

## № 6

Тело падает свободно, а значит его начальная скорость равна нулю:

$$v_0 = 0 \text{ м/с.}$$

Тогда путь зависит от времени, как

$$S(t) = \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Обозначим время его движения через  $\tau$ . Известно, что

$$S(\tau) - S(\tau - 1) = \frac{S(\tau)}{2},$$

то есть

$$S(\tau) = 2S(\tau - 1).$$

Учитывая выражение (1),

$$\frac{g\tau^2}{2} = \frac{2g(\tau - 1)^2}{2} \Leftrightarrow \tau^2 = 2(\tau - 1)^2 \Leftrightarrow |\tau| = \sqrt{2}|\tau - 1|.$$

Поскольку время является положительной величиной, то единственным подходящим раскрытием модулей будет

$$\tau = \sqrt{2}(\tau - 1) \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \approx 2,41 \text{ с.}$$

Высота падения тела равна

$$h = S(\tau) \approx 28,56 \text{ м.}$$

## № 8

Начальная скорость тела направлена вверх (как и ось ординат) и равна

$$v_0 = 9 \text{ м/с.}$$

Скорость тела в проекции на ось  $Oy$  изменяется по закону

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 - gt, \quad (2)$$

а его координата —

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = y_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Найдём время  $\tau$ , по прошествию которого скорость тела уменьшится в три раза:

$$3v_y(\tau) = v_0 \Leftrightarrow 3v_0 - 3g\tau = v_0 \Leftrightarrow \tau = \frac{2v_0}{3g}.$$

Поскольку  $\tau$  явно меньше времени подъёма тела (вычисляется по формуле (4)), то путь, пройденный им за это время, равен

$$S = y(\tau) - y_0 = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{2v_0^2}{3g} - \frac{2v_0^2}{9g} = \frac{4v_0^2}{9g} \approx 3,67 \text{ м.}$$

## № 9

Начальная скорость тела направлена вверх (как и ось  $Oy$ ) и равна

$$v_0 = 40 \text{ м/с.}$$

Его скорость изменяется по формуле (2). Времени  $T$ , через которое тело достигнет верхней точки траектории, соответствует нулевая скорость:

$$0 = v_0 - gT \Leftrightarrow T = \frac{v_0}{g}. \quad (4)$$

Зависимость координаты тела от времени имеет вид (3). Проекция перемещения тела вычисляется по формуле

$$\Delta r_y(t) = y - y_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

а путь —

$$S_1(t) = y - y_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

до достижения верхней точки траектории (отсчёт времени ведётся с момента броска) и

$$S_2(t) = \frac{gt^2}{2}$$

— после (отсчёт времени ведётся с момента достижения верхней точки траектории) из предположения о том, что начальная скорость движения из верхней точки равна нулю. Тогда за время  $\tau = 6$ , тело совершило перемещение

$$\Delta r_y(\tau) = 63,6 \text{ м}$$

и прошло путь

$$S(6) = S_1(T) + S_2(\tau - T) = \frac{g\tau^2}{2} - \tau v_0 + \frac{v_0^2}{g} \approx 99,67 \text{ м.}$$

Тогда

$$\frac{S(6)}{\Delta r_y(\tau)} \approx 1,57.$$

## № 10

Скорость тела, брошенного вертикально вверх изменяется по закону (2). Известно, что

$$v(\tau) = |v_y(\tau)| = 20 \text{ м/с,}$$

где  $\tau = 0,5$  с. Так,

$$|v_{0y} - g\tau| = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} v_{0y} = 20 - g\tau = 15,1 \text{ м/с} \\ v_{0y} = g\tau - 20 = -15,1 \text{ м/с} \end{cases} \Rightarrow v_{0y} = 20 - g\tau = 15,1 \text{ м/с,}$$

поскольку начальная скорость направлена вверх по условию.

## № 12

Проекции скорости тела на горизонтальную и вертикальную оси (ось  $Ox$  направлена в сторону движения тела, а  $Oy$  вверх) изменяются по законам

$$v_x(t) = v_0, \quad v_y(t) = -gt \quad (5)$$

соответственно, причём  $v_0 = 15$  м/с. Высота, с которой оно было брошено, равна  $H = 25$  м, а его координаты зависят от времени, как

$$x(t) = v_{0x}t = v_0t, \quad y(t) = H - \frac{gt^2}{2} \quad (6)$$

(система отсчёта выбрана таким образом, что  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = H$ ). Время движения  $\tau$  является временем достижения точки с координатой 0 по оси ординат:

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow H - \frac{g\tau^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 2,26 \text{ с.}$$

Путь, пройденный телом в горизонтальном направлении составит

$$S_x = x(\tau) = v_0\tau = 33,9 \text{ м.}$$

Скорость в момент падения будет равна

$$v(\tau) = \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)} = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2} \approx 26,75 \text{ м/с.}$$

Угол  $\varphi$  траектории с горизонтом (лучше сказать, угол между вектором скорости и осью абсцисс) в момент падения найдём из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{v_x(\tau)}{v(\tau)} = \frac{v_0}{v(\tau)} \Leftrightarrow \varphi = \arccos \frac{v_0}{v(\tau)} \approx 55,89^\circ.$$

## № 13

Пусть дальность полёта тела, брошенного горизонтально, равняется высоте, с которой его бросили. Его координаты изменяются по закону (6). Как было показано в предыдущей задаче, время движения тела составит

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Тогда начальную скорость найдём из соотношения

$$S_x(\tau) = x(\tau) = H.$$

Так,

$$v_0\tau = H \Leftrightarrow v_0 = \frac{H}{\tau} = H \cdot \sqrt{\frac{g}{2H}} = \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

**№ 14**

Начальная скорость камня, брошенного горизонтально равна

$$v_0 = 30 \text{ м/с.}$$

Проекции скорости камня изменяются по закону (5). В конце второй секунды (то есть через  $\tau = 2$  с) скорость камня составит

$$v(\tau) = \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)} = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2} \approx 35,84 \text{ м/с.}$$

Его тангенциальное ускорение равно

$$a_\tau = g \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{g}$ . При этом,

$$\cos \varphi = \frac{|v_y|}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{gt}\right)^2 + 1}}.$$

Тогда

$$a_\tau = \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{gt}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{g^2t}\right)^2 + \frac{1}{g^2}}}.$$

Значит,

$$a_\tau(\tau) \approx 5,36 \text{ м/с}^2.$$

Наконец,

$$a_n(\tau) = \sqrt{g^2 - a_\tau^2(\tau)} \approx 8,2 \text{ м/с}^2.$$

**№ 15**

Пусть частицы начали движение из одной точки с координатами  $(0, H)$  в противоположные стороны. При этом проекции их скоростей вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} v_x &= -v_0 = -3 \text{ м/с}, & v_y &= -gt, \\ V_x &= V_0 = 4 \text{ м/с}, & V_y &= -gt. \end{aligned}$$

Значит,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

и

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + g^2t^2}.$$

Найдём момент времени  $\tau$ , когда векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{V}$  будут перпендикулярны:

$$(\vec{v}, \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow v_x V_x + v_y V_y = 0 \Leftrightarrow -v_0 V_0 + g^2\tau^2 = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{\sqrt{v_0 V_0}}{g} \approx 0,35 \text{ с.}$$

## № 16

Тело, брошенное под углом  $\alpha$  к горизонту совершило путь в направлении оси абсцисс длиной  $S = 20$  м. Проекция скорости тела на горизонтальное и вертикальное направление имеют вид

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (7)$$

При этом его координаты вычисляются по формулам

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (8)$$

(считаем, что бросок произошёл с позиции  $(0, 0)$ ). Обозначим полное время движения через  $T$ . Тогда

$$S = x(T) \Leftrightarrow S = v_0 \cos \alpha \cdot T \Leftrightarrow T = \frac{S}{v_0 \cos \alpha}.$$

Также

$$y(T) = 0 \Leftrightarrow \left( v_0 \sin \alpha - \frac{gT}{2} \right) T = 0 \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Тело поднялось на максимальную высоту спустя время  $\tau$ . При этом

$$v_y(\tau) = 0 \Leftrightarrow v_0 \sin \alpha - g\tau = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Заметим, что  $T = 2\tau$ . Известно, что в этот момент горизонтальная проекция его скорости равнялась

$$v_x(\tau) = 10 \text{ м/с}.$$

То есть

$$v_0 \cos \alpha = 10.$$

Подставляя это в выражение для  $T$ , найдём, что

$$T = 2 \text{ с},$$

а значит,

$$\tau = 1 \text{ с}.$$

## № 17

Тело брошено со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Проекция его скорости и его координаты меняются по законам (7) и (8) соответственно. Будем считать, что тело начало движение из точки с координатами  $(0, 0)$ . Пусть тело поднялось на максимальную высоту за время  $\tau$ . Как было показано в предыдущей задаче,

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

и

$$T = 2\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g},$$

где  $T$  — полное время полёта. Дальность полёта в таком случае равна

$$S = x(T) = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

а высота полёта —

$$H = y(\tau) = v_0 \sin \alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Как видно, дальность полёта максимальна при наибольшем значении  $\sin 2\alpha$ . Очевидно,

$$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

### № 18

Тело, брошенное под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, достигло максимальной высоты  $h$ . Применим законы (7) и (8). Как было показано в предыдущей задаче,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

и

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

то есть

$$v_0^2 = \frac{2gh}{\sin^2 \alpha}.$$

Тогда

$$S = \frac{2h \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 4h.$$

### № 19

Дальность полёта тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту, в четыре раза превышает максимальную высоту траектории:

$$S = 4H.$$

Как было показано в задаче 17,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

и

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Тогда

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Leftrightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha) \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Поскольку угол  $\alpha$  больше нуля и меньше  $90^\circ$ , то, очевидно,  $\alpha = 45^\circ$ .

**№ 20**

Тело, брошенное под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, побывало на одной и той же высоте при  $t_1 = 10$  с и  $t_2 = 50$  с. Его координата вычисляется, как

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

а значит,

$$y(t_1) = y(t_2) \Leftrightarrow v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} \Leftrightarrow v_0 = \frac{g(t_2 + t_1)}{2 \sin \alpha} = 588 \text{ м/с}.$$

**№ 21**

Тело выпущено со скоростью  $v_0 = 200$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Как было показано в задаче 17,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 3534,8 \text{ м}$$

и

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \approx 1530,61 \text{ м}.$$

В наивысшей точке траектории нормальное ускорение равно ускорению свободного падения, а скорость — её начальной горизонтальной составляющей, то есть

$$g = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{g} \approx 1020,41 \text{ м}.$$

**№ 22**

С высоты  $H = 15$  м ( $x_0 = 0$  м) со скоростью  $v_0 = 20$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту было брошено тело. Оно будет двигаться по закону

$$\begin{cases} x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = H + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = H + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Так,

$$x(t) = 10\sqrt{3} \cdot t \approx 17,32t$$

и

$$y(t) = 15 + 10t - 4,9t^2.$$

Через время  $t_1 = 2$  с тело окажется в точке с координатами (34,64; 15,4).

Тело упадёт на землю, когда

$$y = 0 \Leftrightarrow 4,9\tau^2 - 10\tau - 15 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{50 + 5\sqrt{394}}{49} \approx 3,05 \text{ с}.$$

**№ 23**

Тело, брошенное с высоты  $H = 2$  м под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, приземлилось на расстоянии  $S = 43$  м от места броска. Его координаты изменяются по закону (9). Заметим, что

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow H + v_0 \sin \alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0 \Leftrightarrow v_0 \sin \alpha = \frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}.$$

В нашем случае  $\sin \alpha = \cos \alpha$ , а значит,

$$S = x(\tau) = v_0 \cos \alpha \cdot \tau = v_0 \sin \alpha \cdot \tau = v_0 \sin \alpha = \frac{g\tau^2}{2} - H.$$

Тогда

$$\tau = \sqrt{\frac{2(S+H)}{g}} \approx 3,03 \text{ с.}$$

**№ 24**

Тело брошено под углом  $\alpha$  к горизонту. При этом оно достигает максимальной высоты  $H = 20$  м при значении координаты  $x_1 = 1000$  м. Как было показано в задаче 17,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0},$$

а в задаче 16 —

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{\sqrt{2gH}}{g}.$$

Также известно, что

$$x_1 = x(\tau) = v_{0x}\tau = \frac{v_{0x}\sqrt{2gH}}{g} \Leftrightarrow v_{0x} = \frac{gx_1}{\sqrt{2gH}}.$$

При этом

$$v(\tau) = v_{0x} \approx 479,82 \text{ м/с.}$$

**№ 25**

Тело брошено со скоростью  $v_0 = 10$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Угол между векторами ускорения и скорости через  $\tau = \sqrt{2}$  с обозначим через  $\varphi$ . При этом

$$\varphi = \arcsin \frac{v_x}{v}.$$

Поскольку скорости изменяются по закону (7), то

$$\varphi = \arcsin \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \left(v_0 \tau \sin \alpha - \frac{g\tau^2}{2}\right)^2}} \approx 1,62^\circ.$$