

Казначеев М.А.

Лабораторная работа №Д-1

Определение момента инерции твёрдого тела с помощью
трифилярного подвеса

Самара
2023

Содержание

I Теоретические сведения	2
II Схема установки	3
III Результаты измерений и обработка данных	3
IV Вывод	8
V Контрольные вопросы	8

Аннотация

Цель работы: Измерить моменты инерции ненагруженной платформы трифилярного подвеса, а так же матааллических конуса, кольца и цилиндра. Сравнить экспериментальные значения моментов инерции исследуемых тел с теоретическими значениями соответствующих величин.

В работе используются: Трифилярный подвес, конус, кольцо, цилиндр, штангенциркуль, электронный секундомер.

I Теоретические сведения

Пусть масса вращающейся платформы D (см. рисунок 1) равна m и при вращении она поднимается на высоту h . Тогда приращение потенциальной энергии определяется формулой

$$U = mgh,$$

где g — ускорение свободного падения. При прохождении положения равновесия во время вращения в другом направлении, кинетическая энергия платформы равна

$$K = \frac{I\omega_0^2}{2},$$

где I — момент инерции платформы, а ω_0 — её угловая скорость в этот момент. Исключая работу сил трения, запишем закон сохранения энергии:

$$K_i + U_i = \text{const.} \quad (1)$$

При достижении высоты h , платформа имеет только потенциальную энергию, а в положении равновесия — только кинетическую. Тогда

$$K = U \Leftrightarrow \frac{I\omega_0^2}{2} = mgh. \quad (2)$$

Поскольку платформа совершает гармонические колебания, то имеет место запись

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T}t,$$

где φ — угловое смещение платформы от положения равновесия, φ_0 — амплитуда смещения, T — период колебаний, t — время. Следовательно,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}\varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

Отсюда видно, что в момент прохождения положения равновесия угловая скорость максимальна и равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\varphi_0.$$

Тогда, на основании уравнения (2),

$$mgh = \frac{I}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\varphi_0 \right)^2 \quad (3)$$

Будем считать нити нерастяжимыми. В таком случае, нетрудно получить выражение

$$h = \frac{Rr}{2l}\varphi_0^2$$

(см. схему установки). Скомпонируем полученное с уравнением (3):

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (4)$$

Этой формулой можно пользоваться и для определения момента инерции системы "платформа + тело".

II Схема установки

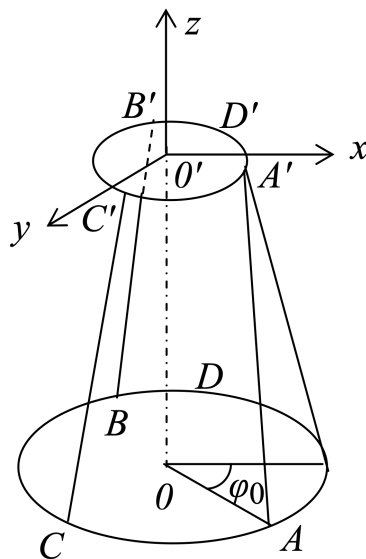


Рис. 1. Трифилярный подвес

На рисунке 1 изображён трифилярный подвес. Он состоит из подвижной круглой платформы D радиуса R , подвешенной к платформе D' радиуса $r < R$ на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' , CC' длинами l . Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO' . Центр тяжести при этом перемещается вертикально по оси вращения.

III Результаты измерений и обработка данных

Определим время $N = 10$ полных колебаний платформы, сообщая ей вращательный импульс. Измерения повторим 6 раз и вычислим период колебаний ненагруженной платформы по формуле

$$T = \frac{\langle t \rangle}{N},$$

где $\langle t \rangle$ — среднее время N колебаний. Результаты (эти и дальнейшие) занесём в таблицу 1.

В используемой нами установке радиус нижней платформы составляет

$$R = 78,05 \pm 0,05 \text{ мм},$$

а верхней —

$$r = 28,85 \pm 0,05 \text{ мм}.$$

Масса нижней платформы равна

$$m_{\text{пл}} = 51,6 \pm 0,01 \text{ г.}$$

Нити, которыми нижняя платформа крепится к верхней, имеют длину

$$l = 70,0 \pm 0,2 \text{ см.}$$

При данных значениях величин формула принимает вид

$$I = 0,000799 \cdot mT^2.$$

Вычислим момент инерции платформы $I_{\text{пл}}$ по формуле (4):

$$I_{\text{пл}} = 0,000799 \cdot m_{\text{пл}} T_{\text{пл}}^2 \approx 1,70 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Далее последовательно повторим тоже самое для платформы с конусом, кольцом и цилиндром (по отдельности), учитывая, что

$$m_{\text{кон}} = 475,80 \pm 0,02 \text{ г}, \quad m_{\text{к}} = 314,00 \pm 0,02 \text{ г}, \quad m_{\text{ц}} = 532,77 \pm 0,02 \text{ г.}$$

Так,

$$\begin{aligned} I_{\text{С, кон}} &= 0,000799 \cdot (m_{\text{пл}} + m_{\text{кон}}) T_{\text{кон}}^2 \approx 4,05 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{\text{С, к}} &= 0,000799 \cdot (m_{\text{пл}} + m_{\text{к}}) T_{\text{к}}^2 \approx 8,95 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{\text{С, ц}} &= 0,000799 \cdot (m_{\text{пл}} + m_{\text{ц}}) T_{\text{ц}}^2 \approx 3,37 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \end{aligned}$$

где через $I_{\text{С, кон}}$ обозначен момент инерции системы "трифилярный подвес + конус" и так далее.

Теперь найдём экспериментальные значения моментов инерции тел в отдельности от подвеса:

$$\begin{aligned} I_{\text{кон}} &= I_{\text{С, кон}} - I_{\text{пл}} = 2,35 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{\text{к}} &= I_{\text{С, к}} - I_{\text{пл}} = 7,25 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{\text{ц}} &= I_{\text{С, ц}} - I_{\text{пл}} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Исследуемые тела обладают следующими размерами:

$$\begin{aligned} D_{\text{кон}} &= 80,10 \text{ мм}, \\ D_{\text{к, внеш}} &= 104,60 \text{ мм}, \quad D_{\text{к, внутр}} = 89,50 \text{ мм}, \\ D_{\text{ц}} &= 50,00 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} R_{\text{кон}} &= 40,05 \text{ мм}, \\ R_{\text{к}} &= 52,30 \text{ мм}, \quad r_{\text{к}} = 44,75 \text{ мм}, \\ R_{\text{ц}} &= 25,00 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Вычислим теперь теоретические значения моментов инерции:

$$\begin{aligned} J_{\text{кон}} &= \frac{3}{10} m_{\text{кон}} R_{\text{кон}}^2 \approx 2,29 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ J_{\text{к}} &= \frac{1}{2} m_{\text{к}} (R_{\text{к}}^2 + r_{\text{к}}^2) \approx 7,44 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ J_{\text{ц}} &= \frac{1}{2} m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2 \approx 1,66 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Тело	Номер опыта	t_i , с	Δt , с	T , с	ΔT , с	ε_T , %	I , кг·м ² · ·10 ⁻⁴	ΔI , кг·м ² · ·10 ⁻⁴	ε_I , %
Пустая плат- форма	1	20,20	0,05	2,03	0,01	0,49	1,70	0,02	1,04
	2	20,36							
	3	20,23							
	4	20,28							
	5	20,25							
	6	20,32							
	$\langle t \rangle$	20,27							
Конус	1	9,83	0,08	0,98	0,01	1,02	2,35	0,08	3,40
	2	9,67							
	3	9,72							
	4	9,73							
	5	9,84							
	6	9,73							
	$\langle t \rangle$	9,75							
Кольцо	1	17,50	0,10	1,75	0,01	0,57	7,25	0,11	1,51
	2	17,55							
	3	17,50							
	4	17,59							
	5	17,67							
	6	17,38							
	$\langle t \rangle$	17,53							
Цилиндр	1	8,45	0,10	0,85	0,01	1,18	1,67	0,08	4,79
	2	8,36							
	3	8,39							
	4	8,54							
	5	8,57							
	6	8,57							
	$\langle t \rangle$	8,48							

Таблица 1. Результаты измерений и вычислений

Перейдём к вычислению погрешностей. Доверительную вероятность примем равной $P = 95\%$. Тогда коэффициент Стьюдента для $n = 6$ измерений оказывается равным

$$t_P(n) = 2,57.$$

Для измерения времени систематическая погрешность высчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{пр}} &= 0,01 \text{ с}, \quad \Delta t_{\text{окр}} = P \cdot \frac{\Delta t_{\text{пр}}}{2} \approx 0,005 \text{ с}, \\ \Delta t_{\text{сист}} &= \sqrt{(\Delta t_{\text{пр}})^2 + (\Delta t_{\text{окр}})^2} \approx 0,01 \text{ с}.\end{aligned}$$

Средние ошибки измерений времени вычисляются по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

Так,

$$S_{\text{пл}} \approx 0,02 \text{ с}, \quad S_{\text{кон}} \approx 0,03 \text{ с}, \quad S_{\text{к}} \approx S_{\text{ц}} \approx 0,04 \text{ с}.$$

Случайные ошибки вычислим по формуле

$$\Delta t_{\text{случ}} = t_P(n) \cdot S.$$

Так,

$$\Delta t_{\text{случ, пл}} \approx 0,05 \text{ с}, \quad \Delta t_{\text{случ, кон}} \approx 0,08 \text{ с}, \quad \Delta t_{\text{случ, к}} \approx \Delta t_{\text{случ, ц}} \approx 0,10 \text{ с}.$$

Наконец, по формуле

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{случ}})^2 + (\Delta t_{\text{сист}})^2}$$

вычислим абсолютные полные погрешности и запишем результаты в таблицу 1.

Величины диаметров (а равно — радиусов) тел измерены единожды штангенциркулем с точностью 0,1 мм, а значит имеет место только систематическая погрешность:

$$\begin{aligned}\Delta D_{\text{пр}} &= \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ мм}, \quad \Delta D_{\text{окр}} = P \cdot \Delta D_{\text{пр}} \approx 0,05 \text{ мм}, \\ \Delta D &= \Delta D_{\text{сист}} = \sqrt{(\Delta D_{\text{пр}})^2 + (\Delta D_{\text{окр}})^2} \approx 0,07 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Значения периодов получены в результате косвенных измерений, а значит полная абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial \langle t \rangle} \Delta t \right)^2} = \left| \frac{dT}{d\langle t \rangle} \Delta t \right| = \frac{\Delta t}{N},$$

а относительная — по формуле

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T} \cdot 100\%.$$

Найдём погрешность нахождения момента инерции платформы:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r} \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T} \Delta T\right)^2}.$$

В результате имеем

$$\Delta I = \frac{g}{4\pi^2 l} T^2 \cdot \sqrt{(Rr \Delta m)^2 + (mr \Delta R)^2 + (mR \Delta r)^2 + \left(\frac{mRr}{l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{2mRr}{T} \Delta T\right)^2}.$$

Разделим полученное на I и умножим на 100%:

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\% = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}.$$

По той же формуле вычисляется относительная погрешность измерения момента инерции системы "платформа + тело", где

$$\varepsilon_m = \frac{0,002}{m}, \%; \quad \varepsilon_R = 0,06\%; \quad \varepsilon_r = 0,17\%; \quad \varepsilon_l = 0,29\%; \quad \varepsilon_T = \frac{1}{T}, \%.$$

Иначе говоря,

$$\varepsilon_{I_C} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-6}}{m^2} + \frac{4}{T^2} + 0,1166}.$$

Но в случае пустой платформы

$$\varepsilon_m = \frac{0,001}{m}, \%$$

и

$$\varepsilon_I = \sqrt{\frac{10^{-6}}{m^2} + \frac{4}{T^2} + 0,1166}.$$

При этом,

$$\Delta I_C = \varepsilon_{I_C} \cdot I_C \cdot 10^{-2},$$

как и для пустой платформы.

Для систем имеем следующие значения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{I_{C, \text{кон}}} &\approx 2,07\%, & \Delta I_{C, \text{кон}} &\approx 0,08 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \\ \varepsilon_{I_{C, \text{к}}} &\approx 1,19\%, & \Delta I_{C, \text{к}} &\approx 0,11 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \\ \varepsilon_{I_{C, \text{ц}}} &\approx 2,38\%, & \Delta I_{C, \text{ц}} &\approx 0,08 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

Однако, нас больше интересуют погрешности для тел в отдельности от платформы:

$$\Delta I = \sqrt{(\Delta I_C)^2 + (\Delta I_{\text{пл}})^2}$$

и

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%.$$

IV Вывод

Измерения проведены с хорошей точностью: относительные ошибки измерения моментов инерции не превышают 5%, а в некоторых случаях близки к 1%. При этом экспериментальные значения моментов инерции тел с учётом погрешностей близки к теоретическим или совпадают с ними, что указывает на высокую точность метода трифилярного подвеса.

V Контрольные вопросы

- 1) Моментом инерции твёрдого тела относительно оси называется величина

$$I = \int r^2 dm,$$

где r — расстояние элемента массы dm тела до оси вращения. Эта величина является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг оси. Она измеряется в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

2) Проще всего найти момент инерции тела относительно оси его симметрии. Моменты относительно прочих осей можно найти по теореме Гюйгенса-Штейнера. Другой метод состоит в нахождении момента инерции тела относительно некоторого полюса O . Это используется, когда нужна найти моменты инерции относительно трёх взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке O . Найдём моменты инерции некоторых тел.

1. **Момент инерции однородного стержня длины l и массы m .** Будем считать, что длина стержня значительно превосходит его поперечные размеры (иначе говоря, стержень является бесконечно тонким и представим в виде математической прямой). Его центр масс лежит в середине его длины. Ось C направим через центр масс перпендикулярно стержню. Ввиду однородности стержня,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{m}{l} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{l} dr,$$

где dr — длина элемента стержня массы dm . Тогда

$$I_C = \int r^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = \left. \frac{mr^3}{3l} \right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12}.$$

2. **Момент инерции однородного кольца радиуса r и массы m .** Будем считать, что длина кольца значительно превосходит его толщину (иначе говоря, кольцо является бесконечно тонким и представимо в виде математической окружности). Его центр масс лежит в его геометрической середине. Ось C направим через центр масс перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо. Заметим, что расстояния всех точек кольца до оси C совпадают. Тогда

$$I_C = \int r^2 dm = r^2 \int dm = mr^2.$$

3. **Момент инерции однородного диска радиуса R и массы m .** Будем считать, что диаметр диска значительно превосходит его толщину (иначе говоря, диск является бесконечно тонким и представим в виде математического круга). Его центр масс лежит в его геометрической середине. Ось C направим через центр масс перпендикулярно плоскости, в которой лежит диск. Ввиду однородности диска,

$$\frac{dm}{dS} = \frac{m}{S} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{S} dS,$$

где dS — площадь элемента кольца массы dm . Заметим, что

$$S = \pi R^2$$

и

$$dS = \pi dr^2 = 2\pi r dr.$$

Тогда

$$dm = \frac{2mr}{R^2} dr$$

и

$$I_C = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}.$$

4. **Момент инерции однородного цилиндра радиуса R и массы M .** Момент инерции этой фигуры задаётся той же формулой, что и момент инерции плоского диска. Это можно объяснить следующим образом: цилиндр может быть представлен совокупностью бесконечного числа дисков радиусов R , моменты инерции которых относительно оси симметрии C цилиндра, строго говоря, совпадают. Так

$$I_C = \int d\frac{mR^2}{2} = \frac{R^2}{2} \int_0^M dm = \frac{MR^2}{2}.$$

Иначе, можно исходить только из однородности цилиндра:

$$\frac{dm}{dV} = \frac{m}{V} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{V} dV = \frac{m}{\pi R^2 h} d\pi r^2 h = \frac{2mr}{R^2} dr$$

и

$$I_C = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}.$$

5. **Момент инерции однородной втулки внутреннего радиуса R , внешнего радиуса R_1 и массы M .** В этом случае рассуждения практически аналогичны предшествующим:

$$\frac{dm}{dV} = \frac{m}{V} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{V} dV = \frac{m}{\pi(R_1^2 - R^2)h} d\pi(r^2 - R^2)h = \frac{2mr}{R_1^2 - R^2} dr$$

и

$$I_C = \int r^2 dm = \frac{2m}{R_1^2 - R^2} \int_R^{R_1} r^3 dr = \frac{M(R_1^4 - R^4)}{2(R_1^2 - R^2)} = \frac{M(R_1^2 + R^2)}{2}.$$

3) Закон сохранения энергии выражается уравнениями (1) \div (2) и пояснён в теоретических сведениях.

4) При выведении формулы мы полагаем, что можно исключить работу сил трения, а так же нити считать нерастяжимыми.

5) В том случае, если ось вращения платформы не проходит через центр масс тела, методом трифилярного подвеса пользоваться нельзя, поскольку могут возникать колебания по нежелательным направлениям, что значительно усложнило бы вычисления, отчего метод потерял бы свою ценность.

6) Получение формул для вычисления ошибок описано в третьем разделе "Результаты измерений и обработка данных".