№ 6

Длина тонкого однородного стержня равна $l = 0{,}5$ м, а его масса — $m = 0{,}4$ кг. Он вращается около оси, проходящей через его середину перпендикулярно ему, с ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Поскольку в данном случае момент инерции остаётся постоянным и равным

$$I = \frac{ml^2}{12},$$

то справедливо уравнение

$$M = I\varepsilon = \frac{ml^2}{12}\varepsilon = 0{,}025 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

№ 7

Для диска площади $S = \pi R^2$ истинно соотношение

$$M = I\varepsilon,$$

поскольку $I = \mathrm{const}$. При этом на некоторую элемент диска массы dm и радиуса r действует сила трения

$$dF = \mu g\, dm.$$

В силу однородности диска,

$$\frac{dm}{ds} = \frac{m}{S} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{S}\, ds = \frac{m}{\pi R^2}\, d(\pi r^2) = \frac{2mr}{R^2}\, dr.$$

Тогда

$$dF = \frac{2\mu mgr}{R^2}\, dr.$$

Значит,

$$dM = rdF = \frac{2\mu mgr^2}{R^2}\, dr$$

и

$$M = \int\limits_0^R \frac{2\mu mgr^2}{R^2}\, dr = \frac{2\mu mgR}{3}.$$

При этом

$$I = \frac{mR^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\omega_0}{\tau},$$

где τ — время до остановки диска. Наконец,

$$\frac{2\mu mgR}{3} = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}.$$

№ 8

По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{(mr^2 + I)\, v^2}{2r^2} \Leftrightarrow v = r\sqrt{\frac{2mgh}{mr^2 + I}}.$$

Поскольку

$$I = mr^2,$$

то

$$v = \sqrt{gl\sin\alpha} \approx 4{,}43 \text{ м/с}.$$

№ 9

Задача решается аналогично предыдущей, но $I = \dfrac{2mr^2}{5}$. Тогда

$$v = \sqrt{\frac{10gl\sin\alpha}{7}}.$$

Поскольку

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2},$$

то

$$t = \sqrt{\frac{14l}{5g\sin\alpha}} \approx 1{,}51 \text{ с}.$$

№ 10

Задача решается по началу аналогично задаче 8, но $I = \dfrac{mR^2}{2}$. Тогда

$$v = \sqrt{\frac{4gl\sin\alpha}{3}}.$$

При этом

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2l}{v}.$$

Тогда

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2l} = \frac{2g\sin\alpha}{3} \approx 3{,}27 \text{ м/с}^2.$$

№ 11

Точка имеет радиус-вектор

$$\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j},$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. К ней приложена сила

$$\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j},$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$. Момент этой силы относительно начала отсчёта задаётся формулой

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = (aB - Ab)\vec{k}.$$

№ 12

Масса тонкого стержня длины $l = 1$ м равна $m = 1$ кг. Ось вращения проходит через нижнюю точку стержня перпендикулярно плоскости, в которой происходит его движение. В некоторый момент времени стержень составляет с вертикалью угол $\beta = 60°$. Момент инерции некоторого элемента стержня равен

$$dI = r^2\,dm.$$

Ввиду однородности стержня,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{m}{l} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{l}\,dr$$

и

$$dI = \frac{mr^2}{l}\,dr \Leftrightarrow I = \frac{m}{l}\int\limits_0^l r^2\,dr = \frac{ml^2}{3}$$

Тогда момент импульса всего стержня равен

$$L = \frac{ml^2}{3}\omega.$$

При этом

$$M = \dot{L} = I\varepsilon$$

с одной стороны и

$$M = \left|[\vec{R}_C, m\vec{g}]\right| = \frac{mgl}{2}\sin\varphi$$

— с другой, где φ — угол между стержнем и вертикалью. Тогда

$$\frac{mgl}{2}\sin\varphi = I\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{mgl}{2I}\sin\varphi = \frac{3g}{2l}\sin\varphi.$$

При этом,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega\,d\omega}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\omega\,d\omega = \frac{3g}{2l}\sin\varphi\,d\varphi \Leftrightarrow \omega^2 = C - \frac{3g}{l}\cos\varphi.$$

Поскольку $\omega^2(0) = 0$, то

$$C = \frac{3g}{l}$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)}.$$

Наконец,

$$L = \frac{ml^2}{3}\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)} = m\sqrt{\frac{gl^3}{3}(1-\cos\varphi)} = 1{,}28\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}.$$

№ 13

Момент инерции диска относительно оси вращения равен $\dfrac{MR^2}{2}$, а валика — $\dfrac{mr^2}{2}$. Момент инерции системы равен сумме моментов диска и валика:

$$I = \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} = \frac{1}{2}\left(MR^2 + mr^2\right).$$

При этом,

$$M = 2Tr$$

и

$$M = I\varepsilon.$$

Поскольку

$$\varepsilon = \frac{a}{r},$$

то

$$I\frac{a}{r} = 2Tr \Leftrightarrow T = \frac{a}{4r^2}\left(MR^2 + mr^2\right).$$

По второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось, центр масс движется в соответствии с уравнением

$$(m+M)g - 2T = (m+M)a \Leftrightarrow a = \frac{2(m+M)gr^2}{M\left(R^2+2r^2\right)+3mr^2}.$$

№ 14

Радиус маховика, раскрученного до скорости

$$\omega_0 = 400 \text{ об/мин} \approx 41{,}9 \text{ рад/с},$$

составляет $r = 0{,}4$ м. Его масса равна $m = 100$ кг. Остановка произошла через $\tau = 80$ с. Угловое ускорение в таком случае составляет

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{\tau}.$$

Момент инерции равен

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

Тогда момент сил трения равен

$$M = I\varepsilon = \frac{mr^2\omega_0}{2\tau} = 4{,}19 \text{ Н·м}.$$

№ 15

На блок снизу и тело массой m_1 сверху действуют силы натяжения нити равные T_1. При этом на тело массой m_1 снизу и тело массой m_2 сверху действуют силы натяжения нити равные T_2. Запишем второй закон Ньютона для тела массой m_2 в проекции на вертикальную ось:

$$m_2g - T_2 = m_2a \Leftrightarrow T_2 = m_2(g-a).$$

Аналогично для тела массой m_1:

$$m_1g + T_2 - T_1 = m_1a \Leftrightarrow T_1 = (m_2+m_1)(g-a).$$

Для блока имеем

$$M = I\varepsilon = T_1R.$$

При этом

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

и

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Тогда

$$\frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = (m_2 + m_1)(g - a)R \Leftrightarrow a = \frac{2(m_2 + m_1)}{M + 2m_2 + 2m_1} g.$$

Значит,

$$T_1 = \frac{M(m_2 + m_1)}{M + 2m_2 + 2m_1} g$$

и

$$T_2 = \frac{Mm_2}{M + 2m_2 + 2m_1} g.$$

№ 16

Решение аналогично задаче 9:

$$v = \sqrt{\frac{10gH}{7}}.$$

№ 17

Направим ось Ox горизонтально вправо, а ось Oy — вертикально вниз. Тогда второй закон Ньютона для тела массы m_2 в проекции на ось ординат примет вид

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \Leftrightarrow T_2 = m_2(g - a),$$

а для тела массы m_1 в проекции на ось абсцисс —

$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a \Leftrightarrow T_1 = m_1(\mu g + a).$$

Для блока имеем

$$M = I\varepsilon = (T_2 - T_1)R \Leftrightarrow mR^2 \frac{a}{R} = (T_2 - T_1)R \Leftrightarrow a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m + m_1 + m_2} g = 2{,}45 \text{ м/с}^2.$$

№ 18

Радиус шара равен $r = 0{,}2$ м, а сферы — $R = 0{,}5$ м. По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{(mr^2 + I)\, v^2}{2r^2} \Leftrightarrow v = r\sqrt{\frac{2mgh}{mr^2 + I}}.$$

При этом $I = \dfrac{2mr^2}{5}$, а значит,

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

При этом

$$\frac{mv^2}{R + r} = mg\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{10}{7(R + r)} h,$$

где α — угол между линией соединяющей центры шара и сферы и вектором силы тяжести. При этом

$$h = (R+r) - (R+r)\cos\alpha = (R+r) - \frac{10}{7}h \Leftrightarrow h = \frac{7}{17}(R+r).$$

Тогда

$$v = \sqrt{\frac{10g(R+r)}{17}}$$

и

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g(R+r)}{17}} \approx 10{,}04 \text{ рад/с}.$$