Пример Решения:

1) Интеграл от рациональной функции:

Пусть дан интеграл: $\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz$, где $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены, C - контур.

Пример:
$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$

Решение:
Этот интеграл может быть вычислен с помощью полюсов функции $\frac{1}{z^2+1}$, которые являются корнями $z^2 + 1 = 0$, т.е., $z = \pm i$.

Так как полюсы простые, вычет в каждой из точек равен:
$Res(\frac{1}{z^2+1}, i) = \lim_{z \to i}(z - i)\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}$
$Res(\frac{1}{z^2+1}, -i) = \lim_{z \to -i}(z + i)\frac{1}{z^2+1} = -\frac{1}{2i}$

Теперь, суммируя вычеты и используя теорему о вычетах:
$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i\,(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i}) = \pi i$

2) Определенный интеграл с использованием полуокружностей или контуров через особые точки:

Пусть дан интеграл: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz$, где $a > 0$.

Решение:
Для решения этого интеграла можно использовать полукруговой контур в верхней полуплоскости C_R, состоящий из полукруга вверх радиуса R и линии от $-R$ до R.

Функция имеет полюсы в $z = i$ и $z = -i$, и оба полюса находятся в верхней полуплоскости.

Вычеты в этих точках:
$Res(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, i) = e^{-a}$
$Res(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, -i) = e^{a}$

По теореме о вычетах:
$\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz = 2\pi i(e^{-a} + e^{a})$

Предел интеграла по дуге полукруга при $R \longrightarrow \infty$ будет стремиться к нулю.

Итак, по теореме о вычетах:
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz = 2\pi i(e^{-a} + e^{a})$

3) Интеграл с полюсами внутри контура:

Пусть дан интеграл: $\int_C \frac{1}{z(z-1)^2} dz$, где C - контур, охватывающий область $0 < |z| < 1$ и $|z - 1| < 1$.

Решение:

В данном случае у функции есть полюс первого порядка в $z = 0$ и полюс второго порядка в $z = 1$.

Вычет в $z = 0$:

$Res(\frac{1}{z(z-1)^2}, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}(z - 0)\frac{1}{z(z-1)^2} = 1$

Вычет в $z = 1$:

$Res(\frac{1}{z(z-1)^2}, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 \frac{1}{z(z-1)^2}] = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z} = 1$

По теореме о вычетах:

$\int_C \frac{1}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i(1 + 1) = 4\pi i$