Казначеев М.А.

Лабораторная работа №Д-2

Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера с помощью трифилярного подвеса

Самара
2023

Содержание

Аннотация

Цель работы: Проверить теорему Гюйгенса-Штейнера при помощи трифилярного подвеса.

В работе используются: Трифилярный подвес, конус, кольцо, цилиндр, штангенциркуль, электронный секундомер.

I Теоретические сведения

Пусть масса вращающейся платформы D (см. рисунок 1) равна m и при вращении она поднимается на высоту h. Тогда приращение потенциальной энергии определяется формулой

$$U = mgh,$$

где g — ускорение свободного падения. При прохождении положения равновесия во время вращения в другом направлении, кинетическая энергия платформы равна

$$K = \frac{I\omega_0^2}{2},$$

где I — момент инерции платформы, а ω_0 — её угловая скорость в этот момент. Исключая работу сил трения, запишем закон сохранения энергии:

$$K_i + U_i = \mathrm{const}. \tag{1}$$

При достижении высоты h, платформа имеет только потенциальную энергию, а в положении равновесия — только кинетическую. Тогда

$$K = U \Leftrightarrow \frac{I\omega_0^2}{2} = mgh. \tag{2}$$

Поскольку платформа совершает гармонические колебания, то имеет место запись

$$\varphi = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t,$$

где φ — угловое смещение платформы от положения равновесия, φ_0 — амплитуда смещения, T — период колебаний, t — время. Следовательно,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}\varphi_0 \cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Отсюда видно, что в момент прохождения положения равновесия угловая скорость максимальна и равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\varphi_0.$$

Тогда, на основании уравнения (2),

$$mgh = \frac{I}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\varphi_0\right)^2 \tag{3}$$

Будем считать нити нерастяжимыми. В таком случае, нетрудно получить выражение

$$h = \frac{Rr}{2l}\varphi_0^2$$

(см. схему установки). Скомпонируем полученное с уравнением (3):

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l}T^2. \tag{4}$$

Этой формулой можно пользоваться и для определения момента инерции системы "платформа + тело".

II Схема установки

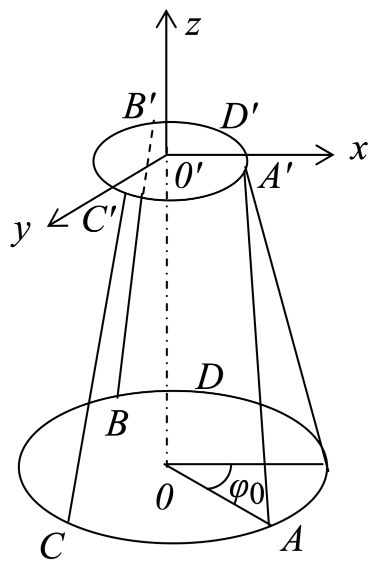

Рис. 1. Трифилярный подвес

На рисунке 1 изображён трифилярный подвес. Он состоит из подвижной круглой платформы D радиуса R, подвешенной к платформе D' радиуса $r < R$ на трех симметрично расположенных нитях AA', BB', CC' длинами l. Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO'. Центр тяжести при этом перемещается вертикально по оси вращения.

III Результаты измерений и обработка данных

Определим время $N = 10$ полных колебаний платформы, сообщая ей вращательный импульс. Измерения повторим 6 раз и вычислим период колебаний ненагруженной платформы по формуле

$$T = \frac{\langle t \rangle}{N},$$

где $\langle t \rangle$ — среднее время N колебаний. Результаты (эти и дальнейшие) занесём в таблицу 1.

В используемой нами установке радиус нижней платформы составляет

$$R = 78{,}05 \pm 0{,}05 \text{ мм},$$

а верхней —

$$r = 28{,}85 \pm 0{,}05 \text{ мм}.$$

Масса нижней платформы равна

$$m_{\text{пл}} = 51{,}6 \pm 0{,}01 \text{ г}.$$

Нити, которыми нижняя платформа крепится к верхней, имеют длину

$$l = 70{,}0 \pm 0{,}2 \text{ см}.$$

При данных значениях величин формула (4) принимает вид

$$I = 0{,}000799 \cdot mT^2.$$

Вычислим момент инерции платформы $I_{\text{пл}}$ по формуле (4):

$$I_{\text{пл}} = 0{,}000799 \cdot m_{\text{пл}} T_{\text{пл}}^2 \approx 1{,}70 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

Далее возьмём два одинаковых цилиндра массами

$$m = 500 \text{ г}$$

и радиусами

$$R = 2{,}05 \pm 0{,}01 \text{ см}.$$

Поставим их друг на друга в центр платформы. Вычислим момент инерции этой системы и занесём сведения в таблицу 1:

$$I_1 = 0{,}000799 \cdot (2m + m_{\text{пл}}) T_1^2 \approx 3{,}89 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

Тогда момент инерции одного цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс равен

$$I_0 = \frac{I_1 - I_{\text{пл}}}{2} \approx 1{,}10 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

Теперь положим цилиндры на платформу симметрично относительно оси вращения, так, чтобы каждый из них лежал на расстоянии

$$a = 6{,}35 \pm 0{,}07 \text{ см}$$

от неё. Аналогичным образом определим момент инерции системы тел

$$I_2 = 0{,}000799 \cdot (2m + m_{\text{пл}}) T_2^2 \approx 44{,}84 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2$$

и каждого тела в отдельности

$$I_T = \frac{I_2 - I_{\text{пл}}}{2} = 21{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

Перейдём к вычислению погрешностей. Доверительную вероятность примем равной $P = 95\%$. Тогда коэффициент Стьюдента для $n = 6$ измерений оказывается равным

$$t_P(n) = 2{,}57.$$

Для измерения времени систематическая погрешность высчитывается следующим образом:

$$\Delta t_{\text{пр}} = 0{,}01 \text{ с}, \quad \Delta t_{\text{окр}} = P \cdot \frac{\Delta t_{\text{пр}}}{2} \approx 0{,}005 \text{ с},$$
$$\Delta t_{\text{сист}} = \sqrt{(\Delta t_{\text{пр}})^2 + (\Delta t_{\text{окр}})^2} \approx 0{,}01 \text{ с}.$$

Средние ошибки измерений времени вычисляются по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \big(t_i - \langle t \rangle\big)^2}{n(n-1)}}.$$

Тело	Номер опыта	t_i, с	Δt, с	T, с	ΔT, с	ε_T, %	I, кг·м^2·$\cdot 10^{-4}$	ΔI, кг·м^2·$\cdot 10^{-4}$	ε_I, %
Пустая платформа	1	20,20	0,05	2,030	0,005	0,25	1,70	0,01	0,61
	2	20,36							
	3	20,23							
	4	20,28							
	5	20,25							
	6	20,32							
	$\langle t \rangle$	20,27							
Два тела в центре платформы	1	6,79	0,03	0,680	0,003	0,44	3,89	0,04	0,94
	2	6,72							
	3	6,76							
	4	6,75							
	5	6,75							
	6	6,76							
	$\langle t \rangle$	6,76							
Два тела на расстоянии a от центра платформы	1	22,83	0,15	2,310	0,015	0,65	44,84	0,60	1,34
	2	23,06							
	3	23,08							
	4	23,11							
	5	23,17							
	6	23,22							
	$\langle t \rangle$	23,08							

Таблица 1. Результаты измерений и вычислений

Так,

$$S_{\text{пл}} \approx 0{,}02 \text{ с}, \quad S_1 \approx 0{,}01 \text{ с}, \quad S_2 \approx 0{,}06 \text{ с}.$$

Случайные ошибки вычислим по формуле

$$\Delta t_{\text{случ}} = t_P(n) \cdot S.$$

Тогда

$$\Delta t_{\text{случ, пл}} \approx 0{,}05 \text{ с}, \quad \Delta t_{\text{случ, 1}} \approx 0{,}03 \text{ с} \quad \Delta t_{\text{случ, 2}} \approx 0{,}15 \text{ с}.$$

Наконец, по формуле

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{случ}})^2 + (\Delta t_{\text{сист}})^2}$$

вычислим абсолютные полные погрешности и запишем результаты в таблицу 1.

Значения периодов получены в результате косвенных измерений, а значит полная абсолютная погрешность их измерения вычисляется по формуле

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial \langle t \rangle} \Delta t\right)^2} = \left|\frac{dT}{d\langle t \rangle} \Delta t\right| = \frac{\Delta t}{N},$$

а относительная — по формуле

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T} \cdot 100\%.$$

Найдём погрешность нахождения момента инерции платформы:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\,\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\,\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\,\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial l}\,\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T}\,\Delta T\right)^2}.$$

В результате имеем

$$\Delta I = \frac{g}{4\pi^2 l}T^2 \cdot \\ \cdot \sqrt{(Rr\,\Delta m)^2 + (mr\,\Delta R)^2 + (mR\,\Delta r)^2 + \left(\frac{mRr}{l}\,\Delta l\right)^2 + \left(\frac{2mRr}{T}\,\Delta T\right)^2}.$$

Разделим полученное на I и умножим на 100%:

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\% = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}.$$

По той же формуле вычисляется относительная погрешность измерения момента инерции системы "платформа + тело", где

$$\varepsilon_m = \frac{0{,}001}{m},\ \%;\quad \varepsilon_R \approx 0{,}06\%;\quad \varepsilon_r \approx 0{,}17\%;\quad \varepsilon_l \approx 0{,}29\%.$$

Тогда

$$\varepsilon_{I_\text{С}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{m^2} + 4\varepsilon_T^2 + 0{,}1166}.$$

При этом,

$$\Delta I_\text{С} = \varepsilon_{I_\text{С}} \cdot I_\text{С} \cdot 10^{-2},$$

как и для пустой платформы.

Однако, нас больше интересуют погрешности для тел в отдельности от платформы:

$$\Delta I = \frac{\sqrt{(\Delta I_\text{С})^2 + (\Delta I_\text{пл})^2}}{2}$$

и

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции тела, расположенного на расстоянии a от оси, относительно этой оси равен

$$I = I_0 + ma^2.$$

Вычислим его и занесём данные в таблицу 2.

$I_0 \pm \Delta I_0$, кг·м^2·10^{-4}	ε_{I_0}, %	$I_T \pm \Delta I_T$, кг·м^2·10^{-4}	ε_{I_T}, %	a, м	I, кг·м^2·10^{-4}
$1{,}10 \pm 0{,}02$	1,82%	$21{,}57 \pm 0{,}30$	1,39%	0,0635	21,26

Таблица 2. Сравнение экспериментальных и теоритических

IV Вывод

Эксперимент проведён с хорошей точностью: относительные ошибки измерений не превышают 2%. Вычисленное теоретически по теореме Гюйгенса-Штейнера значение момента инерции I исследуемого тела практически лежит на отрезке $[I_T - \Delta I_T, I_T + \Delta I_T]$ (до попадания в интервал не хватает лишь 10^{-6} кг $\cdot$ м^2). Таким образом, теорему Гюйгенса-Штейнера можно считать экспериментально подтверждённой.

V Контрольные вопросы

1) Моментом инерции твёрдого тела относительно оси называется величина

$$I = \int r^2\, dm,$$

где r — расстояние элемента массы dm тела до оси вращения. Эта величина является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг оси. Она измеряется в кг$\cdot$м^2.

2) Пусть имеется некоторое тело. Выберем в нём точку, расстояние от которой до оси O определяется радиус-вектором $\vec{r}_O$ (при этом за точку O будем считать проекцию выбранной точки тела на ось O), а до оси A — $\vec{r}_A$ (оси O и A параллельны). При этом расстояние между этими осями определяется радиус-вектором $\vec{a}$ так, что

$$\vec{r}_A = \vec{r}_O - \vec{a}.$$

Возведём это уравнение в квадрат и умножим на массу точки dm:

$$r_A^2\, dm = r_O^2\, dm + a^2\, dm - 2\left(\vec{a}, \vec{r}_O\, dm\right).$$

Далее проинтегрируем результат:

$$\int r_A^2\, dm = \int r_O^2\, dm + a^2 \int dm - 2\left(\vec{a}, \int \vec{r}_O\, dm\right).$$

Заметим, что

$$\int r_A^2\, dm = I_A, \quad \int r_O^2\, dm = I_O, \quad a^2 \int dm = ma^2.$$

Через $\vec{R}_C$ обозначим компоненту вектора центра масс относительно точки O, которая перпендикулярна оси O. Тогда

$$\int \vec{r}_O\, dm = m\vec{R}_C$$

и

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m\left(\vec{a}, \vec{R}_C\right).$$

Если точка O является центром масс C тела, то $\vec{R}_C = \vec{0}$ и

$$I_A = I_C + ma^2.$$

Это и есть теорема Гюйгенса-Штейнера.

3) Закон сохранения энергии выражается уравнениями $(1) \div (2)$ и пояснён в теоретических сведениях.

4) При выведении формулы мы полагаем, что можно исключить работу сил трения, а так же нити считать нерастяжимыми.

5) Получение формул для вычисления ошибок описано в третьем разделе "Результаты измерений и обработка данных".