中山大学本科生期末考试

考试科目:《线性代数》(A 卷)

学年学期:	2018–2019 学年第 1 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域,共 10 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

一、填空题　　1234

1. 排列 4321 是 (偶排列) (填入“奇排列”或“偶排列”)

2. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

3. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A|=2$, 则 $|2A^*|=(32)$

解析:

$|2A^*|=2^3\,|\,A^*\,|=8\times|\,A\,|^2=32$

4. 设 A 列数为 3, $R(A)=2$, 且方程组 $Ax=b$ 有两个不相等的特解 η_1,η_2, 则其通解为 $(c(\eta_1-\eta_2)+\eta_1)$

解析:

A 列数为 3, 所以 $Ax=b$ 为三元线性方程组, 又因为 $R(A)=2$ 故 $Ax=0$ 的基础解系有一个向量, 通解为 $c(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$

5. 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵且 $R(A)=n-2$, 则 $R(A^*)=(0)$

解析:

由题意 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0, 由伴随矩阵定义可知 $A^*=0$, 所以 $R(A^*)=0$

6. 已知 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $0,1,-1$, 则 $\left|A^2+A-2E\right|=(0)$

解析: 设 A 的特征值为 λ, 则 A^2+A-2E 的特征值为 $\lambda^2+\lambda-2$

即-2,0, -2,

$\left|A^2+A-2E\right|=-2\times 0\times(-2)=0$

7. 设有向量组 a_1, a_2, a_3, 则向量组

$$b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, b_3 = a_3 - a_1$$

的线性关系是 (线性相关) （填入“线性相关”、“线性无关”或“不能确定”）
解析:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [b_1, b_2, b_3]$$

$det(A) = 0, \therefore R(A) < 3$
$\therefore R([b_1, b_2, b_3]) < R(A) < 3$
所以 $[b_1, b_2, b_3]$ 线性相关
8. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵且 $m > n$, 则矩阵 $C_1 = AB$(不可逆), 矩阵 $C_2 = BA$(不能确定)(填入“不可逆”、“可逆”或“不能确定”）
解析:
C_1 为 m 阶方阵, C_2 为 n 阶方阵,$R(A) < n, R(B) < n, R(C_1) < \min\{R(A), R(B)\} \leq n < m$,
$\therefore C_1$ 不可逆
$R(A) < n, R(B) < n, R(C_1) < \min\{R(A), R(B)\} \leq n$
$\therefore C_2$ 不确定。
9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 A 的特征值有 (1)，对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 A(不可) 对角化. (填入“可”或“不可”)

二、(共 8 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

三、(共 8 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

解:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

四、(共 10 分) 设有向量组 $\boldsymbol{A}$:

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},a_5=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

解:

以向量组为列向量组成 $\boldsymbol{A}$, 应用初等行变换化为最简形式.

$$\begin{pmatrix}2&-3&1&1&-1\\1&-2&2&2&0\\-1&2&3&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&-3&2\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

可知, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向量组的一个极大无关组。

所以 $\alpha_4=-4\alpha_1-3\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

五、考虑线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+3x_4=3\\x_1+2x_2-2x_3-3x_4=-3\\2x_1+4x_2+x_3+4x_4=4\end{cases}$$

求出此方程的通解并写出其对应的齐次方程组的一个基础解系.

解:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&3\\1&2&-2&-3&-3\\2&4&1&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$

基础解系为 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$

六、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (共 6 分) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.
2. (共 4 分) 求 A^n, 其中 n 是正整数.

解:

(1) 由特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

解得特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$

对应于 $\lambda_1=1$ 求解 $(A-1E)x=0$, 由

$$A-E=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda_2=2$ 求解 $(A-2E)x=0$, 由

$$A-2E=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

取 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 则 P 为可逆阵, 且

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)$P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^n &= P\Lambda^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

七、

1. (共 14 分) λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

(1) 无解; (2) 有唯一解; (3) 有无限多解并求出方程的通解.

解:

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \to (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 即当 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ 时, $R(\boldsymbol{A}) = 3$, 方程组有惟一解;

当 $\lambda = 1$ 时, 增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见, $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 1 < 3$, 于是方程组有无限多解. 因同解方程为 $x_1 = -x_2 - x_3 + 1$,

故通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$

当 $\lambda = -2$ 时, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

可见 $R(\boldsymbol{A}) = 2, R(\boldsymbol{B}) = 3, R(\boldsymbol{A}) \neq R(\boldsymbol{B})$, 于是方程组无解.

2. (共 8 分) 考虑二次型

$$f(x) = f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

求正交变换 $x = \boldsymbol{P}y$ 使得 $f(y) = f\left(y_1, y_2, y_3\right)$ 是标准形.

解:

二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(-\lambda(1+\lambda)+2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$\therefore A$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 解方程 $(A-\lambda E)x=0$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 将 ξ_1,ξ_2 正交化得 $\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

将 η_1,η_2 单位化得

$$p_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时, 解方程 $(A+2E)x=0$

$$A+2E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系: $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 单位化得

$$p_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

得到正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, ∴. 所求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 得

$$f\left(x_1x_2x_3\right)\big|_{x=P_y}=y_1^2+y_2^2-2y_3^2.$$