

Казначеев М.А.

## Лабораторная работа №2

Изучение нониусов

Самара  
2023

## Содержание

<b>I</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Схема установки</b>	<b>3</b>
<b>III</b>	<b>Результаты измерений и обработка данных</b>	<b>4</b>
1	Измерение толщины металлической пластинки микрометром . . . . .	4
2	Определение объема трубки и плотности ее материала при помощи штангенциркуля . . . . .	5
<b>IV</b>	<b>Вывод</b>	<b>8</b>
<b>V</b>	<b>Контрольные вопросы</b>	<b>9</b>

### Аннотация

**Цель работы:** исследовать ошибки измерений с помощью микрометра и штангенциркуля.

**В работе используются:** микрометр, штангенциркуль, электронные весы, металлическая пластинка, металлическая трубка.

## I Теоретические сведения

Под *нониусом* понимают дополнение к обычному масштабу прибора, позволяющее повысить точность измерения в  $10 \div 20$  раз. Таким приспособлением снабжены штангенциркуль — прибор для измерения длин, — а так же буссоль и кипрегель — приборы для измерения углов.

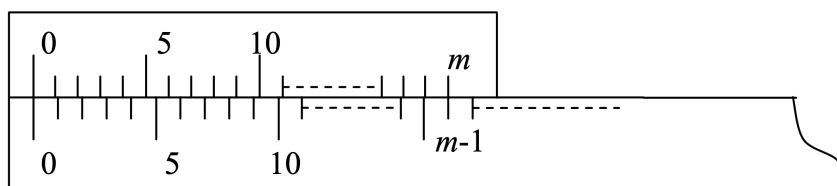


Рис. 1. Линейный нониус

На рисунке 1 изображён нониус, который имеет вид меньшей из двух линеек. При этом сам нониус имеет  $m$  делений. Расстояние между нулевым и последним делением нониуса равно расстоянию между нулевым и  $(m-1)$ -м делением основного масштаба (основной, большей линейки). Обозначим цену деления нониуса через  $x$ , а через  $y$  — цену деления масштаба. Тогда, из сказанного выше очевидно, что

$$mx = (m-1)y \Rightarrow x = y - \frac{y}{m}.$$

Точность нониуса определяется, как

$$\Delta x = y - x = \frac{y}{m}.$$

При измерении длины  $L$  отрезка необходимо совместить ноль основного масштаба с его началом, а ноль нониуса — с концом. Конец отрезка окажется между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м делениями основной линейки. При этом на нониусе найдётся деление  $n$ , ближе всего подходящее делению  $k+n$  масштаба (рис. 2).

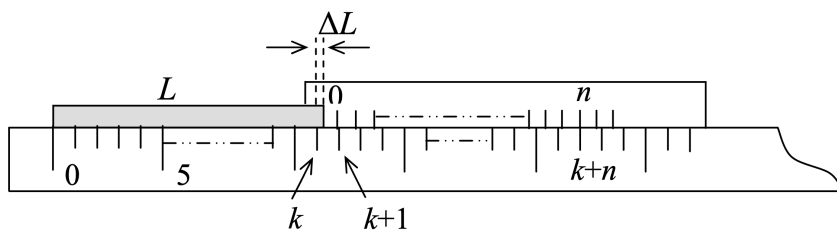


Рис. 2. Линейный нониус

Как видно из рисунка, длина интересующего нас отрезка равна  $L$ . Тогда

$$L = ky + \Delta L,$$

где

$$\Delta L = ny - nx = n(y - x) = n \Delta x.$$

То есть

$$L = ky + n \Delta x.$$

Абсолютная погрешность нониуса равна, очевидно, половине его точности:

$$\Delta l_{\text{пр}} = \frac{\Delta x}{2}.$$

*Микрометрический винт* — это винт с малым и достаточно точно выдержанным шагом для точных измерений размеров тел. Такие винты являются составными частями микрометров. Шаг микрометрического винта составляет 0,5 мм. Поскольку барабанная шкала микрометра содержит 50 делений, поворот на одно такое деление смещает стержень на 0,01 мм.

При измерении длины микрометром, интересующее тело помещают между стержнем и упором (см. схему микрометра далее). Вращением винта за головку доводят стержень до соприкосновения с предметом. При этом вращение останавливают при появлении характерного треска. Число целых миллиметров снимают по основной шкале, деления которой сдвинуты друг относительно друга на 0,5 мм, а десятые и сотые доли миллиметра снимают по шкале барабана.

## II Схема установки

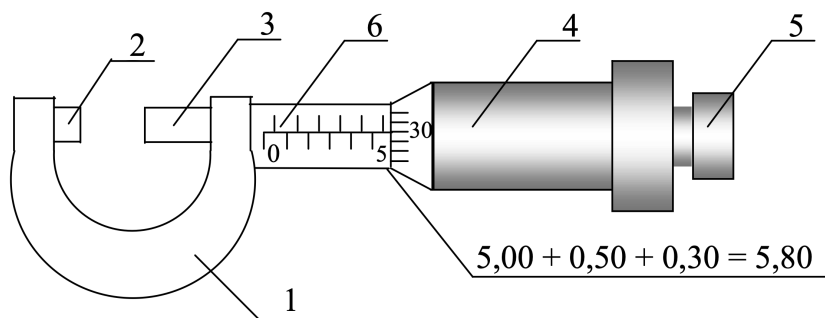


Рис. 3. Микрометр

Устройство микрометра представлено на рисунке 3. Он состоит из скобы 1, в муфтах которой находятся упор 2 и микрометрический винт со стержнем 3. Цифрой 4 обозначена подвижная трубка, слева на которой располагается шкала. Вращение винта осуществляется движением головки 5. По шкале 6 измеряется число целых миллиметров.

На рисунке 4 представлен штангенциркуль. Его основой является стальная миллиметровая линейка 1, снабжённая статичной ножкой 2 и подвижной ножкой 3. Подвижная ножка соединена с нониусом 4. Части 5 конструкции штангенциркуля используются для измерения внутренних размеров тел. Винт 6 предназначен для фиксации положения нониуса.

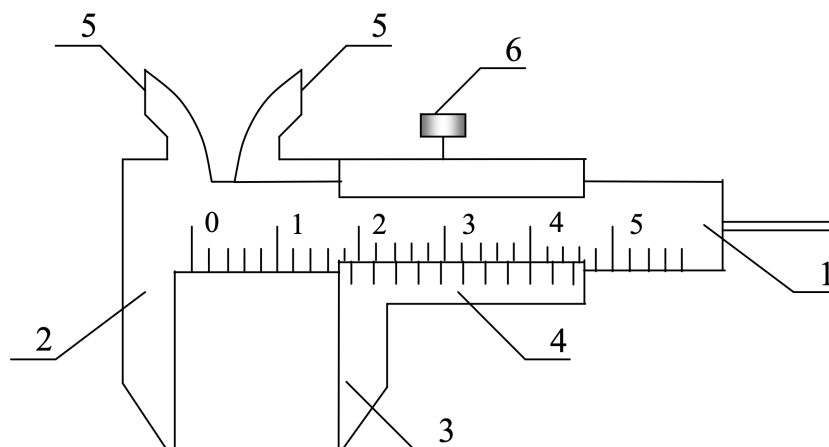


Рис. 4. Штангенциркуль

### III Результаты измерений и обработка данных

#### Упражнение 1. Измерение толщины металлической пластинки микрометром

Измерим толщину пластинки во всех её углах по три раза. Занесём данные в таблицу 1. При этом,  $l_{ik}$  — измеренная толщина, где  $i$  — номер угла, а  $k$  — номер измерения. Среднее значение вычисляется, как

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^3 l_{ik}}{4 \cdot 3} = \frac{\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^3 l_{ik}}{12},$$

а расхождение  $ik$ -о измерения со средним — как

$$\Delta l_{ik} = l_{ik} - \bar{l}.$$

Доверительную вероятность примем равной 95%:

$$P = 0,95.$$

Коэффициент Стьюдента при количестве измерений  $n = 12$  равен

$$t_P(n) = 2,2.$$

Приборная погрешность микрометра равна половине цены его деления:

$$\Delta l_{\text{пр}} = \frac{0,01}{2} = 0,005 \text{ мм.}$$

Его погрешность округления в таком случае составит

$$\Delta l_{\text{окр}} = P \cdot \Delta l_{\text{пр}} \approx 0,005 \text{ мм.}$$

Следовательно, систематическая погрешность будет равна

$$\Delta l_{\text{сист}} = \sqrt{(\Delta l_{\text{пр}})^2 + (\Delta l_{\text{окр}})^2} \approx 0,007 \text{ мм.}$$

Случайная ошибка вычисляется по формуле

$$\Delta l_{\text{случ}} = t_P(n) \cdot S \approx 0,04 \text{ мм},$$

где

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^3 (\Delta l_{ik})^2}{n(n-1)}}$$

— средняя квадратичная погрешность. Полная абсолютная ошибка измерения толщины пластинки равна

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta l_{\text{случ}})^2 + (\Delta l_{\text{сист}})^2} \approx 0,04.$$

Наконец, относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{\bar{l}} \cdot 100\% \approx 0,49\%.$$

Номер угла	Номер опыта	$l_{ik}$ , мм	$\Delta l_{ik}$ , мм	$(\Delta l_{ik})^2$ , мм <sup>2</sup>	$S$ , мм	$\Delta l$ , мм	$\varepsilon_l$ , %	$l \pm \Delta l$ , мм
I	1	8,09	−0,09	0,0081	0,02	0,04	0,49	$8,18 \pm 0,04$
	2	8,10	−0,08	0,0064				
	3	8,10	−0,08	0,0064				
II	1	8,10	−0,08	0,0064				
	2	8,10	−0,08	0,0064				
	3	8,10	−0,08	0,0064				
III	1	8,24	0,06	0,0036				
	2	8,25	0,07	0,0049				
	3	8,24	0,06	0,0036				
IV	1	8,27	0,09	0,0081				
	2	8,26	0,08	0,0064				
	3	8,26	0,08	0,0064				
		$\bar{l}$ , мм		$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^3 (\Delta l_{ik})^2$ , мм <sup>2</sup>				
		8,18		0,0731				

Таблица 1. Измерение толщины пластинки

## Упражнение 2. Определение объема трубки и плотности ее материала при помощи штангенциркуля

Измерим характеристики трубки, такие, как длина  $L$ , внутренний диаметр  $d$  и внешний диаметр  $D$ . Результаты запишем в таблицу 2. Средние значения величин

$L, D, d$  вычисляются по следующим формулам:

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^5 L_i}{5}, \quad \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^5 D_i}{5}, \quad \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^5 d_i}{5}.$$

Соответствующие расхождения со средними величинами — по формулам

$$\Delta L_i = L_i - \bar{L}, \quad \Delta D_i = D_i - \bar{D}, \quad \Delta d_i = d_i - \bar{d}.$$

Номер опыта	$L_i$ , мм	$\Delta L_i$ , мм	$(\Delta L_i)^2$ , мм <sup>2</sup>	$D_i$ , мм	$\Delta D_i$ , мм	$(\Delta D_i)^2$ , мм <sup>2</sup>	$d_i$ , мм	$\Delta d_i$ , мм	$(\Delta d_i)^2$ , мм <sup>2</sup>
1	24,4	−0,1	0,01	31,3	0,2	0,04	17,9	−0,1	0,01
2	24,5	0	0	31,1	0	0	18,0	0	0
3	24,4	−0,1	0,01	31,1	0	0	18,0	0	0
4	24,5	0	0	31,1	0	0	18,0	0	0
5	24,5	0	0	31,1	0	0	18,0	0	0
	$\bar{L}$ , мм		$\sum_{i=1}^5 (\Delta L_i)^2$ , мм <sup>2</sup>	$\bar{D}$ , мм		$\sum_{i=1}^5 (\Delta D_i)^2$ , мм <sup>2</sup>	$\bar{d}$ , мм		$\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2$ , мм <sup>2</sup>
	24,5		0,02	31,1		0,04	18,0		0,01

Таблица 2. Размеры трубки

Вычислим погрешности измеренных величин. При пяти измерениях ( $n = 5$ ), коэффициент Стьюдента равен

$$t_P(n) = 2,78$$

(доверительную вероятность всё так же считаем равной 95%). Систематическая погрешность  $\Delta l_{\text{сист}}$  для длины, внутреннего и внешнего диаметров одина:

$$\Delta l_{\text{пр}} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ мм}$$

(приборная погрешность равна половине точности штангенциркуля),

$$\Delta l_{\text{окр}} = P \cdot \Delta l_{\text{пр}} \approx 0,05 \text{ мм},$$

а значит,

$$\Delta l_{\text{сист}} = \sqrt{(\Delta l_{\text{пр}})^2 + (\Delta l_{\text{окр}})^2} \approx 0,07 \text{ мм}.$$

Вычислим средние ошибки интересующих нас величин:

$$S_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta L_i)^2}{n(n-1)}} \approx 0,03 \text{ мм}, \quad S_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta D_i)^2}{n(n-1)}} \approx 0,04 \text{ мм},$$

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2}{n(n-1)}} \approx 0,02 \text{ мм},$$

и их случайные ошибки:

$$\begin{aligned}\Delta L_{\text{случ}} &= t_p(n) \cdot S_{\bar{L}} \approx 0,08 \text{ мм}, & \Delta D_{\text{случ}} &= t_p(n) \cdot S_{\bar{D}} \approx 0,11 \text{ мм}, \\ \Delta d_{\text{случ}} &= t_p(n) \cdot S_{\bar{d}} \approx 0,06 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Полные ошибки равны

$$\begin{aligned}\Delta L &= \sqrt{(\Delta L_{\text{случ}})^2 + (\Delta l_{\text{сист}})^2} \approx 0,11 \text{ мм}, & \Delta D &= \sqrt{(\Delta D_{\text{случ}})^2 + (\Delta l_{\text{сист}})^2} \approx 0,13 \text{ мм}, \\ \Delta d &= \sqrt{(\Delta d_{\text{случ}})^2 + (\Delta l_{\text{сист}})^2} \approx 0,09 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Наконец, вычислим относительные погрешности по формулам

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{\Delta L}{\bar{L}} \cdot 100\% \approx 0,45\%, & \varepsilon_D &= \frac{\Delta D}{\bar{D}} \cdot 100\% \approx 0,42\%, \\ \varepsilon_d &= \frac{\Delta d}{\bar{d}} \cdot 100\% = 0,5\%\end{aligned}$$

и запишем данные в таблицу 3.

$\bar{L} \pm \Delta L$ , см	$\varepsilon_L$ , %	$\bar{D} \pm \Delta D$ , см	$\varepsilon_D$ , %	$\bar{d} \pm \Delta d$ , см	$\varepsilon_d$ , %
$2,450 \pm 0,011$	0,45	$3,110 \pm 0,013$	0,42	$1,800 \pm 0,009$	0,50

Таблица 3. Размеры трубки

Объём трубки вычислим по формуле

$$V = \frac{\pi \bar{L}}{4} (\bar{D}^2 - \bar{d}^2),$$

а относительную погрешность определения объёма — по формуле

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{D} \cdot \Delta D}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{d} \cdot \Delta d}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2}\right)^2} \cdot 100\%,$$

где  $\Delta \pi$  — абсолютная ошибка округления числа  $\pi$ . Поскольку расчёты производятся на калькуляторе, располагающем достаточно точным значением числа  $\pi$ , ошибку его округления можно принять равной нулю ( $\Delta \pi = 0$ ). Тогда

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{D} \cdot \Delta D}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{d} \cdot \Delta d}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2}\right)^2} \cdot 100\%.$$

Абсолютную погрешность объёма найдём, как

$$\Delta V = \frac{\varepsilon_V \cdot V}{100}.$$

Затем, взвесив трубку, вычислим плотность её вещества по формуле

$$\rho = \frac{m}{V}.$$



Относительна погрешность при этом составит

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_V^2},$$

а абсолютная —

$$\Delta\rho = \frac{\varepsilon_\rho \cdot \rho}{100}.$$

Заметим, что приборная погрешность электронных весов равна цене деления. Тогда

$$\Delta m = \sqrt{(\Delta m_{\text{пр}})^2 + (\Delta m_{\text{окр}})^2} = \sqrt{(\Delta m_{\text{пр}})^2 + \left(P \cdot \frac{\Delta m_{\text{пр}}}{2}\right)^2} = \Delta m_{\text{пр}} \sqrt{1 + \frac{P^2}{4}}.$$

Результаты занесём в таблицу 4.

$V,$ см <sup>3</sup>	$\varepsilon_V,$ %	$\Delta V,$ см <sup>3</sup>	$m,$ г	$\Delta m,$ г	$\varepsilon_m,$ %	$\rho,$ г/см <sup>3</sup>	$\varepsilon_\rho,$ %	$\Delta\rho,$ г/см <sup>3</sup>
12,38	1,43	0,18	97,44	0,01	0,01	7,87	1,43	0,11

Таблица 4. Определение объема и плотности трубки

Как видно из последней таблицы (таб. 4),

$$V \pm \Delta V = 12,38 \pm 0,18 \text{ см}^3$$

и

$$\rho \pm \Delta\rho = 7,87 \pm 0,11 \text{ г/см}^3.$$

## IV Вывод

В упражнении по измерению толщины пластинки систематическая погрешность измерения толщины настолько мала, благодаря малой приборной погрешности микрометра, что соответствующая полная погрешность в некотором приближении определяется только случайной. При соблюдении методики измерений, удаётся добиться значения относительной погрешности измерения толщины микрометром меньше процента, что несомненно можно считать хорошим результатом.

В упражнении по определению объёма трубки и плотности её материала, так же получены удовлетворяющие результаты: относительные погрешности измерения длины трубки, внутреннего и внешнего диаметров не превышают одного процента, а относительные погрешности вычисления объёма и плотности — двух. При этом систематическая ошибка, вносимая штангенциркулем в десять раз превышает таковую для микрометра. Последнее значительно влияет на точность измерений и вычислений: абсолютные полные погрешности величин  $L$ ,  $D$ ,  $d$  превышают погрешность величины  $l$  в первом упражнении не менее, чем в два раза. Однако в рамках упражнения такая точность вполне допустима. Полученное значение плотности с хорошей точностью соответствует плотности железа, но не исключено, что материалом трубки является один из видов стали.

## V Контрольные вопросы

1) Нониусом называют дополнение к основному (обычному) масштабу, повышающее точность измерений. Линейный нониус представляет собой дополнительную линейку, скользящую вдоль основной. При этом дополнительный масштаб содержит  $m$  делений, последнее из которых совпадает с  $n$ -м делением основного.

2) Заметим, что для любого линейного нониуса истинно соотношение

$$mx = ny \Leftrightarrow x = \frac{ny}{m},$$

где  $x$  — цена деления дополнительного масштаба, а  $y$  — основного. Буквами  $m$  и  $n$  обозначены совпадающие деления дополнительного и основного масштабов соответственно. При этом число  $m$  совпадает с полным количеством делений нониуса. Точность штангенциркуля вычисляется по формуле

$$\Delta x = \frac{y}{m}.$$

Погрешность штангенциркуля определяется, как

$$\Delta l_{\text{пр}} = \frac{\Delta x}{2}.$$

В нашем случае,  $m = 10$  и  $n = 19$ ,  $y = 1$  мм. Тогда

$$\begin{aligned}x &= 1,9 \text{ мм}, \\ \Delta x &= 0,1 \text{ мм}, \\ \Delta l_{\text{пр}} &= 0,05 \text{ мм}.\end{aligned}$$

3) В нашей работе шаг микрометрического винта (смещение барабана относительно основной шкалы при полном его обороте) равен 0,5 мм. Цена деления деления основной шкалы микрометра совпадает с шагом его винта, а цена деления дополнительной — равна шагу винта, делённому на количество делений дополнительной шкалы. В нашем случае, цена деления дополнительной шкалы составляет 0,01 мм. Погрешность равна половине цены этого деления: 0,005 мм.

4) Прямыми называются измерения длины, произведённые некоторым прибором непосредственно. Косвенными будут считаться измерения длины, когда она является функцией других величин, измеренных прямо или так же косвенно. Например, измерив острый угол  $\alpha$  прямоугольного треугольника и длину его гипотенузы  $c$ , можно найти длины его катетов  $a$  и  $b$  по формулам

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$

При этом,  $a = a(c, \alpha)$  и  $b = b(c, \alpha)$  — косвенно измеренные величины.

В данной работе прямыми являются измерения всех длин: толщины пластинки в первом упражнении, а так же внутреннего и внешнего диаметров и длины трубки во втором. Во втором упражнении косвенно измерены объём и плотность трубки. В первом подобных измерений не проводилось.

5) Схема обработки прямых измерений приведена третьем разделе отчёта. Ошибки косвенного измерения величины  $u = f(x, y, x, \dots)$  находятся по формулам

$$\Delta u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \Delta z\right)^2 + \dots}$$

и

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta u}{u} \cdot 100\%.$$