23 stycznia 2020

Jakub Kujawa
Mikołaj Kowalski
Grupa G8

Obliczanie całek $\int_a^b f\left(x\right)dx$ metodą Romberga.

Projekt nr 2

1 Opis metody

Do obliczania całek $\int_a^b f\left(x\right)dx$ zastosujemy metodę opracowaną w 1955 roku przez Wernera Romberga, która opiera się na wykorzystaniu złożonego wzoru trapezów:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \approx h_n \sum_{i=0}^{n}{}'' f(a+ih) \tag{1}$$

gdzie n jest liczbą przedziałów o równej długości, na które dzielimy odcinek $[a,b]$ oraz

$$h_n = \frac{b-a}{n}$$

Symbol

$$\sum{}''$$

oznacza sumę, której skrajne składniki są dzielone na 2.
W naszym przypadku odcinek $[a,b]$ będzie dzielony na 2^n przedziałów o równej długości. Zatem do wzoru (1) będziemy podstawiali

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Niech

$$R(n,0) = h_n \sum_{i=0}^{2^n}{}'' f(a+ih) \tag{2}$$

Najprostsze wyrażenie, od którego zaczniemy, to

$$R(0,0) = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

Aby uniknąć wielokrotnego obliczania wartości funkcji f w tych samych punktach, skorzystamy z rekurencyjnego wyznaczania

$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a+(2i-1)h_n) \tag{3}$$

ponieważ w $R(n,0)$ występują wartości potrzebne do wyliczenia $R(n-1,0)$. Wartości funkcji f w tych punktach musimy podzielić na 2 oraz dodać do nich wartości pośrednie $a+h_n, a+3h_n, a+5h_n$ itd, co można odczytać we wzorze (3).
Przybliżenia $R(n,0)$ tworzą pierwszą kolumnę przybliżeń całki. Kolejne kolumny wyliczymy stosując poniższy wzór dla $m>0$, który wynika ze wzoru Eulera-Maclaurina oraz ekstrapolacji Richardsona:

$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m-1}[R(n,m-1) - R(n-1,m-1)] \tag{4}$$

Wobec tego dzięki wzorom (2), (3), (4) znajdziemy wszystkie elementy tablicy trójkątnej:

$$\begin{array}{llll} R(0,0) & & & \\ R(1,0) & R(1,1) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ R(n,0) & R(n,1) & \dots & R(n,n) \end{array}$$

która zawiera coraz lepsze przybliżenia szukanej wartości całki. Najlepsze przybliżenie, to $R(n,n)$. Wartości z tablicy trójkątnej będą obliczane kolejno wierszami, zaczynając od pierwszego.
Obliczając kolejne przybliżenia będziemy badać błędy względem funkcji $integral(f,a,b)$ wbudowanej w program Matlab. Funkcja ta wyznacza wartość całki z funkcji f na przedziale $[a,b]$. Na podstawie wyznaczonych błędów względnych oraz bezwzględnych zostanie przeprowadzona analiza metody.

2 Opis programu obliczeniowego

W czasie tworzenia programu obliczeniowego zostały stworzone następujące funkcje:

1. $Romberg(f,a,b,M) = [x,R]$:
   przyjmuje za argumenty funkcję f, końce przedziału $[a,b]$, na którym wyznaczamy wartość całki, oraz liczbę M, która określa na ile odcinków będzie dzielony przedział $[a,b]$ (na 2^M równych odcinków). Wyznacza wartość $\int_a^b f(x)\,dx$ metodą Romberga oraz tablicę R, w której umieszczone są kolejnych przybliżenia wartości badanej całki.

2. $testRomberg(f, a, b, n, s)$:
   przyjmuje za argumenty funkcję f, końce przedziału $[a, b]$, na którym wyznaczamy wartość całki, liczby całkowite n oraz s. Testuje metodę Romberga dla wartości M od 1 do n z krokiem co s. Dla każdego M wypisuje tabelę w formacie LaTex i tworzy wykresy błędów względnych i bezwględnych.

3 Przykłady obliczeniowe

By zbadać poprawność naszego programu sprawdzimy jego działanie dla pewnych konkretnych funkcji:

1. $f(x) = 1 + sin(1/x)$
2. $f(x) = sin(x)$
3. $f(x) = tg(x)$
4. $f(x) = x^{-1}$
5. $f(x) = 2^x$
6. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

4 Analiza wyników