

## № 9

Известно, что река течёт со скоростью  $V = 3$  км/ч, а лодка плывет со скоростью  $u = 6$  км/ч относительно неё. Чтобы лодка проплыла поперёк реки, её скорость  $\vec{U}$  относительно земли должна быть направлена перпендикулярно течению. Тогда, для компенсации последнего, скорость лодки  $\vec{u}$  относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке 1.

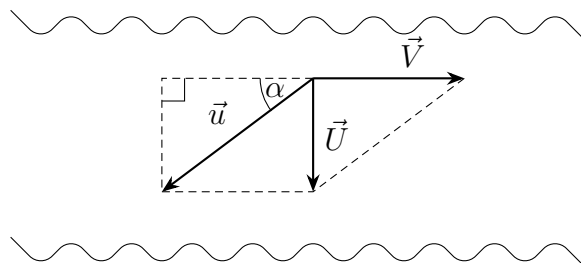


Рис. 1

Через  $\alpha$  обозначим угол между вектором  $\vec{u}$  и линией берега. Из рисунка видно, что

$$\cos \alpha = \frac{V}{u},$$

а значит,

$$\alpha = \arccos \frac{V}{u} = \arccos \frac{3}{6} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

## № 10

Если скорость ветра составляет  $v = 11$  м/с, то капля дождя падает под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вертикали. Обозначим её скорость через  $\vec{u}$  (рисунок 2), а вертикальную составляющую скорости — через  $\vec{v}$ .

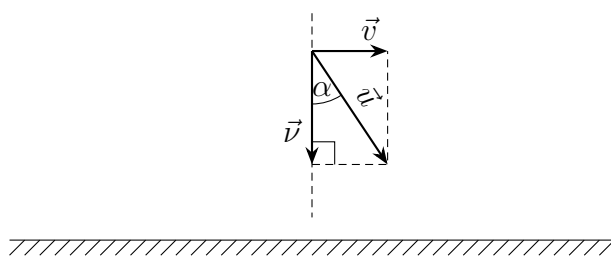


Рис. 2

Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{v}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

В том случае, если скорость капли составляет с вертикалью угол  $\beta = 45^\circ$ , скорость ветра должна равняться

$$v_1 = \nu \operatorname{tg} \beta = v \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = 11 \cdot \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 11\sqrt{3} \approx 19,1 \text{ м/с}.$$

**№ 11**

Автомобили движутся по прямой в одну сторону, начав движение одновременно из одного и того же пункта. Зависимости путей от времени для них выглядят следующим образом:

$$s_1 = Ft + Bt^2, \quad s_2 = Ct + Dt^2 + At^3.$$

Тогда выражения их скоростей принимают вид

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = F + 2Bt$$

и

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt} = C + 2Dt + 3At^2.$$

Обозначим скорость второго автомобиля в системе координат, связанной с первым, как

$$\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Поскольку векторы  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  коллинеарны, то

$$u = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = v_2 - v_1 = C - F + 2(D - B)t + 3At^2.$$

**№ 12**

Известно, что первую половину времени движения тело двигалось со скоростью  $v_1 = 40$  км/ч, а вторую — со скоростью  $v_2 = 60$  км/ч. Полное время движения обозначим через  $t$ . Тогда путь, пройденный за первую половину времени составляет

$$s_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2},$$

а за вторую —

$$s_2 = v_2 \cdot \frac{t}{2}.$$

Средняя скорость тела в таком случае равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1 \cdot \frac{t}{2} + v_2 \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{40 + 60}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

**№ 13**

Уравнение движения материальной точки по плоскости имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{i}At^3 + \vec{j}Bt^2.$$

Тогда

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3A\vec{i} \cdot t^2 + 2B\vec{j} \cdot t$$

и

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 6A\vec{i} \cdot t + 2B\vec{j}.$$

**№ 14**

Точка движется по прямой в соответствии с уравнением  $x = 2t - 0,5t^2$ ,  $[x] = \text{м}$ . Тогда при  $t_1 = 1$  с координата точки равна

$$x_1 = 2 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1^2 = 1,5 \text{ м},$$

как и при  $t_2 = 3$  с:

$$x_2 = 2 \cdot 3 - 0,5 \cdot 3^2 = 1,5 \text{ м}.$$

Значит, перемещение равно

$$r = |x_2 - x_1| = |1,5 - 1,5| = 0 \text{ м},$$

а время в пути —

$$t = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2 \text{ с}.$$

Средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{r}{t} = \frac{0}{2} = 0 \text{ м/с}.$$

**№ 15**

Тело начинает движение из точки с координатами

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

со скоростью

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j}t,$$

где  $a = \text{const}$  и  $b = \text{const}$ . Получим зависимость радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \int \vec{V} dt = a\vec{i} \int dt + b\vec{j} \int t dt = a\vec{i}t + \frac{b\vec{j}t^2}{2} + \vec{r}_0.$$

Конечно,

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0 \Rightarrow \vec{r}_0 = \vec{0},$$

а значит,

$$\vec{r} = a\vec{i}t + \frac{b\vec{j}t^2}{2}.$$

Эта запись означает следующее:

$$\vec{r} = \left( at, \frac{bt^2}{2} \right).$$

Иначе говоря,

$$x(t) = at, \quad y(t) = \frac{bt^2}{2},$$

откуда

$$t = \frac{x}{a}$$

и

$$y(x) = \frac{b \left( \frac{x}{a} \right)^2}{2} = \frac{bx^2}{2a^2}.$$

**№ 16**

Материальная точка движется в плоскости по закону

$$x = At, \quad y = At(1 + Bt),$$

где  $A = \text{const} > 0$  и  $B = \text{const} > 0$ . Исходя из выражения

$$t = \frac{x}{A}$$

найдем уравнение траектории:

$$y(x) = A \cdot \frac{x}{A} \cdot \left(1 + B \cdot \frac{x}{A}\right) = x + \frac{Bx^2}{A}.$$

Радиус-вектор точки примет вид

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = At\vec{i} + At(1 + Bt)\vec{j},$$

а его модуль —

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2t^2 + A^2t^2(1 + Bt)^2} = At\sqrt{1 + (1 + Bt)^2}.$$

Вектор скорости точки будет равняться

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{i} + A(1 + 2Bt)\vec{j},$$

а её модуль —

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{A^2 + A^2(1 + 2Bt)^2} = A\sqrt{1 + (1 + 2Bt)^2}.$$

Теперь найдем вектор ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 2AB\vec{j}.$$

Очевидно при этом, что

$$a = 2AB.$$

**№ 17**

Путь, пройденный телом за время  $t$ , вычисляется по формуле

$$S = 2t - 3t^2 + 4t^3, \quad [S] = \text{м}.$$

Тогда скорость и ускорение задаются формулами

$$v = \frac{dS}{dt} = 2 - 6t + 12t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 + 24t$$

соответственно. Пусть от начала движения прошло время  $t = 2$  с. Значит,

$$S(2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 24 \text{ м},$$

$$v(2) = 2 - 6 \cdot 2 + 12 \cdot 2^2 = 38 \text{ м/с},$$

$$a(2) = -6 + 24 \cdot 2 = 42 \text{ м/с}^2.$$

**№ 18**

Две материальные точки движутся в соответствии с уравнениями

$$x_1 = -2t^2, \quad x_2 = 2t + t^3.$$

Поскольку  $x_0 = 0$  м и функция  $x_i$  монотонно возрастает при  $t \geq 0$  в обоих случаях, то пути находятся по формулам

$$s_1 = |x_1 - x_0| = |x_1| = 2t^2$$

и

$$s_2 = |x_2 - x_0| = |x_2| = 2t + t^3$$

Тогда выражения скоростей имеют вид

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = 4t, \quad v_2 = \frac{ds_2}{dt} = 2 + 3t^2,$$

а ускорений —

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 4, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 6t.$$

Найдём момент времени, для которого ускорения точек совпадают:

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow 4 = 6t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \approx 0,67 \text{ с}$$

**№ 19**

Уравнение

$$s = 0,14t^2 + 0,01t^3, \quad [s] = \text{м}$$

задаёт зависимость пройденного точкой пути от времени. Значит, скорость и ускорение точки задаются уравнениями

$$v = \frac{ds}{dt} = 0,28t + 0,03t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = 0,28 + 0,06t$$

соответственно. Найдём время, через которое ускорение точки составит  $a_1 = 1 \text{ м/с}^2$ :

$$a_1 = 0,28 + 0,06t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{a_1 - 0,28}{0,06} = \frac{1 - 0,28}{0,06} = 12 \text{ с}.$$

В этот момент времени скорость будет равна

$$v_1 = 0,28 \cdot 12 + 0,03 \cdot 12^2 = 7,68 \text{ м/с}.$$

Пусть  $t_a = 0$  с и  $t_b = 2$  с. Тогда путь, пройденный телом во временном промежутке  $t_a \div t_b$  равен

$$s_{ab} = s(t_b) = 0,14 \cdot 2^2 + 0,01 \cdot 2^3 = 0,64 \text{ м}.$$

Средняя скорость за промежуток составит

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{ab}}{t_b - t_a} = \frac{0,64}{2 - 0} = 0,32 \text{ м/с}.$$

**№ 20**

Положение точки полностью задаётся уравнением

$$x = -8t + 6t^2 - t = -9t + 6t^2, \quad [x] = \text{м}.$$

Тогда проекция её перемещения будет равна

$$r_x = x.$$

Рассмотрим интервал  $t_1 \div t_2$ , где  $t_1 = 0$  с,  $t_2 = 1$  с:

$$r_{12} = |r_x(t_2) - r_x(t_1)| = |r_x(t_2)| = |-9 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2| = 3 \text{ м},$$

поскольку  $r_x(t_1) = 0$ . Средняя скорость на этом интервале равна

$$\langle v_1 \rangle = \frac{r_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{3}{1 - 0} = 3 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим интервал  $t_2 \div t_3$ , где  $t_3 = 2$  с:

$$r_{23} = |r_x(t_3) - r_x(t_2)| = |-9 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + 3| = 9 \text{ м}.$$

Средняя скорость на этом интервале равна

$$\langle v_2 \rangle = \frac{r_{23}}{t_3 - t_2} = \frac{9}{2 - 1} = 9 \text{ м/с}.$$

**№ 21**

Движение материальных точек происходит в соответствии с уравнениями

$$x_1 = 20 + 4t - 4t^2, \quad x_2 = 2 + t + 0,5t^2.$$

Очевидно, что

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}$$

и

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{i},$$

где  $i = 1$ . Тогда

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = (4 - 8t)\vec{i}, \quad \vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -8\vec{i}$$

и

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = (1 + t)\vec{i}, \quad \vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{i}.$$

Вычислим момент времени, когда скорости точек совпадут:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow (4 - 8t)\vec{i} = (1 + t)\vec{i} \Leftrightarrow 4 - 8t = 1 + t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ с}.$$

При этом

$$v_1(t_0) = v_2(t_0) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ м/с}.$$

Ускорения постоянны в любой момент времени, поэтому

$$a_1(t_0) = 8 \text{ м/с}^2, \quad a_2(t_0) = 1 \text{ м/с}^2.$$

## № 22

За время  $t$  тело проходит путь

$$s = 2t + 8t^2 + 16t^3, \quad [s] = \text{м}.$$

Значит,

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 + 16t + 48t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = 16 + 96t.$$

Через  $t = 2$  с после начала движения, указанные выше величины будут равны следующим значениям:

$$s = 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^3 = 164 \text{ м},$$

$$v = 2 + 16 \cdot 2 + 48 \cdot 2^2 = 226 \text{ м/с},$$

$$a = 16 + 96 \cdot 2 = 208 \text{ м/с}^2.$$