№ 6

Тело падает свободно, а значит его начальная скорость равна нулю:

$$v_0 = 0 \text{ м/с}.$$

Тогда путь зависит от времени, как

$$S(t) = \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

Обозначим время его движения через τ. Известно, что

$$S(\tau) - S(\tau - 1) = \frac{S(\tau)}{2},$$

то есть

$$S(\tau) = 2S(\tau - 1).$$

Учитывая выражение (1),

$$\frac{g\tau^2}{2} = \frac{2g(\tau-1)^2}{2} \Leftrightarrow \tau^2 = 2(\tau-1)^2 \Leftrightarrow |\tau| = \sqrt{2}|\tau - 1|.$$

Поскольку время является положительной величиной, то единственным подходящим раскрытием модулей будет

$$\tau = \sqrt{2}(\tau - 1) \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}41 \text{ с}.$$

Высота падения тела равна

$$h = S(\tau) \approx 28{,}56 \text{ м}.$$

№ 8

Начальная скорость тела направлена вверх (как и ось ординат) и равна

$$v_0 = 9 \text{ м/с}.$$

Скорость тела в проекции на ось Oy изменяется по закону

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 - gt, \tag{2}$$

а его координата —

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{3}$$

Найдём время τ, по прошествию которого скорость тела уменьшится в три раза:

$$3v_y(\tau) = v_0 \Leftrightarrow 3v_0 - 3g\tau = v_0 \Leftrightarrow \tau = \frac{2v_0}{3g}.$$

Поскольку τ явно меньше времени подъёма тела (вычисляется по формуле (4)), то путь, пройденный им за это время, равен

$$S = y(\tau) - y_0 = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{2v_0^2}{3g} - \frac{2v_0^2}{9g} = \frac{4v_0^2}{9g} \approx 3{,}67 \text{ м}.$$

№ 9

Начальная скорость тела направлена вверх (как и ось Oy) и равна

$$v_0 = 40 \text{ м/с}.$$

Его скорость изменяется по формуле (2). Времени T, через которое тело достигнет верхней точки траектории, соответствует нулевая скорость:

$$0 = v_0 - gT \Leftrightarrow T = \frac{v_0}{g}. \tag{4}$$

Зависимость координаты тела от времени имеет вид (3). Проекция перемещения тела вычисляется по формуле

$$\Delta r_y(t) = y - y_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

а путь —

$$S_1(t) = y - y_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

до достижения верхней точки траектории (отсчёт времени ведётся с момента броска) и

$$S_2(t) = \frac{gt^2}{2}$$

— после (отсчёт времени ведётся с момента достижения верхней точки траектории) из предположения о том, что начальная скорость движения из верхней точки равна нулю. Тогда за время $\tau = 6$, тело совершило перемещение

$$\Delta r_y(\tau) = 63{,}6 \text{ м}$$

и прошло путь

$$S(6) = S_1(T) + S_2(\tau - T) = \frac{g\tau^2}{2} - \tau v_0 + \frac{v_0^2}{g} \approx 99{,}67 \text{ м}.$$

Тогда

$$\frac{S(6)}{\Delta r_y(\tau)} \approx 1{,}57.$$

№ 10

Скорость тела, брошенного вертикально вверх изменяется по закону (2). Известно, что

$$v(\tau) = |v_y(\tau)| = 20 \text{ м/с},$$

где $\tau = 0{,}5$ с. Так,

$$|v_{0y} - g\tau| = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v_{0y} = 20 + g\tau = 24{,}9 \text{ м/с} \\ v_{0y} = g\tau - 20 = -15{,}1 \text{ м/с} \end{array}\right. \Rightarrow v_{0y} = 24{,}9 \text{ м/с},$$

поскольку начальная скорость направлена вверх по условию.

№ 12

Проекции скорости тела на горизонтальную и вертикальную оси (ось Ox направлена в сторону движения тела, а Oy вверх) изменяются по законам

$$v_x(t) = v_0, \quad v_y(t) = -gt \tag{5}$$

соответсвенно, причём $v_0 = 15$ м/с. Высота, с которой оно было брошено, равна $H = 25$ м, а его координаты зависят от времени, как

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 t, \quad y(t) = H - \frac{gt^2}{2} \tag{6}$$

(система отсчёта выбрана таким образом, что $x_0 = 0$ м, $y_0 = H$). Время движения τ является временем достижения точки с координатой 0 по оси ординат:

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow H - \frac{g\tau^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 2{,}26 \text{ с.}$$

Путь, пройденный телом в горизонтальном направлении составит

$$S_x = x(\tau) = v_0\tau = 33{,}9 \text{ м.}$$

Скорость в момент падения будет равна

$$v(\tau) = \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)} = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2} \approx 26{,}75 \text{ м/с.}$$

Угол φ траектории с горизонтом (лучше сказать, угол между вектором скорости и осью абсцисс) в момент падения найдём из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{v_x(\tau)}{v(\tau)} = \frac{v_0}{v(\tau)} \Leftrightarrow \varphi = \arccos\frac{v_0}{v(\tau)} \approx 55,89^\circ.$$

№ 13

Пусть дальность полёта тела, брошенного горизонтально, равняется высоте, с которой его бросили. Его координаты изменяются по закону (6). Как было показано в предыдущей задаче, время движения тела составит

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Тогда начальную скорость найдём из соотношения

$$S_x(\tau) = x(\tau) = H.$$

Так,

$$v_0\tau = H \Leftrightarrow v_0 = \frac{H}{\tau} = H \cdot \sqrt{\frac{g}{2H}} = \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

№ 14

Начальная скорость камня, брошенного горизонтально равна

$$v_0 = 30 \text{ м/с}.$$

Проекции скорости камня изменяются по закону (5). В конце второй секунды (то есть через $\tau = 2$ с) скорость камня составит

$$v(\tau) = \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)} = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2} \approx 35{,}84 \text{ м/с}.$$

Его тангенциальное ускорение равно

$$a_\tau = g\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{g}$. При этом,

$$\cos\varphi = \frac{|v_y|}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{gt}\right)^2 + 1}}.$$

Тогда

$$a_\tau = \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{gt}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{g^2t}\right)^2 + \frac{1}{g^2}}}.$$

Значит,

$$a_\tau(\tau) \approx 5{,}36 \text{ м/с}^2.$$

Наконец,

$$a_n(\tau) = \sqrt{g^2 - a_\tau^2(\tau)} \approx 8{,}2 \text{ м/с}^2.$$

№ 15

Пусть частицы начали движение из одной точки с координатами $(0, H)$ в противоположные стороны. При этом проекции их скоростей вычисляются по формуам

$$v_x = -v_0 = -3 \text{ м/с}, \quad v_y = -gt,$$
$$V_x = V_0 = 4 \text{ м/с}, \quad V_y = -gt.$$

Значит,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

и

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + g^2t^2}.$$

Найдём момент времени τ, когда векторы $\vec{v}$ и $\vec{V}$ будут перпендикулярны:

$$(\vec{v}, \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow v_xV_x + v_yV_y = 0 \Leftrightarrow -v_0V_0 + g^2\tau^2 = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{\sqrt{v_0V_0}}{g} \approx 0{,}35 \text{ с}.$$

№ 16

Тело, брошенное под углом α к горизонту совершило путь в направлении оси абсцисс длиной $S = 20$ м. Проекции скорости тела на горизонтальное и вертикальное направление имеют вид

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{7}$$

При этом его координаты вычисляются по формулам

$$x = v_{0x} t = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{8}$$

$\big($считаем, что бросок произошёл с позиции $(0,0)\big)$. Обозначим полное время движения через T. Тогда

$$S = x(T) \Leftrightarrow S = v_0 \cos\alpha \cdot T \Leftrightarrow T = \frac{S}{v_0 \cos\alpha}.$$

Также

$$y(T) = 0 \Leftrightarrow \left(v_0 \sin\alpha - \frac{gT}{2}\right) T = 0 \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Тело поднялось на максимальную высоту спустя время τ. При этом

$$v_y(\tau) = 0 \Leftrightarrow v_0 \sin\alpha - g\tau = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Заметим, что $T = 2\tau$. Известно, что в этот момент горизонтальная проекция его скорости равнялась

$$v_x(\tau) = 10 \text{ м/с}.$$

То есть

$$v_0 \cos\alpha = 10.$$

Подставляя это в выражение для T, найдём, что

$$T = 2 \text{ с},$$

а значит,

$$\tau = 1 \text{ с}.$$

№ 17

Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Проекции его скорости и его координаты меняются по законам (7) и (8) соответсвенно. Будем считать, что тело начало движение из точки с координатами $(0,0)$. Пусть тело поднялось на максимальную высоту за время τ. Как было показано в предыдущей задаче,

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

и

$$T = 2\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

где T — полное время полёта. Дальность полёта в таком случае равна

$$S = x(T) = v_0 \cos\alpha \cdot T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

а высота полёта —

$$H = y(\tau) = v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Как видно, дальность полёта максимальна при наибольшем значении $\sin 2\alpha$. Очевидно,

$$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

№ 18

Тело, брошенное под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, достигло максимальной высоты h. Применим законы (7) и (8). Как было показано в предыдущей задаче,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

и

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

то есть

$$v_0^2 = \frac{2gh}{\sin^2\alpha}.$$

Тогда

$$S = \frac{2h \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4h.$$

№ 19

Дальность полёта тела, брошенного под углом α к горизонту, в четыре раза превышает максимальную высоту траектории:

$$S = 4H.$$

Как было показано в задаче 17,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

и

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Тогда

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{4v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \Leftrightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha.$$

Поскольку угол α больше нуля и меньше 90°, то, очевидно, $\alpha = 45^\circ$.

№ 20

Тело, брошенное под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, побывало на одной и той же высоте при $t_1 = 10$ с и $t_2 = 50$ с. Его координата вычисляется, как

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

а значит,

$$y(t_1) = y(t_2) \Leftrightarrow v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} \Leftrightarrow v_0 = \frac{g(t_2 + t_1)}{2\sin\alpha} = 588 \text{ м/с}.$$

№ 21

Тело выпущено со скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Как было показано в задаче 17,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 3534{,}8 \text{ м}$$

и

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \approx 1530{,}61 \text{ м}.$$

В наивысшей точке траектории нормальное ускорение равно ускорению свободного падания, а скорость — её начальной горизонтальной составляющей,то есть

$$g = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g} \approx 1020{,}41 \text{ м}.$$

№ 22

С высоты $H = 15$ м ($x_0 = 0$ м) со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту было брошено тело. Оно будет двигаться по закону

$$\begin{cases} x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = H + v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} = H + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}. \tag{9}$$

Так,

$$x(t) = 10\sqrt{3} \cdot t \approx 17{,}32t$$

и

$$y(t) = 15 + 10t - 4{,}9t^2.$$

Через время $t_1 = 2$ с тело окажется в точке с координатами $(34{,}64; 15{,}4)$.

Тело упадёт на землю, когда

$$y = 0 \Leftrightarrow 4{,}9\tau^2 - 10\tau - 15 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{50 + 5\sqrt{394}}{49} \approx 3{,}05 \text{ с}.$$

№ 23

Тело, брошенное с высоты $H = 2$ м под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, приземлилось на расстоянии $S = 43$ м от места броска. Его координаты изменяются по закону (9). Заметим, что

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow H + v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0 \Leftrightarrow v_0 \sin\alpha = \frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}.$$

В нашем случае $\sin\alpha = \cos\alpha$, а значит,

$$S = x(\tau) = v_0 \cos\alpha \cdot \tau = v_0 \sin\alpha \cdot \tau = v_0 \sin\alpha = \frac{g\tau^2}{2} - H.$$

Тогда

$$\tau = \sqrt{\frac{2(S+H)}{g}} \approx 3{,}03 \text{ с}.$$

№ 24

Тело брошено под углом α к горизонту. При этом оно достигает максимальной высоты $H = 20$ м при значении координаты $x_1 = 1000$ м. Как было показано в задаче 17,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0},$$

а в задаче 16 —

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{\sqrt{2gH}}{g}.$$

Также известно, что

$$x_1 = x(\tau) = v_{0x}\tau = \frac{v_{0x}\sqrt{2gH}}{g} \Leftrightarrow v_{0x} = \frac{gx_1}{\sqrt{2gH}}.$$

При этом

$$v(\tau) = v_{0x} \approx 479{,}82 \text{ м/с}.$$

№ 25

Тело брошено со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Угол между векторами ускорения и скорости через $\tau = \sqrt{2}$ с обозначим через φ. При этом

$$\varphi = \arcsin\frac{v_x}{v}.$$

Поскольку скорости изменяются по закону (7), то

$$\varphi = \arcsin\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \left(v_0\tau\sin\alpha - \dfrac{g\tau^2}{2}\right)^2}} \approx 1{,}62^\circ.$$