

中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》(A卷)

学年学期：2017学年第1学期 姓名：_____学号：_____

学院/系：数学学院 学院：_____年级专业：_____

考试方式：闭卷 任课教师：_____

考试时长：120分钟 成绩评定：_____阅卷教师：_____

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共2道大题，总分100分，考生请在试卷上作答-----

一、填空题(共5小题，每小题3分，共15分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.
2. 设 A 为3阶矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A| = 3$ ，则 $|2A^*| =$ _____.
3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ，则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解空间的空间维数为_____.
4. 设3阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ ；则行列式 $|B^2 + B - E| =$ _____.
5. 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & k \\ 0 & k & -9 \end{pmatrix}$ 为负定矩阵，则 k 的取值范围是_____.

二、计算题(共8小题，第1-3小题各8分，第4-6小题各10分，第7小题13分，第8小题18分，共85分)注：要写出必要的计算和推理过程

8分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值。

8分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

3. (8分) 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 能否相似对角阵, 并说明原因。

$$\text{特征值 } \lambda = 1, 2, 3 \text{ 互不相同, 故 } A \text{ 可相似对角化.}$$

4. (10分) 已知向量组 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 求该向量组的秩和一个最大无关组, 并把其余向量用此最大无关组线性表示。

(10分) 设线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, 问 s, t 为何值时:

- (1) 方程组无解; (2) 方程组有唯一解; (3) 方程组有无穷多解。

(10分) 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5 \end{cases}$$

的通解。

7. (13分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

- (1) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵(8分);
- (2) 计算 A^{2018} (5分)。

8. (18分) 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

- (1) 求正交阵 P , 使得作正交变换 $x = Py$ 后二次型化为标准形, 并请写出该标准形(14分);
- (2) 判断该二次型的正定性(2分);
- (3) 求当 $\|x\| = 1$ 时, 二次型 f 的最大值(2分)。