№ 9

Известно, что река течёт со скоростью $V = 3$ км/ч, а лодка плывет со скоростью $u = 6$ км/ч относительно неё. Чтобы лодка проплыла поперёк реки, её скорость $\vec{U}$ относительно земли должна быть направлена перпендикулярно течению. Тогда, для компенсанции последнего, скорость лодки $\vec{u}$ относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке 1.

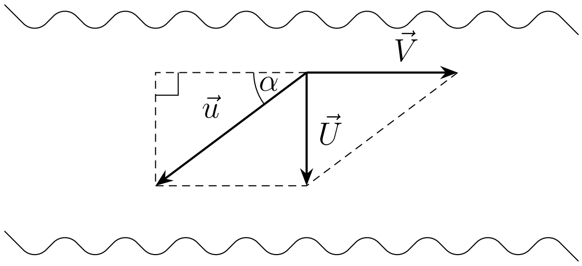

Рис. 1

Через α обозначим угол между вектором $\vec{u}$ и линией берега. Из рисунка видно, что

$$\cos\alpha = \frac{V}{u},$$

а значит,

$$\alpha = \arccos\frac{V}{u} = \arccos\frac{3}{6} = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ.$$

№ 10

Если скорость ветра составляет $v = 11$ м/с, то капля дождя падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали. Обозначим её скорость через $\vec{u}$ (рисунок 2), а вертикальную составляющую скорости — через $\vec{\nu}$.

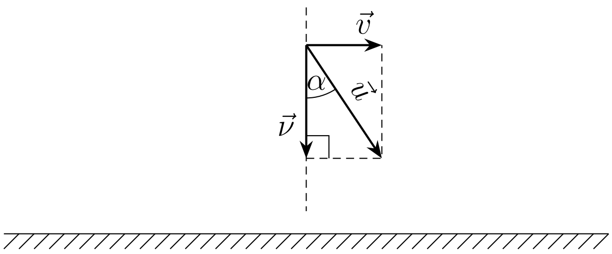

Рис. 2

Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

В том случае, если скорость капли составляет с вертикалью угол $\beta = 45^\circ$, скорость ветра должна равняться

$$v_1 = \nu\operatorname{tg}\beta = v\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 11\cdot\frac{\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}30^\circ} = 11\sqrt{3} \approx 19,1 \text{ м/с}.$$

№ 11

Автомобили движутся по прямой в одну сторону, начав движение одновременно из одного и того же пункта. Зависимости путей от времени для них выглядят следующим образом:

$$s_1 = Ft + Bt^2, \quad s_2 = Ct + Dt^2 + At^3.$$

Тогда выражения их скоростей принимают вид

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = F + 2Bt$$

и

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt} = C + 2Dt + 3At^2.$$

Обозначим скорость второго автомобиля в системе координат, связанной с первым, как

$$\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Поскольку векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ коллинеарны, то

$$u = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = v_2 - v_1 = C - F + 2(D - B)t + 3At^2.$$

№ 12

Известно, что первую половину времени движения тело двигалось со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а вторую — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Полное время движения обозначим через t. Тогда путь, пройденный за первую половину времени составляет

$$s_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2},$$

а за вторую —

$$s_2 = v_2 \cdot \frac{t}{2}.$$

Средняя скорость тела в таком случае равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1 \cdot \frac{t}{2} + v_2 \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{40 + 60}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

№ 13

Уравнение движения материальной точки по плоскости имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{i}At^3 + \vec{j}Bt^2.$$

Тогда

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3A\vec{i} \cdot t^2 + 2B\vec{j} \cdot t$$

и

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 6A\vec{i} \cdot t + 2B\vec{j}.$$

№ 14

Точка движется по прямой в соответствии с уравнением $x = 2t - 0{,}5t^2$, $[x] = $ м. Тогда при $t_1 = 1$ с координата точки равна

$$x_1 = 2 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 1^2 = 1{,}5 \text{ м},$$

как и при $t_2 = 3$ с:

$$x_2 = 2 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 3^2 = 1{,}5 \text{ м}.$$

Значит, в промежутке времени $t_1 \div t_2$ тело дошло до точки O, в которой его скорость сменила направление на противоположное. Найдём время достижения точки O, как точку экстремума:

$$\frac{dx}{dt} = 2 - t \Rightarrow 2 - t_O = 0 \Leftrightarrow t_O = 2 \text{ с}.$$

Координата точки в это время равнялась

$$x_O = 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^2 = 2 \text{ м}.$$

За промежуток времени $t_1 \div t_O$ точка прошла путь

$$s_1 = |x_O - x_1| = |2 - 1{,}5| = 0{,}5 \text{ м},$$

так же, как и за промежуток$t_O \div t_2$:

$$s_1 = |x_2 - x_O| = |1{,}5 - 2| = 0{,}5 \text{ м}.$$

То есть полный путь составил

$$s = s_1 + s_2 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1 \text{ м},$$

а время в пути —

$$t = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2 \text{ с}.$$

Тогда средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

№ 15

Тело начинает движение из точки с координатами

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

со скоростью

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j}t,$$

где $a = \text{const}$ и $b = \text{const}$. Получим зависимость радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \int \vec{V}\,dt = a\vec{i}\int dt + b\vec{j}\int t\,dt = a\vec{i}t + \frac{b\vec{j}t^2}{2} + \vec{r}_0.$$

Конечно,

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0 \Rightarrow \vec{r}_0 = \vec{0},$$

а значит,

$$\vec{r} = a\vec{i}t + \frac{b\vec{j}t^2}{2}.$$

Эта запись означает следующее:

$$\vec{r} = \left(at, \frac{bt^2}{2}\right).$$

Иначе говоря,

$$x(t) = at, \quad y(t) = \frac{bt^2}{2},$$

откуда

$$t = \frac{x}{a}$$

и

$$y(x) = \frac{b\left(\frac{x}{a}\right)^2}{2} = \frac{bx^2}{2a^2}.$$

№ 16

Материальная точка движется в плоскости по закону

$$x = At, \quad y = At(1 + Bt),$$

где $A = \text{const} > 0$ и $B = \text{const} > 0$. Исходя из выражения

$$t = \frac{x}{A}$$

найдём уравнение траектории:

$$y(x) = A \cdot \frac{x}{A} \cdot \left(1 + B \cdot \frac{x}{A}\right) = x + \frac{Bx^2}{A}.$$

Радиус-вектор точки примет вид

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = At\vec{i} + At(1 + Bt)\vec{j},$$

а его модуль —

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2t^2 + A^2t^2(1 + Bt)^2} = At\sqrt{1 + (1 + Bt)^2}.$$

Вектор скорости точки будет равняться

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{i} + A(1 + 2Bt)\vec{j},$$

а её модуль —

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{A^2 + A^2(1 + 2Bt)^2} = A\sqrt{1 + (1 + 2Bt)^2}.$$

Теперь найдём вектор ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 2AB\vec{j}.$$

Очевидно при этом, что

$$a = 2AB.$$

№ 17

Путь, пройденный телом за время t, вычисляется по формуле

$$S = 2t - 3t^2 + 4t^3, \quad [S] = \text{м}.$$

Тогда скорость и ускорение задаются формулами

$$v = \frac{dS}{dt} = 2 - 6t + 12t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 + 24t$$

соответсвенно. Пусть от начала движения прошло время $t = 2$ с. Значит,

$$S(2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 24 \text{ м},$$
$$v(2) = 2 - 6 \cdot 2 + 12 \cdot 2^2 = 38 \text{ м/с},$$
$$a(2) = -6 + 24 \cdot 2 = 42 \text{ м/с}^2.$$

№ 18

Две материальные точки движутся в соответсвии с уравнениями

$$x_1 = -2t^2, \quad x_2 = 2t + t^3.$$

Поскольку $x_0 = 0$ м в обоих случаях, то пути находятся по формулам

$$s_1 = |x_1 - x_0| = |x_1| = 2t^2$$

и

$$s_2 = |x_2 - x_0| = |x_2| = 2t + t^3$$

Тогда выражения скоростей имеют вид

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = 4t, \quad v_2 = \frac{ds_2}{dt} = 2 + 3t^2,$$

а ускорений —

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 4, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 6t.$$

Найдём момент времени, для которого ускорения точек совпадают:

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow 4 = 6t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \approx 0{,}67 \text{ с}$$

№ 19

Уравнение

$$s = 0{,}14t^2 + 0{,}01t^3, \quad [s] = \text{м}$$

задаёт зависимость пройденного точкой пути от времени. Значит, скорость и ускорение точки задаются уравнениями

$$v = \frac{ds}{dt} = 0{,}28t + 0{,}03t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = 0{,}28 + 0{,}06t$$

соответсвенно. Найдём время, через которое ускорение точки составит $a_1 = 1$ м/с^2:

$$a_1 = 0{,}28 + 0{,}06t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{a_1 - 0{,}28}{0{,}06} = \frac{1 - 0{,}28}{0{,}06} = 12 \text{ с}.$$

В этот момент времени скорость будет равна

$$v_1 = 0{,}28 \cdot 12 + 0{,}03 \cdot 12^2 = 7{,}68 \text{ м/с}.$$

Пусть $t_a = 0$ с и $t_b = 2$ с. Тогда путь, пройденный телом во временном промежутке $t_a \div t_b$ равен

$$s_{ab} = s(t_a) = 0{,}14 \cdot 2^2 + 0{,}01 \cdot 2^3 = 0{,}64 \text{ м}.$$

Средняя скорость за промежуток составит

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{ab}}{t_b - t_a} = \frac{0{,}64}{2 - 0} = 0{,}32 \text{ м/с}.$$

№ 20

Положение точки полностью задаётся уравнением

$$x = -8t + 6t^2 - t = -9t + 6t^2, \quad [x] = \text{м}.$$

Очевидно, $x_0 = 0$ м, а значит

$$s = |x - x_0| = |x| = \left|6t^2 - 9t\right|.$$

Рассмотрим интервал $t_1 \div t_2$, где $t_1 = 0$ с, $t_2 = 1$ с:

$$s_{12} = s(t_2) = \left|6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1\right| = 3 \text{ м}.$$

Средняя скорость на этом интервале равна

$$\langle v_1 \rangle = \frac{s_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{3}{1 - 0} = 3 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим интервал $t_2 \div t_3$, где $t_3 = 2$ с:

$$s_{23} = s(t_3) - s(t_2) = \left|6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2\right| - 3 = 3 \text{ м}.$$

Средняя скорость на этом интервале равна

$$\langle v_2 \rangle = \frac{s_{23}}{t_3 - t_2} = \frac{3}{2 - 1} = 3 \text{ м/с}.$$

№ 21

Движение материальных точек происходит в соответсвии с уравнениями

$$x_1 = 20 + 4t - 4t^2, \quad x_2 = 2 + t + 0{,}5t^2.$$

Очевидно, что

$$s_1 = |x_1 - 20| = \left|4t - 4t^2\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} s_1 = 4t^2 - 4t, & \text{при } t \geqslant 1 \\ s_1 = 4t - 4t^2, & \text{при } 0 \leqslant t < 1 \end{array}\right.$$

и

$$s_2 = |x_2 - 2| = \left|t + 0{,}5t^2\right| = t + 0{,}5t^2.$$

Тогда

$$v_1 = \left|\frac{ds_1}{dt}\right| = \left[\begin{array}{ll} 8t - 4, & \text{при } t \geqslant 1 \\ |4 - 8t|, & \text{при } 0 \leqslant t < 1 \end{array}\right., \quad a_1 = \left|\frac{dv_1}{dt}\right| = 8 \text{ м/с}^2$$

и

$$v_2 = \frac{ds_1}{dt} = 1 + t, \quad a_2 = \frac{dv_1}{dt} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Вычислим момент времени, когда скорости точек совпадут:

$$v_1 = v_2 \Leftrightarrow 8t_0 - 4 = 1 + t_0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{5}{7} \approx 0{,}71 \text{ с}.$$

При этом

$$v_1(t_0) = 8 \cdot 0{,}71 - 4 = 1{,}68 \text{ м/с}, \quad v_2(t_0) = 1 + 0{,}71 = 1{,}71 \text{ м/с}$$

и

$$a_1(t_0) = 8 \text{ м/с}^2, \quad a_2(t_0) = 1 \text{ м/с}^2.$$

№ 22

За время t тело проходит путь

$$s = 2t + 8t^2 + 16t^3, \quad [s] = \text{м}.$$

Значит,

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 + 16t + 48t^2$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} = 16 + 96t.$$

Через $t = 2$ с после начала движения, указанные выше величины будут равны следующим значениям:

$$s = 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^3 = 164 \text{ м},$$
$$v = 2 + 16 \cdot 2 + 48 \cdot 2^2 = 226 \text{ м/с},$$
$$a = 16 + 96 \cdot 2 = 208 \text{ м/с}^2.$$