

№ 8

При начальной скорости $v_0 = 10$ м/с тормозной путь машины составил $S = 8$ м. Найдём ускорение автомобиля из формул

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

и

$$v = v_0 + at,$$

где v — конечная скорость, равная 0 м/с. Так,

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

и

$$S = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2S}$$

(имеется ввиду проекция ускорения на направление движения). Сила реакции опоры (дороги) численно равна весу машины:

$$N = mg.$$

При этом

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$$

и

$$-F_{\text{тр}} = ma,$$

поскольку сила трения — единственная сила, действующая на автомобиль в горизонтальном направлении (ось направлена в сторону движения). В таком случае,

$$-\mu mg = ma \Leftrightarrow \mu = -\frac{a}{g} = \frac{v_0^2 - v^2}{2gS} \approx 0,64.$$

№ 10

Известно, что масса тела, лежащего на наклонной плоскости под углом $\alpha = 20^\circ$ к горизонтали, равна $m = 10$ кг. Также на него действует горизонтально направленная сила $F = 8$ Н. Уравнение движения тела имеет вид

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Направим ось абсцисс вверх, перпендикулярно плоскости, на которой лежит тело, а ось ординат — по направлению движения тела. Ось Oy образует с вектором \vec{F} угол α , а с вектором $m\vec{g}$ — $90^\circ - \alpha$. Спроецируем уравнение движения на заданные оси:

$$\begin{aligned} Ox : F \sin \alpha - mg \sin(90^\circ - \alpha) + N &= 0, \\ Oy : F \cos \alpha + mg \cos(90^\circ - \alpha) &= ma. \end{aligned}$$

Сила P , с которой тело давит на плоскость, по модулю равна силе реакции опоры, а по направлению противоположна ей:

$$\begin{aligned} P = N = mg \sin(90^\circ - \alpha) - F \sin \alpha &= mg \cos \alpha - F \sin \alpha \approx 89,4 \text{ Н}, \\ \vec{P} &= -\vec{N}. \end{aligned}$$

Ускорение тела равно

$$a = \frac{F \cos \alpha}{m} + g \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{F \cos \alpha}{m} + g \sin \alpha \approx 4,1 \text{ м/с}^2.$$

№ 11

Направим ось Oy вертикально вверх. Пусть масса левого груза машины Атвуда равна m_2 , а правого — m_1 , причём

$$m_1 > m_2.$$

Уравнения движения грузов принимают вид

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{T} = m_1 \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} + \vec{T} = m_2 \vec{a}_2 \end{cases},$$

где $a_1 = a_2 = a$, или в проекции на ось Oy —

$$\begin{cases} -m_1 g + T = -m_1 a \\ -m_2 g + T = m_2 a \end{cases}. \quad (1)$$

Вычтем из второго уравнения системы (1) первое и выразим ускорение:

$$-m_2 g + m_1 g = m_2 a + m_1 a \Leftrightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Теперь в первое уравнение системы (1) подставим найденное выражение для ускорения и выразим силу натяжения нити:

$$-m_1 g + T = -m_1 \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

На ось блока действует сила

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

№ 12

Угол, который составляет наклонная плоскость с горизонталью, равен $\alpha = 20^\circ$. Масса груза, который на ней лежит, равна $m_1 = 0,2$ кг, а масса груза, связанного с ним — $m_2 = 0,15$ кг. Уравнения движения тел принимают вид

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \end{cases},$$

где \vec{T}_1 и \vec{T}_2 — силы натяжения нити, приложенные к телам массы m_1 и m_2 соответственно, а \vec{a}_1 и \vec{a}_2 — их ускорения. При этом

$$T_1 = T_2 = T$$

и

$$a_1 = a_2 = a.$$

Направим ось Oy по направлению движения груза массой m_1 , а ось Ox — вертикально вниз. Запишем уравнения движения в проекциях на эти оси (первое — на ось Oy , а второе — на ось Ox):

$$\begin{cases} -m_1 g \sin \alpha + T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \sin \alpha \\ T = m_2 g - m_2 a \end{cases}.$$

Приравняем полученные выражения:

$$m_1 a + m_1 g \sin \alpha = m_2 g - m_2 a \Leftrightarrow a = \frac{(m_2 - m_1 \sin \alpha)g}{m_1 + m_2} \approx 2,28 \text{ м/с}^2.$$

№ 13

Ускорение системы грузов массами $m_1 = 0,5$ кг и $m_2 = 0,6$ кг равно $a = 4,9$ м/с² и направлено вверх. Пусть a' — ускорение грузов относительно стола. Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} - m_1 \vec{a} = m_1 \vec{a}'_1 \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 - m_2 \vec{a} = m_2 \vec{a}'_2 \end{cases}$$

(под векторами $-m_1 \vec{a}$ и $-m_2 \vec{a}$ имеются ввиду силы, вызванные движением лифта), где \vec{T}_1 и \vec{T}_2 — силы натяжения нити, приложенные к телам массы m_1 и m_2 соответственно. При этом

$$T_1 = T_2 = T.$$

Направим ось Ox горизонтально вправо, а ось Oy — вертикально вверх. Запишем уравнения движения в проекциях на эти оси (первое — на ось Ox и Oy , а второе — на ось Oy):

$$\begin{cases} -T + F_{\text{тр}} = -m_1 a' \\ -m_1 g + N - m_1 a = 0 \\ -m_2 g + T - m_2 a = -m_2 a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{T - F_{\text{тр}}}{m_1} \\ N = m_1(a + g) \\ a' = \frac{m_2 g - T + m_2 a}{m_2} \end{cases}.$$

Приравняем первое и третье выражения:

$$\frac{T - F_{\text{тр}}}{m_1} = \frac{m_2 g - T + m_2 a}{m_2} \Leftrightarrow T = \frac{m_1 m_2 (a + g) + m_2 F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2}.$$

При этом

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_1 (a + g),$$

где $\mu = 0,1$. Тогда

$$T = \frac{m_1 m_2 (a + g)(1 + \mu)}{m_1 + m_2} = 4,41 \text{ Н.}$$

№ 14

Координаты материальной точки массой m зависят от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, \\ y &= B \sin \omega t. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \vec{i} + y \vec{j} = A \cos \omega t \cdot \vec{i} + B \sin \omega t \cdot \vec{j}, \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = -A\omega \sin \omega t \cdot \vec{i} + B\omega \cos \omega t \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

и

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{i} - B\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{j}.$$

Значит,

$$a = \sqrt{(-A\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-B\omega^2 \sin \omega t)^2} = \omega^2 \sqrt{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t}$$

и

$$F = ma = m\omega^2 \sqrt{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t}.$$

№ 15

Сила

$$F = F_0 \cos \omega t$$

($F_0 = \text{const}$, $\omega = \text{const}$) приводит в движение тело массой m . При этом известно, что

$$r(0) = 0 \text{ м}, \quad v(0) = 0 \text{ м/с}.$$

Поскольку

$$F = ma \Leftrightarrow F_0 \cos \omega t = m \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{F_0}{m} \cos \omega t dt = dv,$$

то

$$\frac{F_0}{m} \int \cos \omega t dt = \int dv \Leftrightarrow \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t = v + v(0) \Leftrightarrow \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t = v.$$

С учетом того, что

$$v = \frac{dr}{dt},$$

имеем

$$\frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t = \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t dt = dr.$$

Тогда

$$\frac{F_0}{m\omega} \int \sin \omega t dt = \int dr \Leftrightarrow -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t = r + r(0) \Leftrightarrow r = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t.$$

№ 16

Массы грузов, связанных нитью, имеют массы $m_1 = 0,5$ кг и $m_2 = 0,7$ кг. На груз массой m_1 действует сила $F = 6$ Н. Запишем уравнения движения грузов в проекциях на направление движения:

$$\begin{cases} -T + F = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases},$$

где T — сила натяжения нити. Так,

$$a = \frac{T}{m_2}$$

и, как следствие,

$$-T + F = m_1 \frac{T}{m_2} \Leftrightarrow T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 3,5 \text{ Н}.$$

При этом

$$a = \frac{m_2 F}{m_2(m_1 + m_2)} = \frac{F}{m_1 + m_2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

№ 17

Высота клина равна $h = 1$ м, а длина — $l = 2$ м. Тогда угол между наклонной плоскостью и горизонталью равен

$$\alpha = \arcsin \frac{h}{l}.$$

Расположим ось Ox по направлению движения тела, а ось Oy — вверх, перпендикулярно наклонной плоскости. Уравнение движения тела принимает вид

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a},$$

или в проекции на оси абсцисс и ординат соответственно,

$$\begin{aligned} mg \cos(90^\circ - \alpha) - F_{\text{тр}} &= ma, \\ -mg \sin(90^\circ - \alpha) + N &= 0, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} &= ma, \\ N &= mg \cos \alpha. \end{aligned}$$

Значит,

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

и

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha &= ma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a &= g \left(\sin \arcsin \frac{h}{l} - \mu \cos \arcsin \frac{h}{l} \right) = \\ &= \frac{g(h - \mu \sqrt{l^2 - h^2})}{l}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mu = 0,15$, то

$$a \approx 3,63 \text{ м/с}^2.$$

При этом

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

и $v_0 = 0$ м/с, а значит,

$$l = x - x_0 = \frac{at^2}{2}.$$

Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \approx 1,05 \text{ с.}$$

№ 18

Масса тела, находящегося на горизонтальном столе равна $M = 2$ кг, а тел, связанных с ним нитью — $m_1 = 0,5$ кг (справа) и $m_2 = 0,3$ кг. Направим ось Ox горизонтально вправо, ось Oy — вертикально вверх. Уравнение движения тела массой M на ось абсцисс имеет вид

$$-T_2 + T_1 = Ma,$$

тела массой m_2 на ось ординат —

$$-m_2g + T_2 = m_2a,$$

тела массой m_1 на ту же ось —

$$-m_1g + T_1 = -m_1a.$$

Преобразуем последние два уравнения:

$$T_2 = m_2g + m_2a, \quad T_1 = m_1g - m_1a,$$

и подставим их в первое:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2}g = 0,7 \text{ м/с}^2.$$