№ 9

Тело при равноускоренном вращении достигло угловой скорости $\omega = 20$ рад/с спустя $N = 10$ оборотов от начала движения. Угловое ускорение найдём из соотношения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{1}$$

с учётом того, что $\varphi_0 = 0$ рад и $\omega_0 = 0$ рад/с по условию. Из уравнения

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\omega}{t}$$

найдём время:

$$t = \frac{\omega}{\varepsilon},$$

а угол — из соотношения $\varphi = 2\pi N$. Подставим полученное в уравнение (1):

$$2\pi N = \frac{\varepsilon \left(\dfrac{\omega}{\varepsilon}\right)^2}{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N}.$$

Так,

$$\varepsilon = \frac{20^2}{4\pi \cdot 10} \approx 3{,}18 \text{ рад/с}^2.$$

При этом направления векторов $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ совпадают.

№ 10

Скорость тела, движущегося равнозамедленно, за время $t = 1$ мин снизило скорость с $\omega_1 = 300$ об/мин до $\omega_2 = 180$ об/мин. Тогда

$$\varepsilon = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{t} = \frac{|180 - 300|}{1} = 120 \text{ об/мин}^2$$

или

$$\varepsilon = 120 \cdot \frac{2\pi}{60^2} \approx 0{,}21 \text{ рад/с}^2.$$

Зависимость числа оборотов от времени (с учётом $n_0 = 0$) имеет вид:

$$n = \omega_1 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = 300 \cdot 1 - \frac{120 \cdot 1^2}{2} = 240.$$

№ 11

Пусть радиус колеса равен $R = 0{,}1$ м, а его угловое ускорение — $\varepsilon = 3{,}14$ рад/с^2. Рассмотрим момент времени $t = 1$ с. Будем считать, что $\omega_0 = 0$ рад/с. Тогда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 0 + 3{,}14 \cdot 1 = 3{,}14 \text{ рад/с}.$$

Значит,

$$v = \omega R = 1{,}57 \cdot 0{,}1 = 0{,}314 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное ускорение в таком случае равно

$$a_\tau = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0{,}314 - 0}{1} = 0{,}314 \text{ м/с}^2,$$

а нормальное —

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{0{,}314^2}{0{,}1} \approx 0{,}986 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение найдём по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}314^2 + 0{,}986^2} \approx 1{,}035 \text{ м/с}^2.$$

Угол между вектором полного ускорения точки на ободе колеса и её радиус-вектором равен

$$\alpha = \arccos\frac{(\vec{a}, \vec{r})}{aR} = \arccos\frac{a_\tau r_\tau + a_n r_n}{aR} = \arccos\frac{a_n R}{aR} = \arccos\frac{a_n}{a} = = \arccos\frac{0{,}986}{1{,}035} \approx 0{,}309 \text{ рад} \approx 17^\circ 42'.$$

№ 12

Точка движется по окружности так, что $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2. Рассмотрим момент времени $\tau = 3$ с. При этом в момент $t_1 = 2$ с нормальное ускорение было равно $a_{n1} = 0{,}5$ м/с^2.

Заметим, что

$$v = \frac{ds}{dt} = B + 2Ct \Rightarrow v(\tau) = B + 2C\tau = -2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \text{ м/с},$$

и

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2C = 2 \text{ м/с}^2.$$

При этом

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2(t_1)}{a_{n1}} = \frac{(B + 2Ct_1)^2}{a_{n1}} = \frac{(-2 + 2 \cdot 1 \cdot 2)^2}{0{,}5} = 8 \text{ м}.$$

Значит,

$$a_n(\tau) = \frac{v^2(\tau)}{R} = \frac{4^2}{8} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение составляет

$$a(\tau) = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2(\tau)} = \sqrt{2^2 + 2^2} \approx 2{,}83 \text{ м/с}^2.$$

№ 13

Скорость движения точек на ободе колеса радиусом $R = 0{,}1$ м задаётся уравнением

$$v = At + Bt^2,$$

где $A = 0{,}03$ м/с^2, $B = 0{,}01$ м/с^2. Тангенциальное ускорение равно

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = A + 2Bt,$$

а нормальное —

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(At + Bt^2\right)^2}{R}.$$

Полное ускорение в таком случае равно

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(A + 2Bt)^2 + \frac{\left(At + Bt^2\right)^4}{R^2}}.$$

Угол α между вектором полного ускорения точки на ободе и её радиус-вектором может быть вычислен по формуле

$$\alpha = \arccos\frac{a_n}{a} = \arccos\frac{\dfrac{\left(At + Bt^2\right)^2}{R}}{\sqrt{(A + 2Bt)^2 + \dfrac{\left(At + Bt^2\right)^4}{R^2}}}$$

(см. задачу 11).

Так,

$$\alpha(0) = 90^\circ \approx 1{,}57 \text{ рад}, \quad \alpha(1) \approx 1{,}26 \text{ рад} \approx 72^\circ 15', \quad \alpha(2) \approx 0{,}61 \text{ рад} \approx 34^\circ 59'$$
$$\alpha(3) \approx 0{,}27 \text{ рад} \approx 15^\circ 31', \quad \alpha(4) \approx 0{,}14 \text{ рад} \approx 7^\circ 59', \quad \alpha(5) \approx 0{,}08 \text{ рад} \approx 4^\circ 38'.$$

№ 14

Материальная точка совершает движение по окружности ($v_0 = 0$ м/с) радиусом $R = 0{,}3$ м, причём $a_\tau = 5$ м/с^2. Поскольку $a_\tau = \text{const}$, то

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a_\tau t.$$

Тогда

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a_\tau^2 t^2}{R}$$

и

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \frac{a_\tau^4 t^4}{R^2}} = a_\tau\sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 t^4}{R^2}}.$$

Значит,

$$a(3) = 5\sqrt{1 + \frac{5^2 \cdot 3^4}{0{,}3^2}} \approx 750{,}02 \text{ м/с}^2.$$

№ 15

По окружности радиусом $R = 5$ м движется материальная точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение равно $a_n = 3{,}2$ м/с^2, а угол между векторами полного и нормального ускорений — $\varphi = 60^\circ$. Тогда скорость равна

$$v = \sqrt{a_n R} = \sqrt{3{,}2 \cdot 5} = 4 \text{ м/с}.$$

Полное ускорение вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Как видно из задачи 11,

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{a_n}{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}} \Rightarrow a_n = \frac{a_\tau \cos\alpha}{\sin\alpha} = a_\tau \operatorname{tg}\alpha = 3{,}2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \approx 5{,}5 \text{ м/с}^2.$$

№ 16

По окружности радиусом $R = 3{,}2$ м движется тело, так, что $a_n = 2{,}5t^2$. Заметим, что

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{a_n R} = \sqrt{2{,}5Rt^2} = 2\sqrt{2} \cdot t.$$

Тогда

$$S = \int v\,dt = \frac{2\sqrt{2} \cdot t^2}{2} = \sqrt{2} \cdot t^2$$

и

$$S(5) = \sqrt{2} \cdot 5^2 \approx 35{,}4 \text{ м}.$$

При этом

$$a_n(5) = 2{,}5 \cdot 5^2 = 62{,}5 \text{ м/с}^2,$$

и

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Наконец,

$$a(5) = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2(5)} = \sqrt{2{,}8^2 + 62{,}5^2} \approx 62{,}6 \text{ м/с}^2.$$

№ 17

Материальная точка совершает равномерное движение ($v = 5$ м/с) по окружности радиусом $R = 5$ м. При этом $\Delta r = 0$ м в начальный момент времени. Путь точки вычисляется по по формуле

$$S = vt = 5t.$$

На рисунке 1 показан соответствующий график.

Угол поворота радиус вектора вычисляется, как

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t.$$

Поскольку $\varphi = 0^\circ$, а так же

$$\omega_0 = \frac{v}{R},$$

то

$$\varphi = \frac{v}{R} \cdot t = \frac{5}{5} \cdot t = t.$$

Заметим, что

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\Delta r}{2R} \Leftrightarrow \Delta r = 2R\sin\frac{t}{2} = 2 \cdot 5 \sin\frac{t}{2} = 10 \sin\frac{t}{2}$$

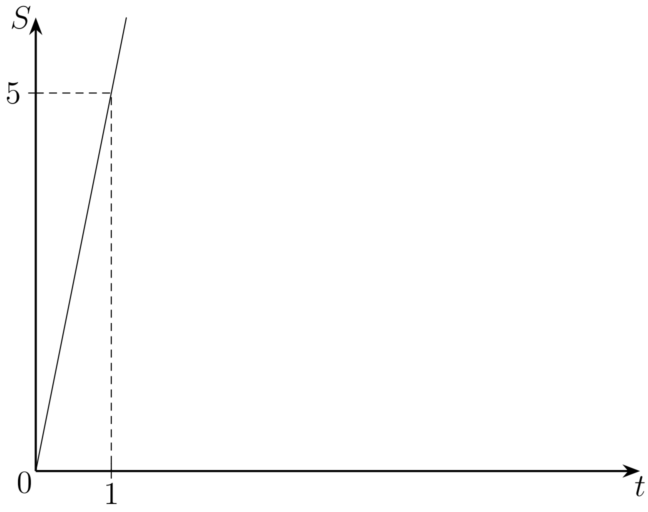

Рис. 1

при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Это вытекает из взаимного расположения векторов $\vec{r}$, $\vec{r}_0$ и $\Delta\vec{r}$. Чтобы избавиться от ограничения на угол, запишем

$$\Delta r = 10 \left|\sin\frac{t}{2}\right|,$$

поскольку $\sin\varphi = -\sin(2\pi - \varphi)$. На рисунке 2 показан соответствующий график.

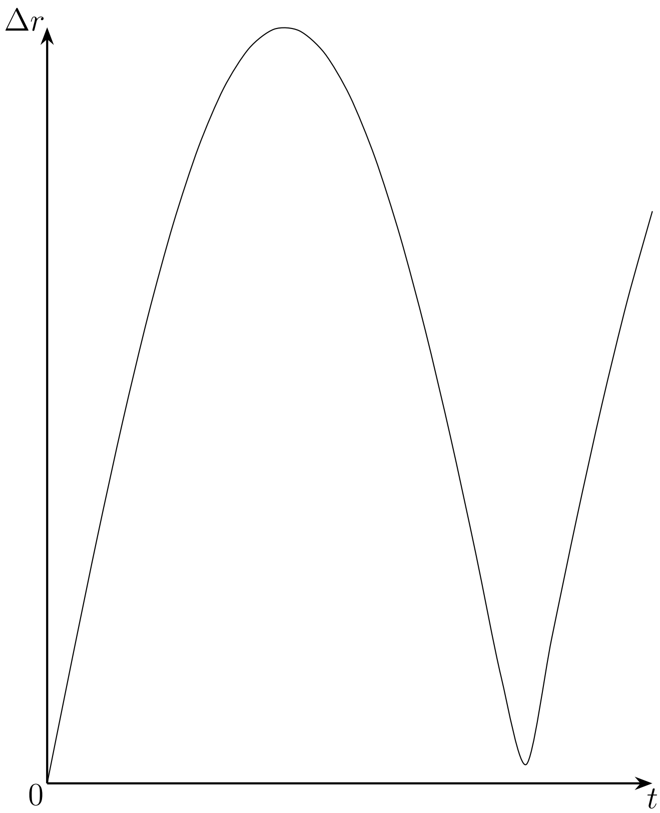

Рис. 2

№ 18

Точки на окружности диска радиусом $R = 0{,}2$ м вращаются по закону

$$\varphi = 3 - 2t + 4t^2.$$

Тогда

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -2 + 2 \cdot 4 \cdot t = -2 + 8t$$

и

$$v = \omega R = -2R + 8Rt = -2 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}2 \cdot t = -0{,}4 + 1{,}6t.$$

Найдём ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 1{,}6\ \text{м/с}^2,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(-0{,}4 + 1{,}6t)^2}{R} = \frac{(-0{,}4 + 1{,}6t)^2}{0{,}2},$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Наконец,

$$a_n(10) = \frac{(-0{,}4 + 1{,}6 \cdot 10)^2}{0{,}2} = 1216{,}8\ \text{м/с}^2$$

и

$$a(10) = \sqrt{1{,}6^2 + 1216{,}8^2} \approx 1216{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Контрольный вопрос 10

Материальная точка движется по окружности радиуса R так, что $a_\tau = \text{const}$ и $v_0 = 0$ м/с. Ввиду этого,

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \vec{\tau} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \cdot \vec{\tau} = \frac{v}{t} \cdot \vec{\tau},$$

а значит,

$$v = a_\tau \cdot t.$$

При этом

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R} \cdot \vec{n}$$

и

$$a_n = \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R}.$$

Тогда

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \cdot \vec{\tau} + \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R} \cdot \vec{n}$$

и

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \frac{a_\tau^4 \cdot t^4}{R^2}} = a_\tau \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}.$$

Помимо прочего известно, что

$$v = \omega R, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Поскольку $\omega_0 = 0$ рад/с, то
$$v = \varepsilon R t.$$
Тогда
$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \frac{\varepsilon^2 R^2 t^2}{R} \cdot \vec{n} = \varepsilon^2 R t^2 \cdot \vec{n}.$$
Найдём время из формулы
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$
с учётом того, что $\varphi_0 = 0$ рад:
$$t = \sqrt{\frac{2\varphi}{\varepsilon}}.$$
Тогда
$$\vec{a}_n = 2\varphi\varepsilon R \cdot \vec{n}$$
и
$$a_n = 2\varphi\varepsilon R.$$
При этом,
$$\vec{a}_\tau = \frac{v}{t} \cdot \vec{\tau} = \frac{\varepsilon R t}{t} \cdot \vec{\tau} = \varepsilon R \cdot \vec{\tau}$$
и
$$a_\tau = \varepsilon R.$$
Значит,
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \varepsilon R \cdot \vec{\tau} + 2\varphi\varepsilon R \cdot \vec{n}$$
и
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + 4\varphi^2\varepsilon^2 R^2} = \varepsilon R\sqrt{1 + 4\varphi^2}.$$

Найдём угол α между векторам полного ускорения материальной точки и её радиус-вектором (выберем некоторый момент времени, в который направления векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ совпадут с направлениями осей абсцисс и ординат ортонормированной системы координат соответсвенно):
$$(\vec{a}, \vec{r}) = aR\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{(\vec{a}, \vec{r})}{aR} = \arccos\frac{a_\tau R_\tau + a_n R_n}{aR}.$$
Поскольку радиус-вектор точки сонаправлен вектору $\vec{n}$, то $R_\tau = 0$ и $R_n = R$. В таком случае,
$$\alpha = \arccos\frac{a_n}{a} = \arccos\frac{2\varphi\varepsilon R}{\varepsilon R\sqrt{1 + 4\varphi^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4\varphi^2} + 1}}$$
или
$$\alpha = \arccos\frac{\dfrac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R}}{a_\tau\sqrt{1 + \dfrac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{\dfrac{R^2}{a_\tau^2 t^4} + 1}}.$$