§1 Кинематика поступательного движения. Средняя скорость

№ 1

Автомобиль половину пути движется со скоростью $v_1 = 72$ км/ч, а вторую половину пути — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Найдём среднюю скорость автомобиля $v_{\text{ср}}$.

Очевидно, что

$$s_1 = s_2 = \frac{s}{2},$$

где s — полный путь, который проехал автомобиль, s_1 и s_2 — первая и вторая половины пути соответственно. Тогда время прохождения первой и второй половины пути соответсвенно равны

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{2v_1}$$

и

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{2v_2}.$$

Средняя скорость вычисляется по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t},$$

где $t = t_1 + t_2$ — полное время в пути. Преобразуем последнюю формулу так, чтобы средняя скорость была выражена через известные нам величины:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\dfrac{s}{2v_1} + \dfrac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Подставляя значения скоростей, получим

$$v_{\text{ср}} = 51\frac{3}{7} \approx 51{,}4 \text{ км/ч}.$$

№ 2

Автомобиль половину времени движется со скоростью $v_1 = 72$ км/ч, а вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Найдём среднюю скорость автомобиля.

По условию,

$$t_1 = t_2 = \frac{t}{2},$$

где t_1 и t_2 — первая и вторая половина времени соответсвенно, а t — полное время. Путь, пройденный за время t_1, найдём, как

$$s_1 = v_1t_1 = \frac{v_1t}{2},$$

а за время t_2, как

$$s_2 = v_2t_2 = \frac{v_2t}{2}.$$

Подставим эти выражения в формулу

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t},$$

где $s = s_1 + s_2$ — полный путь, пройденный автомобилем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{\dfrac{v_1 t}{2} + \dfrac{v_2 t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

В силу известных нам значений, $v_{\text{ср}} = 56$ км/ч.

№ 3

Положение материальной точки на оси Ox в зависимости от времени задано уравнением $x = x(t) = 4t + 8t^2 - 2t^3$, $[x] =$ м. Найдём среднюю скорость перемещения точки на временном интервале от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 4$ с. Сравним полученное значение с мгновенными скоростями v_1 и v_2 в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — радиус вектор материальной точки. Поскольку точка движется по прямой вдоль оси Ox, то её положение, а точнее её радиус вектор, полностью определятся координатой x: $\vec{r} = x\vec{i}$, где i — единичный базисный вектор на оси абсцисс. Чтобы найти среднюю скорость перемещения точки, воспользуемся формулой

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

где

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \big(x(t_2) - x(t_1)\big)\vec{i} = \big(4(t_2 - t_1) + 8(t_2^2 - t_1^2) - 2(t_2^3 - t_1^3)\big)\vec{i}$$

и $\Delta t = t_2 - t_1$. То есть

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{4(t_2 - t_1) + 8(t_2^2 - t_1^2) - 2(t_2^3 - t_1^3)}{t_2 - t_1}\vec{i} = \\ = \big(4 + 8(t_1 + t_2) - 2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)\big)\vec{i} = -4\vec{i}.$$

Мгновенная же скорость вычисляется по формуле

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

С учётом условия задачи,

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{i} = (4 + 16t - 6t^2)\vec{i}.$$

В точках t_1 и t_2 она принимает значения $\vec{v}_1 = 12\vec{i}$ и $\vec{v}_2 = -28\vec{i}$ соответственно.

Сравнивая полученные результаты, заметим, что скорость точки в разные моменты времени направлена в разные стороны. При этом на исследуемом временном интервале скорость меняет своё направления с положительного на отрицательное.

№ 4

Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой имеет вид $x(t) = 5 + 4t - t^2$, $[x] =$ м. Найдём максимальное значение координаты; время, когда точка возвращается в то же место, где она была в начальный момент времени; путь, пройденный точкой с момента $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.

Максимальное значение координаты $x_m = x(t_m)$ (абсолютный максимум функции координаты от времени) найдём, исходя из следующих соображений. График функции $x(t)$ представляет из себя параболу, ветви которой направлены вниз. Значит, изначально значение координаты возрастает (предполагается, что точка максимума лежит правее нуля), а затем, после момента t_m, убывает. Знак скорости в таком случае меняется на противоположный, а её значение обязательно проходит через 0. Очевидно, что последнее происходит в момент времени t_m:

$$\dot{x}(t_m) = 0.$$

Решим последнее уравнение:

$$4 - 2t_m = 0 \Leftrightarrow t_m = 2 \text{ с}.$$

В таком случае, $x_m = 9$ м.

В начальный момент времени точка находилась в положении, которое было задано координатой $x_0 = x(0) = 5$ с. Время τ, когда точка вернётся в то же положение, найдём, решая уравнение

$$x(\tau) = x_0.$$

Так,

$$5 + 4\tau - \tau^2 = 5 \Leftrightarrow \tau = 4 \text{ с}.$$

Как мы уже поняли, в интервале (t_1, t_m) тело двигалось в одну сторону, а в интервале (t_m, t_2) — в другую. При этом путь, пройденный телом за каждый из этих промежутков времени, совпадает с модулем соответствующего перемещения. Значит, путь, пройденный телом, в интервале времени (t_1, t_2) можно найти, как

$$s = |x(t_m) - x(t_1)| + |x(t_2) - x(t_m)|.$$

С учётом данных, полученных нами в ходе анализа функции координаты от времени, раскроем модули:

$$s = 2x(t_m) - x(t_1) - x(t_2) = 4(2t_m - t_1 - t_2) + 2t_m^2 + t_1^2 + t_2^2.$$

Подставив соответствующие значения, придём к значению $s = 33$ м.

№ 5

Материальная точка движется в плоскости согласно уравнениям $x(t) = 5+3t+4t^2$ и $y(t) = 2 - 3t + 6t^2$, $[x] = [y] =$ м. Найдём модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_0 = 5$ с.

Радиус вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки может быть полностью описан двумя координатами $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат. В нашем случае, формула для нахождения скорости принимает вид

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = (8t+3)\vec{i} + (12t-3)\vec{j}.$$

По формуле

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = 8\vec{i} + 12\vec{j}$$

можно найти ускорение. Как мы видим, ускорение постоянно и в любой момент времени принимает значение

$$a = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13} \approx 14{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Скорость в момент времени t_0 равна

$$\vec{v}_0 = (8t_0+3)\vec{i} + (12t_0-3)\vec{j} = 43\vec{i} + 57\vec{j}.$$

Тогда по модулю

$$v_0 = \sqrt{43^2 + 57^2} = \sqrt{5098} \approx 71{,}4 \text{ м/с}.$$

№ 6

Точка движется вдоль оси Ox согласно графику, изображенному на рисунке 1. Построим графики изменения ускорения и скорости движения. Определим начальную и средние (в интервале от $t_0 = 0$ с до $t_1 = 8$ с) скорости движения.

Рис. 1. Функция $x(t)$

Обратим внимание на рисунок 1. На нём изображена парабола

$$x(t) = a + bt + ct^2,$$

где a, b, c — некоторые постоянные. Она пересекает ось абсцисс в точках $(0,0)$ и $(8,0)$, а её вершина лежит в точке $(4,16)$, значит

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(8) = 0 \\ x(4) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 8b + 8^2c = 0 \\ a + 4b + 4^2c = 16. \end{cases}$$

Решая систему, найдём, что $a = 0$, $b = 8$ и $c = -1$, то есть $x(t) = 8t - t^2$. Тогда для скорости имеем

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 8 - 2t,$$

а для ускорения —

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -2 \text{ м/с}^2.$$

При этом, конечно, имеются ввиду проекции величин на ось, вдоль которой происходит движение. Построим соответствующие графики (рисунок 2).

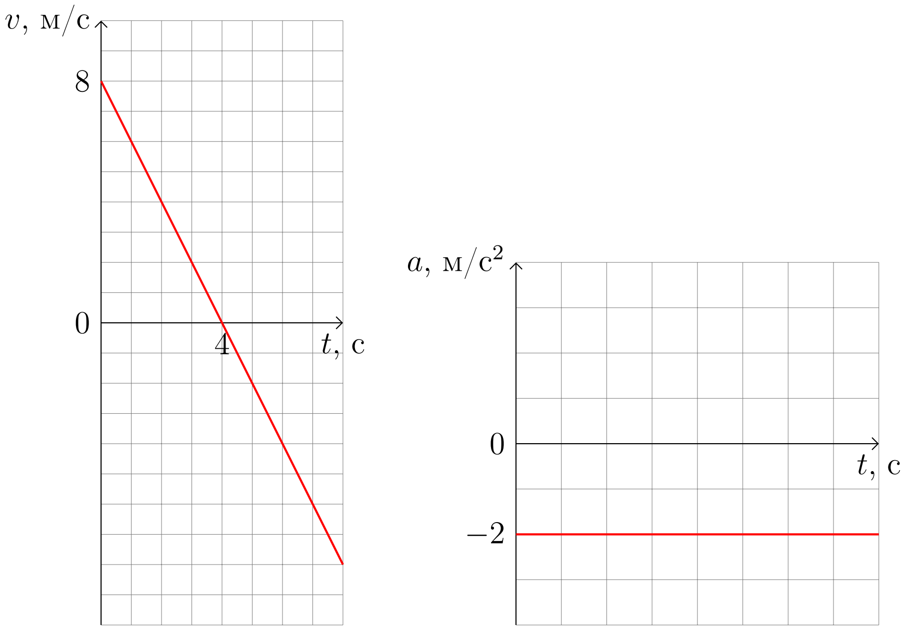

Рис. 2. Функции $v(t)$ (слева) и $a(t)$ (справа)

Как видно из графика функции $v(t)$, начальная скорость (скорость в момент времени $t_0 = 0$ с) равняется $v_0 = 8$ м/с. Определить среднюю скорость перемещения точки (точнее, её проекцию) можно по формуле

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Однако, в интересующем нас промежутке времени, $\Delta r = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) = \vec{0}$, поскольку $x(t_0) = x(t_1) = 0$ м, а значит $\vec{v}_{\text{ср}} = \vec{0}$.

Глядя на график функции $x(t)$, нетрудно догадаться, что путь, пройденный точкой в интервале времени $(0, 8)$, можно вычислить, как

$$s = 2x(4) = 32 \text{ м},$$

поскольку точка проходит одинаковое расстояние, за промежутки $(0, 4)$ и $(4, 8)$. Тогда средняя путевая скорость вычисляется по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t},$$

где $t = t_1 - t_0 = t_1$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_1} = 4 \text{ м/с}.$$

№ 7

Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и с постоянным ускорением $a = -5$ м/с^2. Определим, чему равен путь, пройденный точкой, и модуль ее перемещения спустя $t_1 = 4$ с после начала движения.

В терминах проекций на ось, вдоль которой осуществляется движение, скорость определяется выражением

$$v(t) = \int a\,dt = at + v_0$$

(убедится в том, что константой интегрирования является начальная скорость, можно, подставив в уравнение $v = at + \mathrm{const}$ значение $t = 0$ с). Единственная координата радиус-вектора выражается аналогично:

$$x(t) = \int v\,dt = \int (at + v_0)\,dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Спустя время t_1 после начала движения, точка окажется в положении, задаваемом координатой $x(t_1)$. При этом её перемещение окажется равным

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}(t_1) - \vec{r}_0| = |x(t_1) - x_0| = \left|\frac{at_1^2}{2} + v_0 t_1\right| = 0 \text{ с}.$$

Найдём путь, пройденный за указанное время, чисто математически. Функция $x(t)$ немонотонна, а значит может иметь локальные экстремумы в точках интервала $(0, t_1)$.

Пусть τ — точка экстремума (локального или абсолютного) функции $x(t)$, если таковая существует. С учётом дифференцируемости функции на всей области определения $\mathbb{R}$, воспользуемся леммой Ферма: $\dot{x}(\tau) = 0$. Однако $\dot{x}(\tau)$ есть ни что иное, как $v(\tau)$, а значит τ найдём из уравнения $v(\tau) = 0$. Так,

$$\tau = -\frac{v_0}{a} = 2 \text{ с}.$$

Чтобы проверить, точно ли точка τ является точкой экстремума, следует найти вторую производную функции $x(t)$ в этой точке. Как нам известно, $\ddot{x}(\tau) = a < 0$. Последнее говорит о том, что, точка τ является точкой локального максимума.

Исходя из написанного выше, можно сделать вывод, что в интервале $(0, \tau)$ тело двигалось в одну сторону, а в интервале (τ, t_1) — в другую. При этом путь, пройденный телом за каждый из этих промежутков времени, совпадает с модулем соответствующего перемещения. Значит, путь, пройденный телом, в интервале времени $(0, t_1)$ можно найти, как

$$s = |x(\tau) - x_0| + |x(t_2) - x(\tau)|.$$

С учётом данных, полученных нами в ходе анализа функции координаты от времени, раскроем модули:

$$s = 2x(\tau) - x(t_1) - x_0 = \frac{a(2\tau^2 - t_1^2)}{2} + v_0(2\tau - t_1) = 20 \text{ м}.$$

№ 8

Автомобиль едет по прямой из пункта A в пункт B, преодолевая это расстояние за $T = 1$ ч. Известно, что скорость автомобиля меняется по закону

$$v(t) = v_0 \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right),$$

где время t отсчитывается с момента выезда из пункта A, а максимальная скорость автомобиля $v_0 = 80$ км/ч. Определим среднюю путевую скорость автомобиля.

Для начала найдём координату материальной точки в зависимости от времени:

$$x(t) = \int v(t)\,dt = v_0 \int \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)\,dt = -\frac{Tv_0}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right).$$

Отсюда найдём координаты точек A и B:

$$A = x(0) = -\frac{Tv_0}{\pi}, \quad B = x(T) = \frac{Tv_0}{\pi}.$$

Поскольку скорость не меняла направление, то путь равен

$$s = AB = B - A = \frac{2Tv_0}{\pi}.$$

Тогда средняя путевая скорость принимает значение

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{T} = \frac{2v_0}{\pi} = \frac{160}{\pi} \approx 50{,}9 \text{ км/ч}.$$

№ 9

Скорость реки составляет $V = 3$ км/ч, а скорость движения лодки относительно воды — $u = 6$ км/ч. Определим, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперёк реки.

Чтобы лодка плыла поперёк реки, её скорость $\vec{U}$ относительно земли должна быть направлена перпендикулярно течению. Тогда, для компенсанции влияния последнего, скорость лодки $\vec{u}$ относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке 3. То есть она складывается из векторов $\vec{U}$ и $-\vec{V}$.

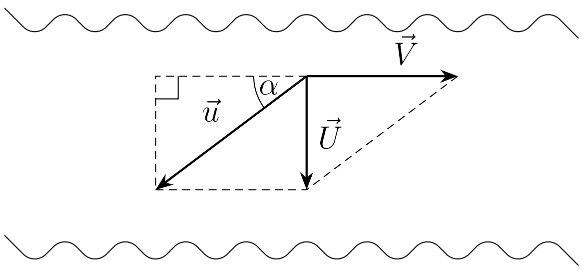

Рис. 3

Через α обозначим угол между вектором $\vec{u}$ и линией берега. Из рисунка видно, что

$$\cos\alpha = \frac{V}{u},$$

а значит,

$$\alpha = \arccos\frac{V}{u} = 60^\circ.$$

№ 10

Капля дождя при скорости ветра $v = 11$ м/с падает под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Определим, при какой скорости ветра капля воды будет падать под углом $\beta = 45°$.

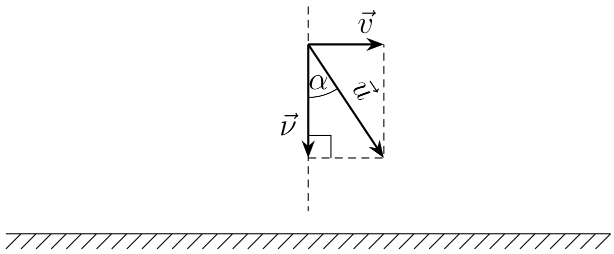

Рис. 4

Обозначим скорость капли через $\vec{u}$, а вертикальную составляющую скорости — через $\vec{\nu}$. Из рисунка 4 видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{\nu} \Rightarrow v = \nu \operatorname{tg}\alpha.$$

Так выглядит общая формула зависимости угла, под которым падает капля, от скорости ветра. При этом величина вектора $\vec{\nu}$ не зависит от скорости ветра:

$$\nu = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha} = \text{const}.$$

В том случае, если скорость капли составляет с вертикалью угол β, общий вид выражения скорости ветра не меняется:

$$v_1 = \nu \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} v = 11\sqrt{3} \approx 19{,}1 \text{ м/с}.$$

№ 11

Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость пройденного пути дается уравнениями $s_1 = Ft + Bt^2$ и $s_2 = Ct + Dt^2 + At^3$. Определим скорость второго автомобиля в системе координат, связанной с первым.

Скорости автомобилей вычисляются, как

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = F + 2Bt, \quad v_2 = \frac{ds_2}{dt} = C + 2Dt + 3At^2.$$

Обозначим скорость второго автомобиля относительного первого через $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Поскольку автомобили движутся вдоль одной прямой, то векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ коллинеарны, а значит,

$$u = v_2 - v_1 = C - F + 2(D - B)t + 3At^2.$$

(в проекции на направление движения).

№ 12

Автомобиль проехал первую половину времени своего движения со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а вторую половину времени своего движения — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Определим среднюю скорость движения автомобиля.

Полное время движения обозначим через t. Тогда

$$t_1 = t_2 = \frac{t}{2},$$

где t_1 и t_2 — первая и вторая половины времени движения. Путь, пройденный за первую половину времени составляет

$$s_1 = v_1 t_1 = \frac{v_1 t}{2},$$

а за вторую —

$$s_2 = v_2 t_2 = \frac{v_2 t}{2}.$$

Средняя скорость тела вычисляется по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t},$$

где $s = s_1 + s_2$ — полный путь, проделанный автомобилем. Так,

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{\frac{v_1 t}{2} + \frac{v_2 t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

№ 13

Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$. Напишем зависимости скорости и ускорения от времени: $v(t)$ $a(t)$.

Очевино, что

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3At^2\vec{i} + 2Bt\vec{j}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6At\vec{i} + 2B\vec{j}.$$

№ 14

Движение точки по прямой задано уравнением $x = 2t - 0{,}5t^2$, $[x] =$ м. Определим среднюю скорость перемещения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

При $t_1 = 1$ с, как и при $t_2 = 3$ с, координата точки равна $x_1 = x_2 = 1{,}5$ м. Ввиду прямолинейности движения, проекция перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ на ось, вдоль которой происходит движение, равна

$$\Delta r = x_2 - x_1 = 0 \text{ м}.$$

Тогда $\Delta\vec{r} = \vec{0}$ и средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{0}.$$

№ 15

Частица движется в плоскости XY из точки с координатами $x_0 = y_0 = 0$ со скоростью $\vec{v} = a\vec{i} + bt\vec{j}$, где a и b — некоторые постоянные. Найдём уравнение $y(x)$ её траектории.

Получим зависимость радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt = a\vec{i}\int dt + b\vec{j}\int t\,dt = at\vec{i} + \frac{bt^2}{2}\vec{j} + \vec{r}_0$$

(можно убедится, что константа интегрирования равна $\vec{r}_0$, то есть радиус-вектору в начальный момент времени, подставив в выражение $\vec{r}$ значение $t = 0$ с). Конечно, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, а значит $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = \vec{0}$. Тогда

$$\vec{r} = at\vec{i} + \frac{bt^2}{2}\vec{j}.$$

Иначе говоря,

$$x(t) = at, \quad y(t) = \frac{bt^2}{2}.$$

Выразив t через x, подставим полученное в $y(t)$:

$$y(x) = \frac{b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}{2} = \frac{bx^2}{2a^2}.$$

№ 16

Движение материальной точки в плоскости XY описывается законом $x = At$, $y = At(1 + Bt)$, где A и B — положительные постоянные. Определим уравнение траектории, а так же радиус-вектор, скорость и ускорение точки в зависимости от времени.

Выразим время через соответствующее ему значение абсциссы:

$$t = \frac{x}{A}.$$

Исходя из этого выражения, найдём уравнение траектории:

$$y(x) = A \cdot \frac{x}{A} \cdot \left(1 + B \cdot \frac{x}{A}\right) = x + \frac{Bx^2}{A}.$$

Выражение радиус-вектор точки через единичные базисные векторы плоскости имеет вид $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Скорость равна

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{i} + A(1 + 2Bt)\vec{j},$$

а ускорение —

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2AB\vec{j}.$$

Модули этих величин вычисляются по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2t^2 + A^2t^2(1 + Bt)^2} = At\sqrt{1 + (1 + Bt)^2},$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2 + A^2(1 + 2Bt)^2} = A\sqrt{1 + (1 + 2Bt)^2}$$

и

$$a = |2AB| = 2AB.$$

№ 17

Зависимость пройденного телом пути от времени t дается уравнением $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$, $[s] = $ м. Найдём зависимость скорости и ускорения от времени, а так же расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение через $\tau = 2$ с после начала движения

Скорость и ускорение тела задаются формулами

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 - 6t + 12t^2, \quad a = \frac{dv}{dt} = -6 + 24t$$

соответсвенно. Значит,

$$\begin{gathered} s(\tau) = 2\tau - 3\tau^2 + 4\tau^3 = 24 \text{ м}, \\ v(\tau) = 2 - 6\tau + 12\tau^2 = 38 \text{ м/с}, \\ a(\tau) = -6 + 24\tau = 42 \text{ м/с}^2. \end{gathered}$$

№ 18

Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = -2t^2$ и $x_2 = 2t + t^3$. Определим момент времени, для которого ускорения этих точек будут равны.

Поскольку точки движутся по прямой, их радиус-векторы представляются толь одной координатой x_i, $i \in 1, 2$. Тогда выражения проекций скоростей на направление движения имеют вид

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = -4t, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2 + 3t^2,$$

а проекций ускорений —

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = -4, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 6t.$$

Проекции ускорений двух точек в любой момент времени направлены в противоположные стороны, а потому имеет смысл говорить лишь о равенстве ускорений по модулю:

$$|a_1| = |a_2|.$$

Так, найдём соответствующий этому момент времени

$$|-4| = 6t \Leftrightarrow t = 0{,}(6) \approx 0{,}67 \text{ с}.$$

№ 19

Зависимость пройденного точкой пути от времени задана уравнением $s = 0{,}14t^2 + 0{,}01t^3$, $[s] = $ м. Определим, через какое время ускорение точки будет равно $a_1 = 1$ м/с^2, мгновенную скорость в этот момент времени и среднюю скорость перемещения за промежуток времени от $t_a = 0$ с до $t_b = 2$ с.

Скорость и ускорение точки вычисляются по формулам

$$v = \frac{ds}{dt} = 0{,}28t + 0{,}03t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = 0{,}28 + 0{,}06t$$

соответсвенно. Решим уравнение $a_1 = a(t_1)$, для нахождения момента времени t_1, которому соответствует ускорение a_1:

$$a_1 = 0{,}28 + 0{,}06t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{a_1 - 0{,}28}{0{,}06} = 12 \text{ с.}$$

В то же время скорость будет равна

$$v_1 = v(t_1) = 0{,}28t_1 + 0{,}03t_1^2 = 7{,}68 \text{ м/с.}$$

Путь, пройденный телом во временном промежутке $t_a \div t_b$, равен

$$s_{ab} = s(t_b) = 0{,}14t_b^2 + 0{,}01t_b^3 = 0{,}64 \text{ м.}$$

Полное время движения равно t_b, а значит, средняя скорость за этот промежуток составит

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{ab}}{t_b} = 0{,}32 \text{ м/с.}$$

№ 20

Положение точки на прямой в зависимости от времени дается уравнением $x = -9t + 6t^2$, $[x] =$ м. Найдём средние скорости перемещения $\langle v_1 \rangle$ на интервале от $t_1 = 0$ с до $t_2 = 1$ с и $\langle v_2 \rangle$ на интервале $t_2 = 1$ с до $t_3 = 2$ с.

За временной интервал $t_1 \div t_2$ точка совершила перемещение $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$. В терминах известных нам проекций, запишем

$$r_{12} = x(t_2) - x(t_1) = x(t_2) = -9t_2 + 6t_2^2 = -3 \text{ м,}$$

поскольку $x(t_1) = 0$ м. Поскольку t_2 — время движения точки, то проекция средней скорости за это время равна

$$\langle v_1 \rangle = \frac{r_{12}}{t_2} = -3 \text{ м/с.}$$

За временной интервал $t_2 \div t_3$ точка совершила перемещение $\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)$. В терминах известных нам проекций, запишем

$$r_{23} = x(t_3) - x(t_2) = -9(t_3 - t_2) + 6(t_3^2 - t_2^2) = 9 \text{ м.}$$

Поскольку $t_3 - t_2$ — время движения точки, то проекция средней скорости за это время равна

$$\langle v_2 \rangle = \frac{r_{23}}{t_3 - t_2} = 9 \text{ м/с.}$$

№ 21

Движение двух материальных точек заданы уравнениями $x_1 = 20 + 4t - 4t^2$ и $x_2 = 2 + t + 0{,}5t^2$. Определим, в какой момент времени скорости этих точек будут одинаковы, а так же скорости и ускорения точек в этот момент.

Радиус-векторы точек задаются уравнениями $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}$ и $\vec{r}_2 = x_2\vec{i}$, где $\vec{i}$ — единичный базисный вектор прямой, вдоль которой происходит движение. Тогда скорость и ускорение первой точки равны

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = (4 - 8t)\vec{i}, \quad \vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -8\vec{i},$$

а второй —

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = (1 + t)\vec{i}, \quad \vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{i}.$$

Вычислим момент времени, когда скорости точек совпадут, из уравнения $\vec{v}_1(t_0) = \vec{v}_2(t_0)$:

$$(4 - 8t_0)\vec{i} = (1 + t_0)\vec{i} \Leftrightarrow 4 - 8t_0 = 1 + t_0 \Leftrightarrow t_0 = 0{,}(3) \approx 0{,}3 \text{ с}.$$

При этом

$$\vec{v}_1(t_0) = (4 - 8t_0)\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i} \approx 1{,}3\vec{i}, \quad \vec{v}_2(t_0) = (1 + t_0)\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i} \approx 1{,}33\vec{i}.$$

Ускорения точек постоянны в любой момент времени.

№ 22

Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением

$$s = 2t + 8t^2 + 16t^3, \quad [s] = \text{м}.$$

Найдём расстояние, пройденное телом, его скорость и ускорение через $\tau = 2$ с после начала движения.

Скорость и ускорение тела находятся по формулам

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 + 16t + 48t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = 16 + 96t.$$

Спустя время τ с момента начала движения, указанные выше величины будут равны следующим значениям:

$$s(\tau) = 2\tau + 8\tau^2 + 16\tau^3 = 164 \text{ м},$$
$$v(\tau) = 2 + 16\tau + 48\tau^2 = 226 \text{ м/с},$$
$$a(\tau) = 16 + 96\tau = 208 \text{ м/с}^2.$$