中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学一（I）》(A 卷)

学年学期：2017–2018 学年第 1 学期　　姓　　名：________

学　院/系：数学学院　　学　　号：________

考试方式：闭卷　　年级专业：________

考试时长：120 分钟　　班　　别：________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位."

以下为试题区域，共 14 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

2. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x\cdot\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-\cos x\cdot x}}=1$$

3. (8 分) 计算积分 $\int_0^x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,x\Big|_0^x-\int_0^x \frac{x\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\cdot x-\int_0^x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\cdot x-\sqrt{x^2+1}\Big|_0^x$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\cdot x-\sqrt{x^2+1}+1.$$

4. (8 分) 求函数 $y=\sin x(0\le x\le \pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积。

$+\sqrt{1+\cos^2x}$ $\qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2x}}$

$y=\sin x$

$2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2x}\cdot dx$

$=-2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2x}\,d\cos x$

$=-2\pi\left(\frac{\cos x\sqrt{1+\cos^2x}+\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2x})}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=-\pi\left(-\sqrt{2}+\ln(-1+\sqrt{2})-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right)$

$=\pi\left(2\sqrt{2}-\ln(-1+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})\right)$

$2\sqrt{2}+2\ln(1+\sqrt{2})$

5. (8 分) 求过点 $M(0,1,2)$ 且与直线 $\begin{cases}2x-z+1=0\\ x+y-2=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

∵ 平面方程

$(2,0,-1)\times(1,1,0)=(1,-1,2)$

则 $x-(y-1)+2(z-2)=0$

即 $x-y+2z-3=0$

6. (8 分) 在曲线 $C: y=1-x^2(x>0)$ 上点 P 处作 C 的切线, 该切线与两坐标轴交与 A,B 两点

(1) (4 分) 试确定点 P 的位置, 使得 A,B 两点与坐标原点 O 所围的三角形 $\triangle OAB$ 的面积最小

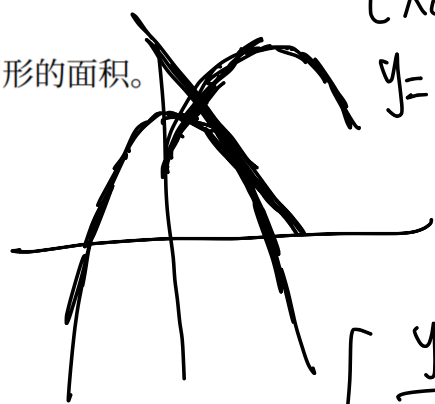
(2) (2 分) 求 P 点的切线方程

(3) (2 分) 求曲线 C 与 x 轴、y 轴所围图形的面积。

(x_0,y_0)

$y=-2x_0x+(y_0+2x_0^2)$

$x=\frac{y_0}{2x_0}+x_0$



$\left[\frac{y_0}{2x_0}+x_0\right](y_0+2x_0^2)$

$(1+x_0^2)$

$\frac{1}{2x_0}-\frac{x_0}{2}+x_0$

$\left(\frac{1}{2x_0}+\frac{x_0}{2}\right)(1+x_0^2)$

$\tan x-\sin x$

$\left(\frac{1}{\cos^2x}-\cos x\right)$

$2\frac{\sin x}{\cos^3x}+\sin x$

$+\frac{\cos^4x}{\cos^6x}+\cos x$

$\frac{1}{2x_0}+\frac{x_0}{2}+\frac{x_0}{2}+\frac{x_0^3}{2}$

$\frac{1}{2x_0}+x_0+\frac{x_0^3}{2}$

$-\frac{1}{2x_0^2}+1+\frac{3}{2}x_0^2$

7. (8 分) 设 $z = y\cos(ax+by)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. (8 分) 求曲线 $y = 3e^{-x^2}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

$y' = -6xe^{-x^2}$ $0.\ (-\infty, 0)$

$y'' = -6e^{-x^2}(1-2x^2)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3e^{-x^2}}{x}$

9. (8 分) 将函数 $f(x) = x^2\ln(3+x)$ 在 $x=0$ 处展开为带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

$(x^2+2x+2+\cdots)\left(\frac{1}{3+x} - \frac{1}{(3+x)^2} + \frac{2!}{(3+x)^3}\right)$

$o(\sqrt{x^2+y^2})$

$\ln 3 +$

$x^2\left(\frac{1}{3} - \right.$

10. (8 分) 求函数 $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ 在条件 $x+y+z = \dfrac{\pi}{2}, (x,y,z>0)$ 下的极值和极值点。

$\sin x \sin y \sin z - \lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

11. (5 分) 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、一阶偏导数

和一阶微分的存在性。

12. (5 分) 设 $z = f\left(x^2 - y^2, e^{xy+x}\right)$, f 的二阶偏导数连续, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. (5 分) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a](a > 0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x) = A$(A 为常数), 证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

并利用该等式计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}dx$ 的值.

14. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在区间 $(0, 1)$ 可导, 且 $f(1) = 0$, 证明: $\exists \xi \in$

更多资料加微信13316682031
更多资料加微信13316682031

$(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0$.