№ 4

Сила тяготения, действующая на ракету на поверхности земли равна

$$F_{\text{п}} = G \cdot \frac{m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}}{R_{\text{з}}^2},$$

где $m_{\text{р}}$ — масса ракеты. Известно, что ракета поднялась на высоту, равную $R_{\text{з}}$. Теперь на неё действует сила

$$F = G \cdot \frac{m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}}{(R_{\text{з}} + R_{\text{з}})^2} = G \cdot \frac{m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}}{4R_{\text{з}}^2}.$$

Тогда

$$\frac{F_{\text{п}}}{F} = \frac{G \cdot \dfrac{m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}}{R_{\text{з}}^2}}{G \cdot \dfrac{m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}}{4R_{\text{з}}^2}} = \frac{G \cdot m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}}{R_{\text{з}}^2} \cdot \frac{4R_{\text{з}}^2}{G \cdot m_{\text{р}} \cdot M_{\text{з}}} = 4.$$

№ 12

Пусть масса спутника равна m. Тогда, если он движется у поверхности Земли, на него действует сила тяготения, равная по модулю

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{з}}}{R_{\text{з}}^2} = mg.$$

Модуль нормальной компоненты ускорения равен

$$a_n = \frac{v^2}{R_{\text{з}}}.$$

Очевидно, в проекции на ось, на которой лежат центры Земли и спутника и которая направлена от Земли к спутнику, уравнение движения спутника принимает вид

$$-F = -ma_n. \tag{1}$$

Так,

$$ma_n = F \Leftrightarrow m\frac{v^2}{R_{\text{з}}} = mg \Leftrightarrow v = \sqrt{gR_{\text{з}}} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6{,}371 \cdot 10^6} \approx 7901,6 \text{ м/с}.$$

При этом,

$$\omega = \frac{v}{R_{\text{з}}} = \sqrt{\frac{g}{R_{\text{з}}}}$$

и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_{\text{з}}}{g}} \approx 5066{,}1 \text{ с}.$$

В том случае, если спутник находится на высоте $H = 7000$ км $= 7 \cdot 10^6$ м от земли, на него действует сила

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{з}}}{(R_{\text{з}} + H)^2},$$

а модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \frac{v^2}{R_з + H}.$$

Тогда, руководствуясь уравнением (1), заключим, что

$$ma_n = F \Leftrightarrow m\frac{v^2}{R_з + H} = G \cdot \frac{m \cdot M_з}{(R_з + H)^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_з}{R_з + H}}.$$

Так,

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^6}} \approx 5457{,}2 \text{ м/с}.$$

При этом,

$$\omega = \frac{v}{R_з} = \sqrt{G \cdot \frac{M_з}{R_з^2(R_з + H)}}$$

и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_з^2(R_з + H)}{G \cdot M_з}} \approx 3667{,}7 \text{ с}.$$

№ 13

Жёсткости пружин, соединённых последовательно, равны

$$k_1 = 0{,}3\ \frac{\text{кН}}{\text{м}} = 300\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

и

$$k_2 = 0{,}8\ \frac{\text{кН}}{\text{м}} = 800\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Вторая пружина деформирована на $x_2 = 1{,}5$ см $= 0{,}015$ м. Силы, с которыми пружины действуют друг на друга равны. Тогда, с учётом закона Гука,

$$-k_1x_1 = -k_2x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{k_2}{k_1} \cdot x_2 = 0{,}04 \text{ м}.$$

№ 14

Известно, что первая пружина имеет жёсткость

$$k_1 = 2\ \frac{\text{кН}}{\text{м}} = 2000\ \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

а вторая —

$$k_2 = 6\ \frac{\text{кН}}{\text{м}} = 6000\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Пусть x_1 и x_2 — изменение длин первой и второй пружин соответственно, x — изменение длины системы пружин, как целого, а k — её жёсткость. Рассмотрим случай, когда пружины соединены последовательно:

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Leftrightarrow k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{2000 \cdot 6000}{2000 + 6000} = 1500\ \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

поскольку на пружины и их систему в целом действуют одинаковые силы F.

Рассмотрим случай, когда пружины соединены параллельно. Тогда сила, действующая на систему, как целое, равна сумме сил, действующих на пружины по отдельности:

$$F = F_1 + F_2 \Leftrightarrow kx = k_1x_1 + k_2x_2.$$

Заметим, что $x = x_1 = x_2$ и, как следствие,

$$kx = (k_1 + k_2)x \Leftrightarrow k = k_1 + k_2 = 2000 + 6000 = 8000\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

№ 15

Радиус петли, как манёвра, совершаемого самолётом, равен $R = 500$ м. Линейная скорость самолёта равна

$$v = 360\ \text{км/ч} = 100\ \text{м/с}.$$

Нормальное ускорение равно

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 20\ \text{м/с}^2.$$

Масса лётчика составляет $m = 70$ кг. Направим ось Oy вертикально вверх. Уравнение движения лётчика в проекции на эту ось в верхней точке траектории имеет вид

$$-N_\text{в} - mg = -ma_n \Leftrightarrow N_\text{в} = m(a_n - g) = 714\ \text{Н},$$

где N — сила реакции кресла, численно равная весу:

$$P_\text{в} = N_\text{в} = 714\ \text{Н}.$$

В нижней точке траектории проекция примет вид

$$N_\text{н} - mg = ma_n \Leftrightarrow N_\text{н} = m(a_n + g) = 2086\ \text{Н}.$$

Значит,

$$P_\text{н} = N_\text{н} = 2086\ \text{Н}.$$

№ 16

Разность между максимальным и минимальным натяжением верёвки, к который привязан камень, составляет

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 9{,}8\ \text{Н},$$

где T_2 — натяжение верёвки в нижней точки траектории (максимальное натяжение), а T_1 — в верхней (минимальное натяжение). При этом, в нижней точке проекция уравнения движения камня на вертикальную ось, направленную вверх, имеет вид

$$T_2 - mg = ma_n \Leftrightarrow T_2 = ma_n + mg,$$

а в верхней —

$$-T_1 - mg = -ma_n \Leftrightarrow T_1 = ma_n - mg.$$

Так,

$$\Delta T = (ma_n + mg) - (ma_n - mg) = 2mg \Leftrightarrow m = \frac{\Delta T}{2g} = 0{,}5\ \text{кг}.$$

№ 17

За время $\tau = 0{,}8$ с скорость пули изменилась от $v_0 = 800$ м/с до $v_1 = 200$ м/с. Её масса равна $m = 10$ г $= 0{,}01$ кг. Сила сопротивления воздуха равна

$$F = kv^2.$$

Пренебрегая силой тяжести, запишем уравнение движения пули в проекции на направление, противоположное направлению её движения:

$$F = ma \Leftrightarrow kv^2 = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{k}{m}\,dt = \frac{dv}{v^2}.$$

Проинтегрируем полученное:

$$\int\limits_0^{\tau} \frac{k}{m}\,dt = \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v^2} \Leftrightarrow \left.\frac{kt}{m}\right|_0^{\tau} = \left.\frac{1}{v}\right|_{v_0}^{v_1} \Leftrightarrow \frac{k\tau}{m} - \frac{k\cdot 0}{m} = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \Leftrightarrow k = \frac{m(v_0 - v_1)}{\tau v_0 v_1}.$$

Так,

$$k = 4{,}6875 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}.$$

№ 18

Известно, что

$$R_\text{з} = nR_\text{л},$$

где $n = 3{,}66$, а так же

$$\rho_\text{з} = k\rho_\text{л},$$

где $k = 1{,}66$. Ускорение свободного падения на земле равно

$$g = G\cdot\frac{M_\text{з}}{R_\text{з}^2} = G\cdot\frac{\rho_\text{з}\cdot V_\text{з}}{R_\text{з}^2} = G\cdot\frac{\rho_\text{з}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_\text{з}^3}{R_\text{з}^2} = G\cdot\frac{\rho_\text{з}\cdot 4\pi R_\text{з}}{3},$$

а на луне, аналогично,

$$g_\text{л} = G\cdot\frac{\rho_\text{л}\cdot 4\pi R_\text{л}}{3}.$$

Заметим, что

$$g_\text{л} = G\cdot\frac{\dfrac{\rho_\text{з}}{k}\cdot 4\pi\dfrac{R_\text{з}}{n}}{3} = \frac{G\cdot\dfrac{\rho_\text{з}\cdot 4\pi R_\text{з}}{3}}{kn} = \frac{g}{kn} \approx 1{,}61\ \text{м/с}^2.$$