Машинное обучение в науках о Земле

Михаил Криницкий

к.т.н., н.с.
Институт океанологии РАН им. П.П. Ширшова

Лаборатория взаимодействия океана и атмосферы и мониторинга климатических изменений (ЛВОАМКИ)

Задачи классификации

Михаил Криницкий

к.т.н., н.с.
Институт океанологии РАН им. П.П. Ширшова

Лаборатория взаимодействия океана и атмосферы и мониторинга климатических изменений (ЛВОАМКИ)

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

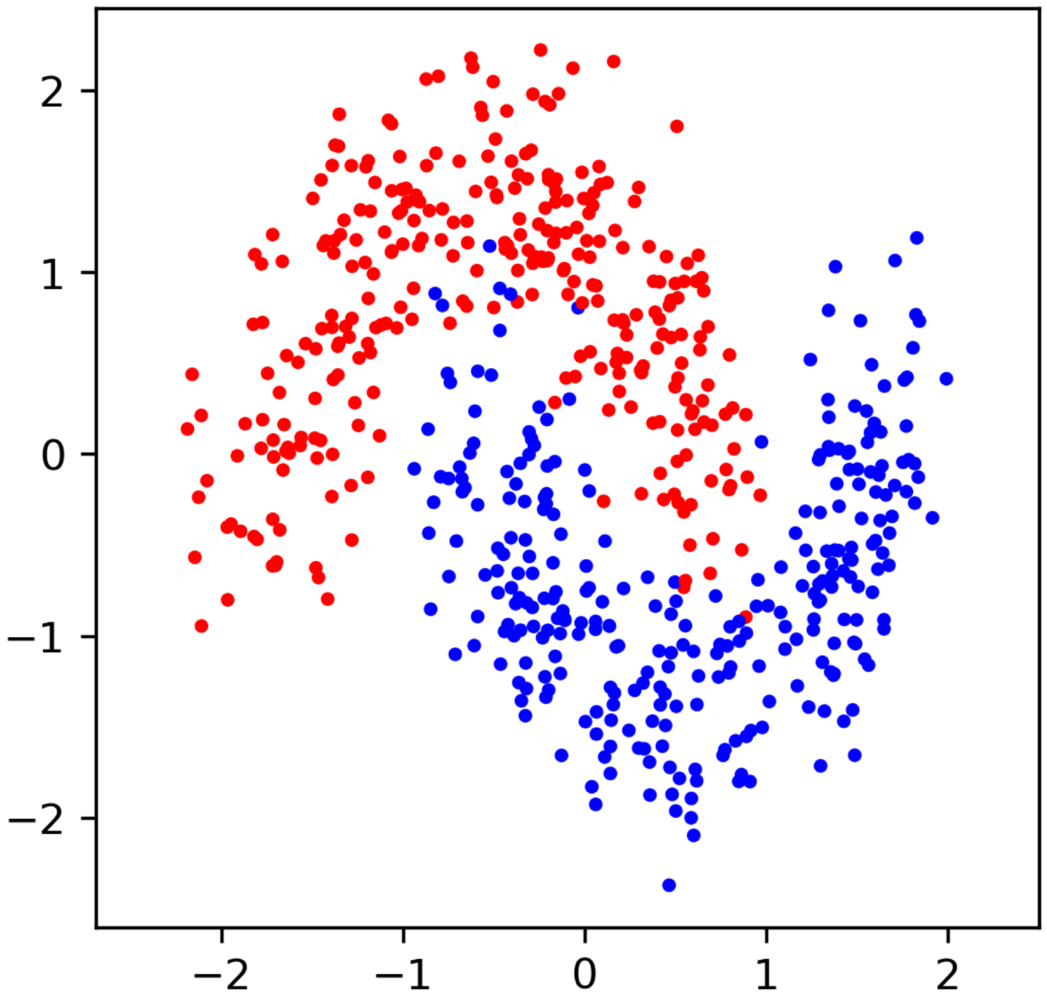
ЦЕЛЬ: **сформулировать задачу** (в терминах машинного обучения)

- «Обучение с учителем»
  - восстановление регрессии
  - классификация

что я хочу? – метку класса

«красный или синий?»

(бинарная классификация)



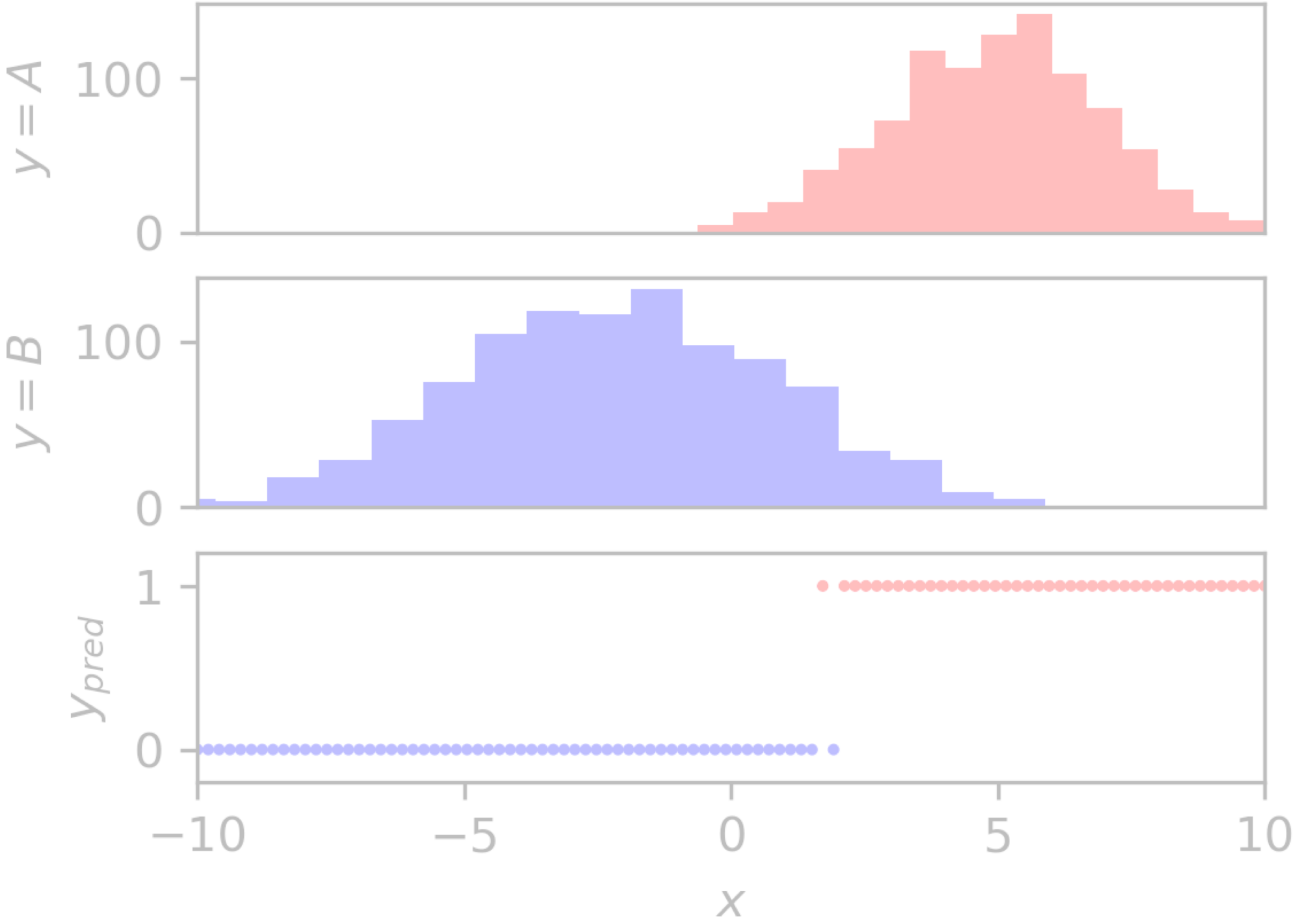
previously on ML4ES

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Простейший пример: объекты описываются действительным признаком $\boldsymbol{x}$
целевая переменная $\boldsymbol{y}$ – бинарная, классы: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$; по 1000 экземпляров каждого класса
пусть для класса $y = \boldsymbol{A}$ значения $x \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A)$, для класса $y = \boldsymbol{B}$ значения $x \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B)$

Подход №1: **KNN** (метод $\boldsymbol{K}$ ближайших соседей)

1. выбрать $\boldsymbol{K}$ ближайших соседей для нового объекта (! нужно определить меру близости !)
2. осреднить (можно с разными весами) целевую переменную по этим объектам («простое голосование», «majority vote» или «взвешенное голосование», «weighted vote»)
3. считать полученный результат значением целевой переменной на новом объекте



previously on ML4ES

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

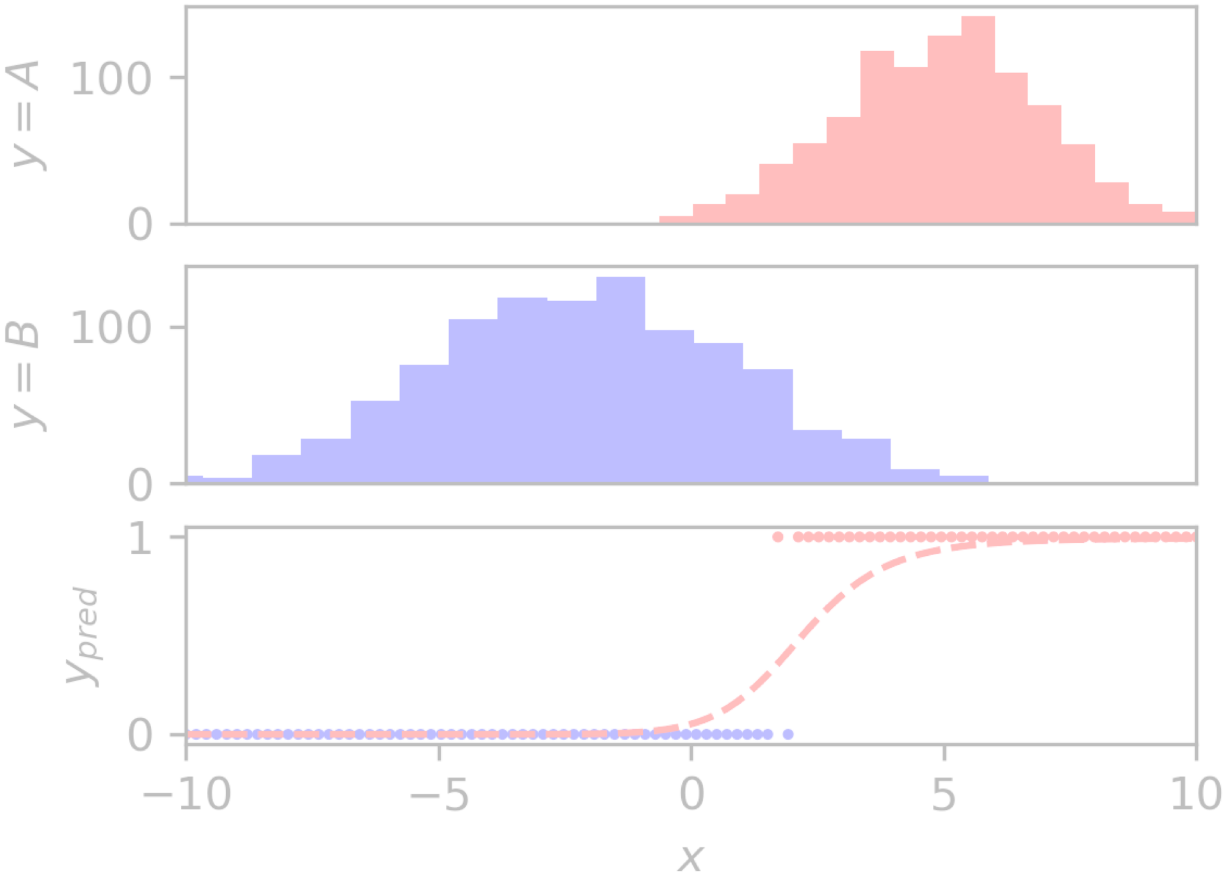
$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)\ P(Y)}{P(X)}$$

ЕСЛИ нам повезло и МЫ ЗНАЕМ (или полагаем как допущение в процессе решения) распределения X для каждого из классов $P(X|Y = A)$, $P(X|Y = B)$ etc., - то можно получить **аналитическое решение!**

$$P(Y = B|X = x) = \frac{e^{-\frac{(x+2)^2}{2*9}} * \frac{1}{2}}{e^{-\frac{(x-5)^2}{2*4}} * \frac{1}{2} + e^{-\frac{(x+2)^2}{2*9}} * \frac{1}{2}}$$

«Байесовский классификатор»

(не путать с «naïve bayes»)



ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Naïve bayes classifier, «наивный байесовский классификатор»

$P(Y|X) \propto P(X|Y)\ P(Y)$

можно забыть про $P(X = x)$

$$P(X|Y) = P\left(x_1, x_2, x_3 \ldots x_p \middle| Y\right) = P\left(x_2, x_3 \ldots x_p \middle| Y, x_1\right) * P(x_1|Y) = \cdots$$

$$= P(x_1|Y) * P(x_2|Y, x_1) * P(x_3|Y, x_1, x_2) * \cdots * P(x_p|Y, x_1, \ldots, x_{p-1})$$

наивное предположение: переменные x_i условно независимы:

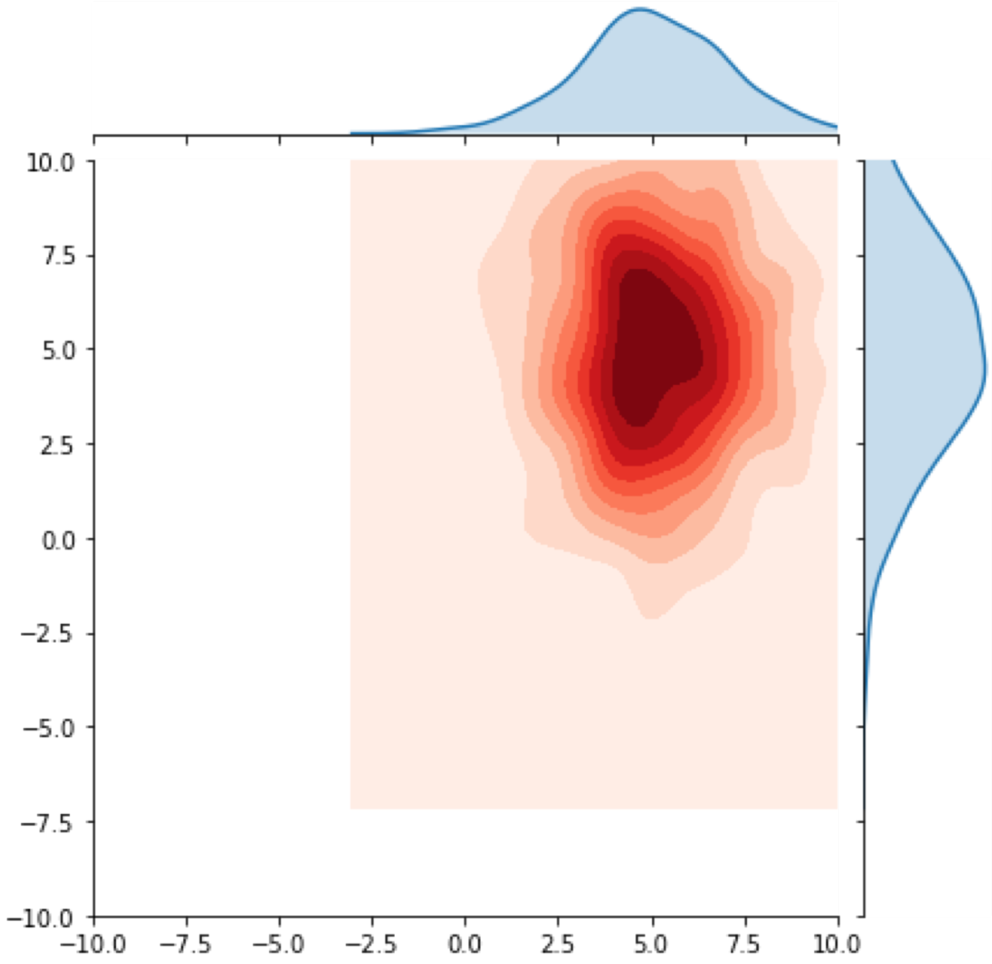
$$P(x_k|Y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = P(x_k|Y)$$

Остается оценить распределения $P(x_k|Y)$ для всех k независимо друг от друга – и можно подставлять в оценку вероятности $P(Y|X)$. Оценка распределения может базироваться на предположении об их нормальности, - тогда нужно оценить выборочное среднее (оценка параметра μ) и выборочную дисперсию (оценка параметра σ^2).

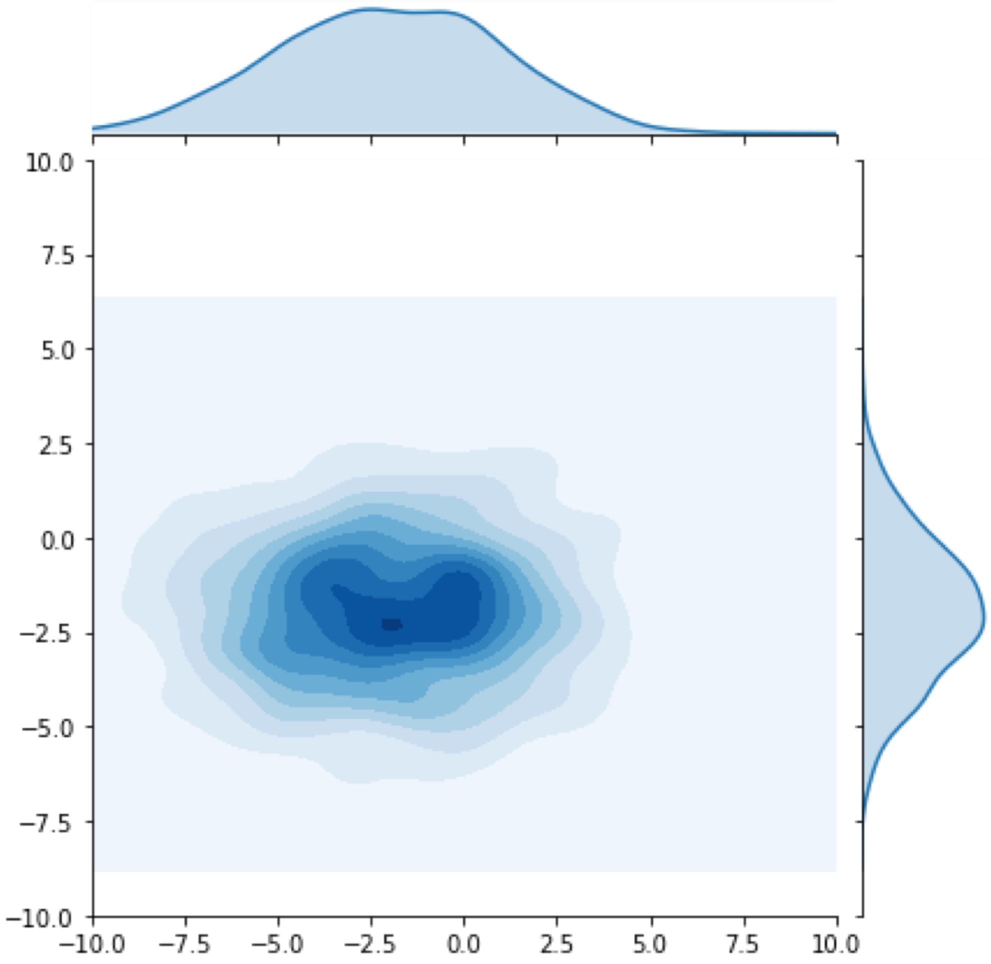
ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Цель: оценить **вероятность** классов $\boldsymbol{A}$ (класс “**1**”) и $\boldsymbol{B}$(класс “**0**”) для объекта, описываемого значением x.

$$P(Y = k|X = x)$$



$$Y = A$$

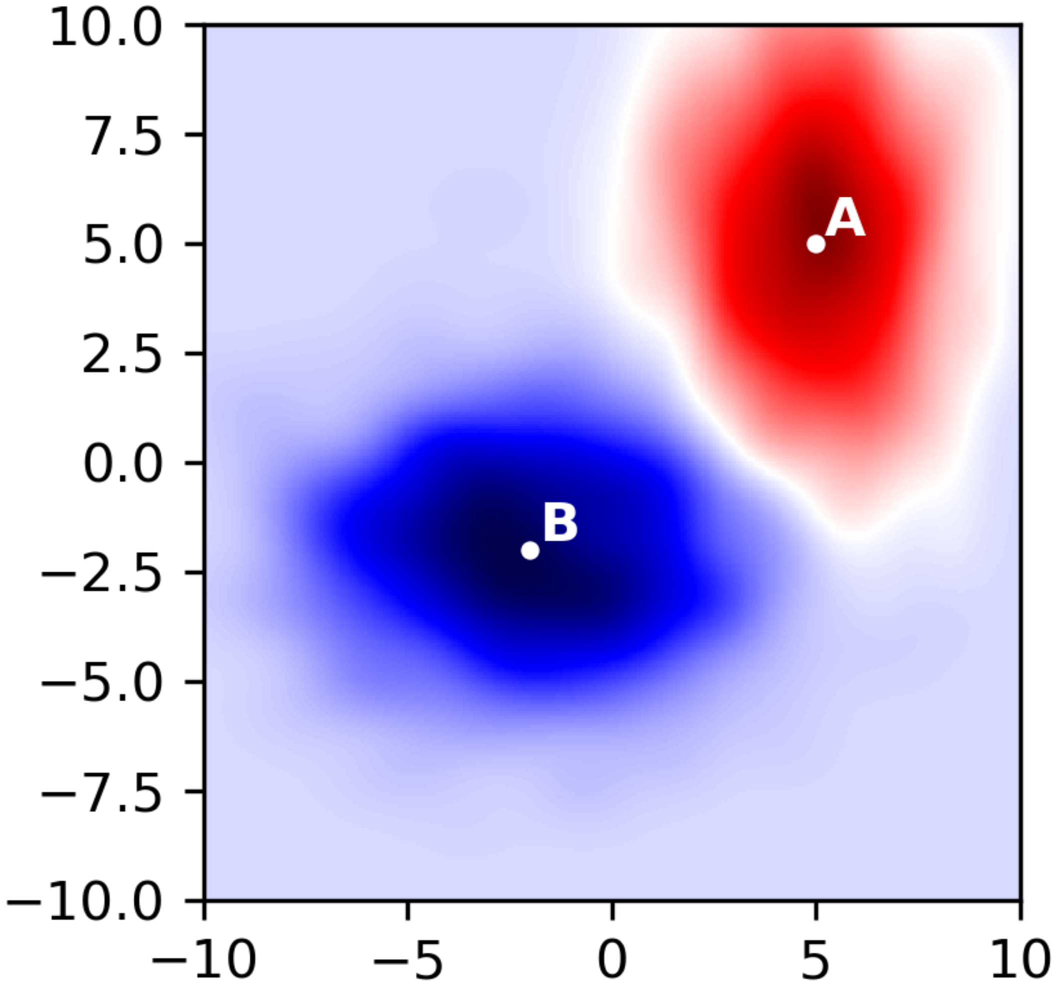


$$Y = B$$

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Цель: оценить **вероятность** классов ***A*** (класс "**1**") и ***B***(класс "**0**") для объекта, описываемого значением x.

$$P(Y = k|X = x)$$



previously on ML4ES

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Naïve bayes classifier, «наивный байесовский классификатор»

$P(Y|X) \propto P(X|Y)\ P(Y)$

можно забыть про $P(X = x)$

$$P(X|Y) = P\left(x_1, x_2, x_3 \dots x_p \middle| Y\right) = P\left(x_2, x_3 \dots x_p \middle| Y, x_1\right) * P(x_1|Y) = \cdots$$

$$= P(x_1|Y) * P(x_2|Y, x_1) * P(x_3|Y, x_1, x_2) * \cdots * P(x_p|Y, x_1, \dots, x_{p-1})$$

наивное предположение: переменные x_i условно независимы:

$$P(x_k|Y, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = P(x_k|Y)$$

Остается оценить распределения $P(x_k|Y)$ для всех k независимо друг от друга – и можно подставлять в оценку вероятности $P(Y|X)$. Оценка распределения может базироваться на предположении об их нормальности, - тогда нужно оценить выборочное среднее (оценка параметра μ) и выборочную дисперсию (оценка параметра σ^2).

<u>ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации</u>

Naïve bayes classifier, «наивный байесовский классификатор»

$$P(Y|X) \propto P(X|Y)\ P(Y)$$

можно забыть про $P(X = x)$

$$P(X|Y) = P\left(x_1, x_2, x_3 \ldots x_p \middle| Y\right) = P\left(x_2, x_3 \ldots x_p \middle| Y, x_1\right) * P(x_1|Y) = \cdots$$

$$= P(x_1|Y) * P(x_2|Y, x_1) * P(x_3|Y, x_1, x_2) * \cdots * P(x_p|Y, x_1, \ldots, x_{p-1})$$

наивное предположение: переменные x_i условно независимы:

$$P\left(x_p \middle| Y, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\right) = P\left(x_p \middle| Y\right)$$

Остается оценить распределения $P(x_k|Y)$ для всех k независимо друг от друга – и можно подставлять в оценку вероятности $P(Y|X)$. Оценка распределения может базироваться на предположении об их нормальности, - тогда нужно оценить выборочное среднее (оценка параметра μ) и выборочную дисперсию (оценка параметра σ^2).

<u>**NOTE!**</u>

LDA (Linear Discriminant Analysis, метод линейного дискриминантного анализа) – то же самое, но в предположении, что (а) распределение $P\left(x_p \middle| Y\right)$ - <u>**нормальное**</u>; (б) для всех компонент x_i <u>**дисперсия одинакова**</u>.

<u>ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации</u>

Naïve bayes classifier, «наивный байесовский классификатор»

$$P(Y|X) \propto P(X|Y)\ P(Y)$$

можно забыть про $P(X = x)$

$$P(X|Y) = P(x_1, x_2, x_3 \ldots x_p|Y) = P(x_2, x_3 \ldots x_p|Y, x_1) * P(x_1|Y) = \cdots$$

$$= P(x_1|Y) * P(x_2|Y, x_1) * P(x_3|Y, x_1, x_2) * \cdots * P(x_p|Y, x_1, \ldots, x_{p-1})$$

наивное предположение: переменные x_i условно независимы:

$$P(x_p|Y, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = P(x_p|Y)$$

Остается оценить распределения $P(x_k|Y)$ для всех k независимо друг от друга – и можно подставлять в оценку вероятности $P(Y|X)$. Оценка распределения может базироваться на предположении об их нормальности, - тогда нужно оценить выборочное среднее (оценка параметра μ) и выборочную дисперсию (оценка параметра σ^2).

<u>NOTE!</u>

QDA (Quadratic Discriminant Analysis, метод квадратичного дискриминантного анализа) – то же самое, но в предположениях, что (а) распределение $P(x_p|Y)$ - **<u>нормальное</u>**; (б) для всех компонент x_i **<u>дисперсии разные</u>** (и здесь σ^2 становится матрицей ковариаций Σ^2). NB с нормальным распределением $P(x_p|Y)$ - это QDA с диагональной Σ^2

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

In [ ]:
```
from sklearn.discriminant_analysis import LinearDiscriminantAnalysis
```

In [ ]:
```
from sklearn.discriminant_analysis import QuadraticDiscriminantAnalysis
```

In [ ]:
```
from sklearn.naive_bayes import GaussianNB
```

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Naïve bayes classifier, «наивный байесовский классификатор»

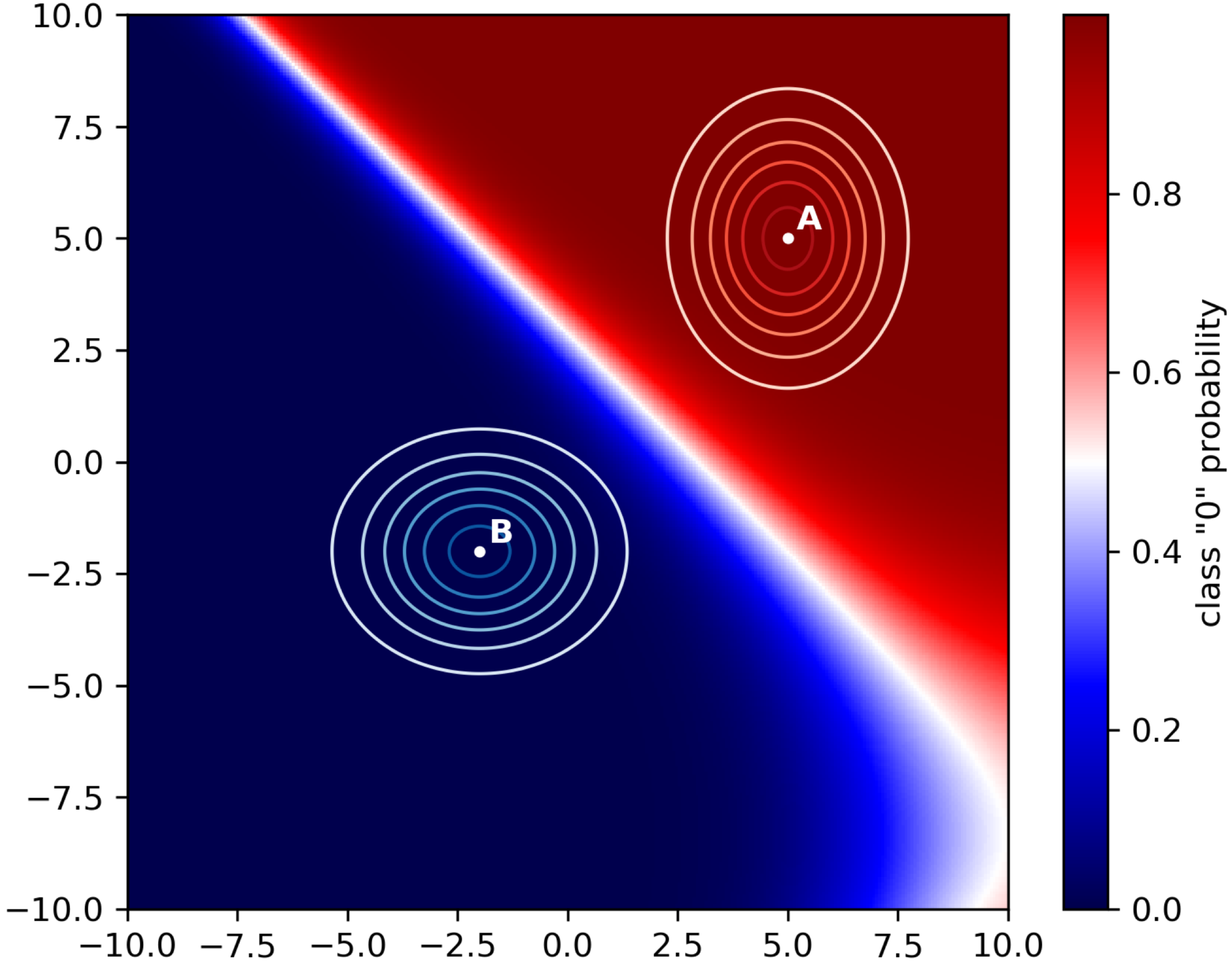
$$P(Y|X) \propto P(X|Y)\ P(Y)$$

Наивное предположение об условной независимости предикторов	$P(x_p \mid Y = k, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = P(x_p \mid Y = k)$
Оценка параметров распределений (отдельно для каждого класса, для каждой компоненты признакового описания), подстановка в ф-лу Байеса	$P(Y = k \mid X = x) \propto P(Y) * \prod_{j=1}^{p} P(x_j \mid Y = k)$
Вычисление вывода модели	$\hat{y}(x) = \mathrm{argmax}(P_k(x))$
Нормировка вероятностей (если нужны оценки вероятностей)	$P_k(x) = \dfrac{P(Y = k \mid X = x)}{\sum_k P(Y = k \mid X = x)}$

code demonstration

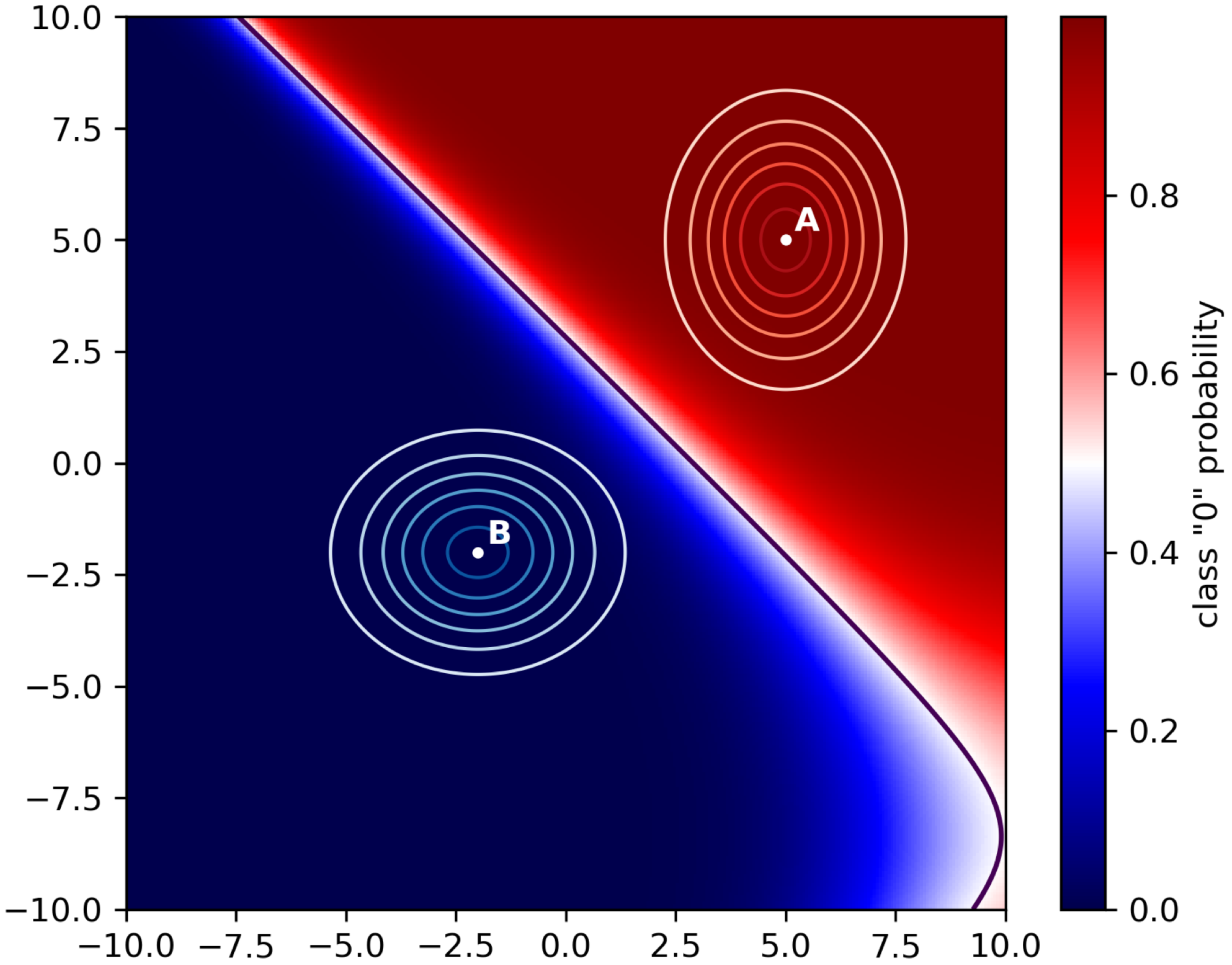
ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Naïve bayes classifier, «наивный байесовский классификатор»

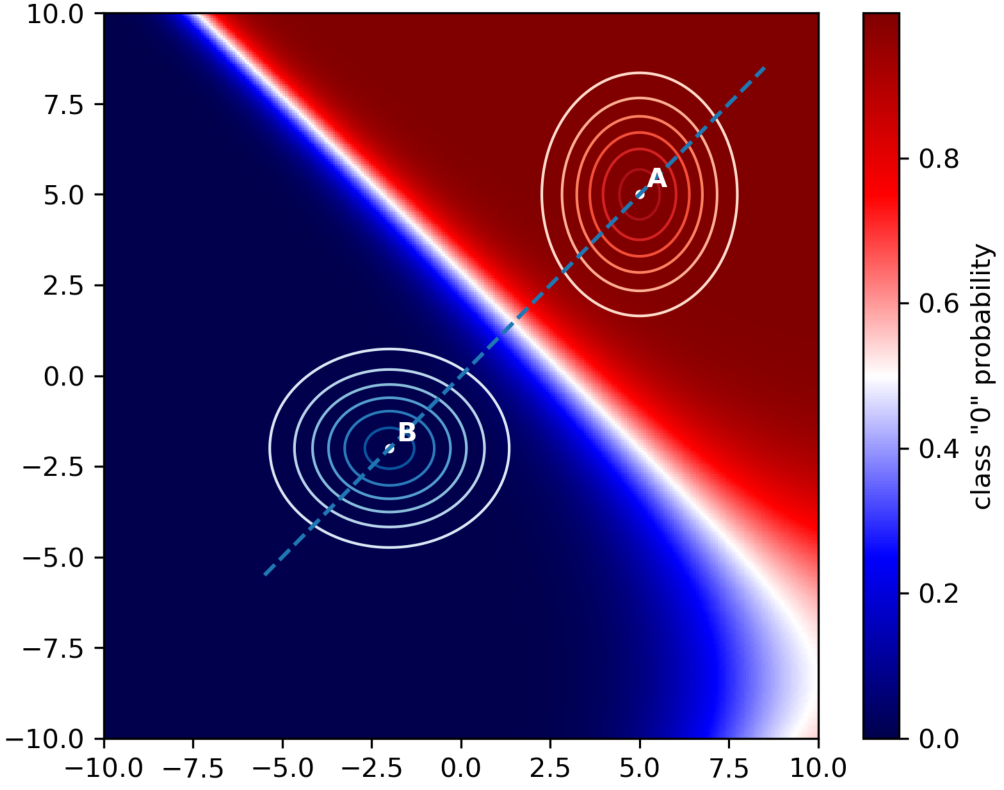


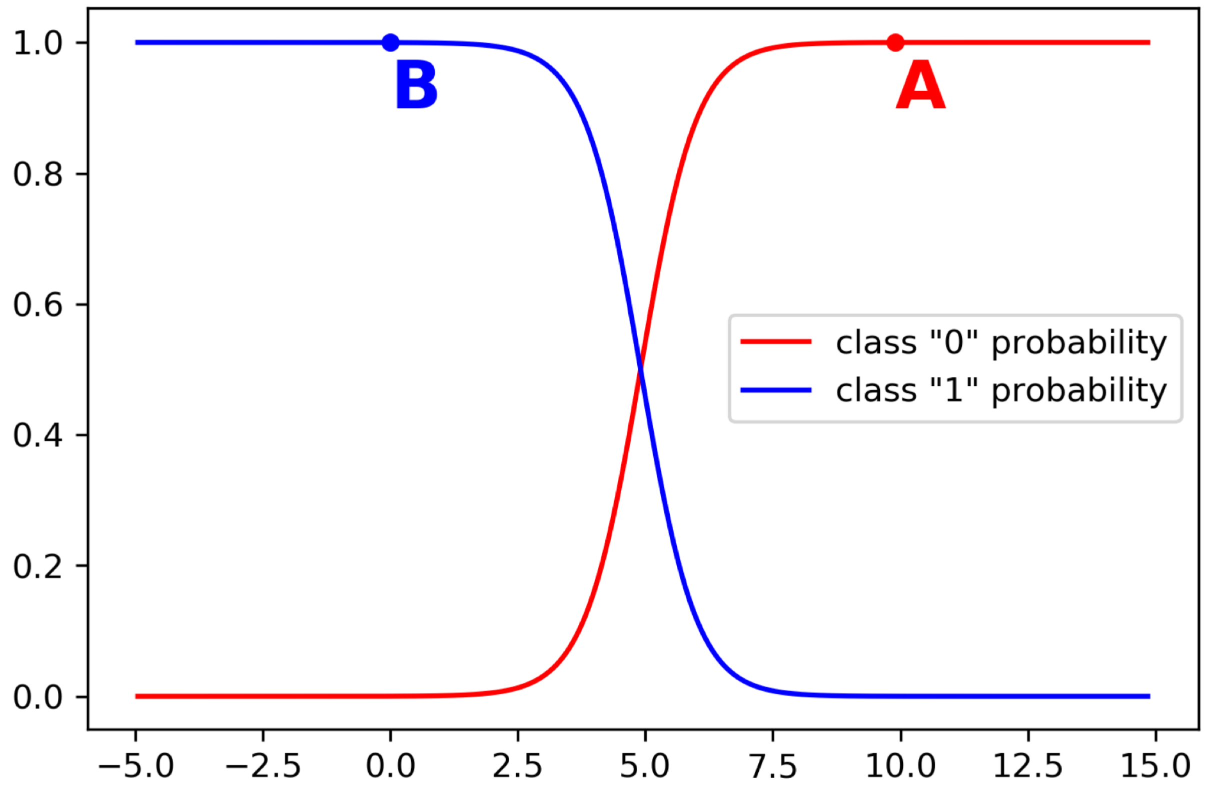
ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Разделяющая поверхность
(на примере результатов наивного байесовского классификатора)



ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации





Может быть, можно аппроксимировать $P(y = 0|x)$ на основании данных обучающей выборки?
Разве не для этого придуман весь подход машинного обучения?

ОБУЧЕНИЕ С УЧИТЕЛЕМ: задача классификации

Логистическая регрессия («logistic regression»)

previously on ML4ES

Линейная регрессия: набор предположений “LINE”

$$y_i \sim \mathcal{N}(\theta \cdot x_i, \sigma^2)$$

$$L(\mathcal{T}) = P(\{y_i, x_i\}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - \theta \cdot x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ell(\mathcal{T}, \theta) = \log L(\mathcal{T}, \theta) = \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \theta \cdot x_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$\theta^* = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}}\big(\ell(\mathcal{T}, \theta)\big) = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \theta \cdot x_i)^2}{2\sigma^2}$$

Логистическая регрессия:

(1) Предполагаем, что переменная Y распределена согласно распр.-ю Бернулли с параметром p (зависящий от x_i);
(2) Предполагаем, что отношение вероятностей классов «1» и «0» соотносятся как линейная функция $f(\theta, x) = \theta \cdot x$

$$Y \sim \mathcal{B}\big(p(\theta, x)\big), \qquad \log \frac{p(\theta,x)}{1-p(\theta,x)} = \theta \cdot x$$

$$p(\theta, x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta \cdot x}}$$

$$L(\mathcal{T}) = \prod_{i=1}^{N} \left(p(x_i)^{y_i} * \big(1 - p(x_i)\big)^{(1-y_i)} \right)$$