2020 春季线性代数期末考试答案与评分标准

一、 计算行列式$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$，其中$a \neq 0$，写出必要计算过程. （8 分）

解：$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按}r_1\text{展开}} a \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$（3 分）

$= a^4 - 2 \times 2a^2 + 2 \times (-2a^2) - 2 \times 2a^2$（4 分） $= a^4 - 12a^2$（1 分）

注：本题的化简及计算方法并不唯一（各种展开、化简、行列变换为上下三角行列式等方法），方法完全准确但计算错误者可酌情得到 4~6 分。

二、 计算矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵，写出必要的计算过程（8 分）

解：此题推荐用分块矩阵方法，但也可以使用初等变换法或伴随矩阵法来解决。

方法一：矩阵分块法，用2×2的矩阵进行分块，可以表示为$A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，此时有结论$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$。

(也可代入验证，3 分)。 其中，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\times1-1\times2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, (2 分)

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\times3-1\times1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$(2 分)，故$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(1 分)

注：考生如果使用了错误的分块矩阵求逆公式，导致右上角与左下角写反，可以得到 4 分

方法二：初等变换法，考虑

$$(A,E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{(2 分)} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - \frac{2}{3}r_3]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4 \times 3 \\ r_3 - r_4 \\ r_3 \div 3}]{\substack{r_2 \div 2 \\ r_1 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(4 分)}$$

因此，由于$A \overset{r}{\sim} E$，可知A可逆，且$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(2 分)

注：如果考生使用伴随矩阵法，准确计算$|A|$可以得到 3 分，各个元素的计算可以酌情给分，但最终结果错误的，得分不超过 6 分。

三、 判断矩阵$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$能否相似于对角阵, 并说明理由. （8 分）

解：首先计算A的特征值，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 4 & 0\\ -1 & -\lambda & 0\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 4\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=$
$(3-\lambda)(2-\lambda)^2$，所以特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=2$。(2 分)

考虑 2 重特征根$\lambda=2, A-2E=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,可以得到的线性无关的特征向量仅有 1 个$\vec{p}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$。（或基础解系仅有一个向量）(4 分)

因为 2 重特征根无法对应两个线性无关的特征向量，所以原矩阵A不能相似于对角阵(2 分)

注：（1）本题如果没有计算步骤，只写出了可对角化当且仅当A存在 3 个线性无关的特征向量，可得 2 分。
（2）特征向量$\vec{p}$无需具体求出。

四、 **（共 10 分）**设 3 阶方阵A的特征值为$-1,1,2$, 已知$B=A^2-A^{-1}-E$, 且$AC=B-2C$

$C=(A+2E)^{-1}B$

(1) 求矩阵B的所有特征值（**5 分**）

$x^2-\frac{1}{x}-1$

(2) 计算$|3C|$（**5 分**）

$(A+2E)\cdot C=B \quad |C|=\frac{|B|}{|A+2E|}$

解: (1)设$f(x)=x^2-\frac{1}{x}-1$, (2 分)根据特征值的对应关系，分别代入即可得$f(-1)=1-(-1)-1=1, f(1)=1-1-1=-1, f(2)=4-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}$。故$B$的三个特征值分别为$1,-1,\frac{5}{2}$。(3 分)

（2）对$AC=B-2C=B-2EC$，进行移项、合并同类项，有$AC+2EC=B=(A+2E)C$。1(1 分)
因为$A+2E$的三个特征值为 1,3,4(1 分)，故$|A+2E|=12$，$A+2E$可逆，且$C=(A+2E)^{-1}B$。(1 分)

因此$|C|=\frac{|B|}{|A+2E|}=-\frac{\frac{5}{2}}{12}=-\frac{5}{24}$，(1 分)而$|3C|=3^3\times|C|=-\frac{45}{8}$(1 分)

注：（1）本题第二问如果漏掉论证$A+2E$的可逆性可酌情扣掉 1 分。
（2）本题如果假设A对角阵并计算无误的，可以得到 6 分。

$2S \neq \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}$

五、 当s,t取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+sx_2+2x_3=2\\ x_1+2x_2+3x_3=t\end{cases}$无解，存在唯一解或存在无穷多解？并在方程存在无穷多解时，求方程的通解.（**12 分**）

$2S=3$

解：本题的系数矩阵为方阵，考虑其行列式$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & s & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=3s+2+2-4-3-s=2s-3$，因此当$s\neq\frac{3}{2}$时，系数矩阵可逆，线性方程组必然存在唯一解。(3 分)

当$s=\frac{3}{2}$时，增广矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & t\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & t-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_2\\ r_1-r_2}]{r_2\times 2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & t-3\end{pmatrix}$(3 分)

此时，若$s=\frac{3}{2}$且$t\neq 3$，会有$R(A)=2<3=R(B)$，方程组无解。(2 分)

而当$s=\frac{3}{2}$且$t=3$时，$R(A)=2=R(B)<3$，方程组存在无穷多解。(2 分)

此时，$B\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}x_1-x_3=-1\\ x_2+2x_3=2\end{cases}$，令$x_3=c$，可得$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-1\\ -2c+2\\ c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$，其中，$c$为任意常数(4 分)

注：本题也可以直接对增广矩阵做初等行变换，可得$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & s & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & t\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & t-1\\ 0 & 0 & 3-2s & st-s-t\end{pmatrix}$,再

根据$s=\frac{3}{2}$与否以及t的分类进行讨论即可。变换过程需规范无争议(如$r_3 \div s$这种不被允许)，否则可酌情扣分。

六、 已知向量组$\boldsymbol{a_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a_2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a_4}=\begin{pmatrix}1\\-5\\1\\-4\end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个最大无关组，并把其余向量用此最大无关组线性表示.（**12分**）

解：设$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&-1&1&-5\\1&-1&-1&1\\2&1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-5&-1&-7\\0&-3&-2&0\\0&-3&0&-6\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+3r_2\\r_4+5r_2\\r_1-2r_2}]{\substack{r_2\leftrightarrow r_4\\r_2\div(-3)}}\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&0&2\\0&0&-2&6\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+r_3\\r_1-r_3}]{r_3\div(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4)\ (6分)$$

由A的行最简型知向量组A的秩为3(1分)，最大无关组为$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$。(2分)，因为$\vec{b}_4=2\vec{b}_2-3\vec{b}_3$，由矩阵行等价的关系可知$\vec{a}_4=2\vec{a}_2-3\vec{a}_3$。(3分) （注：本题的秩与最大无关组可以通过行阶梯型或子式判断得到）

七、 已知线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$A$的秩$R(A)=2$,且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有~~三个特解~~$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\boldsymbol{\eta_3}$满足$\boldsymbol{\eta_1}+\boldsymbol{\eta_2}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix},2\boldsymbol{\eta_2}-\boldsymbol{\eta_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，求对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.（**10 分**）

解：首先根据方程组解向量为4维向量知$n=4$(1分)，而$R(A)=2$。于是$n-R(A)=4-2=2$，故$A\vec{x}=\vec{0}$的基础解系有两个向量。(2分)代入$A[(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)-2(2\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_1)]=3A\vec{\eta}_1-3A\vec{\eta}_2=3\vec{b}-3\vec{b}=\vec{0}$，因此$\vec{\xi}_1=(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)-2(2\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_1)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$就是对应齐次方程组的一个特解(3分)，另一方面，$A[(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)-2\vec{\eta}_3]=A\vec{\eta}_1+A\vec{\eta}_2-2A\vec{\eta}_3=\vec{b}+\vec{b}-2\vec{b}=\vec{0}$，因此,$\vec{\xi}_2=(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)-2\vec{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$就是对应齐次方程组的另一个特解(3分)。因为$\vec{\xi}_1$与$\vec{\xi}_2$线性无关，两个根据上述讨论，可知基础解系为$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$。(1分)

注：（1）本题需要提到$\vec{\xi}_1$与$\vec{\xi}_2$的线性无关，因为比较明显所以可以不论证。没有提到的可以扣1分。

（2）本题正确答案的表述不唯一，常见答案可能还有$(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$以及它们的线性组合。

（3）本题也可以通过先计算$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$来间接计算基础解系，根据步骤与结果的准确性酌情给分即可。

八、 设对称阵$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，求正交阵$P$，使$P^{\top}AP=\Lambda$为对角矩阵，并计算$A^n$（$n$为正整数）.（**17分**）

解：首先计算A 特征值，考虑$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-1\\1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3+(2-\lambda)r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-1\\\lambda-1&1-\lambda&0\\\lambda^2-4\lambda+3&1-\lambda&0\end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix}\lambda-1&1-\lambda\\\lambda^2-4\lambda+3&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1&1\\\lambda^2-4\lambda+3&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4)=-(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

所以有$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$。(4分)

对于$\lambda_1=4,A-4E=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+2r_1\\r_3+r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+3r_2\\r_1+2r_2}]{r_2\div(-3)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，有基础解系$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$(1分)，进行单位化后可取$\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$(1分)

对于$\lambda_2=\lambda_3=1,A-E=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，有基础解系$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$(1分)，$\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$(1分)，对$\vec{\xi}_3$正交化，有$\tilde{\vec{\xi}}_3=\vec{\xi}_3-\frac{[\vec{\xi}_3,\vec{\xi}_2]}{[\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_2]}\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{(-1)}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\1\end{pmatrix}$(1分)后进行单位化后可取$\vec{p}_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$(1分)，$\vec{p}_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$。(1分)

$r_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\xi_1]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1$

此时，取正交阵$P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，则$P^{\top}AP=P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。(1分)

而$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{\top}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$(2分)

$$=\begin{pmatrix}-\frac{4^n}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{4^n}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{4^n}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4^n+2}{3}&\frac{4^n-1}{3}&\frac{-4^n+1}{3}\\\frac{4^n-1}{3}&\frac{4^n+2}{3}&\frac{-4^n+1}{3}\\\frac{-4^n+1}{3}&\frac{-4^n+1}{3}&\frac{4^n+2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac13\begin{pmatrix}4^n+2&4^n-1&1-4^n\\4^n-1&4^n+2&1-4^n\\1-4^n&1-4^n&4^n+2\end{pmatrix}\text{(3分)}$$

注：本题如果最后通项表达式P与P^{-1}位置颠倒，最后步骤可酌情给予1分。

九、（共15分，每小题3分）判断下列命题是否正确，如正确请证明之，如不正确请举出反例，仅判断正确不提供证明与解释的得1分。

(1) 设A为n阶方阵，若$A^2 = O$，则A不可逆.

(2) 设A为n阶方阵，若A不可逆，则A的伴随矩阵$A^* = O$.

(3) 若$m \times n$阶矩阵A满足$R(A) = n$，则线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$一定存在唯一解.

(4) 若向量组$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$线性无关，$\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$线性无关，$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_3}$线性无关，则向量组$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$线性无关.

(5) 若A为实对称矩阵且A的特征值全为1，则$A = E$.

（1）解：命题正确(1 分，答“可逆”或“不一定可逆”的不得分)，对$A^2 = O$两边取行列式，有$|A|^2 = |O| = 0$。(1 分)因此得到$|A| = 0$，所以A不可逆，命题正确。(1 分)

注：这一问也可以通过反证法，或证明三个特征值都为 0 来证明A不可逆。

（2）解：命题不正确(1 分)，如$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(反例正确 1 分)，$|A| = 0$所以不可逆，但$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以$A^* \neq O$，命题不成立。(论证正确 1 分)

$|A|=1$

（3）解：命题不正确(1 分)，如$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$(1 分)，此方程组无解。(1 分)

注：仅描述方程组可能无解，没有举出反例的，本题得到 2 分。

（4） 解：命题不正确(1 分)，如$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，不难证明这三个向量两两线性无关，但三个向量因为仅为 2 维向量，一定线性相关。(2 分)

（5）解：命题正确(1 分)，因为对称阵A一定可以对角化，若A的特征值全为 1，则A相似于E(1 分)，即存在可逆矩阵P，使得$A = PEP^{-1} = PP^{-1} = E$。故命题正确。(1 分)

对角化 A