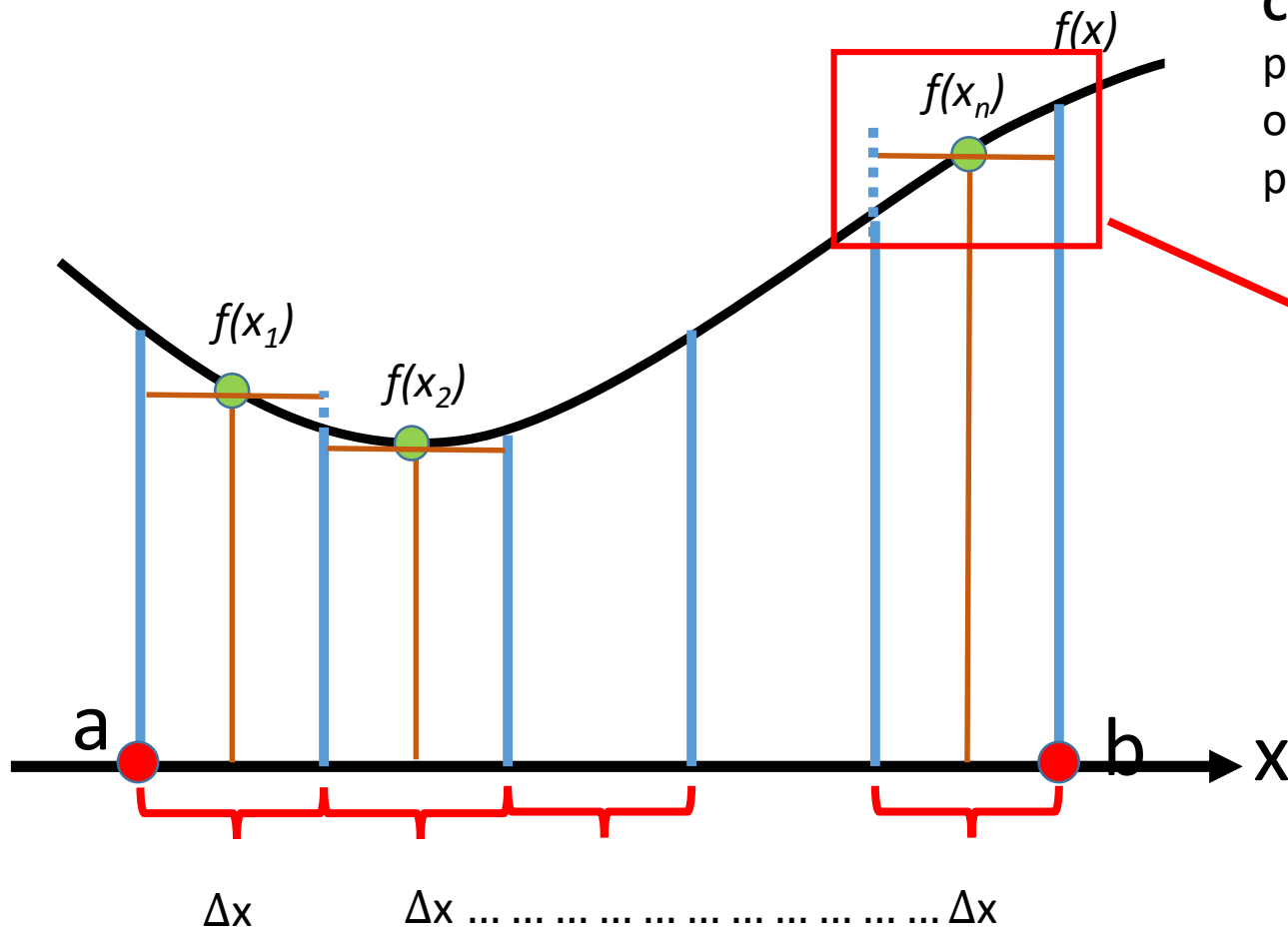


Całkowanie numeryczne metodą prostokątów oraz metodą Gaussa

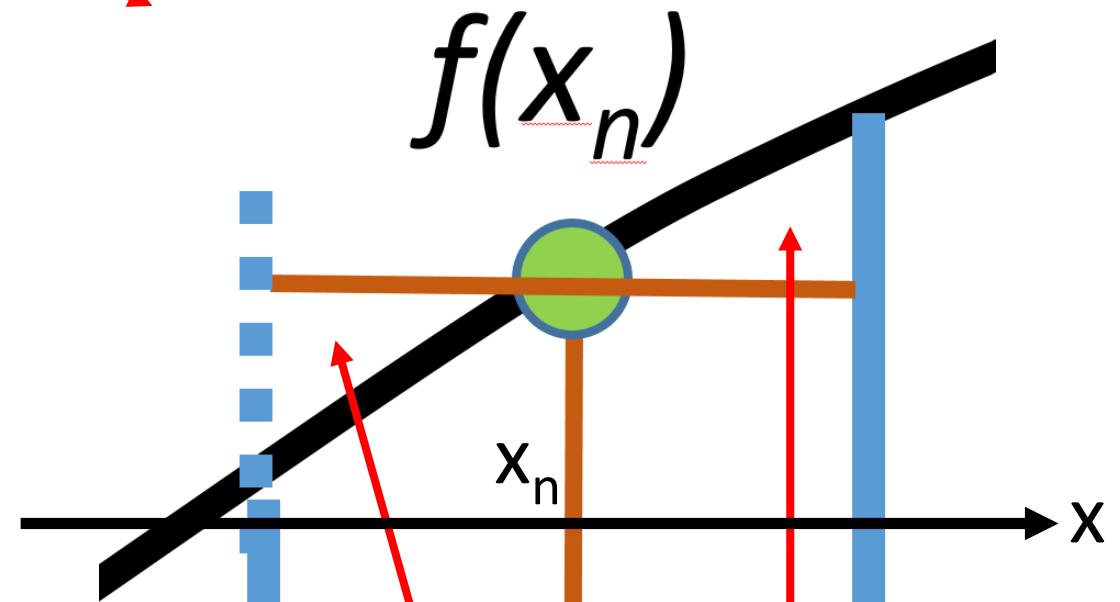
dr inż. Kustra Piotr
WIMiIP, KISiIM, AGH
B5, pokój 710

Całkowanie metodą prostokątów polega na podziale przedziału całkowania $\langle a ; b \rangle$ na n części a następnie obliczeniu wartości funkcji w środku przedziału oraz przemnożeniu jej przez długość przedziału całkowania.



$$\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$$

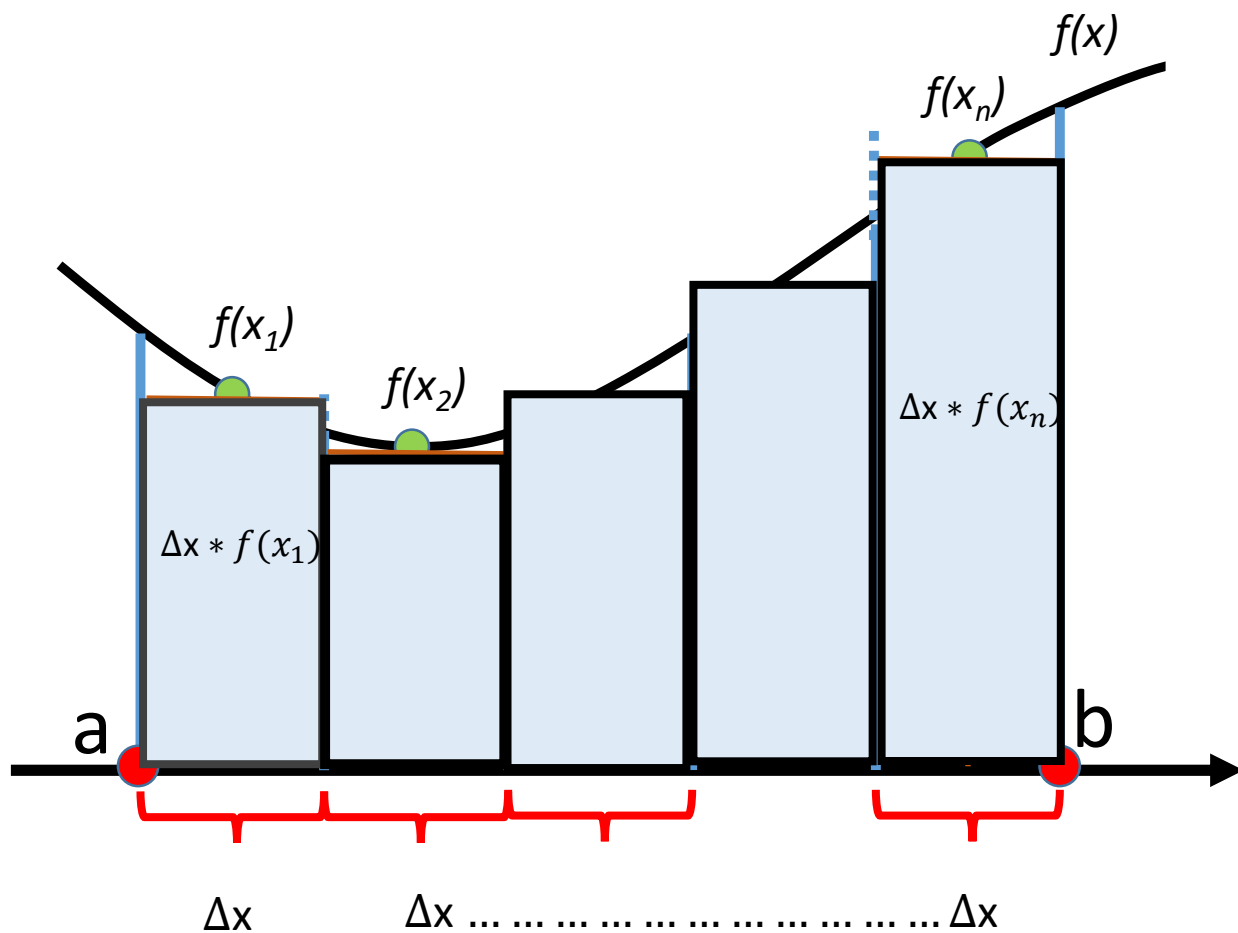
$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \dots \Delta x * f(x_n)$$



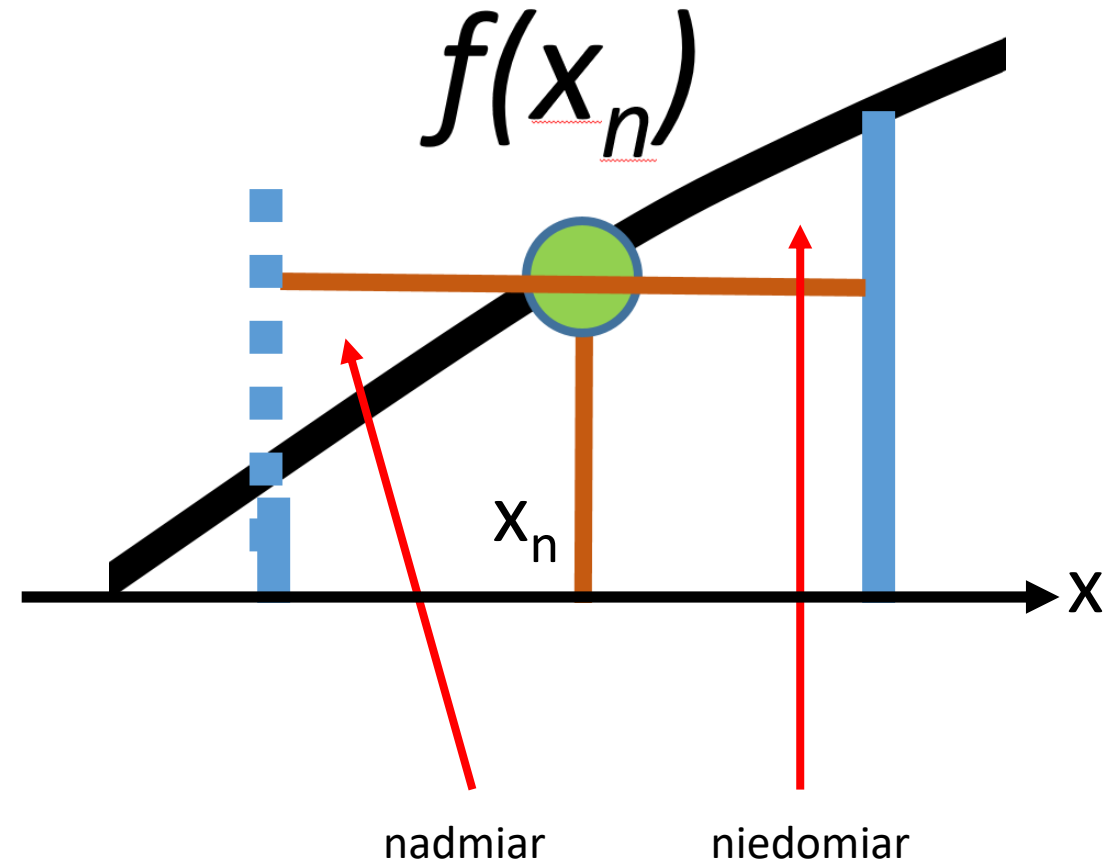
nadmiar

niedomiar

błąd rozwiązania

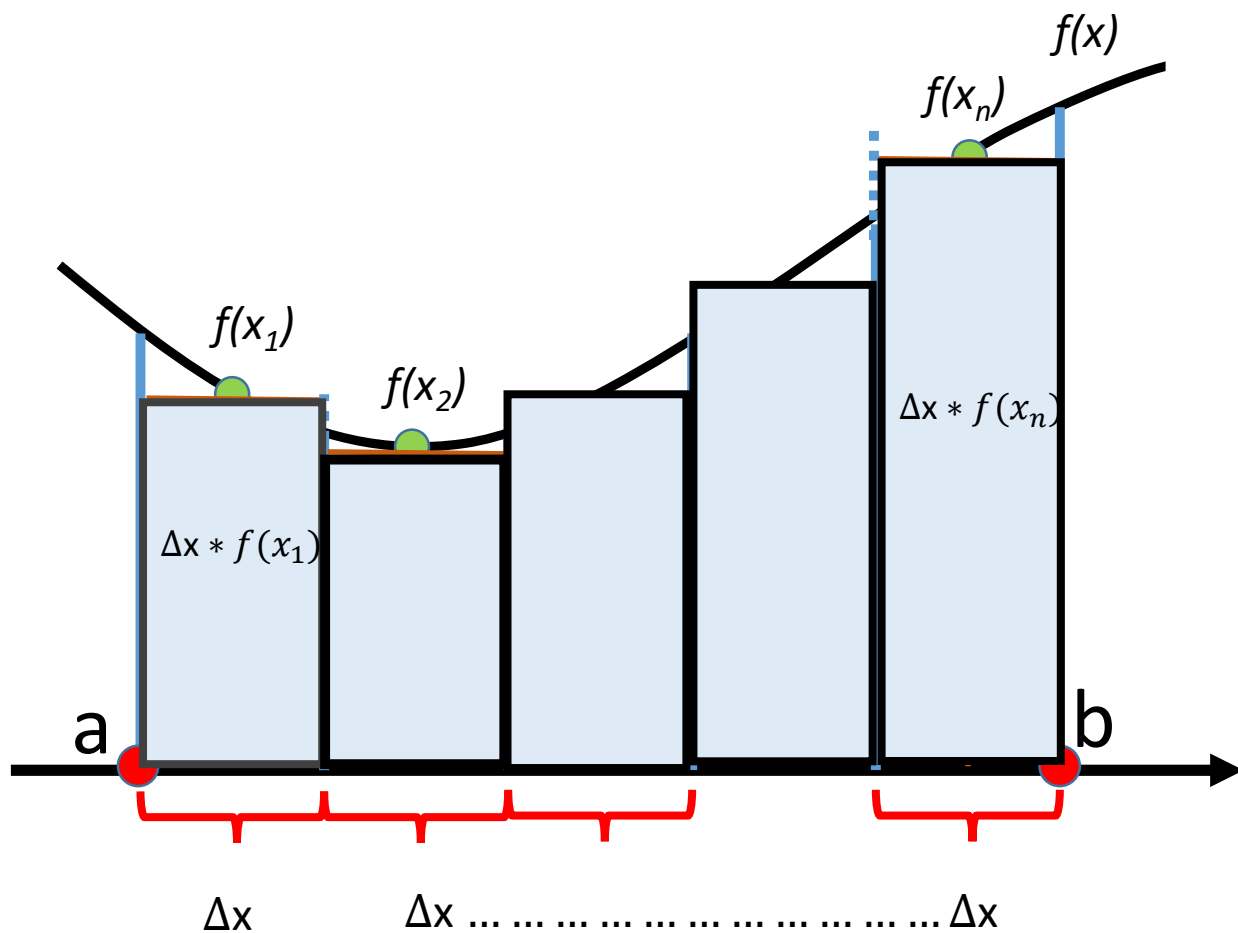


Wynikiem całkowania jest suma pól prostokątów. Pole jednego prostokąta obliczane jest w sposób następujący - Δx czyli wielkość przedziału całkowania pomnożona przez wartość funkcji w połowie przedziału całkowania



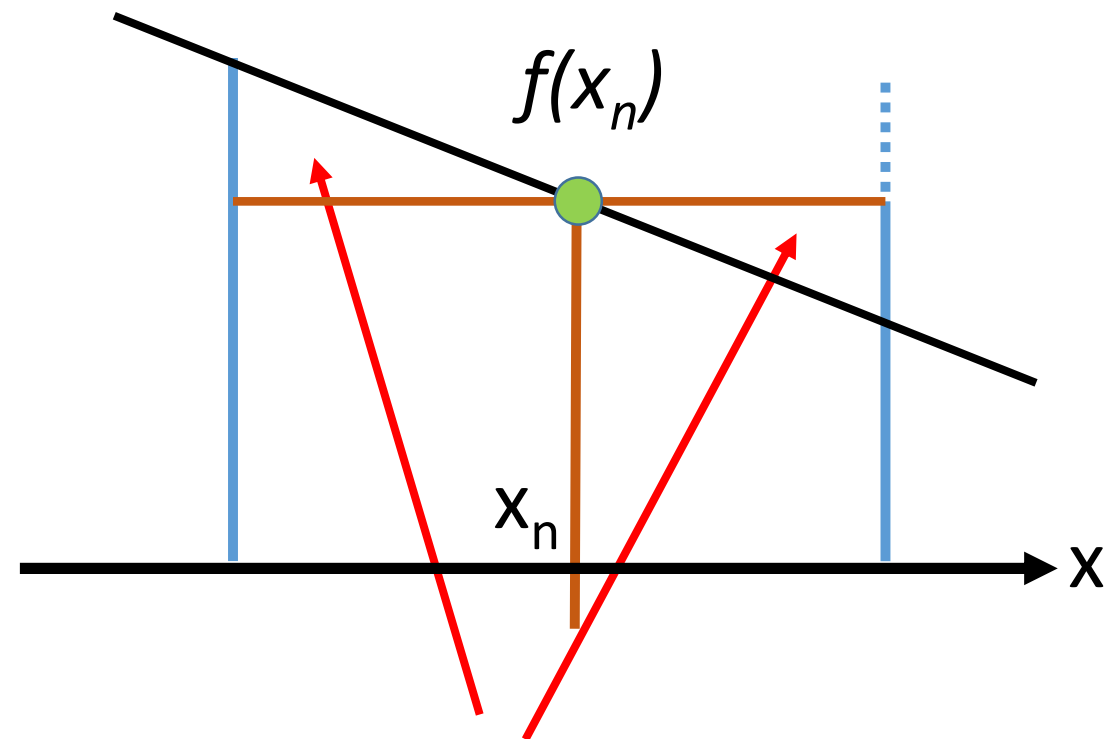
$$\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n)$$

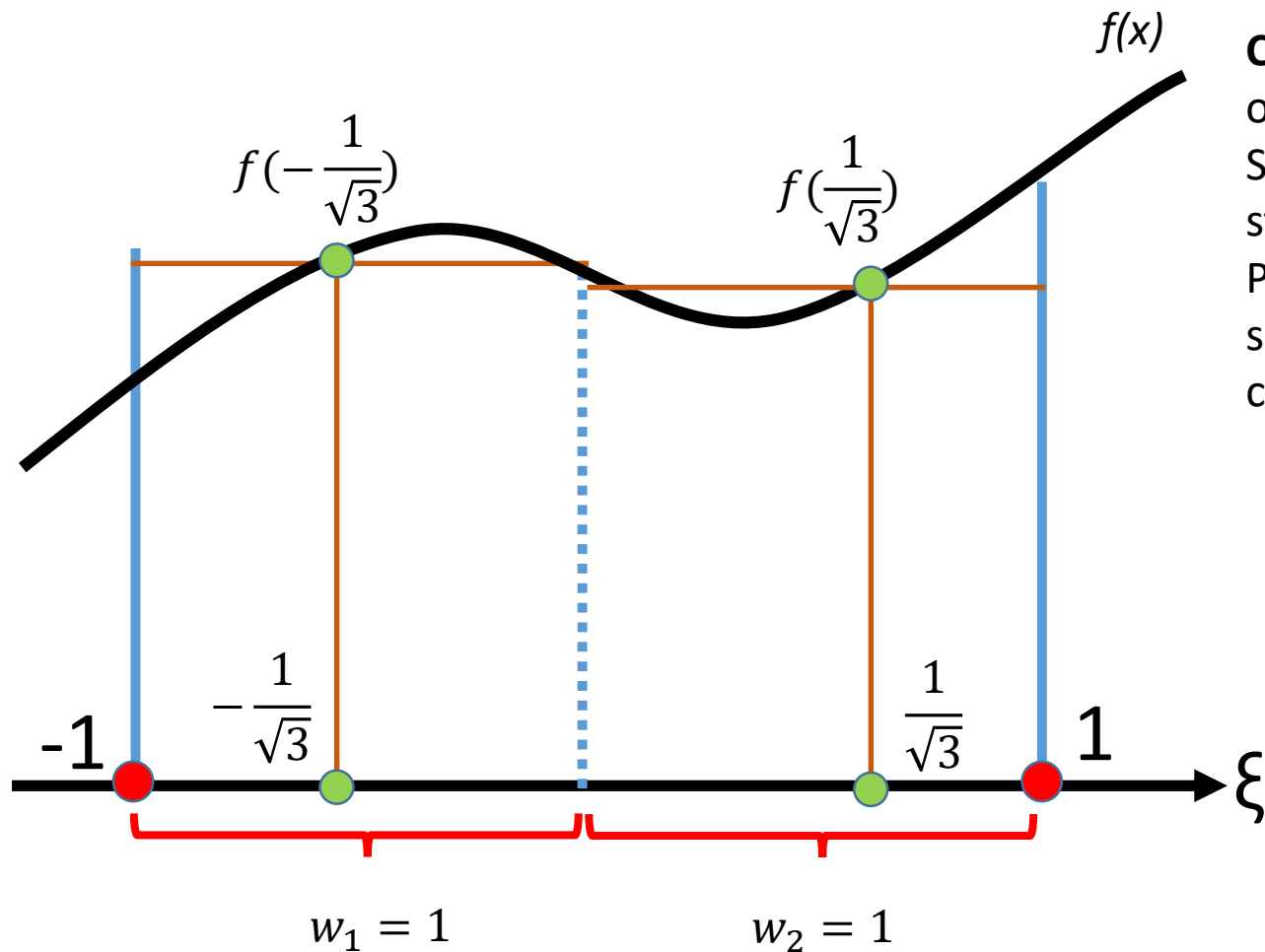


$$\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n)$$



Dla funkcji liniowej te trójkąty są identyczne w związku z tym nadmiar jest równy niedomiarowi a wynik całkowania różni się od analitycznego o dokładność liczb.



Całkowanie metodą Gaussa

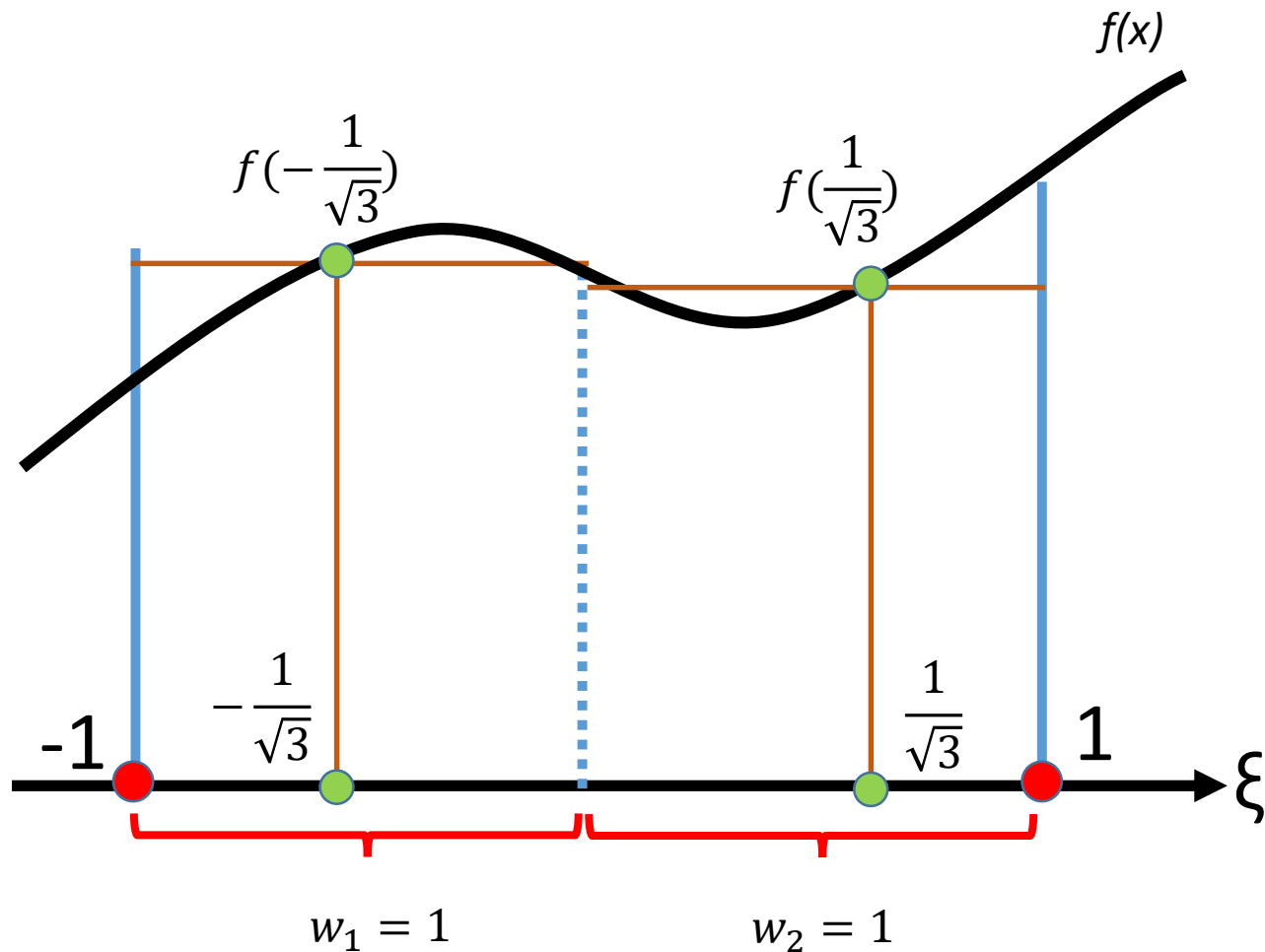
odbywa się w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$

Schematy całkowania zostały opracowane oraz stabelaryzowane. Nazywane są one kwadraturami Gaussa. Przedstawiono przykład dla $n=1$ czyli dwupunktowego schematu całkowania. X_k oznaczono współrzędną punktu całkowania a A_k wagę punktu całkowania.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla $N=1, 2, 3, 4$

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3}/5$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1; 2	∓ 0.339981	0.652145
4	0; 4	∓ 0.906180	0.236927
	1; 3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2)$$

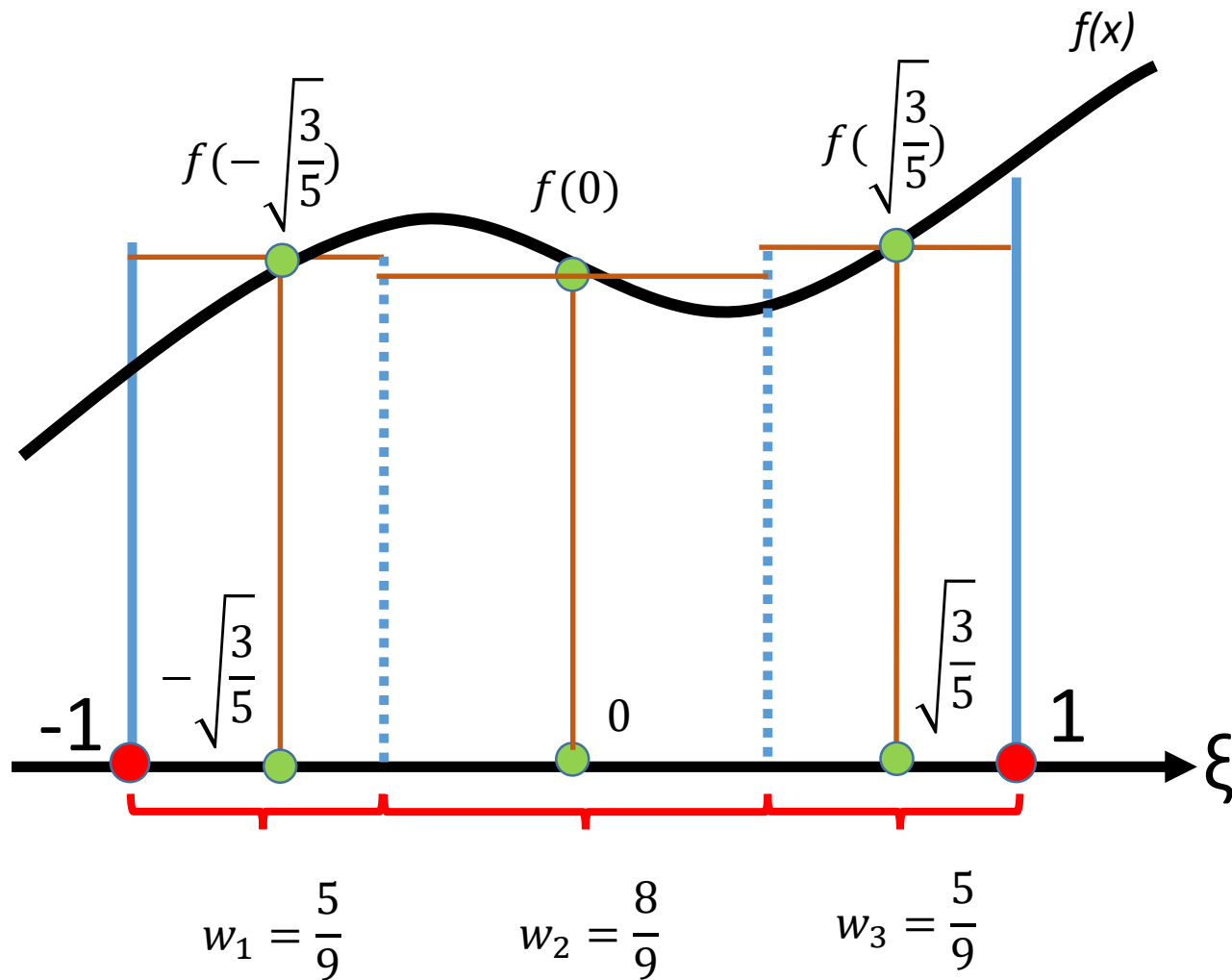


$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2)$$

Suma wag w przedziale $-1; 1$ jest równa 2. Wynik całkowania sprowadza się do określenia wartości funkcji w punkcie całkowania pomnożone przez wagę punktu całkowania. Waga jest analogią Δx dla całkowania metodą prostokątów.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla $N=1, 2, 3, 4$

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1; 2	∓ 0.339981	0.652145
4	0; 4	∓ 0.906180	0.236927
	1; 3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889



Analogiczny przykład dla $n=2$ czyli 3 punktów całkowania. Suma wag równa się 2.

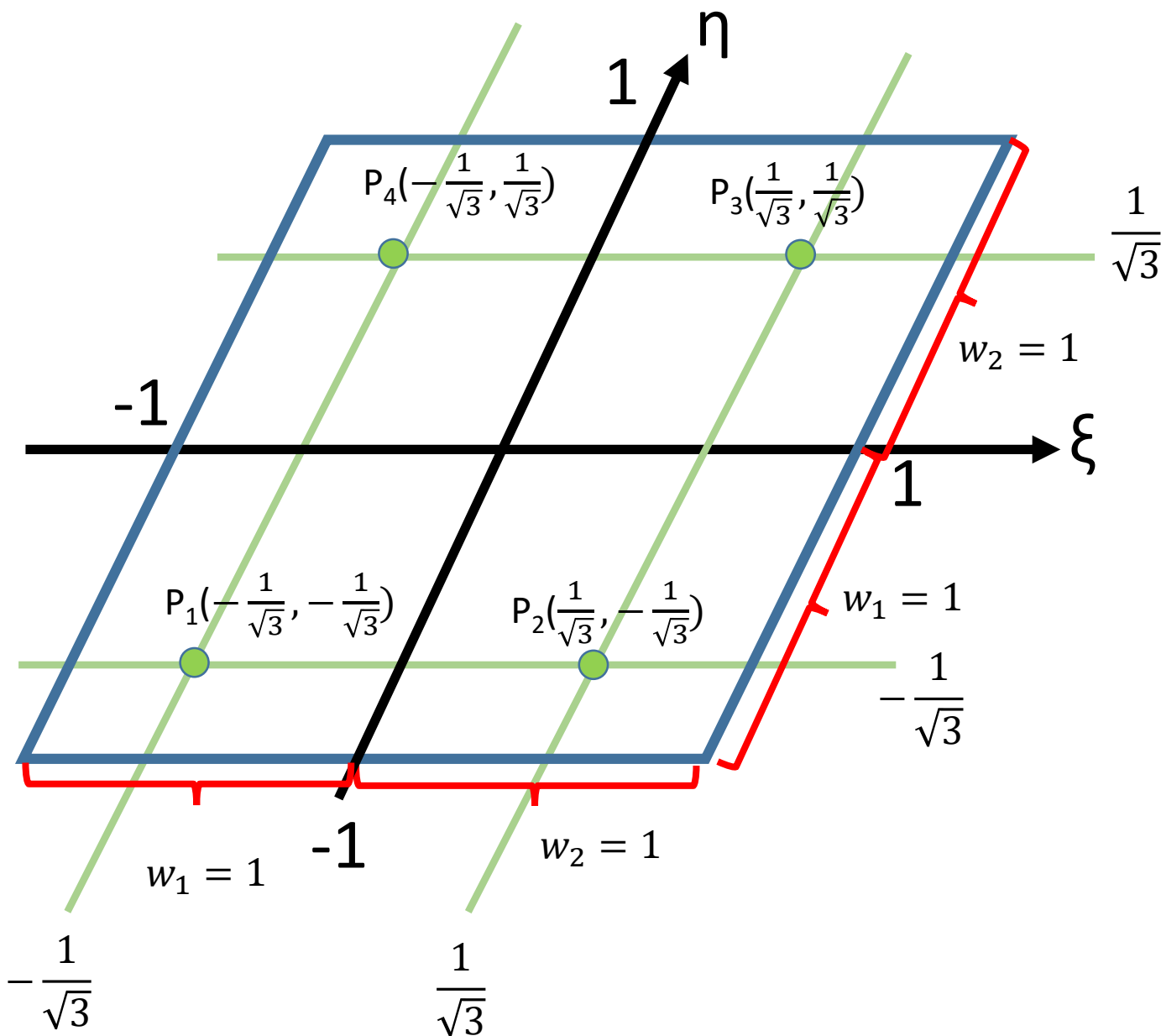
Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla $N=1, 2, 3, 4$

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1; 2	∓ 0.339981	0.652145
4	0; 4	∓ 0.906180	0.236927
	1; 3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2) + w_3 * f(\xi_3)$$

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i * f(\xi_i)$$

Gdzie: n – liczba punktów całkowania



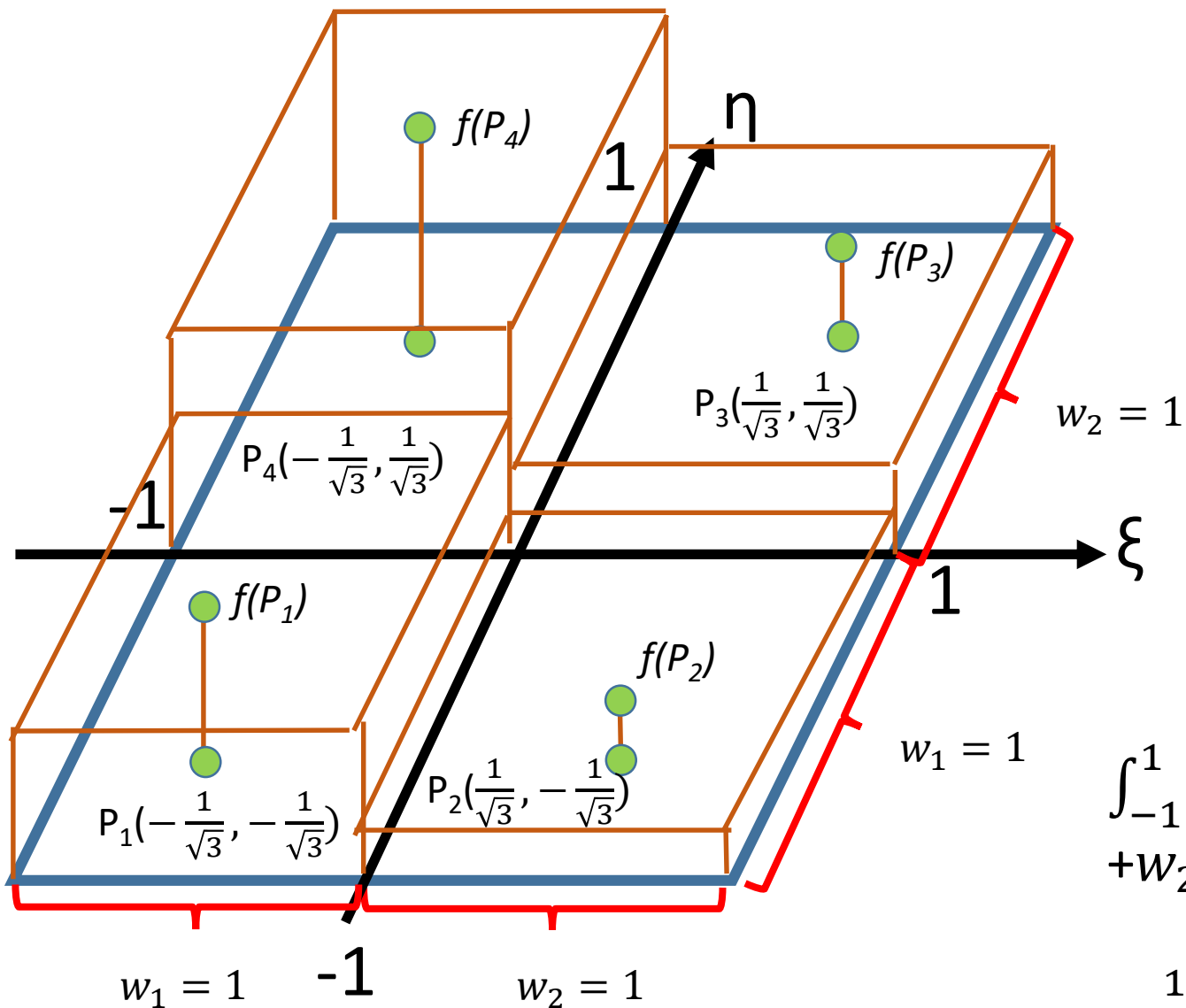
Analogiczny przykład całkowania w przestrzeni 2d dla $n=1$ czyli 2 punktów całkowania. Suma wag na każdej z krawędzi równa się 2. W tym przypadku funkcja podcałkowa jest funkcją dwóch zmiennych:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Na schemacie podano współrzędne punktów całkowania oraz wartości wag.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla $N=1, 2, 3, 4$

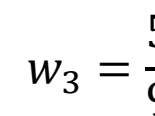
N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9



Wynikiem całkowania w każdym z punktów całkowania jest prostopadłościan o polu podstawy definiowanym wartością wag. Waga razy waga definiuje pole podstawy a wysokość to wartość funkcji w punkcie całkowania.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = w_1 w_1 f(P_1) + w_1 w_2 f(P_2) + w_2 w_2 f(P_3) + w_1 w_2 f(P_4)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$


$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$
$$w_2 = \frac{8}{9}$$
$$w_1 = \frac{5}{9}$$
$$P_2(0, -\sqrt{\frac{3}{5}})$$

Zadanie domowe

Podano następujące funkcje:

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 6$$

$$f(x, y) = 5x^2y^2 + 3xy + 6$$

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1; 2	∓ 0.339981	0.652145

- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 1d stosując 2 punktowy schemat całkowania.
- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 1d stosując 3 punktowy schemat całkowania.
- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 2d stosując 2 punktowy schemat całkowania.
- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 2d stosując 3 punktowy schemat całkowania.
- Rozwiąż całki analitycznie i porównaj wynik z wynikiem numerycznym.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i * f(\xi_i) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$