ミューオン計データ解析による宇宙線と宇宙空間プラズマ研究の解説

Review of Muon Detector Data Analysis for Cosmic-Ray and Space Plasma Research

Masayoshi Kozai *

2026 年 2 月 4 日

大気原子核と高エネルギー宇宙線（１次宇宙線）の衝突による核子レベルの破砕反応により、中間子が生成される。中間子（主として荷電 π 中間子）は速やかに崩壊しミューオンを生じる。ミューオンは透過力が高く、その多くが崩壊する前に地上へ到達する。従って地表で観測される宇宙線の主成分はミューオンであり、最も高い統計量（統計精度）を得ることができる。ミューオンが高層大気で生成された後の相互作用は電離損失に限られるため、１次宇宙線の運動量などの情報を良く保存するうえ、検出も容易である。まさに宇宙からのメッセンジャーと呼ぶに相応しい存在である。

これら宇宙線ミューオンの特長を最大限発揮できるのが、ミューオン計と呼ばれる粒子カウンターを用いた宇宙線異方性の解析である。異方性が宇宙線の運動量分布を反映することに基づき、宇宙線伝搬過程やそれを支配する宇宙空間プラズマの研究を行うことができる。ミューオン計による観測は長い歴史を持ち、多様かつ奥深い理論や方法論が蓄積されている。さらに地球観測などの異分野やデータサイエンスとの親和性も高いことから、近年も発展を続けている。本稿ではこれらミューオン計のデータ解析に関わる理論や解析方法を紹介する。

High-energy cosmic rays (primary cosmic rays) colliding with atmospheric nuclei induce nucleon-level fragmentation, producing secondary mesons. These mesons—predominantly charged pions—rapidly decay and generate muons. Muons have high penetrating power, and a large fraction of them reach the ground before decaying. Consequently, muons constitute the dominant component of the ground-level cosmic rays, enabling a high-statistics measurement. After their production in the upper atmosphere, muons undergo interactions limited to ionization energy loss, well-conserving the primary cosmic-ray information, such as their momentum, and enabling relatively easy detection. Muons are therefore worthy of being called messengers from space.

These muon characteristics are most effectively exploited by cosmic-ray anisotropy research using particle counters known as muon detectors. Because cosmic-ray anisotropy reflects their momentum distribution, such analyses enable studies of cosmic-ray propagation processes and the space plasma that governs them. Observations with muon detectors have a long history, accumulating diverse and profound theoretical frameworks and methodologies. Moreover, their strong affinity with diverse fields such as Earth observation and data science has driven continued development in recent years. This paper introduces the theory and data analysis methods relevant to muon detector observations.

* Polar Environment Data Science Center (PEDSC), Joint Support-Center for Data Science Research (ROIS-DS), Research Organization of Information and Systems, Japan
https://researchmap.jp/research01

1 宇宙線の異方性と輸送方程式

空間座標 $\mathbf{r}$ と運動量ベクトル $\mathbf{p}$ から成る位相空間で、ある時刻 t の宇宙線の密度分布関数を $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ とする。空間位置 $\mathbf{r}_E$ の地球での観測データに焦点を当て、3 次元運動量空間分布 $f(\mathbf{p},t;\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_E)$ を考える。さらに運動量空間を極座標 $\mathbf{p}=(p,\theta,\phi)$ で表すと、原点を中心とする半径 $p\sim p+\Delta p$（$\Delta p\ll p$）の球殻領域 τ_p での密度分布関数は角度分布 $f(\theta,\phi,t;\ p,\mathbf{r}_E)$ となる。宇宙線強度の方向分布、すなわち異方性として観測されるのがこの分布関数である。（運動量を決定できない観測の場合は、分布関数を運動量絶対値 p で積分したものが観測される異方性となる。）

分布を球面調和関数で展開する。

$$
\begin{aligned}
f(\theta,\phi,t;\ p) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\phi,t;\ p) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{F_n^{m,c}(p,t)\cos m\phi + F_n^{m,s}(p,t)\sin m\phi\}P_n^m(\cos\theta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta) f_n^m(\phi,t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

ここで

$$
f_n^m(\phi,t) = F_n^{m,c}(p,t)\cos m\phi + F_n^{m,s}(p,t)\sin m\phi \tag{2}
$$

とおいた。天頂角 θ への依存部分 $P_n^m(\cos\theta)$ はシュミットの半規格化ルジャンドル陪関数と呼ばれ、ルジャンドル陪関数 $P_{n,m}(\cos\theta)$ を

$$
P_n^m(\cos\theta) = \begin{cases} P_{n,m}(\cos\theta) & \text{for}\quad m=0 \\ \dfrac{2(n-m)!}{(n+m)!}^{1/2} P_{n,m}(\cos\theta) & \text{for}\quad m>0 \end{cases} \tag{3}
$$

と規格化したものである。これにより展開係数 $(F_n^{m,c},F_n^{m,s})$ が各調和関数成分の振幅と凡そ一致する利点がある。ルジャンドル陪関数はルジャンドル多項式 $P_n(x)$ から

$$
P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m} \tag{4}
$$

と定義される。球面調和関数の扱いは [Chapman and Bartels, 1940] が参考になる。

球殻 τ_p での運動量分布関数 $f(\mathbf{p})$ の N 次モーメントは

$$
\begin{aligned}
M_N(x(1),x(2),\ldots,x(N)) &= \frac{1}{\mathsf{m}^N}\int_{\tau_p}\prod_{i=1}^{N} p_{x(i)} f(\mathbf{p})\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\sim \frac{p^2\Delta p}{\mathsf{m}^N}\int_{\Omega}\prod_{i=1}^{N} p_{x(i)} f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega \\
&= v^N p^2\Delta p \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{(n_x+n_y)/2}\mu^{n_z}P_n^m(\mu)\mathrm{d}\mu\int_0^{2\pi}\sin^{n_y}\phi\cos^{n_x}\phi f_n^m(\phi)\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{5}
$$

と書ける。ただし 3 行目の 1 つ目の積分で $\mu=\cos\theta$ と変数変換した。2 行目の Ω は運動量空間での立体角を表し $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ である。運動量ベクトル成分の添え字 $x(i)$ は座標軸 (x,y,z) のいずれかを表し、

$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p\sin\theta\cos\phi, p\sin\theta\sin\phi, p\cos\theta)$ である。ゼロまたは正の整数 (n_x, n_y, n_z) はそれぞれ (p_x, p_y, p_z) の総乗数を表し $N = n_x + n_y + n_z$ である。また後の議論のためモーメントを相対論的質量 m の N 乗で割り、速度 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\mathsf{m}$ に対するモーメントとしている。右辺 1 つ目の積分を調べるため

$$I = \int_{-1}^{1} \mu^k P_{n,m}(\mu)\mathrm{d}\mu = \int_{-1}^{1} \mu^k (1-\mu^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_n(\mu)}{\mathrm{d}\mu^m}\mathrm{d}\mu \tag{6}$$

とおき、部分積分を行うと

$$\begin{aligned} I &= \left[\mu^k(1-\mu^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(\mu)}{\mathrm{d}\mu^{m-1}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\Big\{\mu^k(1-\mu^2)^{m/2}\Big\}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(\mu)}{\mathrm{d}\mu^{m-1}}\mathrm{d}\mu \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\Big\{\mu^k(1-\mu^2)^{m/2}\Big\}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(\mu)}{\mathrm{d}\mu^{m-1}}\mathrm{d}\mu \end{aligned} \tag{7}$$

これを m 回繰り返すと

$$I = (-1)^m \int_{-1}^{1} P_n(\mu)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\mu^m}\Big\{\mu^k(1-\mu^2)^{m/2}\Big\}\mathrm{d}\mu \tag{8}$$

被積分関数 $\mathrm{d}^m\big\{\mu^k(1-\mu^2)^{m/2}\big\}/\mathrm{d}^m\mu$ は次数 k 以下の μ の多項式であるから、ルジャンドル多項式の公式から $n > k$ のとき $I = 0$ となる。従って式 (5) の右辺は $n \le n_x + n_y + n_z = N$ の項のみが残る。すなわち N 次のモーメントは N 次以下の球面調和関数のみで表すことができ、球面調和関数展開の次数 n は分布関数モーメントの次数を表す。さらに付録 Aから

$$\sin^{q'}\phi\cos^{q}\phi = \sum_{k=0}^{q+q'}(a_k\cos k\phi + b_k\sin k\phi) \tag{9}$$

と展開することができ、三角関数の直交性から、式 (5) 右辺 2 つ目の積分は級数 $f_n^m(\phi)$ のうち $m \le n_x + n_y$ の項のみが残る。すなわち球面調和関数の位数 m は分布関数モーメントのうち (p_x, p_y) の寄与を表す。

付録 Bに 2 次までの分布関数モーメントの計算を書き下した。このうち 0 次モーメント

$$U(p,t) = \frac{M_0}{\Delta p} = \frac{1}{\Delta p}\int_{\tau_p} f(\mathbf{p},t)\mathrm{d}^3\mathbf{p} = 4\pi p^2 F_0^{0,c} \tag{10}$$

は運動量絶対値 p に対する宇宙線の微分数密度であり、一般的に宇宙線（または宇宙線密度）のエネルギースペクトルと呼ばれるものに対応する。球面調和関数展開のうち方向 (θ,ϕ) に依らない成分 $F_0^{0,c}$ で表されていることからも分かる通り、この宇宙線密度は等方的な宇宙線強度（異方性の等方成分）として観測される。さらに 1 次モーメント

$$\mathbf{S}(p,t) = \frac{1}{\Delta p}\begin{pmatrix} M_1(x) \\ M_1(y) \\ M_1(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathsf{m}\Delta p}\int_{\tau_p}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} f(\mathbf{p},t)\mathrm{d}^3\mathbf{p} = \frac{4\pi v p^2}{3}\begin{pmatrix} F_1^{1,c} \\ F_1^{1,s} \\ F_1^{0,c} \end{pmatrix} \tag{11}$$

は速度 $\mathbf{v}$ の分布関数での重み付き平均値であるから、宇宙線粒子群を流体として統計的に扱ったときの流速（に数密度を掛けたもの）を表す。右辺に現れている $n = 1$ 次球面調和関数の 3 成分の合成は、運動量空間ベクトル $(F_1^{1,c}, F_1^{1,s}, F_1^{0,c})$ の方向を軸としてその軸からの余弦で表される軸対称球面分布となり、一定流速のときに観測される強度分布として直感的にも理解できる。

電荷 Ze（e は素電荷）の粒子に働く外力が電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ による電磁的な力である場合、位相空間分布関数 $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ の時間発展を記述するボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \{Ze(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}} \tag{12}$$

となる。右辺は粒子衝突が無い場合（Vlasov 方程式）からの逸脱を表す。宇宙線の伝播する希薄な宇宙空間プラズマ中でも粒子同士の衝突は無視できる。しかし、電磁場 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ をパーカー磁場などの定式化しやすい平均場に制限し、空間スケールの小さな擾乱（プラズマ乱流）による効果を粒子散乱として分離して扱うために衝突項 $(\partial f/\partial t)_{\mathrm{coll}}$ が必要となる。

流速 $\mathbf{V}$ を持つ無衝突プラズマ（背景プラズマ）でのボルツマン方程式の 0 次モーメントを求め、異方性が十分小さいなどの多くの近似を与えて得られるのが宇宙線の輸送方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{3} p \mathbf{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0 \tag{13}$$

$$\mathbf{S} = C\mathbf{V}U - \mathbf{K} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \tag{14}$$

である。この式が確立するまでに [Parker, 1965] をはじめとする多くの解釈や導出方法が提案されているが、比較的後年の研究 [Webb and Gleeson, 1979, Munakata and Nagashima, 1986] やレビュー論文 [Gleeson and Webb, 1980, Moraal, 2013] がそれまでの先行研究に基づいて体系的に整理している。1 次以上のモーメントも含む一般化された輸送方程式は [Munakata and Nagashima, 1986] が与えている。

以上のように観測された異方性の球面調和関数表現は、分布関数のモーメントを通して宇宙線の輸送方程式と直接関連付けられる。このことに基づき、宇宙線の輸送パラメータ（拡散係数テンソル $\mathbf{K}$）や惑星間空間・太陽圏プラズマの構造について異方性から定量的な解析を行うことができる。

2　ミューオン計数率のモデル関数

2.1　変動率と大気効果補正

地上で検出される単位時間あたりミューオン数 $N_\mu(t)$ [counts] は大気入射前の宇宙線フラックスを反映しているが、同時に検出面積や単位時間の定義などにも依存し、これらは宇宙線の時間変動や異方性（相対的な角度分布）の解析では直接的には必要のない情報である。観測装置設計の面からも、カウント数絶対値ではなくその相対的変動率の高精度測定へレコーダーのリソースを割いた方が効率が良い（特にリソースに限りがあった旧式システムの場合）。そこで、カウント数の相対的変動率 I_μ のみを抽出する手法が多く用いられる。

$$I_\mu(t) = \ln \frac{N_\mu(t)}{N_{\mu 0}} \sim \frac{N_\mu(t) - N_{\mu 0}}{N_{\mu 0}} \tag{15}$$

文脈によっては、ミューオン計数率という用語がカウント数だけでなく変動率もまとめて指す場合も多い。基準値 $N_{\mu 0}$ は $N_\mu(t)/N_{\mu 0} \sim 1$ を満たす必要があり（即ち $N_\mu(t)$ の時間変動が十分小さいことを前提としている）、 最右辺の近似は $\mathrm{d}\ln(x)/\mathrm{d}x = 1/x$ から得られる。変動率の統計誤差は

$$\sigma(I_\mu) = \sqrt{N_\mu} \frac{\mathrm{d}I_\mu}{\mathrm{d}N_\mu} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{\mu 0}}} \tag{16}$$

と得られる。

ミューオン計数率への大気効果は気圧効果と気温効果に分けて扱われる場合が多い。また、変動率を扱う場合は大気の状態の時間変動のみを考慮すれば良い。気圧はミューオンが地上へ到達するまでに通過する物質量、すなわち電離損失によるエネルギー損失を表す。この物理量は大気の状態の高度分布などには関係しない

ので、検出器の傍に気圧計を置くことで測定でき、測定された地上気圧 $P(t)$ の 1 変数のみで表すことができる。気圧 $P(t)$ の変動とそれによるミューオン計数率 $I_\mu(t)$ の変動は比例関係にあると近似される。

$$I_\mu(t) \sim \beta\{P(t) - P_0\} + I_\mu^{\mathrm{corr}}(t) \tag{17}$$

気圧の基準値 P_0 にはその地点での平均的な値が用いられる。気圧効果係数 β [%/hPa] が決まれば、補正値 $I_\mu^{\mathrm{corr}}(t)$ が得られる。多くの場合、台風通過による急激な気圧変動など、気圧効果の影響が支配的になる $(|I_\mu^{\mathrm{corr}}(t)| \ll |\beta\{P(t)-P_0\}|$ と近似できる）期間を選び、その期間の各時刻観測データ $P(t), I_\mu(t)$ へ直線フィッティングを行うことで、その傾き β を求める。以後、気圧効果補正済み計数率 $I_\mu^{\mathrm{corr}}(t) = I_\mu(t) - \beta\{P(t) - P_0\}$ を単に $I_\mu(t)$ と表記する。

計数率への気温効果は、大気等圧面の高度変化による検出器までのミューオン飛行時間の変化（崩壊確率）や、高層大気中の中間子の飛程（ミューオンの生成確率）を反映する。これらは気温の高度分布に依存するが、それを十分な時間空間分解能で測定するのは困難である。そこで、後述するように異方性との性質の違いを利用して異方性解析と同時に除去する手法が多く用いられる。ただし近年は気象再解析データ（観測データを同化した気象シミュレーション）を利用して気圧効果と同様に気温効果を補正する手法も開発・実用化されつつある [Mendonça et al., 2016, Mendonça et al., 2019, Kihara et al., 2021, Munakata et al., 2022, Kozai et al., 2024]。

2.2 異方性への応答関数

地上で観測されたミューオン計数率と宇宙空間（地球磁気圏外）の異方性の対応関係を定式化するには、大気中の粒子伝搬及び地磁気による粒子運動方向の偏向を考慮する必要がある。磁場中の粒子の運動はラーモア半径 pc/ZeB で決まるため、運動量 p の代わりに rigidity $(= pc/Ze)$ [GV] を用いれば異なる粒子種を統一的に扱える。そこでここまで宇宙空間での宇宙線運動量を表していた p を、以降は rigidity 換算されたものとして扱う。

まず異方性とその時間変動の寄与を無視し、時間的に一定な宇宙線の等方成分 $f_0(p)$（一般的に想定される宇宙線のエネルギースペクトル）が生成するミューオン計数率を考える。地磁気効果も無視すると、地上の水平座標系での観測方向（天頂角 ζ、方位角 ψ）及び rigidity p に対するミューオン微分計数率はこれらの関数 $R(p, \zeta, \psi, h, \epsilon_\mu)$ [muons/m^2/s/str/GV] で表せる。観測地点の標準大気での気圧高度を h とした。また ϵ_μ は検出器のミューオンに対するエネルギー閾値であり、検出器内の位置や観測方向に依存する。ミューオン計数では検出器出力パルスをカウントするのみの場合が多いので、閾値以上では検出効率のエネルギー依存性は無視している。関数 $R(p, \zeta, \psi, h, \epsilon_\mu)$ として、US 標準大気モデルを使用した村上レスポンス関数 [Murakami et al., 1979] が多く用いられる。半世紀近く前の数値計算結果であり最新の粒子輸送計算コードを用いて再計算する価値はあるが、カウント数の絶対値ではなく変動率のみを解析する場合、このレスポンス関数に起因する系統誤差は他の誤差要因（気温効果や検出器特性）と比べて小さく、異方性解析結果には影響しないと予測される。

等方成分を考えているので、地磁気により粒子運動方向が偏向するだけであれば地磁気効果は考慮する必要がない。しかし実際には一定以下の rigidity の粒子が磁気圏により地上へ到達できない地磁気カットオフが存

在する。また前節の変動率表現に対応して、この等方成分の寄与をミューオン計数率の基準値 $N_{\mu 0}$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
N_{\mu 0} &= \int_0^{\infty} n_{\mu 0}(p)\mathrm{d}p \\
n_{\mu 0}(p) &= \int_A \int_{\Omega(\boldsymbol{\rho})} R'(p, \boldsymbol{\rho}, \zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}, h)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
R'(p, \boldsymbol{\rho}, \zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}, h) &= \begin{cases} R(p, \zeta, \psi, h, \epsilon_\mu(\boldsymbol{\rho}, \zeta, \psi)) & \text{for } p \geq p_c(\zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}) \\ 0 & \text{for } p < p_c(\zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

と得られる。観測地点の地理緯度経度を $(\lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}})$ とした。地磁気カットオフ rigidity p_c は観測地点とその場所での観測方向 (ζ, ψ) に依存する（高度 h は磁気圏スケールと比べて無視できる）。2 行目は検出器の有効面積 A 及び有効立体角 Ω に対する積分を表している。内側の積分は観測方向 (ζ, ψ) を積分変数とし、その積分範囲である観測視野（立体角）Ω は検出面上の位置（2 次元ベクトル）$\boldsymbol{\rho}$ で決まる。実際の計算手順ではまず検出面を微小要素 $\Delta A = \Delta\rho_x \Delta\rho_y$ に区分し、各要素が見込む観測視野 $\Omega(\boldsymbol{\rho})$ も微小要素 $\Delta\Omega$ へ区切る。検出面要素 ΔA と立体角要素 $\Delta\Omega$ から、観測方向 (ζ, ψ) とエネルギー閾値 ϵ_μ が決まる。それに加えて地理位置 $(\lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}, h)$ から、地磁気カットオフ $p_c(\zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}})$ とレスポンス関数 $R(p, \zeta, \psi, h, \epsilon_\mu)$ をそれぞれのルックアップテーブルより求める。それらを数値積分することで $n_{\mu 0}(p)$ 及び $N_{\mu 0}$ が得られる。

宇宙線強度の異方性とその時間変動 $f(\theta, \phi, t;\ p)$ を考慮した場合、それによる摂動（$n_{\mu 0}(p)$ からの変分）を受けた微分計数率は

$$
n_\mu(p, t) = \int_A \int_{\Omega(\boldsymbol{\rho})} R'(p, \boldsymbol{\rho}, \zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}, h) \frac{f'(\theta, \phi, t;\ p)}{f_0(p)} \mathrm{d}\Omega\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \tag{19}
$$

と表せられる。宇宙線の運動量方向と観測方向すなわち到来方向は反平行であるため、観測方向に基づく分布関数を $f'(\theta, \phi) = f(\pi - \theta, \pi + \phi)$ とおいた。地球自転軸を z 軸、深夜 0 時方向を x 軸とする座標系で磁気圏外での観測方向 (θ, ϕ) を定義する。地磁気カットオフと同様に θ は地理位置と地上での観測方向から決まる。

$$
\theta = \theta(\zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}) \tag{20}
$$

一方、ϕ はそれらへの依存に加えて地球自転とともに回転する。

$$
\begin{aligned}
\phi &= \phi_0(\zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}) + \omega t \\
&= \phi_0(\zeta, \psi, \lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}}) - \lambda_{\mathrm{lon}} + \omega t_{\mathrm{LT}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

ここで $\omega = \pi/12$ [rad/hour] は地球の自転角速度である。時刻 t は世界標準時で定義し、

$$
\omega t_{\mathrm{LT}} = \omega t + \lambda_{\mathrm{lon}} \tag{22}
$$

で定義される t_{LT} は観測地点経度 λ_{lon} で決まる局所時である。観測方向 (θ, ϕ) は、rigidity p を持つ仮想的な負荷電粒子を地理位置 $(\lambda_{\mathrm{lat}}, \lambda_{\mathrm{lon}})$ から (ζ, ψ) 方向へ打ち出し、地球磁場中のその運動方程式を磁場が十分弱くなる距離（例えば 25 地球半径）まで Runge-Kutta 法などで数値積分することで求める。地球磁場モデルは 5 年ごとに更新される国際標準磁場 IGRF が多く用いられる。但し中性子計などが感度を持つ低 rigidity の粒子に対しては短期的な地磁気擾乱も影響する可能性があり、その場合は IGRF に加えて各時刻の地磁気擾乱モデルも加える必要がある。数十 GV の rigidity に感度があるミューオン計測では、地磁気擾乱のモデルを入れても殆ど結果に影響しない。

式 (1) の球面調和関数展開において、$f(\theta,\phi) \to f'(\theta,\phi)$ の変換は三角関数及びルジャンドル陪関数の符号のみを変換する。

$$\begin{aligned}\cos m(\pi+\phi) &= (-1)^m \cos m\phi \\ \sin m(\pi+\phi) &= (-1)^m \sin m\phi \\ P_n^m(\cos(\pi-\theta)) &= (-1)^{n-m} P_n^m(\cos\theta)\end{aligned} \tag{23}$$

そこで

$$\xi_n^{m,c}(p,t) = (-1)^n \frac{F_n^{m,c}(p,t)}{f_0(p)} \quad \text{and} \quad \xi_n^{m,s}(p,t) = (-1)^n \frac{F_n^{m,s}(p,t)}{f_0(p)} \tag{24}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{f'(\theta,\phi,t;\ p)}{f_0(p)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \{\xi_n^{m,c}(p,t)\cos m\phi + \xi_n^{m,s}(p,t)\sin m\phi\} P_n^m(\cos\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix}\xi_n^{m,c}(p,t) \\ \xi_n^{m,s}(p,t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos m\phi \\ \sin m\phi\end{pmatrix} P_n^m(\cos\theta)\end{aligned} \tag{25}$$

式 (21) より角度 $\phi_0 - \lambda_{\mathrm{lon}}$ の回転行列を用いると、時間依存部分 ωt_{LT} を分離できる。

$$\frac{f'(\theta,\phi,t;\ p)}{f_0(p)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix}\xi_n^{m,c}(p,t) \\ \xi_n^{m,s}(p,t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos m(\phi_0-\lambda_{\mathrm{lon}}) & -\sin m(\phi_0-\lambda_{\mathrm{lon}}) \\ \sin m(\phi_0-\lambda_{\mathrm{lon}}) & \cos m(\phi_0-\lambda_{\mathrm{lon}})\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}} \\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix} P_n^m(\cos\theta) \tag{26}$$

さらに

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}c_n^m/\mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s_n^m/\mathrm{d}p\end{pmatrix} = \frac{1}{N_{\mu 0}} \int_A \int_{\Omega(\boldsymbol{\rho})} R'(p,\boldsymbol{\rho},\zeta,\psi,\lambda_{\mathrm{lat}},\lambda_{\mathrm{lon}},h) \begin{pmatrix}\cos m(\phi_0-\lambda_{\mathrm{lon}}) \\ \sin m(\phi_0-\lambda_{\mathrm{lon}})\end{pmatrix} P_n^m(\cos\theta)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \tag{27}$$

として時間非依存部分と検出器構造に依存する部分をまとめると、式 (19) は

$$n_\mu(p,t) = N_{\mu 0} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix}\xi_n^{m,c}(p,t) \\ \xi_n^{m,s}(p,t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathrm{d}c_n^m/\mathrm{d}p & -\mathrm{d}s_n^m/\mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s_n^m/\mathrm{d}p & \mathrm{d}c_n^m/\mathrm{d}p\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}} \\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix} \tag{28}$$

となる。式 (27) で定義した係数 $(\mathrm{d}c_n^m/\mathrm{d}p, \mathrm{d}s_n^m/\mathrm{d}p)$ は異方性の rigidity 分布 $(\xi_n^{m,c}(p,t), \xi_n^{m,s}(p,t))$ に対するミューオン計数率の応答関数を表し、微分カップリング係数と呼ばれる。下で述べる rigidity 積分されたカップリング係数に対応して係数という名称が付いているが、実際には rigidity p に依存する関数である。ミューオン計数率は

$$N_\mu(t) = \int_0^\infty n_\mu(p,t)\mathrm{d}p \tag{29}$$

と与えられるので、式 (15) で定義した変動率のモデル関数は

$$\begin{aligned}I_\mu(t)+1 &\sim \frac{N_\mu(t)}{N_{\mu 0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \int_0^\infty \begin{pmatrix}\xi_n^{m,c}(p,t) \\ \xi_n^{m,s}(p,t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathrm{d}c_n^m/\mathrm{d}p & -\mathrm{d}s_n^m/\mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s_n^m/\mathrm{d}p & \mathrm{d}c_n^m/\mathrm{d}p\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}} \\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix} \mathrm{d}p\end{aligned} \tag{30}$$

と得られる。さらに異方性の rigidity 依存性をある関数 $G_n^{m,c(s)}(p)$ で

$$\begin{aligned}\xi_n^{m,c}(p,t) &= \eta_n^{m,c}(t) G_n^{m,c}(p) \\ \xi_n^{m,s}(p,t) &= \eta_n^{m,s}(t) G_n^{m,s}(p)\end{aligned} \tag{31}$$

と変数分離する粗い近似では、カップリング係数

$$\begin{aligned} c_n^m &= \int_0^\infty G_n^{m,c}(p) \frac{\mathrm{d}c_n^m}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p \\ s_n^m &= \int_0^\infty G_n^{m,s}(p) \frac{\mathrm{d}s_n^m}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p \end{aligned} \tag{32}$$

を定義することで、モデル関数を線形結合で表せる。

$$I_\mu(t) + 1 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} \eta_n^{m,c}(t) \\ \eta_n^{m,s}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_n^m & -s_n^m \\ s_n^m & c_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m\omega t_{\mathrm{LT}} \\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}} \end{pmatrix} \tag{33}$$

以上の定式化は [Nagashima, 1971] や [Fujimoto et al., 1984] で詳しく述べられている。但しこれらが軸対称な異方性を前提としているのに対して、本稿では軸対称に限らない一般的な球面調和関数展開に基づいて説明した。また、式 (30) と (33) で示したモデル関数は前節で触れた気温効果を含んでいないことは注意が必要である。

次章で述べる解析方法によりモデル関数をミューオン計数率観測値 $I_\mu(t)$ へフィッティングし、異方性の球面調和関数表現 $(\xi_n^{m,c}(p,t), \xi_n^{m,s}(p,t))$ が得られる。式 (1) より

$$f_0(p) = Y_0(p) = F_0^{0,c}(p) \tag{34}$$

であるから、式 (24) と (10), (11) より 1 次異方性は

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{1,c}(p,t) \\ \xi_1^{1,s}(p,t) \\ \xi_1^{0,c}(p,t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{F_0^{0,c}(p)} \begin{pmatrix} F_1^{1,c}(p,t) \\ F_1^{1,s}(p,t) \\ F_1^{0,c}(p,t) \end{pmatrix} = -\frac{3}{v} \frac{\mathbf{S}(p,t)}{U(p)} \tag{35}$$

と輸送方程式へ対応づけられる。

3　データ解析方法

3.1　日周異方性のハーモニック解析

モデル関数 (33) のうち $m \geq 1$ の成分は日周異方性と呼ばれ、地球の自転（t_{LT}）に従ってミューオン計数率の日周変動（$1/m$ 日周期変動）として現れるため検出しやすい。球面調和関数表現を活かしてそれをフーリエ級数として取り出すハーモニック解析は、代表的な異方性解析手法の一つである。

名古屋ミューオン計のように単一観測地点で多方向のミューオン計数率を同時計測している場合を考える。方向チャンネル i のミューオン計数率 1 時間値を $N_{\mu,i}(t)$ とする。日周変動を抽出するため、24 時間移動平均

$$N_{\mu,i}^{24\mathrm{h}}(t) = \frac{1}{24} \sum_{\tau=-12}^{11} N_{\mu,i}(t+\tau) \tag{36}$$

を基準値として変動率を求める。

$$I_{\mu,i}(t) = \ln \frac{N_{\mu,i}(t)}{N_{\mu,i}^{24\mathrm{h}}(t)} \tag{37}$$

時刻 t を各観測日 d とその中での局所時 t_{LT} $(0 \leq t_{\mathrm{LT}} < 24$ hours) に分け、全観測期間（日数 n_d）に対して各局所時での $I_{\mu,i}(t)$ の平均値を求める。

$$D_{\mu,i}(t_{\mathrm{LT}}) = \frac{1}{n_d} \sum_d I_{\mu,i}(d;\ t_{\mathrm{LT}}) \tag{38}$$

観測期間の間は異方性が一定である（又はその間の平均的な異方性のみに興味がある）と仮定すると、式 (33) に対応するモデル関数は

$$D_{\mu,i}(t_{\mathrm{LT}}) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\begin{pmatrix}\eta_n^{m,c}\\ \eta_n^{m,s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_{n,i}^m & -s_{n,i}^m\\ s_{n,i}^m & c_{n,i}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}}\\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty}\begin{pmatrix}a_{\mathrm{atm}}^m\\ b_{\mathrm{atm}}^m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}}\\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix} \tag{39}$$

となる。カップリング係数 $(c_{n,i}^m, s_{n,i}^m)$ は方向チャンネルごとに決まるため添え字 i を加えている。また、気温効果に起因する日周変動成分として $(a_{\mathrm{atm}}^m, b_{\mathrm{atm}}^m)$ の項を追加している。気温効果の方向チャンネルによる違いは異方性と比べれば小さく [Okazaki et al., 2008]、方向チャンネル i に依存しないと近似している。このモデル関数を局所時 t_{LT} の関数でまとめると、

$$\begin{aligned}
D_{\mu,i}(t_{\mathrm{LT}}) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\begin{pmatrix}c_{n,i}^m\eta_n^{m,c}+s_{n,i}^m\eta_n^{m,s}\\ -s_{n,i}^m\eta_n^{m,c}+c_{n,i}^m\eta_n^{m,s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}}\\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty}\begin{pmatrix}a_{\mathrm{atm}}^m\\ b_{\mathrm{atm}}^m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}}\\ \sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\end{pmatrix}\\
&\sim \sum_{m=1}^{n_{\max}}\left[\left\{\sum_{n=m}^{n_{\max}}\left(c_{n,i}^m\eta_n^{m,c}+s_{n,i}^m\eta_n^{m,s}\right)+a_{\mathrm{atm}}^m\right\}\cos m\omega t_{\mathrm{LT}}+\right.\\
&\qquad\left.\left\{\sum_{n=m}^{n_{\max}}\left(-s_{n,i}^m\eta_n^{m,c}+c_{n,i}^m\eta_n^{m,s}\right)+b_{\mathrm{atm}}^m\right\}\sin m\omega t_{\mathrm{LT}}\right]
\end{aligned} \tag{40}$$

となり、局所時 t_{LT} の関数のフーリエ級数展開となっている。また、異方性の振幅は一般的に次数の増加と共に急激に小さくなり、平均的には $n=3$ 次程度で検出限界を迎えるので、無限和を有限値 $n_{\max}$ までの和に差し替えた。以上より、複数の方向チャンネル i の観測値 $D_{\mu,i}(t_{\mathrm{LT}})$ から m 次フーリエ係数 (a_i^m, b_i^m) を求め、それらへモデル関数

$$\begin{aligned}
a_i^m &\sim \sum_{n=m}^{n_{\max}}\left(c_{n,i}^m\eta_n^{m,c}+s_{n,i}^m\eta_n^{m,s}\right)+a_{\mathrm{atm}}^m\\
b_i^m &\sim \sum_{n=m}^{n_{\max}}\left(-s_{n,i}^m\eta_n^{m,c}+c_{n,i}^m\eta_n^{m,s}\right)+b_{\mathrm{atm}}^m
\end{aligned} \tag{41}$$

をフィッティングすることで、異方性 $(\eta_n^{m,c}, \eta_n^{m,s})$ と気温効果 $(a_{\mathrm{atm}}^m, b_{\mathrm{atm}}^m)$ がフィッティングパラメータとして同時に得られる。実際には $n_{\max}=2$ で殆どの観測値を説明できることや、地球自転軸の黄道面に対する傾きが $(\eta_n^{m,c}, \eta_n^{m,s})$ の年周変動を引き起こすことを利用して、$D_{\mu,i}(t_{\mathrm{LT}})$ が基づく時刻系などの工夫により n に関する総和をさらに減らす場合が多い [Nagashima, 1971, Munakata et al., 1998]。最も単純なケースとして $n_{\max}=1$ と近似した解析は [Munakata et al., 2014] が参考になる。

また、観測データのタイムスタンプは世界標準時 t で記録されるのが一般的である。式 (38) の計算の際に局所太陽時 t_{LT} へ直接変換すると離散時刻の扱いが面倒になるので、まずは世界標準時での各日時刻 t_{hour} $(0 \le t_{\mathrm{hour}} < 24$ hours) で各時刻平均値 $D_{\mu,i}(t_{\mathrm{hour}})$ とフーリエ係数 $(a_{i,\mathrm{UT}}^m, b_{i,\mathrm{UT}}^m)$ を求める。式 (22) より、そこから回転行列で

$$\begin{pmatrix}a_i^m\\ b_i^m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\lambda_{\mathrm{lon}} & -\sin\lambda_{\mathrm{lon}}\\ \sin\lambda_{\mathrm{lon}} & \cos\lambda_{\mathrm{lon}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i,\mathrm{UT}}^m\\ b_{i,\mathrm{UT}}^m\end{pmatrix} \tag{42}$$

と変換して局所時でのフーリエ係数 (a_i^m, b_i^m) を求める。

3.2 名古屋 GG による南北異方性解析

3.3 ネットワーク観測

3.4 Rigidity 依存性の Unfolding

付録 A　三角関数のべき乗の展開

三角関数の公式から

$$\cos^q \alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{q-1}}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{q/2-1}\binom{q}{k}\cos(q-2k)\alpha + \frac{1}{2}\binom{q}{q/2}\right] & \text{for even } q \\ \dfrac{1}{2^{q-1}}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{(q-1)/2}\binom{q}{k}\cos(q-2k)\alpha\right] & \text{for odd } q \end{cases} \tag{43}$$

$$\sin^q \alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{q-1}}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{q/2-1}(-1)^{q/2+k}\binom{q}{k}\cos(q-2k)\alpha + \frac{1}{2}\binom{q}{q/2}\right] & \text{for even } q \\ \dfrac{1}{2^{q-1}}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{(q-1)/2}(-1)^{(q-1)/2+k}\binom{q}{k}\sin(q-2k)\alpha\right] & \text{for odd } q \end{cases} \tag{44}$$

であるから、各係数を簡略化して a とすると

$$\sin^{q'}\alpha\cos^q\alpha = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{[q/2]}\sum_{k'=0}^{q'/2} a^{(1)}_{kk'}[\cos\{(q-2k)+(q'-2k')\}\alpha + \cos\{(q-2k)-(q'-2k')\}\alpha] & \text{for evem } q' \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[q/2]}\sum_{k'=0}^{(q'-1)/2} a^{(2)}_{kk'}[\sin\{(q-2k)+(q'-2k')\}\alpha - \sin\{(q-2k)-(q'-2k')\}\alpha] & \text{for odd } q' \end{cases} \tag{45}$$

となり、最大次数が $q+q'$ のフーリエ級数で表される。床関数 $[q/2]$ は $q/2$ を超えない整数を表す。

付録 B　2 次までの分布関数モーメント

ルジャンドル陪関数 $P_{n,m}(\mu)$ は $n-m$ が偶数のとき偶関数、奇数のとき奇関数であることと、三角関数の直交性、および付録 Aを利用すると各級数の中で積分を計算する項数を削減できる。

(i) 0 次

$$M_0 = p^2\Delta p\int_{-1}^{1}P_0^0(\mu)\mathrm{d}\mu\int_0^{2\pi}F_0^{0,c}\mathrm{d}\phi = 4\pi p^2 F_0^{0,c}\Delta p \tag{46}$$

(ii) 1 次

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_1(x) \\ M_1(y) \\ M_1(z) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\mathsf{m}} \int_{\tau_p} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} f(\mathbf{p}, t) \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&= vp^2 \Delta p \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} (1-\mu^2)^{1/2} P_1^1(\mu) \\ (1-\mu^2)^{1/2} P_1^1(\mu) \\ \mu P_1^0(\mu) \end{pmatrix} \mathrm{d}\mu \circ \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} F_1^{1,c} \cos^2 \phi \\ F_1^{1,s} \sin^2 \phi \\ F_0^{0,c} \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4\pi vp^2 \Delta p}{3} \begin{pmatrix} F_1^{1,c} \\ F_1^{1,s} \\ F_1^{0,c} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{47}
$$

(iii) 2 次

$$
\begin{aligned}
M_2(x,x) &= \frac{1}{\mathsf{m}^2} \int_{\tau_p} p_x^2 f(\mathbf{p}, t) \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&= v^2 p^2 \Delta p \int_{-1}^{1} (1-\mu^2) \begin{pmatrix} P_0^0(\mu) \\ P_2^0(\mu) \\ P_2^2(\mu) \end{pmatrix} \mathrm{d}\mu \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \begin{pmatrix} F_0^{0,c} \\ F_2^{0,c} \\ F_2^{2,c} \cos 2\phi \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi \\
&= v^2 p^2 \Delta p \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/15 \\ 8/(5\sqrt{3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi F_0^{0,c} \\ \pi F_2^{0,c} \\ \pi F_2^{2,c}/2 \end{pmatrix} \\
&= \pi v^2 p^2 \Delta p \left(\frac{4}{3} F_0^{0,c} - \frac{4}{15} F_2^{0,c} + \frac{4}{5\sqrt{3}} F_2^{2,c} \right)
\end{aligned} \tag{48}
$$

上記の $\cos \phi$ を $\sin \phi$ に差し替えて

$$
M_2(y,y) = \pi v^2 p^2 \Delta p \left(\frac{4}{3} F_0^{0,c} - \frac{4}{15} F_2^{0,c} - \frac{4}{5\sqrt{3}} F_2^{2,c} \right) \tag{49}
$$

が得られる。また、

$$
\begin{aligned}
M_2(z,z) &= \frac{1}{\mathsf{m}^2} \int_{\tau_p} p_z^2 f(\mathbf{p}, t) \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&= v^2 p^2 \Delta p \int_{-1}^{1} \mu^2 \begin{pmatrix} P_0^0(\mu) \\ P_2^0(\mu) \end{pmatrix} \mathrm{d}\mu \cdot \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} F_0^{0,c} \\ F_2^{0,c} \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi \\
&= v^2 p^2 \Delta p \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\pi F_0^{0,c} \\ 2\pi F_2^{0,c} \end{pmatrix} \\
&= \pi v^2 p^2 \Delta p \left(\frac{4}{3} F_0^{0,c} + \frac{8}{15} F_2^{0,c} \right)
\end{aligned} \tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2(x,y) &= \frac{1}{\mathsf{m}^2} \int_{\tau_p} p_x p_y f(\mathbf{p}, t) \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&= v^2 p^2 \Delta p \int_{-1}^{1} (1-\mu^2) P_2^2(\mu) \mathrm{d}\mu \cdot \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi \cdot F_2^{2,s} \sin 2\phi \mathrm{d}\phi \\
&= v^2 p^2 \Delta p \frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi F_2^{2,s}}{2} \\
&= \frac{4\pi v^2 p^2 \Delta p}{5\sqrt{3}} F_2^{2,s}
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2(x,z) &= \frac{1}{\mathsf{m}^2}\int_{\tau_p} p_x p_z f(\mathbf{p},t)\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&= v^2p^2\Delta p\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{1/2}\mu P_2^1(\mu)\mathrm{d}\mu\cdot\int_0^{2\pi}\cos\phi\cdot F_2^{1,c}\cos\phi\mathrm{d}\phi \\
&= v^2p^2\Delta p\frac{4}{5\sqrt{3}}\cdot\pi F_2^{1,c} \\
&= \frac{4\pi v^2p^2\Delta p}{5\sqrt{3}}F_2^{1,c}
\end{aligned}
\tag{52}
$$

上記の $\cos\phi$ を $\sin\phi$、$F_2^{1,c}$ を $F_2^{1,s}$ に差し替えて

$$
M_2(y,z) = \frac{4\pi v^2p^2\Delta p}{5\sqrt{3}}F_2^{1,s} \tag{53}
$$

が得られる。

参考文献

[Chapman and Bartels, 1940] Chapman, S. and Bartels, J. (1940). *Geomagnetism*, volume 2. Oxford University Press, Oxford.

[Fujimoto et al., 1984] Fujimoto, K., Inoue, A., Murakami, K., and Nagashima, K. (1984). Coupling Coefficients of Cosmic Ray Daily Variations for Meson Telescopes. *Report of Cosmic-ray Research Laboratory, Nagoya University*, 9.

[Gleeson and Webb, 1980] Gleeson, L. J. and Webb, G. M. (1980). The Propagation of Cosmic-Rays in the Interplanetary Region (The Theory). *Fundamentals of Cosmic Physics*, 6:187–312.

[Kihara et al., 2021] Kihara, W., Munakata, K., Kato, C., Kataoka, R., Kadokura, A., Miyake, S., Kozai, M., Kuwabara, T., Tokumaru, M., Mendonça, R. R. S., Echer, E., Lago, A. D., Rockenbach, M., Schuch, N. J., Bageston, J. V., Braga, C. R., Al Jassar, H. K., Sharma, M. M., Duldig, M. L., Humble, J. E., Evenson, P., Sabbah, I., and Kóta, J. (2021). A Peculiar ICME Event in August 2018 Observed With the Global Muon Detector Network. *Space Weather*, 19(3):e2020SW002531.

[Kozai et al., 2024] Kozai, M., Hayashi, Y., Fujii, K., Munakata, K., Kato, C., Miyashita, N., Kadokura, A., Kataoka, R., Miyake, S., Duldig, M. L., Humble, J. E., and Iwai, K. (2024). Cosmic-Ray North–South Anisotropy: Rigidity Spectrum and Solar Cycle Variations Observed by Ground-based Muon Detectors. *The Astrophysical Journal*, 977(2):160.

[Mendonça et al., 2016] Mendonça, R. R. S., Braga, C. R., Echer, E., Dal Lago, A., Munakata, K., Kuwabara, T., Kozai, M., Kato, C., Rockenbach, M., Schuch, N. J., Al Jassar, H. K., Sharma, M. M., Tokumaru, M., Duldig, M. L., Humble, J. E., Evenson, P., and Sabbah, I. (2016). THE TEMPERATURE EFFECT IN SECONDARY COSMIC RAYS (MUONS) OBSERVED AT THE GROUND: ANALYSIS OF THE GLOBAL MUON DETECTOR NETWORK DATA. *The Astrophysical Journal*, 830(2):88.

[Mendonça et al., 2019] Mendonça, R. R. S., Wang, C., Braga, C. R., Echer, E., Dal Lago, A., Costa, J. E. R., Munakata, K., Li, H., Liu, Z., Raulin, J.-P., Kuwabara, T., Kozai, M., Kato, C., Rockenbach, M., Schuch, N. J., Al Jassar, H. K., Sharma, M. M., Tokumaru, M., Duldig, M. L., Humble, J. E., Evenson, P., and Sabbah, I. (2019). Analysis of Cosmic Rays' Atmospheric Effects and Their Relationships to

Cutoff Rigidity and Zenith Angle Using Global Muon Detector Network Data. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 124(12):9791–9813.

[Moraal, 2013] Moraal, H. (2013). Cosmic-Ray Modulation Equations. *Space Science Reviews*, 176(1-4):299–319.

[Munakata et al., 1998] Munakata, K., Kitawada, T., Yasue, S., Mori, S., Kato, C., Koyama, M., Akahane, S., Hall, D. L., Fujii, Z., Fujimoto, K., Humble, J. E., Fenton, A. G., Fenton, K. B., and Duldig, M. L. (1998). Solar semidiurnal anisotropy of galactic cosmic ray intensity observed by the two-hemisphere network of surface-level muon telescopes. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 103(A11):26851–26857.

[Munakata et al., 2022] Munakata, K., Kozai, M., Kato, C., Hayashi, Y., Kataoka, R., Kadokura, A., Tokumaru, M., Mendonça, R. R. S., Echer, E., Lago, A. D., Rockenbach, M., Schuch, N. J., Bageston, J. V., Braga, C. R., Jassar, H. K. A., Sharma, M. M., Duldig, M. L., Humble, J. E., Sabbah, I., Evenson, P., Mangeard, P.-S., Kuwabara, T., Ruffolo, D., Sáiz, A., Mitthumsiri, W., Nuntiyakul, W., and Kóta, J. (2022). Large-amplitude Bidirectional Anisotropy of Cosmic-Ray Intensity Observed with Worldwide Networks of Ground-based Neutron Monitors and Muon Detectors in 2021 November. *The Astrophysical Journal*, 938(1):30.

[Munakata et al., 2014] Munakata, K., Kozai, M., Kato, C., and Kóta, J. (2014). LONG-TERM VARIATION OF THE SOLAR DIURNAL ANISOTROPY OF GALACTIC COSMIC RAYS OBSERVED WITH THE NAGOYA MULTI-DIRECTIONAL MUON DETECTOR. *The Astrophysical Journal*, 791(1):22.

[Munakata and Nagashima, 1986] Munakata, K. and Nagashima, K. (1986). A theory of cosmic ray anisotropies of solar origin. *Planetary and Space Science*, 34(1):99–116.

[Murakami et al., 1979] Murakami, K., Nagashima, K., Sagisaka, S., Mishima, Y., and Inoue, A. (1979). Response functions for cosmic-ray muons at various depths underground. *Il Nuovo Cimento C*, 2(5):635–651.

[Nagashima, 1971] Nagashima, K. (1971). THREE-DIMENSIONAL COSMlC RAY ANlSOTROPY lN lNTERPLANETARY SPACE. *Rep. Ionos. Space Res. Japan*, 25:189–211.

[Okazaki et al., 2008] Okazaki, Y., Fushishita, A., Narumi, T., Kato, C., Yasue, S., Kuwabara, T., Bieber, J. W., Evenson, P., Da Silva, M. R., Dal Lago, A., Schuch, N. J., Fujii, Z., Duldig, M. L., Humble, J. E., Sabbah, I., Kóta, J., and Munakata, K. (2008). Drift Effects and the Cosmic Ray Density Gradient in a Solar Rotation Period: First Observation with the Global Muon Detector Network (GMDN). *The Astrophysical Journal*, 681(1):693–707.

[Parker, 1965] Parker, E. (1965). The passage of energetic charged particles through interplanetary space. *Planetary and Space Science*, 13(1):9–49.

[Webb and Gleeson, 1979] Webb, G. M. and Gleeson, L. J. (1979). On the equation of transport for cosmic-ray particles in the interplanetary region. *Astrophysics and Space Science*, 60(2):335–351.