WDWR PROJEKT

Maciej Kaczkowski 300660

WDWR 23401

Spis treści

Treść zadania

WDWR23401

Rozważamy następujące zagadnienie planowania produkcji:

Przedsiębiorstwo wytwarza 4 produkty P1,...,P4 na następujących maszynach: 4 szlifierkach, 2 wiertarkach pionowych, 3 wiertarkach poziomych, 1 frezarce i 1 tokarce. Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0,4	0,6	—	—
Wiercenie pionowe	0,2	0,1	—	0,6
Wiercenie poziome	0,1	—	0,7	—
Frezowanie	0,06	0,04	—	0,05
Toczenie	—	0,05	0,02	—

Dochody ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę) modelują składowe wektora losowego **R** = $(R_1,...,R_4)^T$. Wektor losowy **R** opisuje 4-wymiarowy rozkład *t*-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału [5;12]. Parametry $\boldsymbol{\mu}$ oraz $\boldsymbol{\Sigma}$ niezawężonego rozkładu *t*-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \ \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Istnieją ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

	P1	P2	P3	P4
Styczeń	200	0	100	200
Luty	300	100	200	200
Marzec	0	300	100	200

Jeżeli w danym miesiącu jest sprzedawany produkt P1 lub P2, to musi być również sprzedawany produkt P4 w liczbie sztuk nie mniejszej niż suma sprzedawanych produktów P1 i P2.

Istnieje możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu w danym czasie w cenie 1 zł/sztukę za miesiąc. Aktualnie firma nie posiada żadnych zapasów, ale jest pożądane mieć po 50 sztuk każdego produktu pod koniec marca.

Przedsiębiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Każda zmiana trwa 8 godzin. Można założyć, że każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych.

1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.
2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka. Dla decyzji $\mathbf{x} \in Q$ odchylenie przeciętne jest definiowane jako $\delta(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} |\mu(\mathbf{x}) - r_t(\mathbf{x})| p_t$, gdzie $\mu(\mathbf{x})$ oznacza wartość średnią, $r_t(\mathbf{x})$ realizację dla scenariusza t, p_t prawdopodobieństwo scenariusza t.
    a. Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk.
    b. Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–zysk?
    c. Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi re-lacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

Analityczne sformułowanie modelu. Wskazanie i uzasadnienie przyjętych założeń. Wskazanie podstaw teoretycznych.

Model, który zostanie użyty do rozwiązania tego zadania to model

- Jednokryterialny z wartością średnią jako miarą zysku (zadanie 1)
- Dwukryterialny z wartością średnią jako miarą zysku i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka (zadanie 2)

Zbiór decyzji produkcyjnych (rodzaj produkowanego towaru w danej jednostce czasu na danej maszynie) jest ograniczony

- Czasem pracy przedsiębiorstwa (24 dni robocze w miesiącu, praca na 2 zmiany, po 8 godzin)
- Dostępnością maszyn
- Wymaganiami procesów produkcyjnych poszczególnych towarów
- Ograniczoną możliwością przechowywania towarów
- Ograniczoną możliwością sprzedaży towarów w dany miesiącu

Oprócz tego przyjęto założenia

- Praca w trakcie zmiany jest ciągła (w praktyce założenie to nie jest spełnione ze względu na przestoje oraz przerwy pracowników)
- Nawet jeżeli towar nie zostanie w pełni wyprodukowany w ciągu jednej zmiany bądź dnia można pozostawić go na maszynie i wznowić produkcję następnego dnia bez konsekwencji
- Brak awarii maszyn, chorób i zwolnień pracowników

Specyfikacja problemu decyzyjnego z dookreśleniem wszystkich elementów. Określenie zmiennych decyzyjnych, ograniczeń i funkcji oceny.

Zmienną decyzyjną jest produkcja, tzn. ile sztuk każdego z towarów zostanie wyprodukowanych każdego miesiąca. Przekłada się to na funkcję nagrody, którą jest sumaryczny zysk.

Średnia jest miarą oceny, a wartość oczekiwana jest jej estymatorem. W poniższych rozważaniach posłużono się wartością oczekiwaną.

Obliczono wartości oczekiwane dochodów ze sprzedaży produktów (w zł / sztuka), na podstawie wzoru dla zawężonego rozkładu t-Studenta:

$$E(R) = \mu + \sigma \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{v}-1}{2}\right)\left((\mathrm{v}+\mathrm{a}^2)^{-\frac{v-1}{2}} - (\mathrm{v}+\mathrm{b}^2)^{-\frac{v-1}{2}}\right) v^{\frac{v}{2}}}{2(F_v(b) - F_v(a)\Gamma(\frac{v}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Oraz parametrów niezawężonego rozkładu:

$$\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uzyskano:

$$E(P_1) \cong 8.627$$

$$E(P_2) \cong 8.305$$

$$E(P_3) = 7.605$$

$$E(P_4) = 7.904$$

W następnym kroku należało przygotować model dwukryterialny, który oprócz wartości średniej jako miary zysku uwzględnia również odchylenie przeciętne jako miarę ryzyka.

Sformułowanie modelu w postaci do rozwiązania z wykorzystaniem AMPL i Python.

Sformułowanie problemu jest zawarte w załączonych plikach AMPL oraz Python.

Uzyskany wynik (bez uwzględniania ryzyka):

```
CPLEX 22.1.1.0: optimal solution; objective 12433.62857
0 dual simplex iterations (0 in phase I)
Production :=
P1 Luty      200
P1 Marzec      0
P1 Styczen   200
P2 Luty        0
P2 Marzec    160
P2 Styczen     0
P3 Luty      182.857
P3 Marzec    100
P3 Styczen   100
P4 Luty      200
P4 Marzec    200
P4 Styczen   200
;
```

Uzyskany wynik (uwzględniając ryzyko):

Dla scenariusza 1:

```
CPLEX 22.1.1.0: optimal solution; objective 12373.62857
0 dual simplex iterations (0 in phase I)
Production :=
P1 Luty      200
P1 Marzec      0
P1 Styczen   200
P2 Luty        0
P2 Marzec    160
P2 Styczen     0
P3 Luty      182.857
P3 Marzec    100
P3 Styczen   100
P4 Luty      200
P4 Marzec    200
P4 Styczen   200
;
```

Dla scenariusza 2:

```
CPLEX 22.1.1.0: optimal solution; objective 12337.62857
0 dual simplex iterations (0 in phase I)
Production :=
P1 Luty      200
P1 Marzec      0
P1 Styczen   200
P2 Luty        0
P2 Marzec    160
P2 Styczen     0
P3 Luty      182.857
P3 Marzec    100
P3 Styczen   100
P4 Luty      200
P4 Marzec    200
P4 Styczen   200
;
```

Dla scenariusza 3:

```
CPLEX 22.1.1.0: optimal solution; objective 12343.62857
0 dual simplex iterations (0 in phase I)
Production :=
P1 Luty      200
P1 Marzec      0
P1 Styczen   200
P2 Luty        0
P2 Marzec    160
P2 Styczen     0
P3 Luty      182.857
P3 Marzec    100
P3 Styczen   100
P4 Luty      200
P4 Marzec    200
P4 Styczen   200
;
```

Dla scenariusza 4:

```
CPLEX 22.1.1.0: optimal solution; objective 12337.62857
0 dual simplex iterations (0 in phase I)
Production :=
P1 Luty      200
P1 Marzec      0
P1 Styczen   200
P2 Luty        0
P2 Marzec    160
P2 Styczen     0
P3 Luty      182.857
P3 Marzec    100
P3 Styczen   100
P4 Luty      200
P4 Marzec    200
P4 Styczen   200
;
```

Omówienie testów poprawności implementacji

Przeprowadzone działania pozwoliły na zgrubne oszacowanie wartości produkcji, przy spełnieniu części założeń dla modelu jednokryterialnego. Opisane podejście nie jest wystarczające do rozwiązania problemu, aby uzyskać pełne rozwiązanie należy zaimplementować również pozostałe warunki (np. możliwość magazynowania towaru).

Fakt, że rozwiązania w przypadku uwzględnienia ryzyka są identyczne, co do wartości nagród, z rozwiązaniami bez uwzględnienia ryzyka wskazuje na możliwe błędy w przypadku analizy ryzyka. Spodziewane byłyby różne wartości, dodatkowo z możliwością ‘sterowania’ decyzją przy pomocy kryterium awersji do ryzyka.

Omówienie wyników z nawiązaniem do teorii

Uzyskane wyniki, przy ocenie jedynie możliwego zysku, czyli uzyskane przy pomocy modelu jednokryterialnego spełniają założenia teoretyczne. Najbardziej opłacalne jednostkowo, ze względu na najwyższą wartość oczekiwaną zysku, są produkty P1 i P2 oraz P4. Faktycznie, były one najczęściej produkowane.

W przypadku modelu dwukryterialnego uzyskane wyniki wskazują na możliwe błędy w implementacji. Optymalne rozwiązania powinny być inne, ponieważ będą się różnić, w zależności od przyjętej awersji do ryzyka. W ten sposób można przejść do przestrzeni ryzyko-zysk.

W ogólnym pomiędzy rozwiązaniami efektywnymi nie powinna zachodzić relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (FSD). Jej istnienie wskazywałoby na możliwość uzyskania wyższej lub co najmniej równej wypłaty w każdym przypadku wyboru decyzji A kosztem B.