

数学分析I 模拟卷

(由计院学长根据往年题回忆得到,可能有所区别,请同学们以批判性眼光看待此模拟卷)

第一部分: 计算题

一、(8分) 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x + 2x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + 2x)}.$$

二、(8分) 求微商

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 \sin(x+t) dx.$$

三、(10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ 的单调性, 凸性和渐近线 (不要求作图).

四、(8分) 计算不定积分

$$\int \frac{\cos 3x}{e^{2x}} dx.$$

五、(8分) 计算定积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx.$$

六、(8分) 求曲线 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 的全长, 其中 $a > 0$.

七、(10分) 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

第二部分: 证明题

一、(10分) 设函数 f 在区间 (a, b) 下凸, 证明 f 在 (a, b) 连续.

二、(10分) 设函数 φ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 且值域为 D , 函数 f 在 D 上连续, 且有极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\varphi(x)) = l \in (-\infty, +\infty),$$

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

三、(10分) 证明:

$$\sum_{k=1}^n n^{\frac{1}{k}} = 2n + n^{\frac{1}{2}} + o(n^{\frac{1}{2}}), \quad (n \rightarrow \infty).$$

四、(10分) 设函数 f 在 $[a, b]$ 可积, 并且

$$\int_a^b f(x) dx > 0,$$

证明存在区间 $[a', b'] \subseteq [a, b]$, 使 $f(x) > 0, x \in [a', b']$.