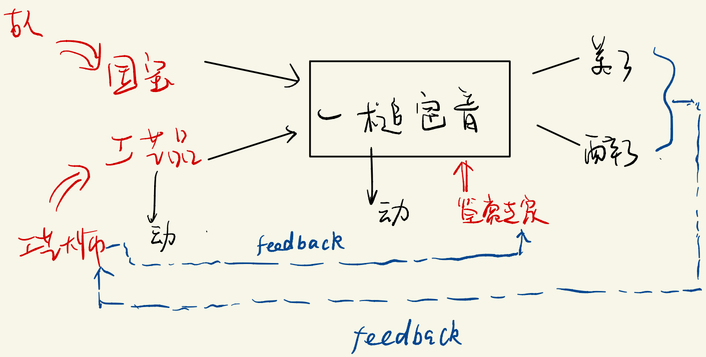
P1 - 生成对抗网络 (Generative Adversarial Network)



目的：成为高水平、可以以假乱真的大师！ [$P_g \to P_{data}$]

双高：
- 高水平的鉴赏专家 ⟶ 手段
- 高水平的工艺大师 ⟶ 目标

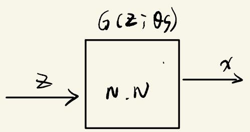
⟶ (高大师 (高专家))

P2 - 生成对抗网络 - 数学描述

$\{x_i\}_{i=1}^{N}$, P_{data}

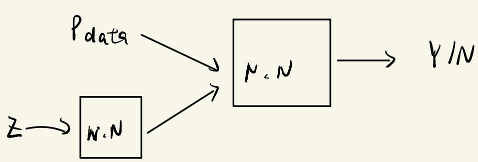
$P_g(x;\theta_g)$：[生成模型]，不直接进行建模，用神经网络进行逼近！

$z \sim P_z(z)$



$x = G(z;\theta_g)$

$D(x;\theta_d)$：代表x是国宝的概率！越趋近于1，越可能是国宝！



高专家：
$$\begin{cases} \text{如果 } x \text{ is from } P_{data}\text{, then } D(x) \text{ is higher} \\ \text{如果 } x \text{ is from } P_g\text{, then } D(x) \text{ is lower} \end{cases}$$

$\rightarrow \log D(x)$ 计算相同

$(1-D(x)$ higher$)$

$\downarrow$

$1-D[G(z)]$ $\uparrow$

$\downarrow$

$\log(1-D[G(z)])$

$(z \text{ is from } P_z)$

目标函数：高专家：

$$\max_D \underbrace{E_{x\sim P_{data}}}[\log D(x)] + E_{z\sim P_z}[\log(1-D(G(z)))]$$

→ 为什么是期望. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log D(x_i)$. $x_i \sim P_{data}$

目标函数：高大师：

若 x is from P_g, then $D(x)=D[G(z)]$ $\uparrow \Rightarrow \log(1-D[G(z)])\downarrow$

$$\Rightarrow \min_G E_{z\sim P_z}[\log(1-D(G(z)))]$$

总目标：
$$\min_G \max_D E_{x\sim P_{data}}[\log D(x)] + E_{z\sim P_z}[\log(1-D[G(z)])]$$

GAN的复杂度在于模型的学习！我们并没有直接面对 $P_g(x;\theta_g)$，而是用神经网络去逼近 $P_g(x;\theta_g)$。所以 GAN是 Implicit Density Model.

P3 — 生成对抗网络 — 全局最优解:

$P_{data}(x)$, $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ $\quad P_g(x;\theta_g) \doteq$ generator[$P_z(z) + G(z;\theta_g)$]

y|x : discriminator

y|x	1	0
P	D(x)	1−D(x)

目标: 成为以假乱真的大师 ($P_g \to P_{data}$); 最优解存在吗?

└→ $\min_G \max_D E_{x\sim P_{data}}[\log D(x)] + E_{z\sim p_z}[\log(1-D(G(z)))]$

常规的生成模型直接对 P_g 进行建模: $P_g \to \theta_g$

$$\theta_g = \arg\max_{\theta_g} \sum_{i=1}^{N} \log P_g(x_i) = \arg\min KL[P_{data} \| P_g]$$

从MLE角度!

GAN是从对抗学习的角度. 最优解存在吗? 如果存在, $P_g \overset{?}{=} P_{data}$

引用论文中的符号?

记 $\underbrace{V(D,G)}$ $= E_{x\sim P_{data}}[\log D(x)] + E_{x\sim P_g}[\log(1-D(x))]$

↳ 求V最大值. 求解时把G做为固定值

For Fixed G, 求 $\max_D V(D,G) = \int P_{data} \log D\,dx + \int P_g \cdot \log(1-D)\,dx$

$$= \int \underbrace{[P_{data}\cdot\log D + P_g\cdot\log(1-D)]}\,dx$$

求其最大 ⇒ V(D,G)最大

看导数：

$$\frac{\partial}{\partial D}[\max V(D,G)] = \frac{\partial}{\partial D}\int [P_{data}\cdot\log D + P_g \log(1-D)]\,dx$$

可以转化吗？

$$= \int \frac{\partial}{\partial D}[P_{data}\cdot\log D + P_g\cdot\log(1-D)]\,dx$$

可以！尽管D(x)与x相关。

$$= \int \left[P_{data}\frac{1}{D} + P_g\frac{-1}{1-D}\right]dx \ \hat{=}\ 0$$

$x\in\mathbb{R} \to D(x)\in[0,1]$

定积分和求导可以互换次序！

$$P_d\cdot\frac{1}{D} = P_g\frac{1}{1-D} \Rightarrow P_d(1-D)=P_g\cdot D$$

$$\Rightarrow D_G^* = \frac{P_d}{P_d+P_g}$$ (显然存在)

把D_G^*代入，则有

$$\min_G\max_D V(D,G) = \min_G V(D_G^*, G)$$

$$= \min_G E_{x\sim P_d}\left[\log\frac{P_d}{P_d+P_g}\right] + E_{x\sim P_g}\left[\log\left(1-\frac{P_d}{P_d+P_g}\right)\right]$$

$P_d = P_{data}$

$$= \min_G E_{x\sim P_d}\left[\log\frac{P_d}{P_d+P_g}\right] + E_{x\sim P_g}\left[\log\frac{P_g}{P_d+P_g}\right]$$

和KL Divergence 非常像！

$$KL[P\|Q] = E_P\left[\log\frac{P}{Q}\right]$$

可以用KL写吗？ $KL\left[\frac{P_d}{P_d+P_g}\right]$

→ 不是概率分布，可以凑概率分布！

$$= \min_{D} E_{x\sim p_d}\left[\log \frac{p_d}{\frac{p_d+p_g}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right] + E_{x\sim p_g}\left[\log \frac{p_g}{[p_d+p_g]/2} \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$= \min_{G} \left(KL\left[p_d \,\|\, \frac{p_d+p_g}{2}\right] + KL\left[p_g \,\|\, \frac{p_d+p_g}{2}\right]\right) - \log 4 \geq -\log 4$$

当 $p_d = \frac{p_d+p_g}{2} = p_g$ 时，等号成立！

$\log(ab) = \log a + \log b$.

$p_g^* = p_d^* = \frac{1}{2}$, $\underbrace{D^* = \frac{1}{2}}_{判别器}$

在最优的情况下，复制出来的工艺品 $\Longrightarrow$

送给discriminator，已经无法分别真假！此时已经没有学习的必要了！