№ 1.1.36

Найдём линейную комбинацию матриц $3A - 2B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для начала умножим матрицы на соответствующие коэффициенты:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix},$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь произведём вычитание и получим ответ:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & 6-2 \\ 9-2 & 12-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ 1.1.39

Найдём линейную комбинацию матриц $4A - 7B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для начала умножим матрицы на соответствующие коэффициенты:

$$4A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 5 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 5 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 0 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 20 & 12 \\ 8 & 0 & -12 & 4 \\ 20 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$7B = \begin{pmatrix} 7 \cdot 0 & 7 \cdot 2 & 7 \cdot 7 & 7 \cdot (-5) \\ 7 \cdot (-8) & 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 0 \\ 7 \cdot 4 & 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-2) & 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 49 & -35 \\ -56 & 7 & 21 & 0 \\ 28 & 14 & -14 & 35 \end{pmatrix}.$$

Теперь произведём вычитание и получим ответ:

$$4A - 7B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 20 & 12 \\ 8 & 0 & -12 & 4 \\ 20 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 14 & 49 & -35 \\ -56 & 7 & 21 & 0 \\ 28 & 14 & -14 & 35 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-0 & -8-14 & 20-49 & 12-(-35) \\ 8-(-56) & 0-7 & -12-21 & 4-0 \\ 20-28 & -4-14 & 0-(-14) & 16-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}.$$

№ 1.1.43

Найдём всевозможные произведения матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A имеет размер 2×3, а матрица B — размер 3×1. Видно, что определено только произведение AB. Найдём его:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ -1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

№ 1.1.44

Найдём всевозможные произведения матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A имеет размер 2×3, а матрица B — размер 3×2. Видно, что определено как произведение AB, так и BA. Найдём их:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 5 & 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \\ -3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & -3 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 5 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) & 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}.$$

№ 1.1.53

Найдём значение матричного многочлена $f(A)$, где

$$f(X) = 2X^2 - 3X + E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим слагаемые выражения

$$f(A) = 2A^2 - 3A + E$$

по отдельности. Начнём с первого:

$$2A^2 = 2(A \cdot A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E.$$

Заметим, что

$$f(A) = 2E - 3A + E = 3E - 3A = 3(E - A).$$

При этом

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а значит,

$$f(A) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

№ 1.1.63

Проверим, коммутируют ли матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для этого найдём их произведения:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -13 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Как видно, $AB \neq BA$, а значит матрицы A и B не коммутируют.

№ 1.1.64

Проверим, коммутируют ли матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Для этого найдём их произведения:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -32 & 9 & -25 \\ -30 & 22 & -59 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 8 & -11 & 25 \\ -30 & 22 & -39 \end{pmatrix}.$$

Как видно, $AB \neq BA$, а значит матрицы A и B не коммутируют.

№ 1.1.84

Приведём матрицу
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 10 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$
к ступенчатому виду. Вычтем из четвёртой строки вторую, третью и первую, умноженную на 2:
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Из второй строки вычтем первую и третью, а затем из третьей строки — удвоенную первую:
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -10 \\ 0 & -7 & -1 & 20 \\ 0 & -9 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
К третьей строке прибавим вторую, умноженную на $-\dfrac{9}{7}$:
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -10 \\ 0 & -7 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -\dfrac{40}{7} & -\dfrac{40}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 1.1.85

Приведём матрицу
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
к ступенчатому виду. Ко второй строке прибавим удвоенную третью:
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
К четвертой строке прибавим первую, умноженную на 4, и вторую, умноженную на -3:
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$