№ 8

При начальной скорости $v_0 = 10$ м/с тормозной путь машины составил $S = 8$ м. Найдём ускорение автомобиля из формул

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

и

$$v = v_0 + at,$$

где v — конечная скорость, равная 0 м/с. Так,

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

и

$$S = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2S}$$

(имеется ввиду проекция ускорения на направление движения). Сила реакции опоры (дороги) численно равна весу машины:

$$N = mg.$$

При этом

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$$

и

$$-F_{\text{тр}} = ma,$$

поскольку сила трения — единственная сила, действующая на автомобиль в горизонтальном направлении (ось направлена в сторону движения). В таком случае,

$$-\mu mg = ma \Leftrightarrow \mu = -\frac{a}{g} = \frac{v_0^2 - v^2}{2gS} \approx 0{,}64.$$

№ 10

Известно, что масса тела, лежащего на наклонной плоскости под углом $\alpha = 20°$ к горизонтали, равна $m = 10$ кг. Также на него действует горизонтально направленная сила $F = 8$ Н. Уравнение движения тела имеет вид

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Направим ось абсцисс вверх, перпендикулярно плоскости, на которой лежит тело, а ось ординат — по направлению движения тела. Ось Oy образует с вектором $\vec{F}$ угол α, а с вектором $m\vec{g}$ — $90° - \alpha$. Спроецируем уравнение движения на заданные оси:

$$\begin{aligned} Ox: &\quad F \sin\alpha - mg \sin(90° - \alpha) + N = 0, \\ Oy: &\quad F \cos\alpha + mg \cos(90° - \alpha) = ma. \end{aligned}$$

Сила P, с которой тело давит на плоскость, по модулю равна силе реакции опоры, а по направлению противоположна ей:

$$P = N = mg \sin(90° - \alpha) - F \sin\alpha = mg \cos\alpha - F \sin\alpha \approx 89{,}4 \text{ Н},$$
$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Ускорение тела равно

$$a = \frac{F \cos\alpha}{m} + g \cos(90° - \alpha) = \frac{F \cos\alpha}{m} + g \sin\alpha \approx 4{,}1 \text{ м/с}^2.$$

№ 11

Направим ось Oy вертикально вверх. Пусть масса левого груза машины Атвуда равна m_2, а правого — m_1, причём

$$m_1 > m_2.$$

Уравнения движения грузов принимают вид

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\vec{a}_2 \end{cases},$$

где $a_1 = a_2 = a$, или в проекции на ось Oy —

$$\begin{cases} -m_1 g + T = -m_1 a \\ -m_2 g + T = m_2 a \end{cases}. \tag{1}$$

Вычтем из второго уравнения системы (1) первое и выразим ускорение:

$$-m_2 g + m_1 g = m_2 a + m_1 a \Leftrightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Теперь в первое уравнение системы (1) подставим найденное выражение для ускорение и выразим силу натяжения нити:

$$-m_1 g + T = -m_1\frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

На ось блока действует сила

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

№ 12

Угол, который составляет наклонная плоскость с горизонталью, равен $\alpha = 20°$. Масса груза, который на ней лежит, равна $m_1 = 0{,}2$ кг, а масса груза, связанного с ним — $m_2 = 0{,}15$ кг. Уравнения движения тел принимают вид

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases},$$

где $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ — силы натяжения нити, приложенные к телам массы m_1 и m_2 соответственно, а $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — их ускорения. При этом

$$T_1 = T_2 = T$$

и

$$a_1 = a_2 = a.$$

Направим ось Oy по направлению движения груза массой m_1, а ось Ox — вертикально вниз. Запишем уравнения движения в проекциях на эти оси (первое — на ось Oy, а второе — на ось Ox):

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\alpha + T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = m_1 a + m_1 g\sin\alpha \\ T = m_2 g - m_2 a \end{cases}.$$

Приравняем полученные выражения:

$$m_1 a + m_1 g\sin\alpha = m_2 g - m_2 a \Leftrightarrow a = \frac{(m_2 - m_1\sin\alpha)g}{m_1 + m_2} \approx 2{,}28 \text{ м/с}^2.$$

№ 13

Ускорение системы грузов массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}6$ кг равно $a = 4{,}9$ м/с^2 и направлено вверх. Пусть a' — ускорение грузов относительно стола. Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} - m_1\vec{a} = m_1a'_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 - m_2\vec{a} = m_2a'_2 \end{cases}$$

(под векторами $-m_1\vec{a}$ и $-m_2\vec{a}$ имеются ввиду силы противодействия движению лифта), где $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ — силы натяжения нити, приложенные к телам массы m_1 и m_2 соответственно. При этом

$$T_1 = T_2 = T.$$

Направим ось Ox горизонтально вправо, а ось Oy — вертикально вверх. Запишем уравнения движения в проекциях на эти оси (первое — на ось Ox и Oy, а второе — на ось Oy):

$$\begin{cases} -T + F_{\text{тр}} = -m_1a' \\ -m_1g + N - m_1a = 0 \\ -m_2g + T - m_2a = -m_2a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{T - F_{\text{тр}}}{m_1} \\ N = m_1(a+g) \\ a' = \dfrac{m_2g - T + m_2a}{m_2} \end{cases}.$$

Приравняем первое и третье выражения:

$$\frac{T - F_{\text{тр}}}{m_1} = \frac{m_2g - T + m_2a}{m_2} \Leftrightarrow T = \frac{m_1m_2(a+g) + m_2F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2}.$$

При этом

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_1(a+g),$$

где $\mu = 0{,}1$. Тогда

$$T = \frac{m_1m_2(a+g)(1+\mu)}{m_1+m_2} = 4{,}41 \text{ Н}.$$

№ 14

Координаты материальной точки массой m зависят от времени следующим образом:

$$x = A\cos\omega t,$$
$$y = B\sin\omega t.$$

Тогда

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = A\cos\omega t \cdot \vec{i} + B\sin\omega t \cdot \vec{j},$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -A\omega\sin\omega t \cdot \vec{i} + B\omega\cos\omega t \cdot \vec{j}$$

и

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t \cdot \vec{i} - B\omega^2\sin\omega t \cdot \vec{j}.$$

Значит,

$$a = \sqrt{(-A\omega^2\cos\omega t)^2 + (-B\omega^2\sin\omega t)^2} = \omega^2\sqrt{A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t}$$

и

$$F = ma = m\omega^2\sqrt{A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t}.$$

№ 15

Сила

$$F = F_0 \cos \omega t$$

($F_0 = \mathrm{const}$, $\omega = \mathrm{const}$) приводит в движение тело массой m. При этом известно, что

$$r(0) = 0 \text{ м}, \quad v(0) = 0 \text{ м/с}.$$

Поскольку

$$F = ma \Leftrightarrow F_0 \cos \omega t = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{F_0}{m} \cos \omega t \, dt = dv,$$

то

$$\frac{F_0}{m} \int \cos \omega t \, dt = \int dv \Leftrightarrow \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t = v + v(0) \Leftrightarrow \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t = v.$$

С учетом того, что

$$v = \frac{dr}{dt},$$

имеем

$$\frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t = \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \, dt = dr.$$

Тогда

$$\frac{F_0}{m\omega} \int \sin \omega t \, dt = \int dr \Leftrightarrow -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t = r + r(0) \Leftrightarrow r = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t.$$

№ 16

Массы грузов, связанных нитью, имеют массы $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}7$ кг. На груз массой m_1 действует сила $F = 6$ Н. Запишем уравнения движения грузов в проекциях на направление движения:

$$\begin{cases} -T + F = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases},$$

где T — сила натяжения нити. Так,

$$a = \frac{T}{m_2}$$

и, как следствтие,

$$-T + F = m_1 \frac{T}{m_2} \Leftrightarrow T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 3{,}5 \text{ Н}.$$

При этом

$$a = \frac{m_2 F}{m_2(m_1 + m_2)} = \frac{F}{m_1 + m_2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

№ 17

Высота клина равна $h = 1$ м, а длина — $l = 2$м. Тогда угол между наклонной плоскостью и горизонталью равен

$$\alpha = \arcsin\frac{h}{l}.$$

Расположим ось Ox по направлению движения тела, а ось Oy — вверх, перпендикулярно наклонной плоскости. Уравнение движения тела принимает вид

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a},$$

или в проекции на оси абсцисс и ординат соответсвенно,

$$mg\cos(90^\circ - \alpha) - F_{\text{тр}} = ma,$$
$$-mg\sin(90^\circ - \alpha) + N = 0,$$

то есть

$$mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma,$$
$$N = mg\cos\alpha.$$

Значит,

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

и

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = g\left(\sin\arcsin\frac{h}{l} - \mu\cos\arcsin\frac{h}{l}\right) =$$
$$= \frac{g\left(h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)}{l}.$$

Поскольку $\mu = 0{,}15$, то

$$a \approx 3{,}63 \text{ м/с}^2.$$

При этом

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

и $v_0 = 0$ м/с, а значит,

$$l = x - x_0 = \frac{at^2}{2}.$$

Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \approx 1{,}05 \text{ с}.$$

№ 18

Масса тела, находящегося на горизонтальном столе равна $M = 2$ кг, а тел, связанных с ним нитью — $m_1 = 0{,}5$ кг (справа) и $m_2 = 0{,}3$ кг. Направим ось Ox горизонтально вправо, ось Oy — вертикально вверх. Уравнение движения тела массой M на ось абсцисс имеет вид

$$-T_2 + T_1 = Ma,$$

тела массой m_2 на ось ординат —

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a,$$

тела массой m_1 на ту же ось —

$$-m_1 g + T_1 = -m_1 a.$$

Преобразуем последние два уравнения:

$$T_2 = m_2 g + m_2 a, \quad T_1 = m_1 g - m_1 a,$$

и подставим их в первое:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} g = 0{,}7 \text{ м/с}^2.$$