№ 1.3.17

Найдём ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$$

путём элементарных преобразований. Вычтем из третьей строки удвоенную вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Теперь ко второй строке прибавим удвоенную первую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Из третьей строки вычтем вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы видно, что $\operatorname{rk}(A) = 2$.

№ 1.3.18

Найдём ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$$

путём элементарных преобразований. Из третьей строки вычтем вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -15 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке прибавим утроенную вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -22 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы видно, что $\operatorname{rk}(A) = 3$.

№ 1.3.25

Найдём ранг матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
методом окаймляющих миноров. Начнём с элемента, стоящего на пересечении третьей строки и первого столбца:
$$M_1^3 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Добавим вторую строку и второй столбец:
$$M_{1,2}^{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$
Добавим первую строку и третий столбец:
$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
Третий столбец заменим четвёртым:
$$M_{1,2,4}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$
Таким образом, $\mathrm{rk}(A) = 2$, а минор $M_{1,2}^{2,3}$ является базисным.

№ 1.3.26

Найдём ранг матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
методом окаймляющих миноров. Начнём с элемента, стоящего на пересечении первой строки и первого столбца:
$$M_1^1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Добавим вторую строку и второй столбец:
$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Добавим третью строку и третий столбец:
$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Добавим четвёртую строку и четвёртый столбец и найдём минор разложением по второй строке:

$$M^{1,2,3,4}_{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{2+k} a_{2k} \overline{M}^2_k = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \overline{M}^2_1 +$$
$$+ (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \overline{M}^2_2 + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \overline{M}^2_3 +$$
$$+ (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \overline{M}^2_4 = \overline{M}^2_2 + \overline{M}^2_3 + \overline{M}^2_4 =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -6 + 12 - 6 = 0.$$

Заменим четвёртый столбец пятым и найдём минор разложением по третьей строке:

$$M^{1,2,3,4}_{1,2,3,5} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{3+k} a_{3k} \overline{M}^3_k = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \overline{M}^3_1 +$$
$$+ (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \overline{M}^3_2 + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \overline{M}^3_3 +$$
$$+ (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \overline{M}^3_4 = \overline{M}^3_1 - 3\overline{M}^3_2 - \overline{M}^3_4 =$$
$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \\ -7 & 3 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 32 - 3 \cdot 12 + 4 = 0.$$

Таким образом, $\mathrm{rk}(A) = 3$, а минор $M^{1,2,3}_{1,2,3}$ является базисным.

№ 1.4.50

Решим уравнение

$$XA = O,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, существует ли матрица A^{-1}:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Поскольку $\det(A) \neq 0$, то A^{-1} существует. Тогда

$$XA = O \Leftrightarrow XAA^{-1} = OA^{-1} \Leftrightarrow XE = O \Leftrightarrow X = O,$$

поскольку для каждой матрицы A порядка n выполнены условия $AA^{-1} = E$, $AE = A$, $OA = O$. Таким образом,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 1.4.57

Решим матричное уравнение:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Проверим, существует ли матрица, обратная к матрице A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Поскольку $\det(A) \neq 0$, то A^{-1} существует. Найдём её:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -14 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 7 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & -14 & 7 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & -14 & 0 & -4 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right).$$

При этом последовательно были выполнены следующие преобразования[1]:

$$(2) \to (2) - 2 \cdot (1),$$

$$\begin{cases} (2) \to 2 \cdot (2) \\ (3) \to 7 \cdot (3) \end{cases},$$

$$(2) \to (2) + (3),$$

$$(3) \to (3) + (2),$$

$$\begin{cases} (2) \to -\dfrac{1}{7} \cdot (2) \\ (3) \to -\dfrac{1}{14} \cdot (3) \end{cases},$$

[1]Запись "$(n) \to (n) + a \cdot (m)$" следует понимать, как прибавление к строке под номером n строки под номером m, умноженной на число a. Запись "$(m) \leftrightarrow (n)$" означает перемену мест строками m и n между собой.

$$(2) \leftrightarrow (3),$$
$$(1) \to (1) + 2 \cdot (2) - 3 \cdot (3).$$

Как мы видим,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, аналогично предыдущей задаче,

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = X = A^{-1}B.$$

То есть

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ -\frac{11}{7} \end{pmatrix}.$$

№ 2.1.32

Решим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases},$$

если это возможно. Запишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{array}\right).$$

Приведём последнюю к ступенчатому виду. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 2:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Тем же преобразованием, но применительно к основной матрице, мы получили бы

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(это видно сразу, исходя из того, что основная матрица является подматрицей расширенной матрицы, и в дальнейшем пояснятся не будет). Так, $\mathrm{rk}(A) = 1$ и $\mathrm{rk}\left(\overline{A}\right) = 2$, то есть $\mathrm{rk}(A) \neq \mathrm{rk}\left(\overline{A}\right)$. Тогда по теореме Кронекера-Капелли (а точнее по её отрицанию), исходная система несовместна, а равно не имеет решений.

№ 2.1.33

Решим систему

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=10 \end{cases},$$

если это возможно. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

Приведём её к ступенчатому виду. Для этого из второй строки вычтем удвоенную первую:

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Как мы видим, $\operatorname{rk}(A)=\operatorname{rk}\left(\overline{A}\right)=1$, где A — основная матрица системы. Тогда по теореме Кронекера-Капелли, исходная система совместна. Поскольку ранг меньше числа неизвестных $(1<2)$, то система неопределённая. При этом x будет считаться главной неизвестной, а y — свободной. Возвращаясь к преобразованной ранее матрице, получим уравнение, определяющее решение системы:

$$3x+2y=5 \Leftrightarrow x=\frac{5-2y}{3}.$$

Общее решение будет выглядеть следующим образом:

$$X=\begin{pmatrix} x=\dfrac{5-2y}{3} \\ y \end{pmatrix}.$$

В качестве примера частного решения, можно взять следующее (при $y=1$):

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

№ 2.1.37

Решим систему

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-4y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases},$$

если это возможно. Её расширенная матрица выглядит следующим образом:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Последовательно приведём её к ступенчатому виду следующими преобразованиями:

$$\begin{cases} (1)\to(1)-3\cdot(3) \\ (2)\to(2)-2\cdot(3) \end{cases},$$

$$\begin{cases} (1)\to 14\cdot(1) \\ (2)\to 11\cdot(2) \end{cases},$$

$$(1)\to(1)-(2),$$

$$(1)\leftrightarrow(3).$$

Так,

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & -1 & 8 \\ 0 & -14 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -154 & -14 & 112 \\ 0 & -154 & -55 & -11 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 41 & 123 \\ 0 & -154 & -55 & -11 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -154 & -55 & -11 \\ 0 & 0 & 41 & 123 \end{array}\right).$$

Как мы видим, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}\left(\overline{A}\right) = 3$, где A — основная матрица системы. Тогда по теореме Кронекера-Капелли, исходная система совместна. Поскольку ранг совпадает с числом неизвестных, то система определённая. Возвращаясь к преобразованной ранее матрице, получим систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ -154y - 55z = -11 \\ 41z = 123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5y - z \\ y = \dfrac{1 - 5z}{14} \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Таким образом, система имеет однозначное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

№ 2.1.41

Решим систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases},$$

если это возможно. Её расширенная матрица выглядит следующим образом:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

Последовательно приведём её к ступенчатому виду следующими преобразованиями:

$$\begin{cases} (2) \to (2) - (3) \\ (4) \to (4) - (1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} (4) \to (4) - (2) \\ (3) \to 3 \cdot (3) \end{cases},$$

$$(3) \to (3) - 2 \cdot (1),$$

$$(2) \to (2) + 2 \cdot (3),$$

$$(2) \leftrightarrow (3).$$

Так,

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \bigm| & 5 \\ 0 & 2 & -2 & \bigm| & -10 \\ 2 & 1 & 3 & \bigm| & 11 \\ 0 & 2 & -2 & \bigm| & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \bigm| & 5 \\ 0 & 2 & -2 & \bigm| & -10 \\ 6 & 3 & 9 & \bigm| & 33 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \bigm| & 5 \\ 0 & 2 & -2 & \bigm| & -10 \\ 0 & -1 & 7 & \bigm| & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \bigm| & 5 \\ 0 & 0 & 12 & \bigm| & 36 \\ 0 & -1 & 7 & \bigm| & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \bigm| & 5 \\ 0 & -1 & 7 & \bigm| & 23 \\ 0 & 0 & 12 & \bigm| & 36 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}\left(\overline{A}\right) = 3$, где A — основная матрица системы. Тогда по теореме Кронекера-Капелли, исходная система совместна. Поскольку ранг совпадает с числом неизвестных, то система определённая. Возвращаясь к преобразованной ранее матрице, получим систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_2 + 7x_3 = 23 \\ 12x_3 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5 - 2x_2 - x_3}{3} \\ x_2 = 7x_3 - 23 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Таким образом, система имеет однозначное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$