中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（I）》(A 卷)

学年学期:	**2016–2017** 学年第 **1** 学期	姓　　名:	________
学　院/系:	数学学院	学　　号:	________
考试方式:	闭卷	年级专业:	________
考试时长:	**120** 分钟	班　　别:	________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 14 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. (8 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)}{x^{4}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(e^x-1)^2}{e^x}\right)^2}{x^4}$$

$$\frac{(e^x-1)^2}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$$

2. (8 分) 求定积分: $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$

$$=\int_1^e \ln x\cdot dx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\cdot dx$$

$$\int \ln x dx = x\ln x-\int x\, d\ln x$$

$$= x\ln x-\int 1\cdot dx = x\ln x - x$$

3. (8 分) 求不定积分: $\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$

$$\therefore \int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$$

$$=(e-e)-(0-1)$$

$$-(0-1)+\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)$$

$$=2-\frac{2}{e}$$

解: $\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

$$=\int x\cdot d\frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{x}{1+e^{-x}}-x=\frac{-\cancel{x}e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-x}{e^x+1}$$

$$=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{1}{1+e^{-x}}dx$$

$$=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\left(1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx=\frac{x}{1+e^{-x}}-x-\ln(1+e^{-x})+C$$

$$=\frac{-x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})+C$$

4. (8 分) 求通过 y 轴且与平面 $9x-4y-2z-1=0$ 垂直的平面方程。

解:由题意设平面方程为 $ax+bz=0$.

法向量为 $(a,0,b)$

又:平面 $9x-4y-2z-1=0$ 法向量为 $(9,-4,-2)$

$\therefore [(a,0,b),(9,-4,-2)]=9a-2b=0$

取 $a=2$, 得 $b=9$

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 9 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=2i+9k$$

5. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\ln(x^2-1)^2\right) & ,x\le 0\\ \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2+2x-3)} & ,x>0\end{cases}$, 分析它的所有间断点及其类型。

∴平面方程为 $2x+9z=0$

解: $x>0$ 时 $f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x(x+3)(x-1)}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{\pi}{-3}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

$x=1$, 第一类间断点
可去间断点

$x=0$, 第一类间断点

$x=-1$, 第二类间断点

$(x+1)+\frac{4}{x-1}$

6. (8 分) 设 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$，讨论 $f(x)$ 的单调区间以及极值点，凸凹区间以及拐点，并求出 $f(x)$ 的渐近线。

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+3}{x(x-1)}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1}=1.$$

7. (8 分) 设 $z=f(x,y)$ 由方程 $xy+yz+xz=1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$$y+y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(z+y)}{x+y}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(z+x)}{y+x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(x+y)-(z+y)}{(x+y)^2}=\frac{-2(z+y)}{(x+y)^2},$$

8. (8 分) 设 $y=x^3+\dfrac{1}{12x}$，求函数从 $x=1$ 到 $x=2$ 上的弧长。

$$\int_1^2\sqrt{\left(3x^2-\frac{1}{12x^2}\right)^2+1}\,dx=\int_1^2\sqrt{9x^4+\frac{1}{144x^4}+\frac{1}{2}}\,dx=\int_1^2\left(3x^2+\frac{1}{12x^2}\right)dx=\left(x^3-\frac{1}{12x}\right)\Big|_1^2$$

$$=8-\frac{1}{24}-1+\frac{1}{12}=7+\frac{1}{24}=\frac{169}{24}$$

9. (8 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin(x^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0).\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 讨论在 (0,0) 点的连续性，偏导性和可微

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\sin x^2}{x^2+y^2}=\frac{y}{1+\frac{y^2}{x^2}}=0$$

性

10. (8 分) 设曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 求 L 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线以及 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$

11. (5 分) 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

$y=2\sqrt{x},$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$

$=\frac{z}{0}$

1.

$y=x+1$

$(\arctan x)_0 + \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1!}\cdot x + \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{2!}x^2 + \frac{\frac{-2(1+x^2)+2(1+x^2)\cdot 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^4}}{3!}$

$(x_0+t)\cdot x$.

12. (5 分) 求 $x\arctan x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

$0+\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)x+\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right)\cdot x^2$

1':

2':

$+\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}\right)$

3':

13. (5 分) 设 $f(x,x+y,x+y+z)=0$ 且 F 一阶连续可偏导，函数 $z=z(x,y)$，求 $z=z(x,y)$ 的全微分。

14. (5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上二阶可导。且满足 $f(1)=f(2)=0$
证明：在 $(0,2)$ 内存在 ξ，使得 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$.

$f(\xi)+\xi f'(\xi)$ 相等

$\xi f(\xi)$.

$xf(x)$

$\exists\, \xi_1\in(0,1),\ \xi_2\in(1,2)$.

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.