中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》(A卷答案)

学年学期：2017学年第1学期　　姓　　名：________________学　　号：________________

学院/系：数学学院　　学　　院：________________年级专业：________________

考试方式：闭卷　　任课教师：________________

考试时长：120分钟　　成绩评定：________________阅卷教师：________________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

---------以下为试题区域，共2道大题，总分100分,考生请在试卷上作答---------

一、填空题(共5小题，每小题3分，共15分)

1. 设$A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, 则$A$的逆矩阵$A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}}$.

2. 设A为3阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵, 且$|A|=3$, 则$|2A^*|=$ $\underline{\quad 72 \quad}$.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\0&2&0&1&8\\0&0&1&1&4\end{pmatrix}$, 则齐次线性方程组$Ax=0$解空间的空间维数为$\underline{\quad 2 \quad}$.

4. 设3阶矩阵A与B相似, 且A的特征值为$-1,1,2$; 则行列式$|B^2+B-E|=$ $\underline{\quad -5 \quad}$.

5. 设对称矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-4&k\\0&k&-9\end{pmatrix}$为负定矩阵, 则$k$的取值范围是$\underline{\quad (-6,6) \quad}$.

二、计算题(共8小题，第1-3小题各8分，第4-6小题各10分，第7小题13分，第8小题18分，共85分)注：要写出必要的计算和推理过程

1. (8分)计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&4&6\\0&0&1&0\\2&4&3&5\\5&3&1&2\end{vmatrix}$的值。

解:

$$D = -\begin{vmatrix}1&2&6\\2&4&5\\5&3&2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&6\\0&0&-7\\5&3&2\end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix}1&2\\5&3\end{vmatrix} = 49$$

2. (8分)求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&-2&0&-1\\1&2&2&1\\1&2&3&2\end{pmatrix}$的逆矩阵。

解：

$$(A,E)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\2&-2&0&-1&0&1&0&0\\1&2&2&1&0&0&1&0\\1&2&3&2&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&-4&-4&-3&-2&1&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0&0&1\\0&-4&-4&-3&-2&1&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&-1&1\\0&0&-4&-3&-6&1&4&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&-1&1\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&0&7&-1&0&-4\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&6&-1&-1&-3\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-5&1&2&2\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&6&-1&-1&-3\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-4&1&1&2\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&6&-1&-1&-3\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}$$

则$A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&1&1&2\\-1&0&1&0\\6&-1&-1&-3\\-6&1&0&4\end{pmatrix}$.

3. (8分)判断矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}$能否相似对角阵，并说明原因。

A不能相似对角化。 (2分)

由特征方程

$$|A-\lambda|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\-1&3-\lambda&0\\1&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-2)^2=0$$

解得特征值$\lambda_1=2$ (2重根), $\lambda_2=4$. (5分)

对应于$\lambda_1=2$, 求解$(A-2E)x=0$,由于

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知$R(A-2E)=2<3$. 从而只能解得1个线性无关特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}. \qquad (7分)$$

即2重特征值$\lambda_1 = 2$只对应1个线性无关特征向量，故A没有3个线性无关特征向量，因此A不能相似对角化。 (8分)

4. (10分)已知向量组$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个最大无关组,并把其余向量用此最大无关组线性表示。

解: 由于

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5分)$$

则$R(A) = R(a_1, a_2, a_3) = 3$. 故向量组的秩为3; a_1, a_2, a_3是一个最大无关组, 且 (8分)

$$a_4 = a_1 + 2a_2 - a_3. \qquad (10分)$$

5. (10分)设线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, 问$s, t$为何值时：

(1) 方程组无解; (2) 方程组有唯一解; (3) 方程组有无穷多解。

解：记方程组为$Ax = b$. 由于

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & t \\ 1 & 2 & s & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & t-2 \\ 0 & 1 & s-2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & s-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \qquad (4分)$$

则$2 \le R(A) \le R(A, b) \le 4$.

(1) 方程组无解, 则$R(A) < R(A, b)$, 即$R(A, b) = R(A)+1$. 从而有$\begin{cases} R(A) = 2, \\ R(A, b) = 3 \end{cases}$ 或$\begin{cases} R(A) = 3, \\ R(A, b) = 4 \end{cases}$ 故有

$$\begin{cases} s - 4 = 0 \\ t - 1 \neq 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} s - 4 \neq 0 \\ t - 1 \neq 0 \end{cases}$$

解得$t \neq 1$. (6分)

(2) 方程组有唯一解, 则$R(A) = R(A, b) = 3$. 从而

$$\begin{cases} s - 4 \neq 0 \\ t - 1 = 0 \end{cases}, \quad 解得 \quad \begin{cases} s \neq 4 \\ t = 1 \end{cases} \qquad (8分)$$

(3) 方程组有无穷多解, 则$R(A) = R(A, b) = 2 < 3$. 从而

$$\begin{cases} s - 4 = 0 \\ t - 1 = 0 \end{cases}, \quad 解得 \begin{cases} s = 4 \\ t = 1 \end{cases} \qquad (10分)$$

6. (10分)求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 5 \end{cases}$$

的通解。

解: 由于增广矩阵

$$B = (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5分)$$

则$R(A) = 2 < 4$. 故取x_3, x_4为自由未知数. 令$x_3 = k_1$, $x_4 = k_2$ 解得通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}). \qquad (10分)$$

7. (13分)设矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(1)求可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角阵(8分);

(2) 计算A^{2018}(5分)。

解: (1) 由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

(2分)

解得特征值$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

对应于$\lambda_1 = -1$, 求解$(A+E)x = 0$.由

$$A + E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得对应的1个线性无关特征向量

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4分)$$

对应于$\lambda_2 = 2$, 求解$(A - 2E)x = 0$.由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而解得对应的1个线性无关特征向量

$$p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (6分)$$

取$P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 则$P$为可逆阵, 且

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}. \qquad (8分)$$

(2) 由(1)知, $A=P\Lambda P^{-1}$, 且$P^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ (10分)

从而有

$$\begin{aligned} A^{2018} &= P\Lambda^{2018}P^{-1} && (11分)\\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{2018}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-2^{2020} & -4+2^{2020}\\ 1-2^{2018} & -4+2^{2018}\end{pmatrix} && (13分)\end{aligned}$$

8. (18分)设$x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

(1) 求正交阵P, 使得作正交变换$x=Py$后二次型化为标准形, 并请写出该标准形(14分);
(2) 判断该二次型的正定性(2分);
(3) 求当$\|x\|=1$时, 二次型f的最大值(2分)。

解：(1) 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. (2分)

由特征方程

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

解得特征值$\lambda_1=4$(2重根), $\lambda_2=1$. (5分)
对应于$\lambda_1=4$, 求解$(A-4E)x=0$.由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解得2个线性无关特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\qquad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

进行施密特正交化过程，令

$$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\eta_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\eta_1]}{[\eta_1,\eta_1]}\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix};$$

进行单位化,

$$p_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\qquad p_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

对应于$\lambda_2=1$, 求解$(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得1个线性无关特征向量

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

进行单位化，

$$p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. (13分)

则P是正交阵，且

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&1\end{pmatrix}.$$

从而作正交变换$x=Py$, 二次型化为标准形

$$4y_1^2+4y_2^2+y_3^2.$$ (14分)

(2) 由于对称阵A的特征值全为正,则A为正定阵, (15分)

从而二次型为正定二次型。 (16分)

(3) 由于正交变换是保长度的，故问题转化为当$\|y\|=1$时，二次型$f=4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$的最大值。又由于

$$f\le 4(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=4\|y\|^2=4$$

且$f(1,0,0)=4$, (17分)

因此，二次型的最大值是4. (18分)