 00$	$2.06014e - 01$	$1.36980e - 01$
5	$1.46424e + 00$	$1.50397e + 00$	$3.97289e - 02$	$2.64161e - 02$
6	$1.48336e + 00$	$1.50397e + 00$	$2.06074e - 02$	$1.37020e - 02$
7	$1.54157e + 00$	$1.50397e + 00$	$3.76039e - 02$	$2.50031e - 02$
8	$1.50853e + 00$	$1.50397e + 00$	$4.55822e - 03$	$3.03080e - 03$
9	$1.49687e + 00$	$1.50397e + 00$	$7.09600e - 03$	$4.71819e - 03$
10	$1.50673e + 00$	$1.50397e + 00$	$2.76236e - 03$	$1.83671e - 03$

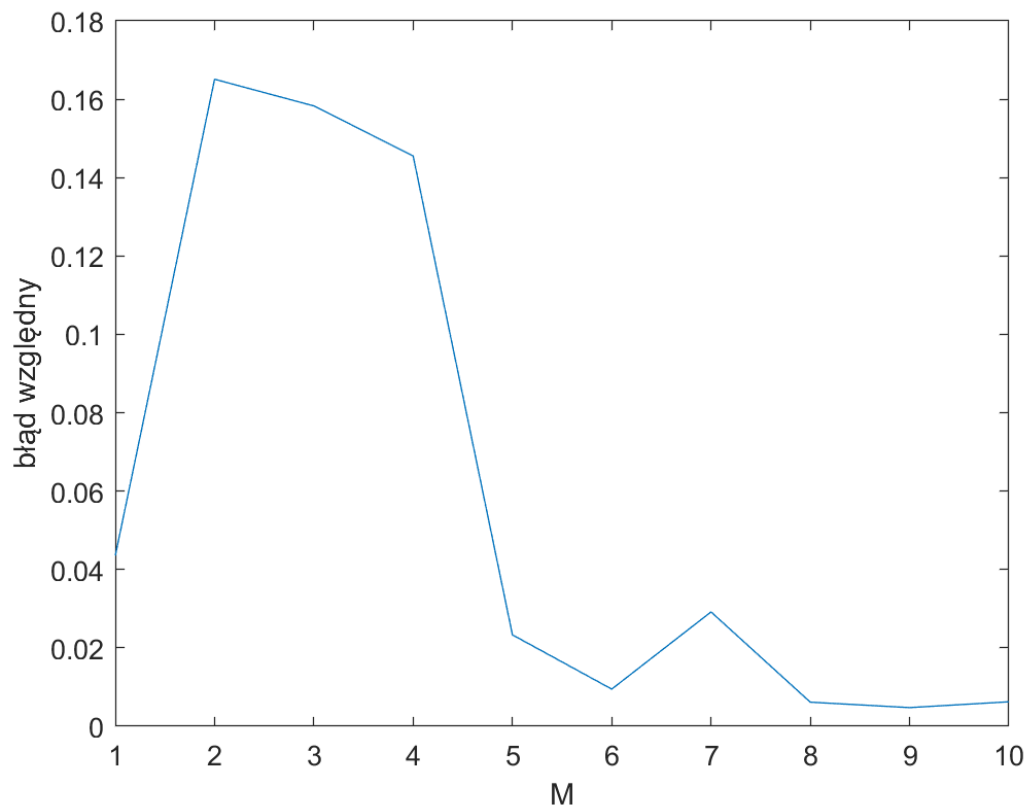


Rysunek 2: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-4}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$ metodą Romberga

3.1.3 Przedział $(10^{-5}, 1)$

Tabela 3: Tabela dla $\int_{10^{-5}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.43860e + 00$	$1.50406e + 00$	$6.54608e - 02$	$4.35228e - 02$
2	$1.75239e + 00$	$1.50406e + 00$	$2.48333e - 01$	$1.65109e - 01$
3	$1.26598e + 00$	$1.50406e + 00$	$2.38080e - 01$	$1.58292e - 01$
4	$1.72296e + 00$	$1.50406e + 00$	$2.18901e - 01$	$1.45540e - 01$
5	$1.46897e + 00$	$1.50406e + 00$	$3.50854e - 02$	$2.33272e - 02$
6	$1.48980e + 00$	$1.50406e + 00$	$1.42549e - 02$	$9.47764e - 03$
7	$1.54794e + 00$	$1.50406e + 00$	$4.38814e - 02$	$2.91754e - 02$
8	$1.51330e + 00$	$1.50406e + 00$	$9.24697e - 03$	$6.14802e - 03$
9	$1.49689e + 00$	$1.50406e + 00$	$7.16514e - 03$	$4.76388e - 03$
10	$1.51345e + 00$	$1.50406e + 00$	$9.39073e - 03$	$6.24360e - 03$

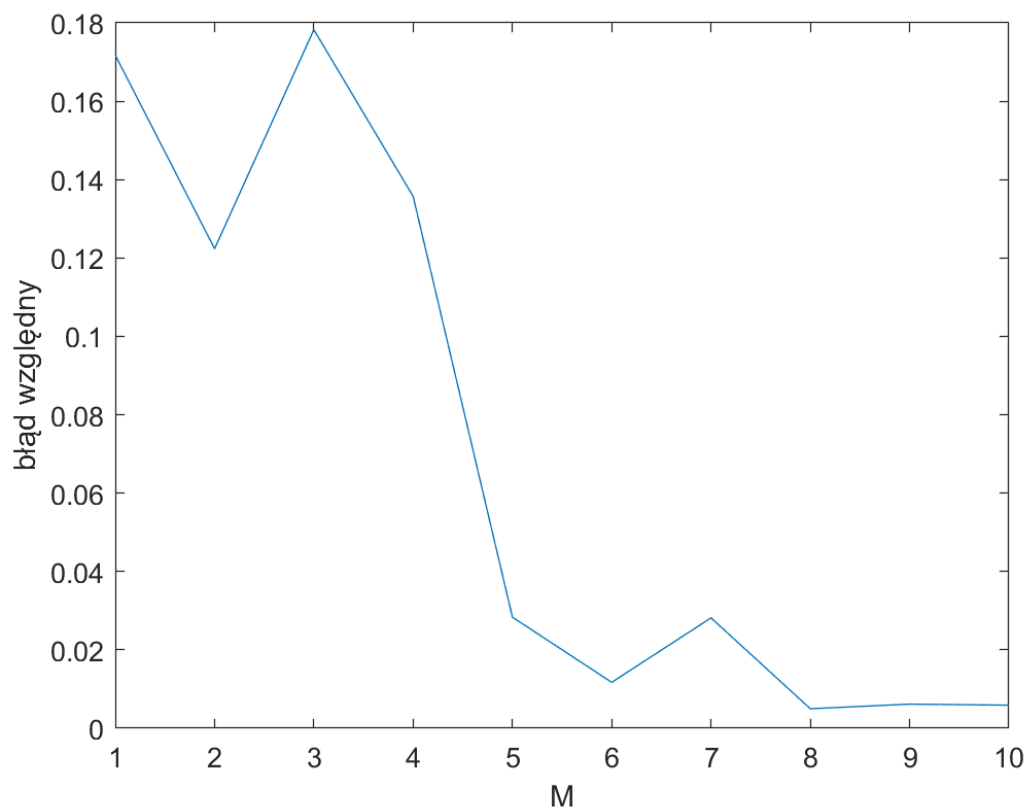


Rysunek 3: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-5}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$ metodą Romberga

3.1.4 Przedział $(10^{-6}, 1)$

Tabela 4: Tabela dla $\int_{10^{-6}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.83234e + 00$	$1.50307e + 00$	$3.29275e - 01$	$2.19069e - 01$
2	$1.88292e + 00$	$1.50307e + 00$	$3.79858e - 01$	$2.52722e - 01$
3	$1.32904e + 00$	$1.50307e + 00$	$1.74031e - 01$	$1.15784e - 01$
4	$1.75390e + 00$	$1.50307e + 00$	$2.50838e - 01$	$1.66884e - 01$
5	$1.50368e + 00$	$1.50307e + 00$	$6.16420e - 04$	$4.10109e - 04$
6	$1.45937e + 00$	$1.50307e + 00$	$4.37013e - 02$	$2.90748e - 02$
7	$1.51810e + 00$	$1.50307e + 00$	$1.50307e - 02$	$1.00000e - 02$
8	$1.50249e + 00$	$1.50307e + 00$	$5.75817e - 04$	$3.83095e - 04$
9	$1.49449e + 00$	$1.50307e + 00$	$8.57592e - 03$	$5.70562e - 03$
10	$1.50079e + 00$	$1.50307e + 00$	$2.28148e - 03$	$1.51789e - 03$



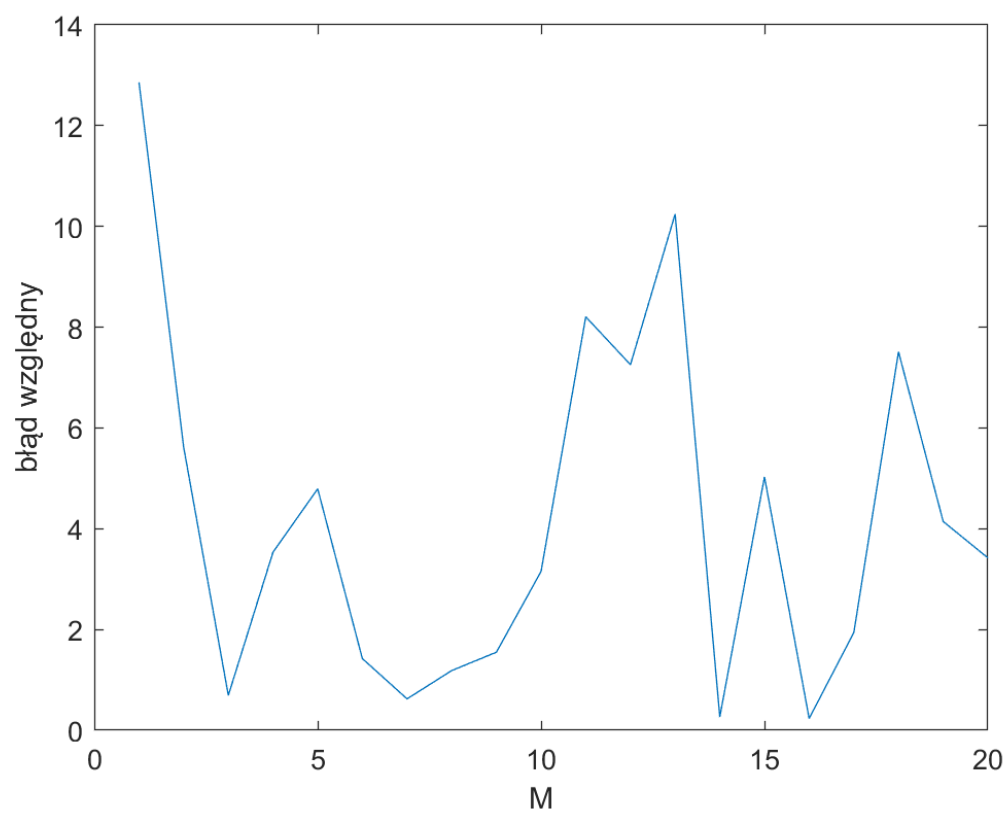
Rysunek 4: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-6}}^1 1 + \sin \frac{1}{x} dx$ metodą Romberga

3.2 $f(x) = \sin(x)$

Sprawdzenie dla przedziałów $[0, 2\pi]$ oraz $[0, \pi]$

Tabela 5: Tabela dla $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

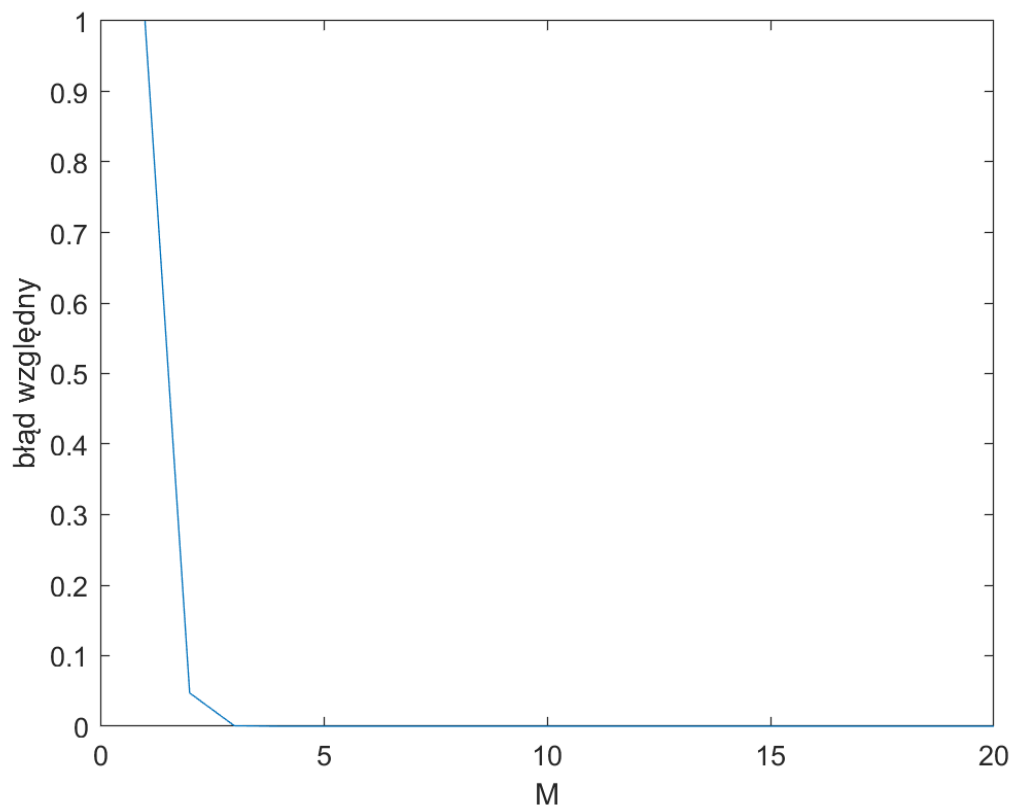
M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$-7.69468e - 16$	$-5.55112e - 17$	$7.13957e - 16$	$1.28615e + 01$
2	$2.56489e - 16$	$-5.55112e - 17$	$3.12001e - 16$	$5.62050e + 00$
3	$-1.70993e - 17$	$-5.55112e - 17$	$3.84119e - 17$	$6.91966e - 01$
4	$-2.51692e - 16$	$-5.55112e - 17$	$1.96181e - 16$	$3.53407e + 00$
5	$2.10462e - 16$	$-5.55112e - 17$	$2.65973e - 16$	$4.79135e + 00$
6	$2.34544e - 17$	$-5.55112e - 17$	$7.89655e - 17$	$1.42252e + 00$
7	$-9.00888e - 17$	$-5.55112e - 17$	$3.45776e - 17$	$6.22895e - 01$
8	$1.02755e - 17$	$-5.55112e - 17$	$6.57866e - 17$	$1.18511e + 00$
9	$-1.41478e - 16$	$-5.55112e - 17$	$8.59667e - 17$	$1.54864e + 00$
10	$-2.30603e - 16$	$-5.55112e - 17$	$1.75092e - 16$	$3.15417e + 00$
11	$3.99984e - 16$	$-5.55112e - 17$	$4.55495e - 16$	$8.20548e + 00$
12	$3.47263e - 16$	$-5.55112e - 17$	$4.02774e - 16$	$7.25574e + 00$
13	$5.13150e - 16$	$-5.55112e - 17$	$5.68661e - 16$	$1.02441e + 01$
14	$-4.08115e - 17$	$-5.55112e - 17$	$1.46996e - 17$	$2.64805e - 01$
15	$-3.34600e - 16$	$-5.55112e - 17$	$2.79088e - 16$	$5.02761e + 00$
16	$-4.25196e - 17$	$-5.55112e - 17$	$1.29915e - 17$	$2.34034e - 01$
17	$5.21761e - 17$	$-5.55112e - 17$	$1.07687e - 16$	$1.93992e + 00$
18	$3.61441e - 16$	$-5.55112e - 17$	$4.16952e - 16$	$7.51114e + 00$
19	$1.74492e - 16$	$-5.55112e - 17$	$2.30003e - 16$	$4.14336e + 00$
20	$-2.45431e - 16$	$-5.55112e - 17$	$1.89920e - 16$	$3.42129e + 00$



Rysunek 5: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_0^{2\pi} \sin x$ metodą Romberga

Tabela 6: Tabela dla $\int_0^\pi \sin x dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.92367e - 16$	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$1.00000e + 00$
2	$2.09440e + 00$	$2.00000e + 00$	$9.43951e - 02$	$4.71976e - 02$
3	$1.99857e + 00$	$2.00000e + 00$	$1.42927e - 03$	$7.14634e - 04$
4	$2.00001e + 00$	$2.00000e + 00$	$5.54998e - 06$	$2.77499e - 06$
5	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$5.41271e - 09$	$2.70635e - 09$
6	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$1.32139e - 12$	$6.60694e - 13$
7	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$6.66134e - 16$	$3.33067e - 16$
8	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.22045e - 16$	$1.11022e - 16$
9	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$4.44089e - 16$	$2.22045e - 16$
10	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$0.00000e + 00$	$0.00000e + 00$
11	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$4.44089e - 16$	$2.22045e - 16$
12	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.44249e - 15$	$1.22125e - 15$
13	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$1.99840e - 15$	$9.99201e - 16$
14	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.22045e - 16$	$1.11022e - 16$
15	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.88658e - 15$	$1.44329e - 15$
16	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$4.21885e - 15$	$2.10942e - 15$
17	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.22045e - 16$	$1.11022e - 16$
18	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.88658e - 15$	$1.44329e - 15$
19	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$2.70894e - 14$	$1.35447e - 14$
20	$2.00000e + 00$	$2.00000e + 00$	$1.53211e - 14$	$7.66054e - 15$



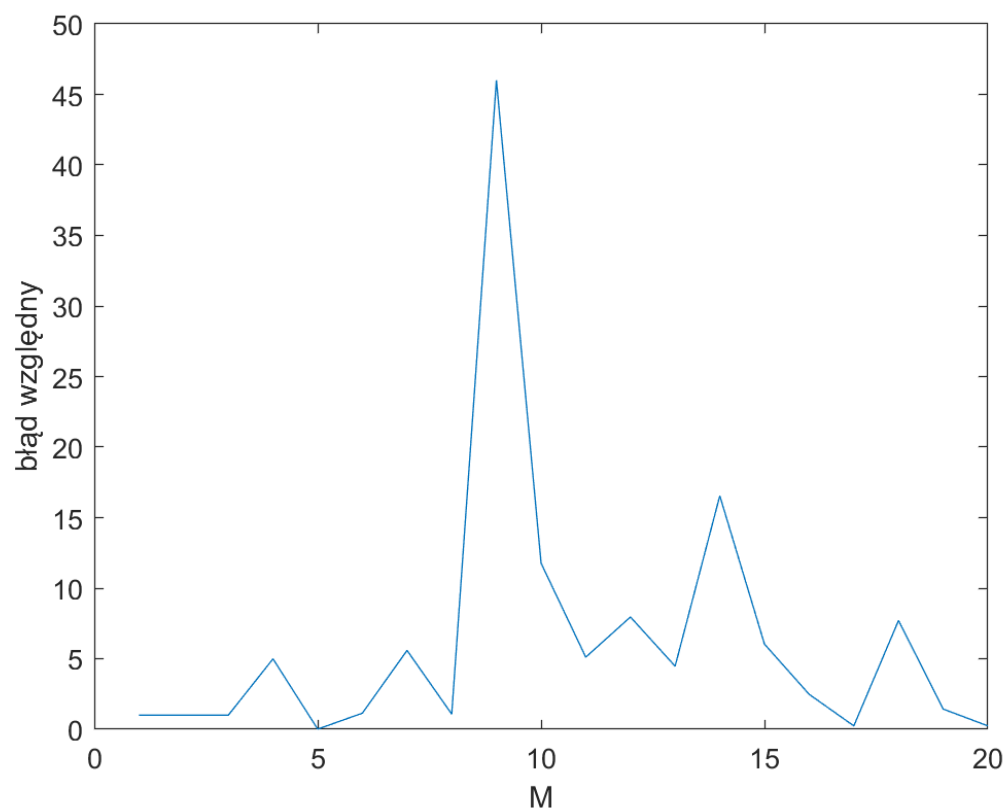
Rysunek 6: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_0^\pi \sin x$ metodą Romberga

3.3 $f(x) = tg(x)$

Sprawdzenie dla przedziałów $[0, \frac{0,99\pi}{2}]$ oraz $[-\frac{0,99\pi}{2}, \frac{0,99\pi}{2}]$

Tabela 7: Tabela dla $\int_{-\frac{0,99\pi}{2}}^{\frac{0,99\pi}{2}} tg(x)dx$

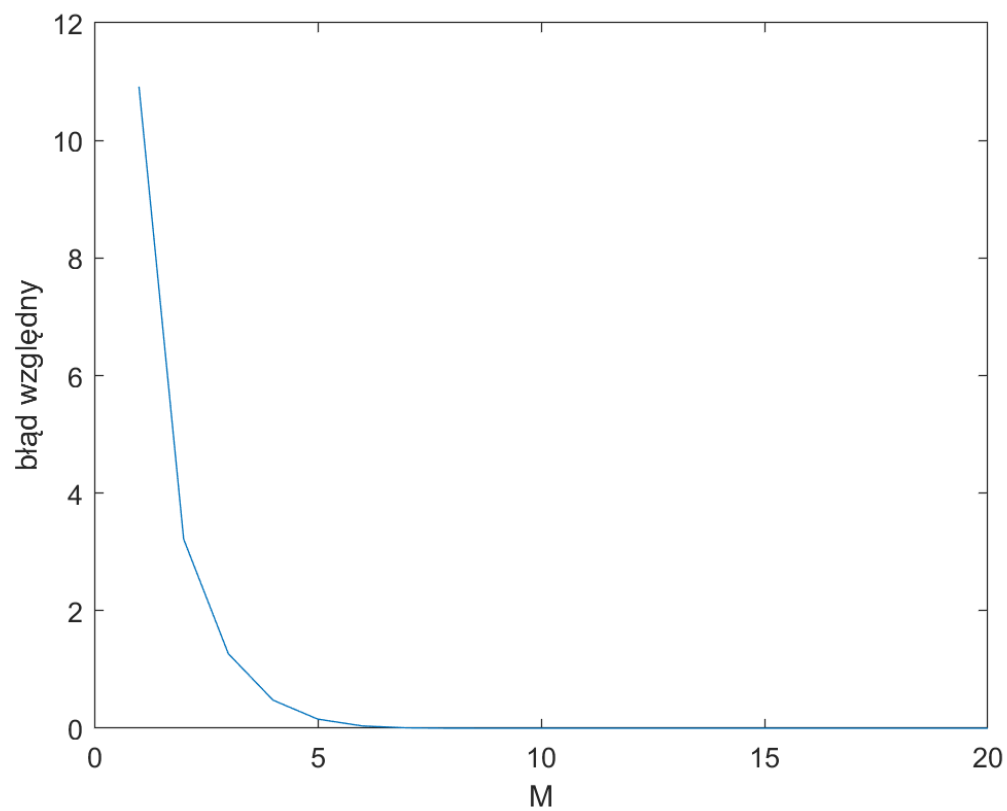
M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$0.00000e + 00$	$-1.66533e - 16$	$1.66533e - 16$	$1.00000e + 00$
2	$0.00000e + 00$	$-1.66533e - 16$	$1.66533e - 16$	$1.00000e + 00$
3	$0.00000e + 00$	$-1.66533e - 16$	$1.66533e - 16$	$1.00000e + 00$
4	$-9.97774e - 16$	$-1.66533e - 16$	$8.31241e - 16$	$4.99143e + 00$
5	$-1.68252e - 16$	$-1.66533e - 16$	$1.71863e - 18$	$1.03200e - 02$
6	$-3.56558e - 16$	$-1.66533e - 16$	$1.90024e - 16$	$1.14106e + 00$
7	$-1.09731e - 15$	$-1.66533e - 16$	$9.30772e - 16$	$5.58910e + 00$
8	$-3.45315e - 16$	$-1.66533e - 16$	$1.78782e - 16$	$1.07355e + 00$
9	$7.49472e - 15$	$-1.66533e - 16$	$7.66125e - 15$	$4.60043e + 01$
10	$-2.12673e - 15$	$-1.66533e - 16$	$1.96019e - 15$	$1.17706e + 01$
11	$6.84248e - 16$	$-1.66533e - 16$	$8.50781e - 16$	$5.10877e + 00$
12	$1.15889e - 15$	$-1.66533e - 16$	$1.32542e - 15$	$7.95887e + 00$
13	$5.78013e - 16$	$-1.66533e - 16$	$7.44547e - 16$	$4.47085e + 00$
14	$-2.92274e - 15$	$-1.66533e - 16$	$2.75621e - 15$	$1.65505e + 01$
15	$8.38394e - 16$	$-1.66533e - 16$	$1.00493e - 15$	$6.03439e + 00$
16	$2.45863e - 16$	$-1.66533e - 16$	$4.12397e - 16$	$2.47636e + 00$
17	$-1.26976e - 16$	$-1.66533e - 16$	$3.95577e - 17$	$2.37536e - 01$
18	$1.11703e - 15$	$-1.66533e - 16$	$1.28356e - 15$	$7.70752e + 00$
19	$-4.04998e - 16$	$-1.66533e - 16$	$2.38465e - 16$	$1.43193e + 00$
20	$-2.06147e - 16$	$-1.66533e - 16$	$3.96135e - 17$	$2.37871e - 01$



Rysunek 7: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{-\frac{0.99\pi}{2}}^{\frac{0.99\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) dx$ metodą Romberga

Tabela 8: Tabela dla $\int_0^{\frac{0.99\pi}{2}} tg(x)dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$4.94959e + 01$	$4.15363e + 00$	$4.53423e + 01$	$1.09163e + 01$
2	$1.75192e + 01$	$4.15363e + 00$	$1.33656e + 01$	$3.21781e + 00$
3	$9.42158e + 00$	$4.15363e + 00$	$5.26795e + 00$	$1.26828e + 00$
4	$6.14049e + 00$	$4.15363e + 00$	$1.98686e + 00$	$4.78343e - 01$
5	$4.79897e + 00$	$4.15363e + 00$	$6.45342e - 01$	$1.55368e - 01$
6	$4.31677e + 00$	$4.15363e + 00$	$1.63141e - 01$	$3.92768e - 02$
7	$4.18191e + 00$	$4.15363e + 00$	$2.82769e - 02$	$6.80776e - 03$
8	$4.15652e + 00$	$4.15363e + 00$	$2.89548e - 03$	$6.97097e - 04$
9	$4.15378e + 00$	$4.15363e + 00$	$1.50800e - 04$	$3.63056e - 05$
10	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$3.51208e - 06$	$8.45546e - 07$
11	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$3.31122e - 08$	$7.97188e - 09$
12	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$1.17343e - 10$	$2.82508e - 11$
13	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$1.15463e - 13$	$2.77982e - 14$
14	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$2.84217e - 14$	$6.84262e - 15$
15	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$3.01981e - 14$	$7.27029e - 15$
16	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$2.39808e - 14$	$5.77346e - 15$
17	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$3.46390e - 14$	$8.33945e - 15$
18	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$3.46390e - 14$	$8.33945e - 15$
19	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$2.39808e - 14$	$5.77346e - 15$
20	$4.15363e + 00$	$4.15363e + 00$	$1.33227e - 14$	$3.20748e - 15$



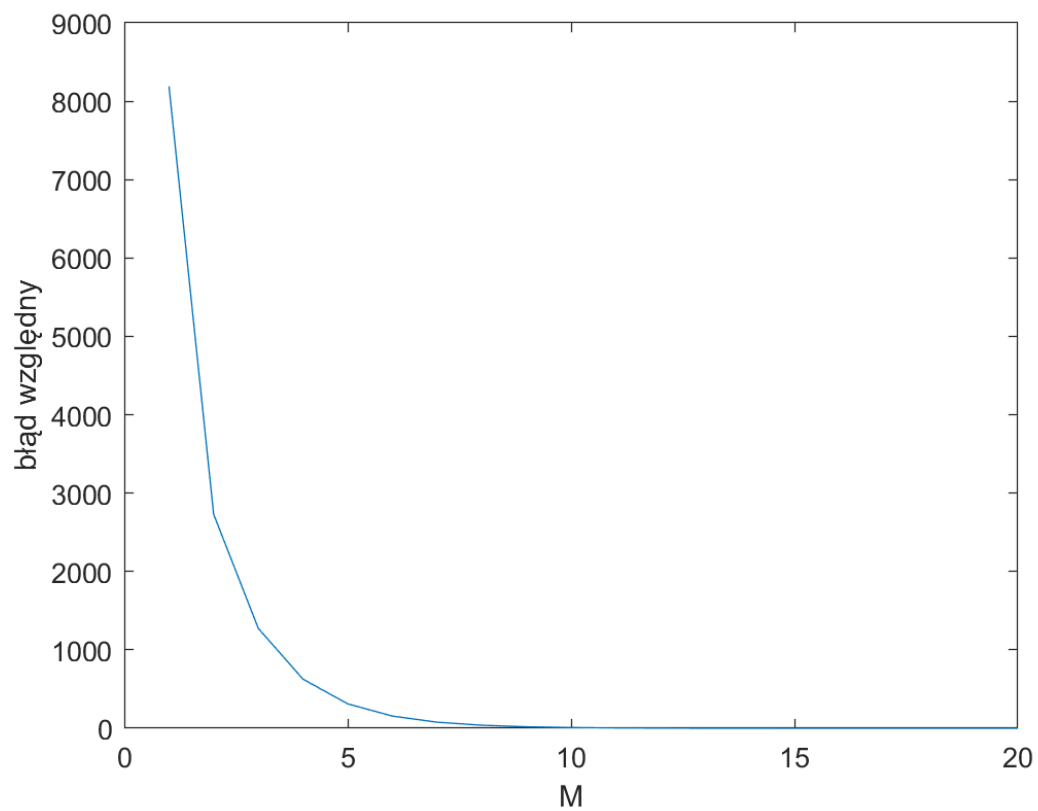
Rysunek 8: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_0^{\frac{0.99\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) dx$ metodą Romberga

3.4 $f(x) = x^{-1}$

Sprawdzenie dla przedziału $[10^{-5}, 2]$

Tabela 9: Tabela dla $\int_{10^{-5}}^2 x^{-1} dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$1.00000e + 05$	$1.22061e + 01$	$9.99878e + 04$	$8.19164e + 03$
2	$3.33347e + 04$	$1.22061e + 01$	$3.33225e + 04$	$2.72999e + 03$
3	$1.55577e + 04$	$1.22061e + 01$	$1.55455e + 04$	$1.27359e + 03$
4	$7.65723e + 03$	$1.22061e + 01$	$7.64502e + 03$	$6.26329e + 02$
5	$3.81577e + 03$	$1.22061e + 01$	$3.80357e + 03$	$3.11613e + 02$
6	$1.90854e + 03$	$1.22061e + 01$	$1.89633e + 03$	$1.55360e + 02$
7	$9.56896e + 02$	$1.22061e + 01$	$9.44690e + 02$	$7.73951e + 01$
8	$4.81625e + 02$	$1.22061e + 01$	$4.69419e + 02$	$3.84578e + 01$
9	$2.44361e + 02$	$1.22061e + 01$	$2.32155e + 02$	$1.90196e + 01$
10	$1.26076e + 02$	$1.22061e + 01$	$1.13870e + 02$	$9.32899e + 00$
11	$6.72774e + 01$	$1.22061e + 01$	$5.50713e + 01$	$4.51179e + 00$
12	$3.82169e + 01$	$1.22061e + 01$	$2.60108e + 01$	$2.13097e + 00$
13	$2.40182e + 01$	$1.22061e + 01$	$1.18122e + 01$	$9.67728e - 01$
14	$1.72364e + 01$	$1.22061e + 01$	$5.03032e + 00$	$4.12116e - 01$
15	$1.41369e + 01$	$1.22061e + 01$	$1.93085e + 00$	$1.58187e - 01$
16	$1.28342e + 01$	$1.22061e + 01$	$6.28176e - 01$	$5.14642e - 02$
17	$1.23642e + 01$	$1.22061e + 01$	$1.58099e - 01$	$1.29525e - 02$
18	$1.22332e + 01$	$1.22061e + 01$	$2.71754e - 02$	$2.22638e - 03$
19	$1.22088e + 01$	$1.22061e + 01$	$2.75027e - 03$	$2.25319e - 04$
20	$1.22062e + 01$	$1.22061e + 01$	$1.41156e - 04$	$1.15644e - 05$



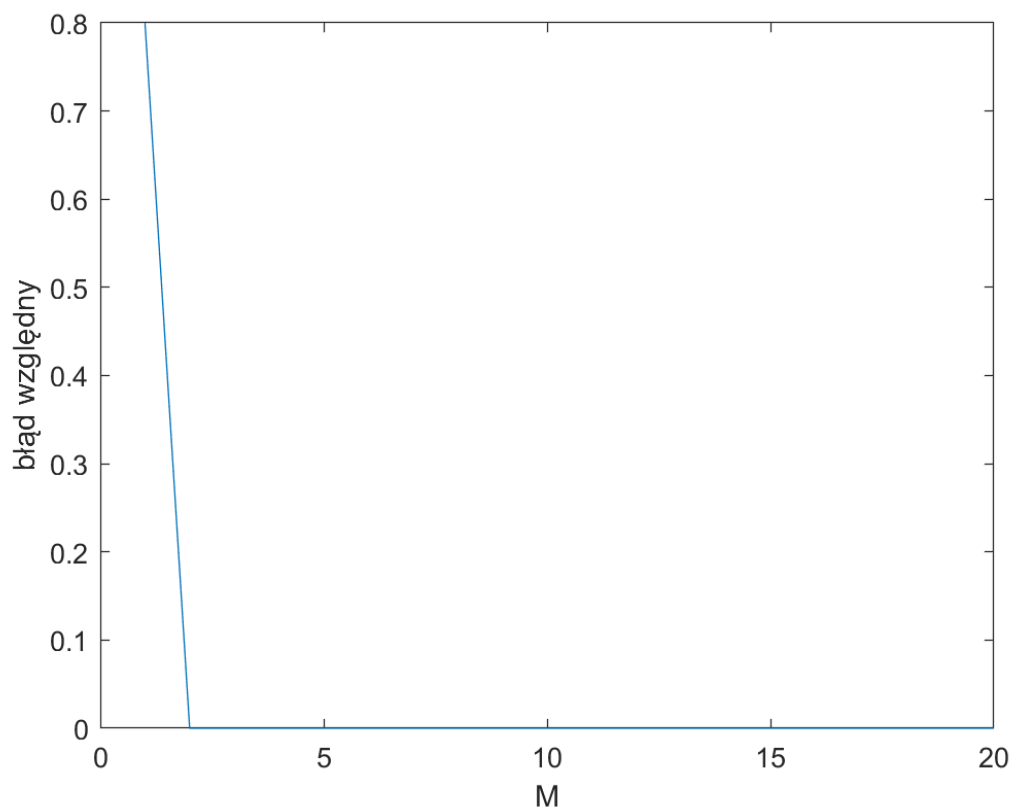
Rysunek 9: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-5}}^2 x^{-1} dx$ metodą Romberga

3.5 $f(x) = |x|$

Sprawdzenie dla przedziału $[-1, 2]$

Tabela 10: Tabela dla $\int_{-1}^2 |x| dx$

M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$4.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$2.00000e + 00$	$8.00000e - 01$
2	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
3	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
4	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
5	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
6	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
7	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
8	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
9	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
10	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
11	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
12	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
13	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
14	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
15	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
16	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
17	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
18	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
19	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$
20	$2.50000e + 00$	$2.50000e + 00$	$4.18100e - 07$	$1.67240e - 07$



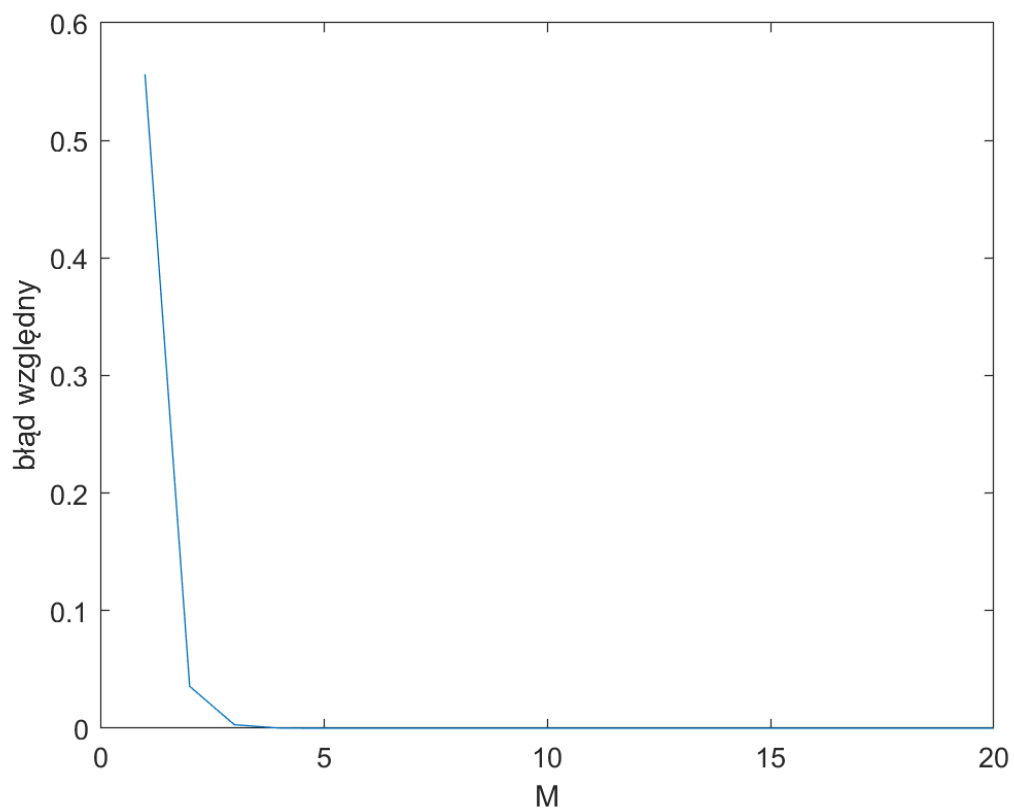
Rysunek 10: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{-1}^2 |x| dx$ metodą Romberga

3.6 $f(x) = \ln(x)$

Sprawdzenie dla przedziału $[0.5, 3]$

Tabela 11: Tabela dla $\int_{0.5}^3 \ln x dx$

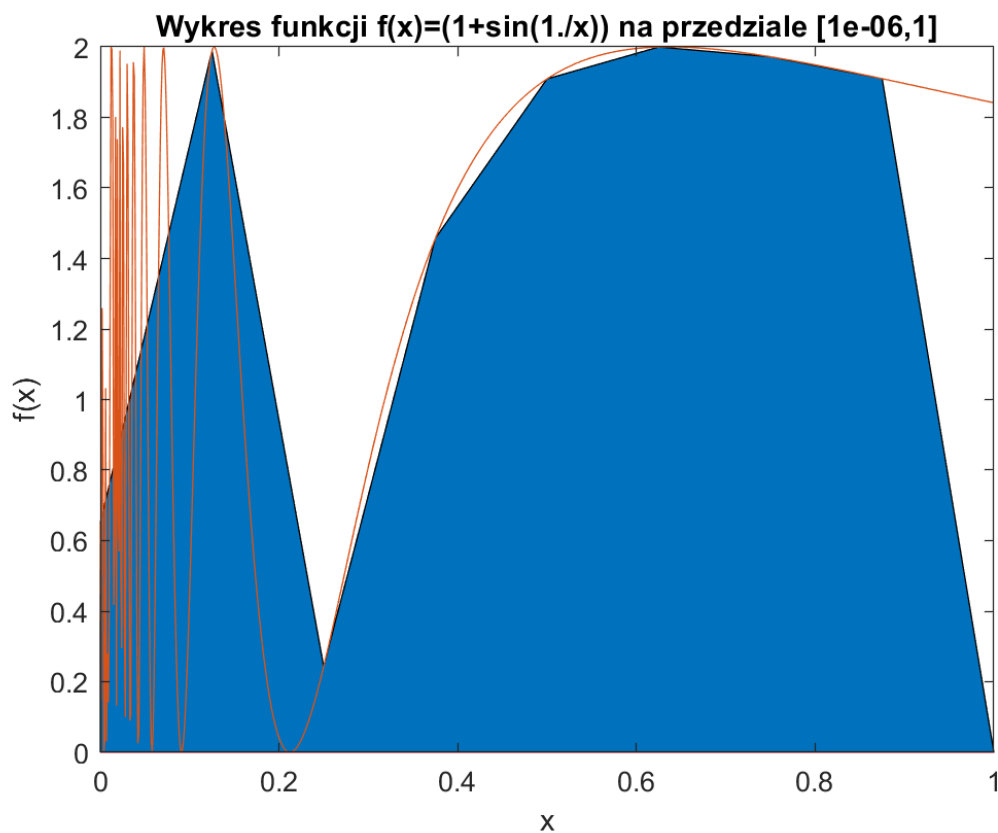
M	Wynik metodą Romberga	Wynik funkcją integral	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1	$5.06831e - 01$	$1.14241e + 00$	$6.35579e - 01$	$5.56349e - 01$
2	$1.10164e + 00$	$1.14241e + 00$	$4.07737e - 02$	$3.56909e - 02$
3	$1.13896e + 00$	$1.14241e + 00$	$3.44878e - 03$	$3.01886e - 03$
4	$1.14221e + 00$	$1.14241e + 00$	$1.96782e - 04$	$1.72252e - 04$
5	$1.14240e + 00$	$1.14241e + 00$	$5.94359e - 06$	$5.20268e - 06$
6	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$8.17907e - 08$	$7.15949e - 08$
7	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$4.61816e - 10$	$4.04247e - 10$
8	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$9.91873e - 13$	$8.68228e - 13$
9	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$8.88178e - 16$	$7.77460e - 16$
10	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$2.22045e - 16$	$1.94365e - 16$
11	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$0.00000e + 00$	$0.00000e + 00$
12	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$1.11022e - 15$	$9.71825e - 16$
13	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$0.00000e + 00$	$0.00000e + 00$
14	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$0.00000e + 00$	$0.00000e + 00$
15	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$1.77636e - 15$	$1.55492e - 15$
16	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$3.77476e - 15$	$3.30420e - 15$
17	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$2.22045e - 16$	$1.94365e - 16$
18	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$3.77476e - 15$	$3.30420e - 15$
19	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$4.66294e - 15$	$4.08166e - 15$
20	$1.14241e + 00$	$1.14241e + 00$	$8.21565e - 15$	$7.19150e - 15$



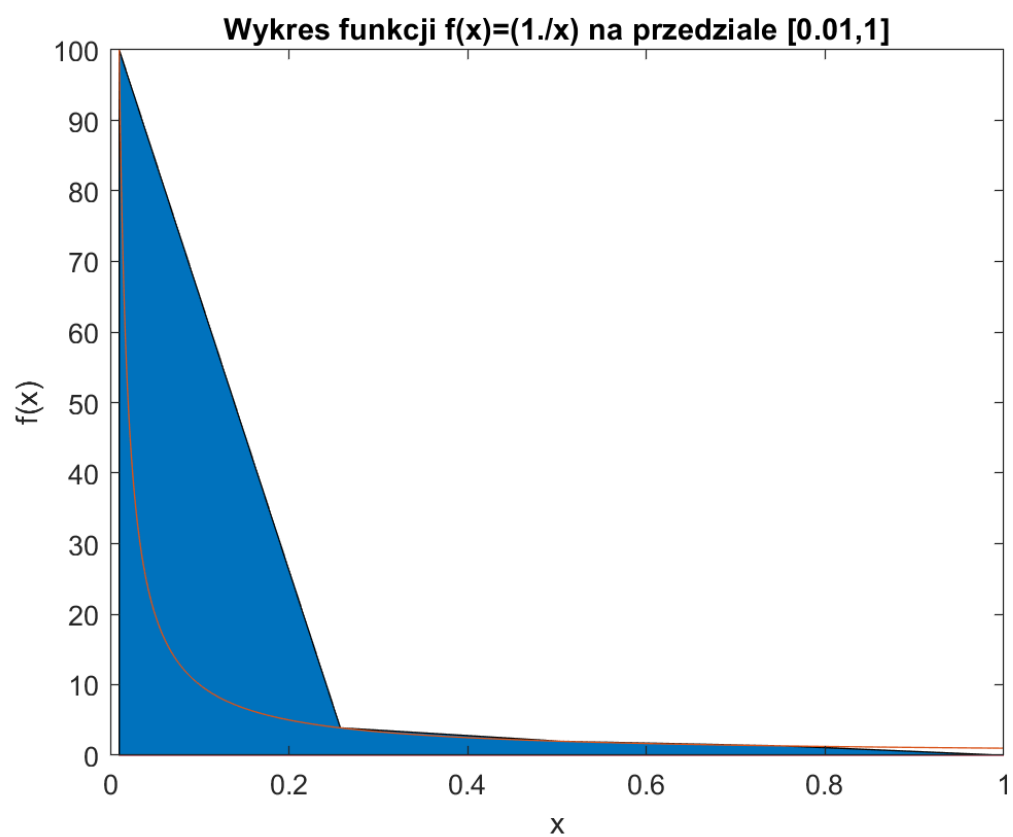
Rysunek 11: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^3 \ln x dx$ metodą Romberga

4 Analiza wyników

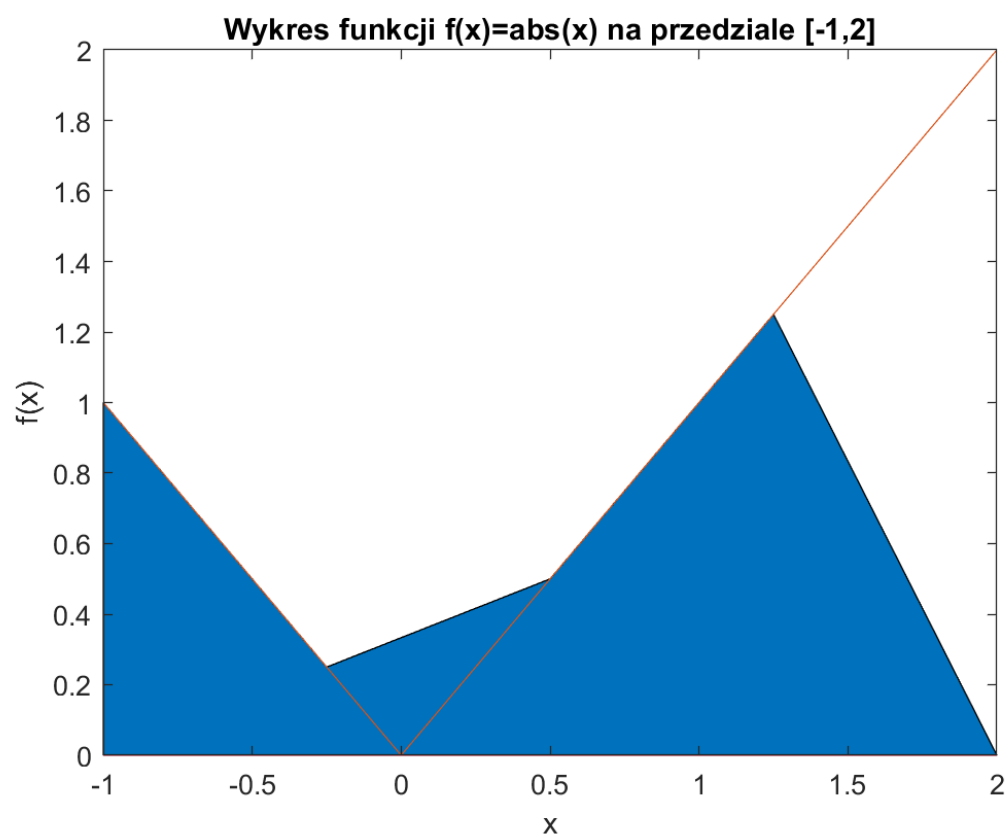
Patrząc na uzyskane wyniki dla badanych funkcji można zauważyć duże błędy w obliczeniu całek dla małych wartości M . Widocznym to jest na wykresach (4), (9), (10) oraz (11). Do głębszej analizy zostały wykonane dodatkowe wykresy przedstawiające sposób pokrycia powierzchni trapezami wyznaczonymi za pomocą metody Romberga. Niebieskie pole jest wyznaczonym pokryciem. Natomiast czerwona linia jest wykresem badanej funkcji.



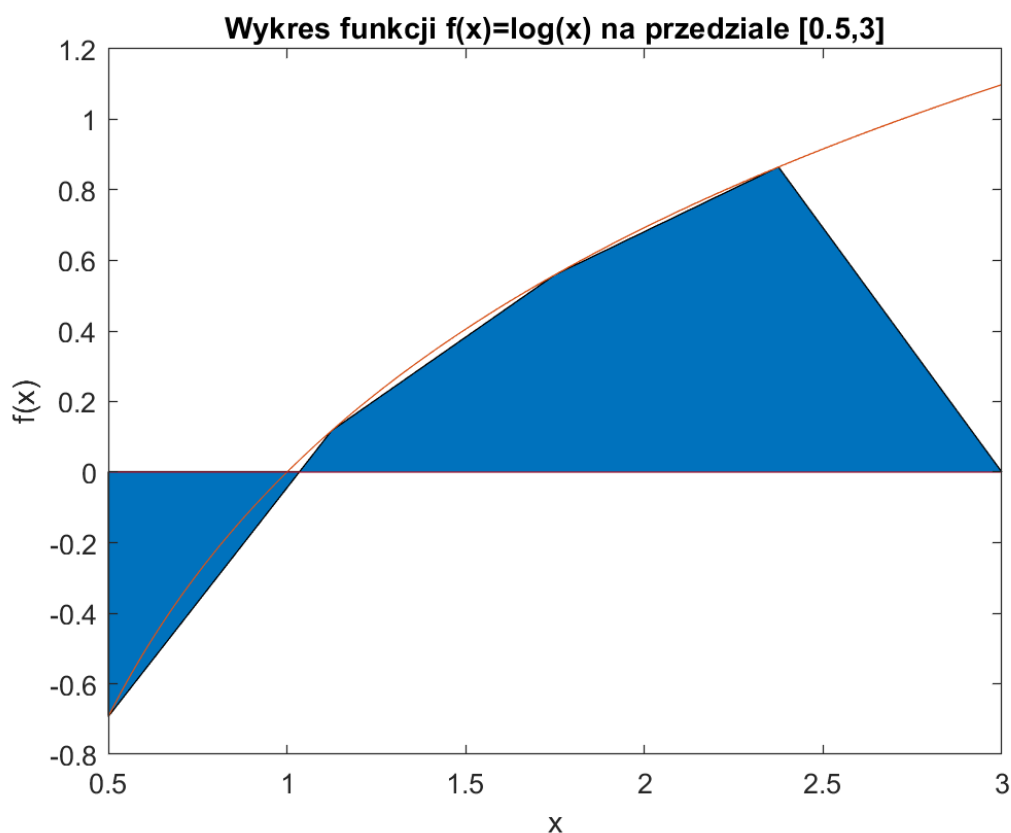
Rysunek 12: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-6}}^1 1 + \sin(\frac{1}{x})dx$ metodą Romberga



Rysunek 13: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{10^{-2}}^1 \frac{1}{x} dx$ metodą Romberga



Rysunek 14: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{-1}^2 |x| dx$ metodą Romberga



Rysunek 15: Zależność błędu względnego od dokładności przybliżenia całki $\int_{0.5}^3 \ln x dx$ metodą Romberga

Powyższe wykresy potwierdzają tezę o niedokładnym pokryciu dla małych M . Zatem, aby uniknąć błędów w obliczaniu całek metodą Romberga należy dobierać $M \geq 5$.

Kolejną wartą uwagi informacją są błędy zilustrowane na wykresach (5) oraz (7). Zauważamy, że błąd względny jest wysoki oraz trudno znaleźć zależność wielkości błędu od znanych czynników. Jednak po głębszej analizie uzyskanych wyników widocznym jest, że wielkość błędów spowodowana jest wartością całki równą 0.

Wobec tego widzimy, że dokładność metody Romberga rośnie bardzo szybko. Dla $M \geq 5$ można się spodziewać bardzo dobrze przybliżonych wyników. Jedynie dla całek, których wartość jest równa 0, możemy uzyskać duże błędy względne otrzymanych wyników.

5 Kod programu

5.1 romberg.m

```
1 function [x,R]=romberg(f,a,b,M)
2 %Funkcja oblicza wartosc numerczna calki na przedziale (a,b)
   z funkcji f(x)
3 %metoda romberga
4 h=b-a;
5 R=zeros(M);
6 R(1,1)=1/2*(b-a)*(f(a)+f(b));
7 for n = 2:M
8     h=h/2;
9     suma=0;
10    for i=1:(2^(n-2))
11        suma=suma+f(a+(2*i-1)*h);
12    end
13    R(n,1)=1/2*R(n-1,1)+h*suma;
14    for m=2:n
15        R(n,m)=R(n,m-1)+(R(n,m-1)-R(n-1,m-1))/(4^(m-1)-1);
16    end
17 end
18 x=R(M,M);
19 end
```

5.2 testRomberg.m

```
1 function testRomberg(f,a,b,n,s)
2 %funkcja testuje metode romberga dla funkcji f na przedziale
   [a,b] dla M
3 %rownych 1 az do n z krokiem s. Funkcja oblicza blad
   bezwzgledny i wzgledny
4 %wzgledem integral(f,a,b)
5 %dla kazdego M, wypisuje tabele w formacie LaTeXa i tworzy
   wykresy bladow
6 %wzglednych i bezwzglednych oraz wykres funkcji.
7 N=1:s:n;
8 xr=zeros(1,size(N,2));
9 error=zeros(1,size(N,2));
10 relError=zeros(1,size(N,2));
11 x=integral(f,a,b);
12 format='%10.5e';
13 for i=1:size(N,2)
14     xr(i)=romberg(f,a,b,N(i));
15     error(i)=abs(x-xr(i));
16     relError(i)=abs((x-xr(i))/x);
```

```

17         disp(['\hline $', num2str(i), '$ & $', num2str(xr(i),
            format), '$ & $', num2str(x,format), '$ & $',
            num2str(error(i),format), '$ & $', num2str(relError(
            i),format), '$ \\' ]));
18     end
19     figure , plot(N,error) ,
20     xlabel('M'), ylabel('błąd bezwzględny');
21     figure , plot(N,relError) ,
22     xlabel('M'), ylabel('błąd względny');
23
24
25 %wykres funkcji
26 xx=linspace(a,b,1000);
27 y=zeros(size(xx,2));
28     for i=1:size(xx,2)
29         y(i)=f(xx(i));
30     end
31 h=zeros(1,2^n+1);
32 ksi=linspace(a,b,2^n+1);
33     for i=1:(2^n)
34         h(i)=f(ksi(i));
35     end
36 figure , area(ksi,h), hold on, plot(xx,y), title(['Wykres funkcji
            f(x)=', strrep(func2str(f), '@(x)', ''), ' na przedziale [',
            num2str(a), ', ', num2str(b), ']' ]),
37 xlabel('x'), ylabel('f(x)');
38 end

```

Literatura

[1] David Kincaid, Ward Cheney - Analiza numeryczna, WNT, Warszawa 2005