№ 3.3.17

Пусть $\vec{a} = (3; -1; 2)$ и $\vec{b} = (-1; 3; -1)$. Найдём вектор $\vec{c}$, такой, что $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$. Для этого найдём векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}.$$

Длина найденного вектора будет равна

$$l = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 8^2} = 3\sqrt{10}.$$

Тогда

$$\vec{c} = \pm\frac{\left[\vec{a}, \vec{b}\right]}{l} = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{10}}{6}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{10}}{30}\vec{j} + \dfrac{4\sqrt{10}}{15}\vec{k} \\ \dfrac{\sqrt{10}}{6}\vec{i} - \dfrac{\sqrt{10}}{30}\vec{j} - \dfrac{4\sqrt{10}}{15}\vec{k} \end{array}\right.,$$

то есть

$$\vec{c} = \left[\begin{array}{l} \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{6}; \dfrac{\sqrt{10}}{30}; \dfrac{4\sqrt{10}}{15}\right) \\ \left(\dfrac{\sqrt{10}}{6}; -\dfrac{\sqrt{10}}{30}; -\dfrac{4\sqrt{10}}{15}\right) \end{array}\right..$$

При этом, только в первом случае векторы образуют правую тройку

$$\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}.$$

№ 3.3.19

Пусть

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q},$$

а так же

$$p = 4, \quad q = 3, \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Преобразуем следующее:

$$\begin{aligned} \left[\vec{a}, \vec{b}\right] &= \left[3\vec{p} + 2\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}\right] = 3\left[\vec{p}, 2\vec{p} - \vec{q}\right] + 2\left[\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}\right] = \\ &= 3\big(2\left[\vec{p}, \vec{p}\right] - \left[\vec{p}, \vec{q}\right]\big) + 2\big(2\left[\vec{q}, \vec{p}\right] - \left[\vec{q}, \vec{q}\right]\big) = \\ &= 6\left[\vec{p}, \vec{p}\right] - 3\left[\vec{p}, \vec{q}\right] + 4\left[\vec{q}, \vec{p}\right] - 2\left[\vec{q}, \vec{q}\right] = 7\left[\vec{q}, \vec{p}\right]. \end{aligned}$$

Найдём площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = 7\big|\left[\vec{q}, \vec{p}\right]\big| = 7qp\sin\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = 42\sqrt{2}.$$

№ 3.3.20

Вершины треугольника ABC имеют следующие координаты:

$$A(1;-2;3),\quad B(0;-1;2),\quad C(3;4;5).$$

Построим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\big(0-1;-1-(-2);2-3\big)=(-1;1;-1),$$
$$\overrightarrow{AC}=\big(3-1;4-(-2);5-3\big)=(2;6;2).$$

Площадь параллелограмма, построенного на этих векторах и численно равная модулю их векторного произведения, будет вдвое превышать площадь S треугольника ABC. Так,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&-1\\2&6&2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|8\vec{i}-8\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8^2+(-8)^2}=4\sqrt{2}.$$

№ 3.3.21

Пусть $\vec{a}=(-4;-8;8)$ и $\vec{b}=(4;3;2)$. Тогда,

$$a=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+8^2}=12,$$
$$b=\sqrt{4^2+3^2+2^2}=\sqrt{29},$$
$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&-8&8\\4&3&2\end{vmatrix}=-40\vec{i}+40\vec{j}+20\vec{k},$$
$$S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\sqrt{(-40)^2+40^2+20^2}=60,$$
$$\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}{ab}=\frac{5\sqrt{29}}{29},$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№ 3.3.30

Пусть для некоторых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ выполнены соотношения

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d}=\vec{0}$$

и

$$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{d}=\vec{0}.$$

Рассмотрим векторное произведение векторов $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)-\vec{d}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=$$
$$=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=$$
$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{d}\right)=\vec{0}-\vec{0}=\vec{0}.$$

В том случае, если $\vec{a} \neq \vec{d}$ и $\vec{b} \neq \vec{c}$, полученный результат означает коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.