对3D线性变换的学习——以最基础的3D-Haar为例

对于线性变换来讲最重要的其实是变换核，这应该也是算法更新的最有效的突破口

Haar矩阵

$$H_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

实例

输入矩阵为：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

对每一列做Haar变换

X：$Y = H_4 X$

第一列：$Y_1 = \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

第二列：$Y_2 = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

第三列：$Y_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -8 \\ -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

第四列：$Y_4 = \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

最终结果：

$$Y = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 18 & 20 \\ -8 & -8 & -8 & -8 \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

再对每一行做线性变换

$Z = YH_4$
第一行：$\begin{bmatrix} 34 & -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$
第二行：$\begin{bmatrix} -16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
第三行：$\begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
第四行：$\begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

最终结果：

$$Z =
\begin{bmatrix}
34 & -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \
-16 & 0 & 0 & 0 \
-4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \
-4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}

Error: You can't use 'macro parameter character #' in math mode

\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \
1 & 1 & -1 & -1 \
\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \
0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}
\end{bmatrix}

Error: You can't use 'macro parameter character #' in math mode

Y_1 =
\begin{bmatrix}
14 & 16 & 18 & 20 \
-8 & -8 & -8 & -8 \
-2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \
-2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}
\end{bmatrix}

Y_2 =
\begin{bmatrix}
18 & 20 & 22 & 24 \
-8 & -8 & -8 & -8 \
-2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \
-2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}
\end{bmatrix}

Error: You can't use 'macro parameter character #' in math mode

H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}
\begin{bmatrix}
1 & 1 \
1 & -1

\end{bmatrix}
$$
对 $y = [a,\, b]^T$，变换结果 $z = H_2 y$：

- $z_1 = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ （“组内平均/共性”）
- $z_2 = \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$ （“组内差异/噪声”）
  用表格展示部分结果：

(i,j)	$Y_1(i,j)$	$Y_2(i,j)$	z_1 **(组内均值)**	z_2 **(组内差异)**
(1,1)	14	18	$16\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
(1,2)	16	20	$18\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
(2,1)	-8	-8	$-8\sqrt{2}$	0
(3,1)	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	-4	0
(4,1)	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	-4	0

最终3D变换结果

得到的是一个 $4 \times 4 \times 2$ 的系数张量 $Z[i,j,k']$：

- $k' = 1$：每个位置是组内均值（主成分/共性）
- $k' = 2$：每个位置是组内差异（高频/噪声）