№ 3.2.16

Дан четырёхугольник $ABCD$ с вершинами

$$A(-5;3;4),\quad B(-1;-7;5),\quad C(6,-5,-3),\quad D(2;5;-4).$$

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$. Найдём их координаты:

$$\overrightarrow{AB} = \big(-1-(-5);-7-3;5-4\big) = (4;-10;1),$$
$$\overrightarrow{BC} = \big(6-(-1);-5-(-7);-3-5\big) = (7;2;-8),$$
$$\overrightarrow{CD} = \big(2-6;5-(-5);-4-(-3)\big) = (-4;10;-1),$$
$$\overrightarrow{DA} = \big(-5-2;3-5;4-(-4)\big) = (-7;-2;8),$$

и длины (длины сторон четырёхугольника):

$$AB = \sqrt{4^2+(-10)^2+1^2} = 3\sqrt{13},$$
$$BC = \sqrt{7^2+2^2+(-8)^2} = 3\sqrt{13},$$
$$CD = \sqrt{(-4)^2+10^2+(-1)^2} = 3\sqrt{13},$$
$$DA = \sqrt{(-7)^2+(-2)^2+8^2} = 3\sqrt{13}.$$

Найдём углы четырёхугольника:

$$\angle A = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}{AB\cdot AD} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)}{AB\cdot DA} = \pi - \arccos\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)}{AB\cdot DA} =$$
$$= \pi - \arccos\frac{4\cdot(-7)+(-10)\cdot(-2)+1\cdot 8}{\left(3\sqrt{13}\right)^2} = \pi - \arccos 0 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle B = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{BA\cdot BC} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)}{AB\cdot BC} = \pi - \arccos\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)}{AB\cdot BC} =$$
$$= \pi - \arccos\frac{4\cdot 7+(-10)\cdot 2+1\cdot(-8)}{\left(3\sqrt{13}\right)^2} = \pi - \arccos 0 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle C = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)}{CB\cdot CD} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)}{BC\cdot CD} = \pi - \arccos\frac{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)}{BC\cdot CD} =$$
$$= \pi - \arccos\frac{7\cdot(-4)+2\cdot 10+(-8)\cdot(-1)}{\left(3\sqrt{13}\right)^2} = \pi - \arccos 0 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle D = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)}{DA\cdot DC} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}\right)}{DA\cdot CD} = \pi - \arccos\frac{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}\right)}{DA\cdot CD} =$$
$$= \pi - \arccos\frac{(-7)\cdot(-4)+(-2)\cdot 10+8\cdot(-1)}{\left(3\sqrt{13}\right)^2} = \pi - \arccos 0 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Как мы видим,

$$AB = BC = CD = DA$$

и

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, четырёхугольник $ABCD$ является квадратом.

№ 3.2.18

Пусть дан вектор
$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k},$$
то есть
$$\vec{a} = (1; 2; -3).$$
Известно, что вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, а значит
$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}.$$
Тогда
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot a^2 = \alpha \cdot \big(1^2 + 2^2 + (-3)^2\big) = 14\alpha.$$
Поскольку
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 28,$$
то
$$14\alpha = 28 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$
В таком случае,
$$\vec{b} = \big(2 \cdot 1; 2 \cdot 2; 2 \cdot (-3)\big) = (2; 4; -6).$$

№ 3.2.19

Пусть $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, то есть $\vec{a} = (4; -1; -2)$, и $\vec{b} = (2; 1; 2)$. Тогда
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 3,$$
$$a = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21},$$
$$b = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$
а значит,
$$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \arccos \frac{\sqrt{21}}{21},$$
$$\text{ПР}_{\vec{a}}\vec{b} = b \cos \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$
$$\text{ПР}_{\vec{b}}\vec{a} = a \cos \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b} = 1.$$

№ 3.2.20

Известно, что $\vec{F} = (2; -1; -4)$, $A(1; -2; 3)$, $B(5; -6; 1)$. Значит,
$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = \big(5 - 1; -6 - (-2); 1 - 3\big) = (4; -4; -2)$$
и
$$A = \left(\vec{F}, \vec{S}\right) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) = 8 + 4 + 8 = 20.$$

№ 3.2.22

Пусть
$$\vec{b} = \lambda\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$
и
$$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \lambda\vec{k}.$$
Поскольку векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно ортогональны, то
$$(\vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot (-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5.$$

№ 3.2.23

Вершины треугольника ABC имеют следующие координаты:
$$A(1;1;-1), \quad B(2;3;1), \quad C(3;2;1).$$
Построим векторы
$$\begin{gathered}\overrightarrow{AB} = \big(2-1; 3-1; 1-(-1)\big) = (1;2;2),\\ \overrightarrow{BC} = \big(3-2; 2-3; 1-1\big) = (1;-1;0),\\ \overrightarrow{CA} = (1-3; 1-2; -1-1) = (-2;-1;-2).\end{gathered}$$
Найдём их длины (дли сторон треугольника ABC):
$$\begin{gathered}AB = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3,\\ BC = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2},\\ CA = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3.\end{gathered}$$
Найдём углы треугольника:
$$\angle A = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{AB \cdot AC} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right)}{AB \cdot CA} = \\ = \arccos -\frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{3\cdot 3} = \arccos\frac{8}{9},$$

$$\angle B = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)}{BA \cdot BC} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)}{AB \cdot BC} = \\ = \arccos -\frac{1\cdot 1+2\cdot(-1)+2\cdot 0}{3\sqrt{2}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$\angle C = \arccos\frac{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}{CA \cdot CB} = \arccos -\frac{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}\right)}{CA \cdot BC} = \\ = \arccos -\frac{(-2)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 0}{3\sqrt{2}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Поскольку BD — медиана, точка D имеет следующие координаты:

$$D\left(\frac{1+3}{2};\frac{1+2}{2};\frac{-1+1}{2}\right) \Leftrightarrow D(2;1{,}5;0)$$

из соображения

$$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{BD}=(2-2;1{,}5-3;0-1)=(0;-1{,}5;-1)$$

и

$$BD=\sqrt{0^2+(-1{,}5)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Косинус угла между векторами $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен

$$\cos\alpha=\frac{\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC}\right)}{BD\cdot AC}=-\frac{\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CA}\right)}{BD\cdot CA}=$$

$$=-\frac{0\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1{,}5)+(-1)\cdot(-2)}{\dfrac{\sqrt{13}}{2}\cdot 3}=-\frac{7\sqrt{13}}{39}.$$

Заметим, что в общем случае

$$0\le\alpha\le\pi.$$

При этом, если $\cos\alpha<0$, то

$$\alpha>\frac{\pi}{2}.$$

В таком случае, острый угол между медианой BD и стороной AC равен

$$\beta=\pi-\alpha=\pi-\arccos-\frac{7\sqrt{13}}{39}=\pi-\left(\pi-\arccos\frac{7\sqrt{13}}{39}\right)=\arccos\frac{7\sqrt{13}}{39}.$$

№ 3.2.26

Известно, что $\vec{a}=(\sqrt{2};-3;-5)$, а так же, что некоторая ось составляет углы

$$\alpha=45^\circ,\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\quad \gamma=60^\circ$$

с осями абсцисс, ординат и аппликат соотвественно. Обозначим последнюю через L, а её направляющий единичный вектор — через $\vec{l}$. Тогда

$$\vec{l}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$$

и

$$l^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \Leftrightarrow \beta=\arccos\pm\sqrt{l^2-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma}\Rightarrow\beta=60^\circ.$$

Значит,

$$\text{ПР}_L\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{l}\right)}{l}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ+(-3)\cdot\cos 60^\circ+(-5)\cdot\cos 60^\circ}{1}=-3.$$