# 中山大学本科生期末考试

## 考试科目:《高等数学一（I）》(A 卷)

学年学期: 2021–2022 学年第 1 学期　　姓　　名: ______

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ______

考试方式: 闭卷　　年级专业: ______

考试时长: 120 分钟　　班　　别: ______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 15 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答



1. (8 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\cos\alpha x}{\frac{\beta}{\cos^2\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

2. (8 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{(1-\cos x)\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=1.$

3. (8 分) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\left|\frac{3(2x-1)}{3x-1}\right|}$　$\to\left(2-\frac{1}{3x-1}\right).$

$=e^2$

4. (8 分) 证明 $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$。

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

5. (8 分) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$

$= \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln 2.$

6. (8 分) 已知 $y\sin x - \cos(x-y) = 0$，求 $\frac{dy}{dx}$。



7. (8 分) 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与两平面 $2x - 2y + 4z + 7 = 0, 3x + y - 2z + 5 = 0$ 垂直的平面方程。

$\begin{cases} (2,-2,4)\cdot(x,y,z)=0 \\ (3,1,-2)(x,y,z)=0 \end{cases}$ $(0,2,1)$

$\begin{cases} x-y+2z=0. \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

$2y+(z+3)=0$

8. (10 分) 证明当 $e < a < b < e^2$ 时，$(b-a)\frac{2}{e^2} < \ln^2 b - \ln^2 a < \frac{4}{e}(b-a)$

$\frac{2}{e^2} < \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} < \frac{2}{e} < \frac{4}{e}$

$\frac{2\ln\xi}{\xi}$ $\quad \frac{4}{e^2} < \frac{2\ln\xi}{\xi} < \frac{2}{e}$

9. (10 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\ln\left(x^2-1\right)^2\right) & ,x\le 0\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2+2x-3)} & ,x>0\end{cases}$，分析它的所有间断点及其类型。

$\int (\ln y)^2\,dy$

$y(\ln y)^2 - \int y\cdot 2\ln y\cdot\frac{1}{y}\,dy$

$1-x^2=y$

$\int_0^1 \pi[1^2-(1-y^2)]\,dy$

$+\int_1^e \pi(1^2-(\ln y)^2)\,dy$

(2). $y=e^x$, $x=\ln y$

$y=\sqrt{1-x^2}$, $x=\sqrt{1-y^2}$

$x=\sin t$

10. (10 分) 设 $y=e^x, x=1, y=\sqrt{1-x^2}$ 围成的区域为区域 $A$.

(1) (4 分) 求区域 $A$ 的面积。 $e-1-\frac{\pi}{4}$

(2) (6 分) 求区域 $A$ 绕 $y$ 轴旋转所形成的旋转体的体积

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=\int \cos x\cdot d\sin x$

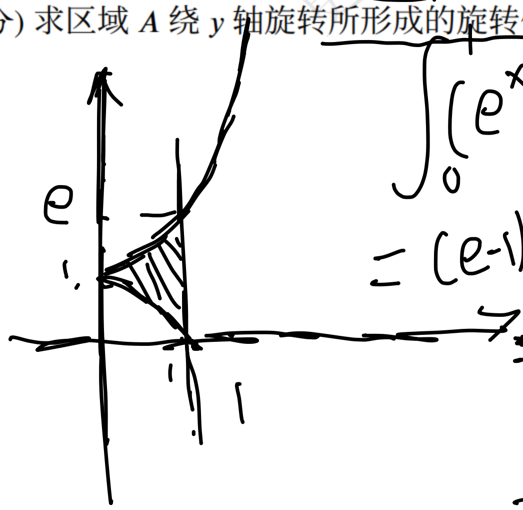
$=\int \cos^2 x\cdot dx$

$=\cos x\sin x+\int \sin^2 x\cdot dx$

$\frac{\cos x\sin x + x}{2}$

$t=\arcsin x$

$\frac{\sqrt{1-x^2}\,x+\arcsin x}{2}$




$\int_0^1 (e^x-\sqrt{1-x^2})\,dx$

$=(e-1)-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x+\arcsin x}{2}\Big|_0^1$

$=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-0$

$=\frac{\pi}{4}$

11. (8 分) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}d\sin t=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t\,dt$

$=2\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin t\cos t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\int\sin^2 x\,dx$

$=-\int\sin x\,d\cos x$

$=-\sin x\cos x+\int\cos^2 x\cdot dx$

$=-\sin x\cos x+\int(1-\sin^2 x)dx$

$=-\sin x\cos x+x-\int\sin^2 x\,dx$

$\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin x\cos x}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{\sin^2 x}{2}$

12. (10 分) 用定义证明 $\lim_{x\to a}x^3=a^3$。



13. (8 分) 求函数 $f(x)=\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$ 的渐近线。

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3+x+1}{x(x^2+2x+1)}=1.$

$x-2$  $y=x-2.$

$\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\frac{x^3+2x+1-x^3-2x^2-x}{(x^2+2x+1)}=-2$

14. (10 分) $a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots\ldots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ 为数列 $\{a_n\}$
证明:
(1) $\{a_n\}$ 极限存在。

(2) 求 $\{a_n\}$ 的极限值。

15. (12 分) 设 $f(x)$ 连续，$g(x) = \int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t$，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A$($A$ 为常数)。

(1) (6 分) 求 $g'(x)$。

(2) (6 分) 讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

$$g'(x) = f(x) - f(0).$$

$$= f(x) - Ax$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}(f(x) - Ax)$$

$$= 0 = g(0).$$