№ 8

Частица, движущаяся по окружности радиуса R обладает кинетической энергией K. При этом

$$K = \alpha S^2,$$

где $\alpha = \text{const}$, S — путь, пройденный частицей. Заметим, что

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Приравняем последние два уравнения:

$$\frac{mv^2}{2} = \alpha S^2 \Leftrightarrow mv^2 = 2\alpha S^2. \qquad (1)$$

Продифференцируем полученное по времени:

$$m\frac{dv^2}{dt} = 2\alpha\frac{dS^2}{dt} \Leftrightarrow 2mv\frac{dv}{dt} = 4\alpha S\frac{dS}{dt} \Leftrightarrow mva_\tau = 2\alpha Sv \Leftrightarrow ma_\tau = 2\alpha S.$$

Учтём, что

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2\alpha S^2}{mR} \Leftrightarrow ma_n = \frac{2\alpha S^2}{R},$$

ввиду уравнения (1). Наконец,

$$F = ma = \sqrt{(ma_\tau)^2 + (ma_n)^2} = 2\alpha S\sqrt{1 + \frac{S^2}{R^2}}.$$

№ 9

Равномерно возрастающая сила в начале пути длиной $S_{12} = 12$ м равна $F_1 = 10$ Н, а в его конце — $F_2 = 46$ Н. Очевидно (но не особо), что

$$F = aS + b,$$

где a и b — некоторые постоянные, а t — время. При этом,

$$\begin{cases} F(0) = F_1 \\ F(S_{12}) = F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ 12a + b = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Тогда

$$F = 3S + 10.$$

Из предположения (вновь не особо очевидного) о том, что векторы $\vec{S}$ и $\vec{F}$ сонаправленны и по определению, заключим, что

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS = (3S + 10)\, dS.$$

Тогда

$$A = \int\limits_0^{S_{12}} (3S + 10)\, dS = \frac{3}{2}S^2 + 10S\Big|_0^{S_{12}} = \frac{3}{2}S_{12}^2 + 10S_{12} = 336 \text{ Дж}.$$

№ 10

Груз массой $m = 20$ кг поднят на высоту $h = 15$ м. Условимся считать, что на него действуют лишь консервативные силы, и потенциальная энергия в нулевом положении равна нулю. Тогда

$$dU = -\delta A = -m\vec{g} \cdot d\vec{S} = -mg\,dS,$$

а значит,

$$U = \int\limits_{H}^{0} -mg\,dS = -mgS\big|_{H}^{0} = mgH,$$

где H — некоторая высота. Так,

$$U_1 = mgh_1 = 2940 \text{ Дж}$$

Вычислим работу, которую совершила вертикальная сила $F = 400$ Н при подъёме груза:

$$A_{01} = \int\limits_{0}^{h} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int\limits_{0}^{h} F \cdot dS = Fh - F \cdot 0 = Fh = 6 \text{ кДж}.$$

№ 11

Масса материальной точки составляет $m = 2$ кг. Она движется вдоль оси абсцисс по закону

$$x = 5 - 2t + t^2 - 0{,}2t^3.$$

Тогда

$$v = \dot{x} = -2 + 2t - 0{,}6t^2,$$

и

$$a = \dot{v} = 2 - 1{,}2t.$$

Очевидно, что

$$F = ma = 2m - 1{,}2mt = 4 - 2{,}4t.$$

Если работа равна

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

то мощность равна

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv.$$

В момент времени $\tau = 2$ с:

$$\begin{cases} F(\tau) = -0{,}8 \text{ Н} \\ v(\tau) = -0{,}4 \text{ м/с} \end{cases} \Rightarrow N(\tau) = 0{,}32 \text{ Вт}.$$

№ 12

Дорожка имеет форму окружности радиусом $R = 4$ м. По закону сохранения энергия,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2,$$

где K_i, U_i — кинетическая и потенциальная энергии в начале движения ($i = 1$) и в его конце ($i = 2$). При этом $K_1 = 0$, поскольку движение происходит без начальной скорости. Для остальных величин справедливы выражения

$$U_1 = mgh, \quad U_2 = 2mgR, \quad K_2 = \frac{mv^2}{2},$$

если нулевую точку принять нижнюю точку дорожки. В верхней точке траектории в проекции на направленную вертикально вверх ось уравнение движения принимает вид

$$-mg = -ma_{\text{ц}} \Leftrightarrow a_{\text{ц}} = g.$$

Тогда

$$v^2 = a_{\text{ц}} R = gR$$

и

$$K_2 = \frac{mgR}{2}.$$

Суммируя сказанное выше, получим,

$$mgh = 2mgR + \frac{mgR}{2} \Leftrightarrow h = \frac{5}{2}R = 10 \text{ м}.$$

№ 13

Тело массы m движется по закону

$$v = b\sqrt{s},$$

где $b = \text{const}$, s — путь. Известно, что

$$A = K - K_0 = \frac{mv^2}{2} = \frac{mb^2 s}{2},$$

поскольку движение происходит без начальной скорости. При этом

$$ds = v\,dt = b\sqrt{s}\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds = \frac{b}{2}\,dt.$$

Проинтегрируем полученное:

$$\int\limits_0^S \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds = \int\limits_0^\tau \frac{b}{2}\,dt \Leftrightarrow \sqrt{s}\Big|_0^S = \frac{bt}{2}\Big|_0^\tau \Leftrightarrow \sqrt{S} = \frac{b\tau}{2} \Leftrightarrow S = \frac{b^2\tau^2}{4}.$$

Так, за время τ тело совершит работы

$$A = \frac{mb^4\tau^2}{8}.$$

№ 14

Некоторая частица обладает потенциальной энергией

$$U = x + 2y^2 + 3z^3$$

в зависимости от координат. Поскольку

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial y}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{i} - 4y\vec{j} - 9z^2\vec{k}.$$

Радиус-вектор частицы меняется следующим образом:

$$\vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \longrightarrow \vec{r}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Учтём, что

$$x_1 = y_1 = z_1 = 1, \quad x_2 = y_2 = z_2 = 2.$$

Тогда, ввиду консервативности силы,

$$A = U_1 - U_2 = x_1 + 2y_1^2 + 3z_1^3 - x_2 - 2y_2^2 - 3z_2^3 = -28 \text{ Дж}.$$

№ 15

Пусть r — длина радиус-вектора частицы, a и k — некоторые постоянные. Частица перешла из точки $M_1(3; 2; 1)$ в точку $M_2(1; 2; 3)$. Если

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть потенциальная энергия частица выражается формулой

$$U = \frac{a}{r}.$$

Тогда

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\frac{a}{r} = \frac{a}{r^2}.$$

Направление силы совпадает с направлением радиус вектора:

$$\vec{F} = \frac{a}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Работа силы при переходе из точки M_1 в M_2 вычисляется, как

$$A = U_1 - U_2 = \frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2} = 0 \text{ Дж},$$

поскольку

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = r_2.$$

Пусть теперь

$$U = \frac{kr^2}{2}.$$

Тогда

$$F = \frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{kr^2}{2} = kr; \quad \vec{F} = -k\vec{r}$$

(векторы $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ противонаправленные). Работа силы при переходе из точки M_1 в M_2 вычисляется, как

$$A = U_1 - U_2 = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2} = 0 \text{ Дж},$$

поскольку, аналогично,

$$r_1 = r_2.$$

№ 16

Потенциальная энергия частицы выражается, как

$$U = \alpha \cdot \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{z}\right),$$

где $\alpha = \text{const}$. Тогда

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\alpha \cdot \frac{2x}{y}\vec{i} + \alpha \cdot \frac{zx^2 + 2y^3}{zy^2}\vec{j} - \alpha \cdot \frac{y^2}{z^2}\vec{k}.$$

Частица перешла из точки $M_1(3;2;1)$ в $M_2(1;2;3)$. Тогда

$$U_1 = \alpha \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{1}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

и

$$U_2 = \alpha \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{2^2}{3}\right) = -\frac{5\alpha}{6}.$$

В таком случае,

$$A = U_1 - U_2 = \frac{4\alpha}{3}.$$

№ 17

Уклон горы составляет $h = 3$ м на каждые $l = 100$ м пути. Значит, синус угла наклона равен

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}03.$$

В гору движется автомобиль массой

$$m = 1{,}8 \text{ т} = 1800 \text{ кг}.$$

При этом коэффициент трения равен $\mu = 0{,}1$.

Запишем уравнение движения машины:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a},$$

где сила $\vec{F}$ — результат работы двигателя. Будем считать, что машина движется равномерно. Зададим две оси: Ox, перпендикулярную плоскости горы, и Oy, направленную по движению машины. Тогда

$$Ox: \quad -mg\cos\alpha + N = 0 \Leftrightarrow N = mg\cos\alpha = mg\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

и

$$Oy: \quad F - F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow F = F_{\text{тр}} + mg\sin\alpha.$$

При этом

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

В таком случае,

$$F = \mu mg\sqrt{1-\sin^2\alpha} + mg\sin\alpha \approx 2292{,}41 \text{ Н}.$$

Машина проехала путь $S = 5000$ м. Тогда

$$A = \int\limits_0^S \vec{F}\cdot d\vec{s} = Fs|_0^S = FS \approx 1{,}15\cdot 10^7 \text{ Дж}.$$