Nash-Teorema de Punto Fijo

1. Continuidad

M.F Funciones Continuas y Conjuntos Compactos

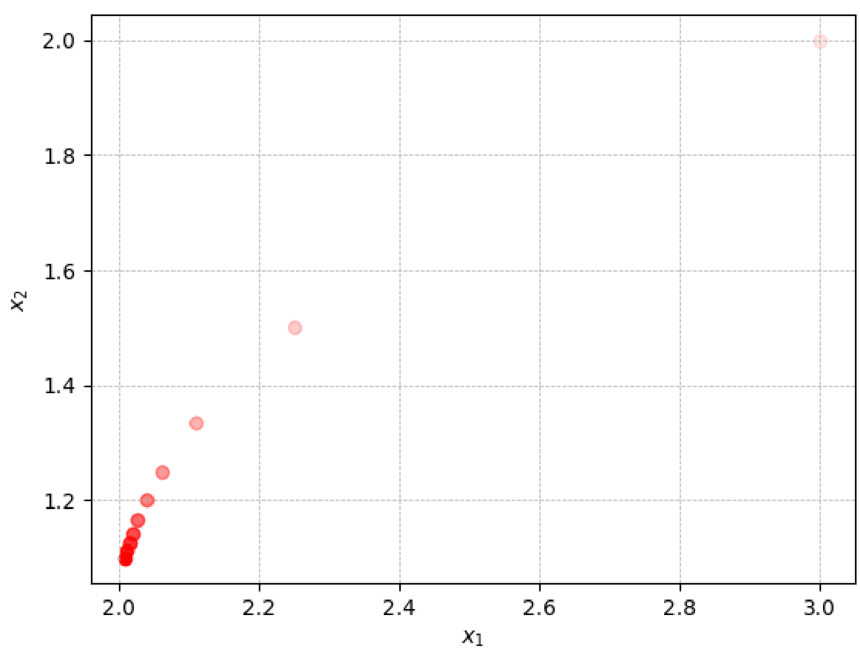
Una *secuencia* en $\mathbb{R}^N$ signa a cada entero positivo $m = 1, 2, ...$ un vector $x^m \in \mathbb{R}^N$. Denotamos la secuencia con $\{x^m\}_{m=1}^{m=\infty}$, o simplemente $\{x^m\}$.

Definición M.F.1 Una secuencia $\{x^m\}$ *converge* a $x \in \mathbb{R}^N$, escrito como $\lim_{m\to\infty} x^m = x$ o $x^m \to x$, si para cada $\epsilon > 0$ hay un entero M_ϵ tal que $\|x^m - x\| < \epsilon$, cuando $m > M_\epsilon$. El punto x entonces se dice que es el *punto límite* (o simplemente el *límite*) de la secuencia $\{x^m\}$.

Por ejemplo la secuencia:

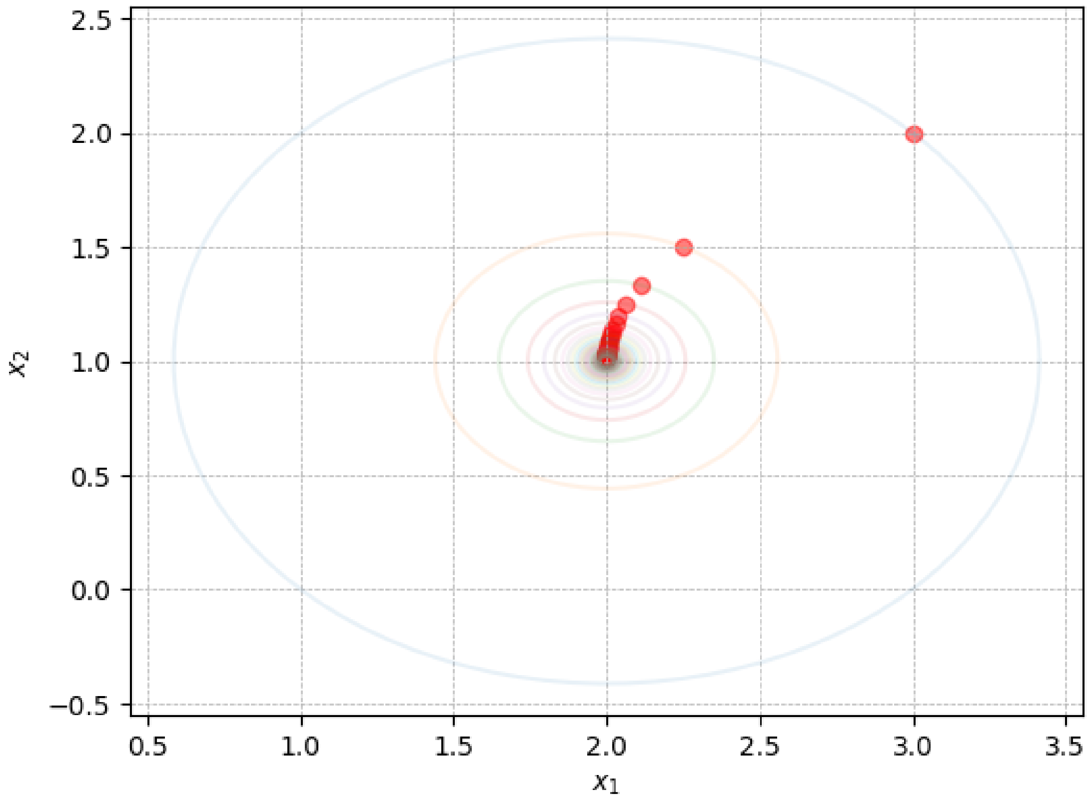
$$\{x^m\} = \left\{\left(2 + \frac{1}{m^2}, 1 + \frac{1}{m}\right)\right\}$$

Gráficamente la secuencia tiende a $(2, 1)$.



Lo que dice la definición es que la distancia euclidiana del límite y un elemento ($\|x^m - x\|$) hace que todos los puntos "intermedios" también se encuentren dentro de "esa vecindad".

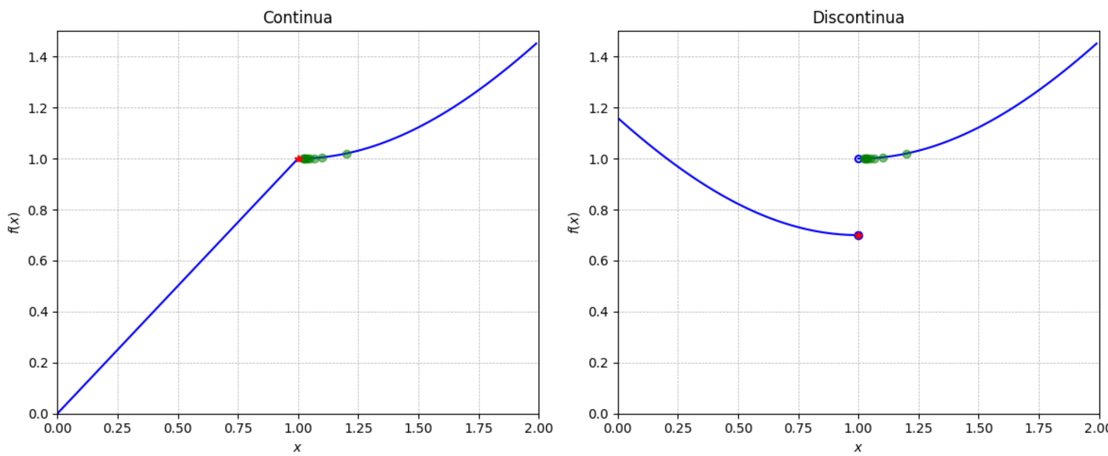
Gráficamente:



Dada nuestra definición, la convergencia implica que para cualquier $\epsilon > 0$ (por pequeño que lo elijamos, digamos $\epsilon = 0.0001$), existe un punto en la secuencia a partir del cual todos los términos siguientes caen dentro de un margen ϵ alrededor del límite. Es decir, que el círculo que nosotros hemos establecido de la vecindad es lo más cercano al límite.

En palabras: La secuencia $\{x^m\}$ converge a x si x^m se acerca a x lo arbitrariamente cerca a medida que m incrementa.

Definición M.F.2 Consideremos un dominio $X \in \mathbb{R}^N$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es *continua* si para todo $x \in X$ y cada secuencia $x^m \to x$ (teniendo $x^m \in X$ para todo m), tenemos que $f(x^m) \to f(x)$. Una función $f : X \to \mathbb{R}^k$ es continua si para cada función de coordenadas $f_k(\cdot)$ es continua.

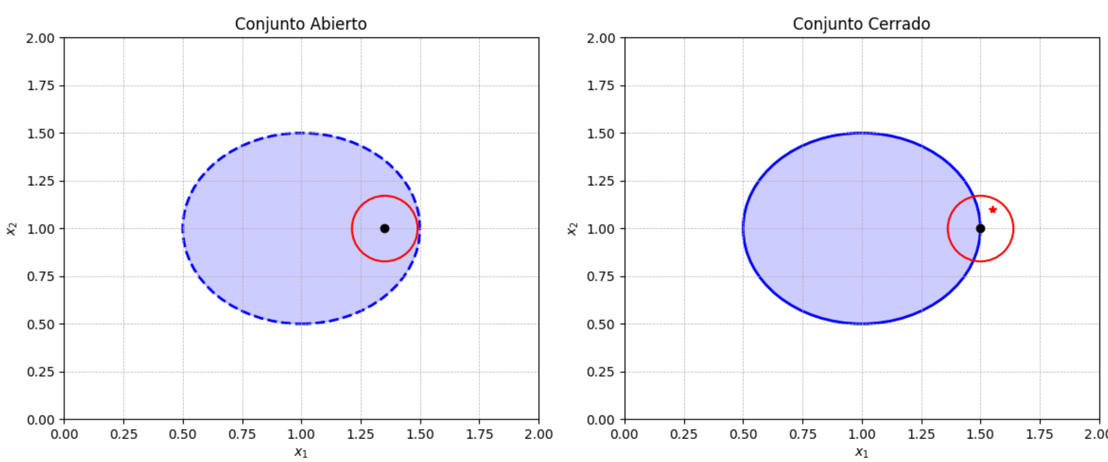


En palabras: una función es continua si, cuando tomamos una secuencia de puntos $x^1, x^2, ...$ que converge a x, la correspondiente función de valores $f(x^1), f(x^2), ...$ converge a $f(x)$. Intuitivamente, una función falla ser continua si presenta un "salto" es su valor en algún punto x.

La definición de continuidad nos permite obtener la definición de conjuntos cerrados y abiertos.

Definición M.F.3 Fijemos un conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que un conjunto $A \in X$ es abierto (relativo a X) si para cada $x \in A$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $\|x' - x\| < \epsilon$ y $x' \in X$ implica $x' \in A$.

Un conjunto es cerrado (relativo a X) si su componente $X \setminus A$ es abierto, (relativo a X). Si $X = \mathbb{R}^N$ nos referimos a conjuntos abiertos y cerrados.

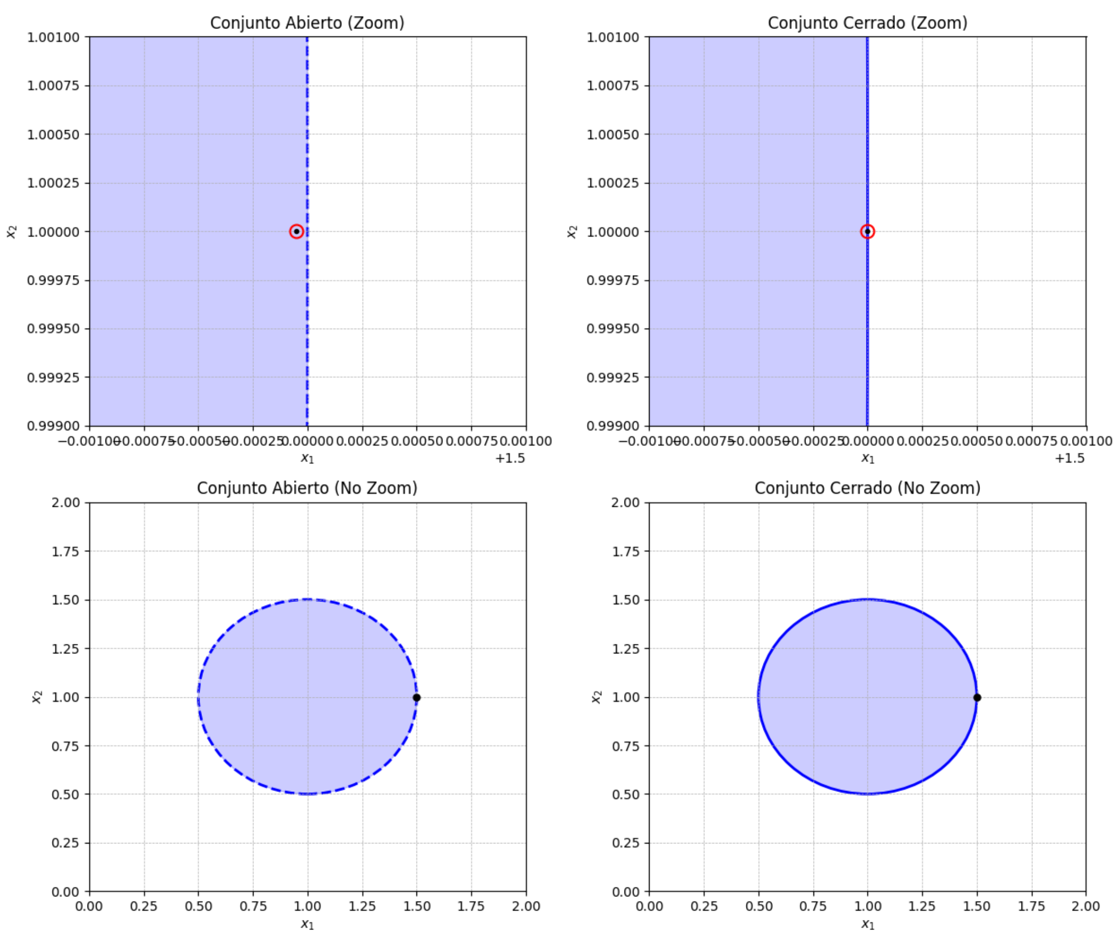


Veamos que el gráfico de la izquierda tenemos que si tomamos cualquier punto dentro de este conjunto, siempre podremos dibujar una pequeña "vecindad" (un círculo alrededor de ese punto) de tal manera que absolutamente todos los puntos dentro de esa vecindad (que también estén en nuestro conjunto original $x' \in X$) pertenecen por completo al conjunto ($x' \in A$).

Es importante notar que a medida que nos acercamos al "borde" del conjunto, el tamaño de esta vecindad (representado por ϵ) que podemos elegir se hace más y más pequeño, tal que se cumple la definición. Sin embargo, por muy cerca que estemos del borde, este ϵ siempre puede tomar un valor mayor que cero, por insignificante que parezca (por ejemplo, $\epsilon = 0.00000001$). Es decir, nunca se reduce a cero.

Mientras que en la gráfica de la derecha, veamos que los puntos del límite forman parte del conjunto ("incluye la frontera"). Precisamente por esta razón, no se trata de un conjunto abierto. Por lo tanto, para demostrar que no se trata de un conjunto abierto, veamos que al tomar un punto del límite siempre genera una vecindad tal que hay puntos que $x' \in X$ pero que $x' \notin A$ (como la estrella roja). No importa que tan pequeña es la vecindad, siempre va a haber un punto que no sea contenido. La única forma que la vecindad contuviese a solo puntos dentro del conjunto necesitaría que $\epsilon = 0$ (lo cual no es válido para definir una vecindad).

Para seguir hinchando con gráfica hasta que quede claro:



Teorema M.F.1 Fijemos un conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$. En lo que sigue, todos los conjuntos abiertos y cerrados son relativos a X.

1. La unión de cualquier número, finito o infinito, de conjuntos abiertos es abierto. La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto.

Para ver este último entonces podemos pensar nuevamente en la vecindad, si yo hago un infinitos conjuntos abiertos de vecindades de un punto x, tal que son una secuencia que tiende a $\epsilon \to 0$, la intersección de todas ellas va a ser x. (Gráfica de convergencia)

$$A_n = \left(1, 1.5 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1.5\}$$

2. La intersección de cualquier número, finito o infinito, de conjuntos cerrados es cerrado. La unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Para ver este último podemos observar la gráfica de conjunto abierto (un poco contradictorio pero si), pensemos en la vecindad de un punto x tal que todos los puntos dentro de esa vecindad forman parte del conjunto. Si hacemos una sucesión infinita de estas vecindades, tal que nos acercamos lo suficiente a x' (lo que podríamos observar como el límite del conjunto abierto) veamos que estamos construyendo also así como la def de abierto (como en el ejemplo, semi-abierto).

$$A_n = \left[1, 1.5 - \frac{1}{n}\right]$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [1, 1.5)$$

3. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si para cada secuencia $x^m \to x \in X$, con $x^m \in a$ para todo m, tenemos que $x \in A$

Es decir, un conjunto A es cerrado *si y solo si* contiene todos los puntos límites.

Veamos que también podemos definir el interior, el cierre y el límite de un conjunto A:

$$\operatorname{Int}_x A = \{x \in A : \text{ hay un } \epsilon > 0 \text{ tal que } \|x' - x\| < \epsilon \text{ y } x' \in X \implies x' \in A\}$$

Es decir, es el conjunto formado por todos los x del conjunto A tal que existe una vecindad de radio positivo (sin importar que tan pequeña) tal que los puntos que contiene a esa vecindad también forman parte de A.

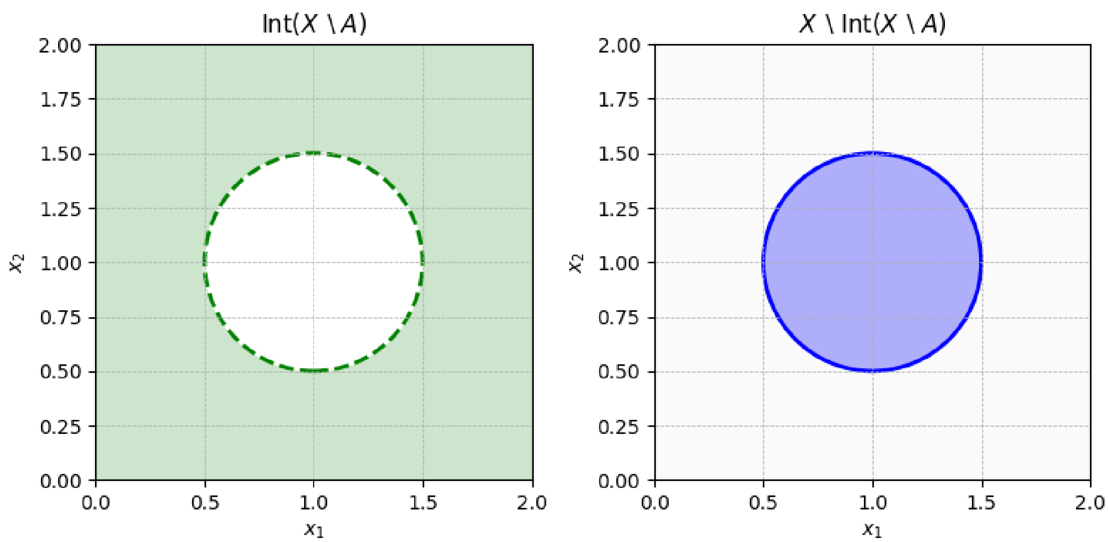
Veamos que entonces el interior de un conjunto abierto es el conjunto abierto completo.

El cierre del conjunto A es tal que:

$$\operatorname{CI}_x A = X \setminus \operatorname{Int}_x(X \setminus A)$$

Es decir, el conjunto interior del conjunto de X luego de restarle los puntos que pertenecen a A, y luego se le resta a X.

Veamos que si el conjunto es cerrado, entonces $X \setminus A$ es abierto (definición), lo que implica que el conjunto interior de $X \setminus A$ es igual a $X \setminus A$, por lo tanto, $X \setminus (X \setminus A)$ es igual a A. Es decir, el cierre de un conjunto cerrado es igual que el conjunto cerrado completo

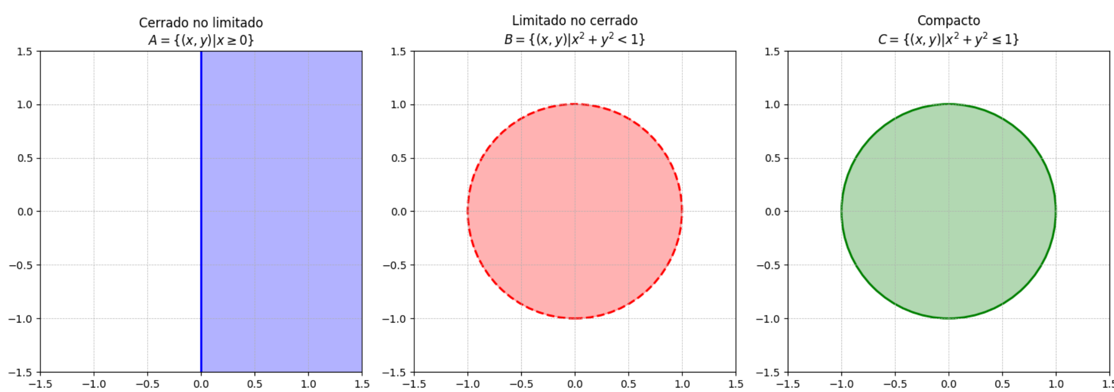


El límite de A (relativo a X) es el conjunto cerrado que se define como:

$$\mathrm{Bdry}_x\, A = \mathrm{CI}_x\, A \setminus \mathrm{Int}_x\, A$$

Es decir, al cierre del conjunto le quito el conjunto interior.

Definición M.F.4 Un conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ es *limitado* si existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\| < R$ para cada $x \in A$. El conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es *compacto* si es limitado y cerrado relativo a $\mathbb{R}^N$.



Teorema M.F.2: Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}^K$ es una función continua definida en un conjunto no vacío $X \subset \mathbb{R}^N$.

1. La imagen de un conjunto compacto bajo $f(\cdot)$ es compacta: Esto es, si $A \subset X$ es compacta, entonces $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^K : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$ es un subconjuto compacto de $\mathbb{R}^K$.

Si A es un conjunto “acotado” en su extensión (limitado), y la función f es continua, esto significa que f no va a “estirar” los puntos de A hasta el infinito. La continuidad impide que los valores de

$f(x)$ "salte" a un valor demasiado grande si x está en un conjunto limitado. Por lo tanto, la imagen $f(A)$ también debe ser un conjunto limitado y la continuidad implica que también sea cerrado -> compacto.

2. Supongamos que $K = 1$ y X es compacto. Entonces $f(\cdot)$ tiene un máximo: Esto es, hay un $x \in X$ tal que $f(x) \geq f(x')$ para cada $x' \in X$.

Sabemos que entonces la imagen también pertenece a un conjunto compacto. Por lo tanto, el valor supremo de la imagen corresponde a un valor determinado del conjunto compacto de X.

Definición M.L.1 Fijemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, dotado de la métrica inducida por la norma euclídea. Decimos que A es *espacio métrico completo* si toda sucesión de Cauchy en A converge a un punto en A, es decir:

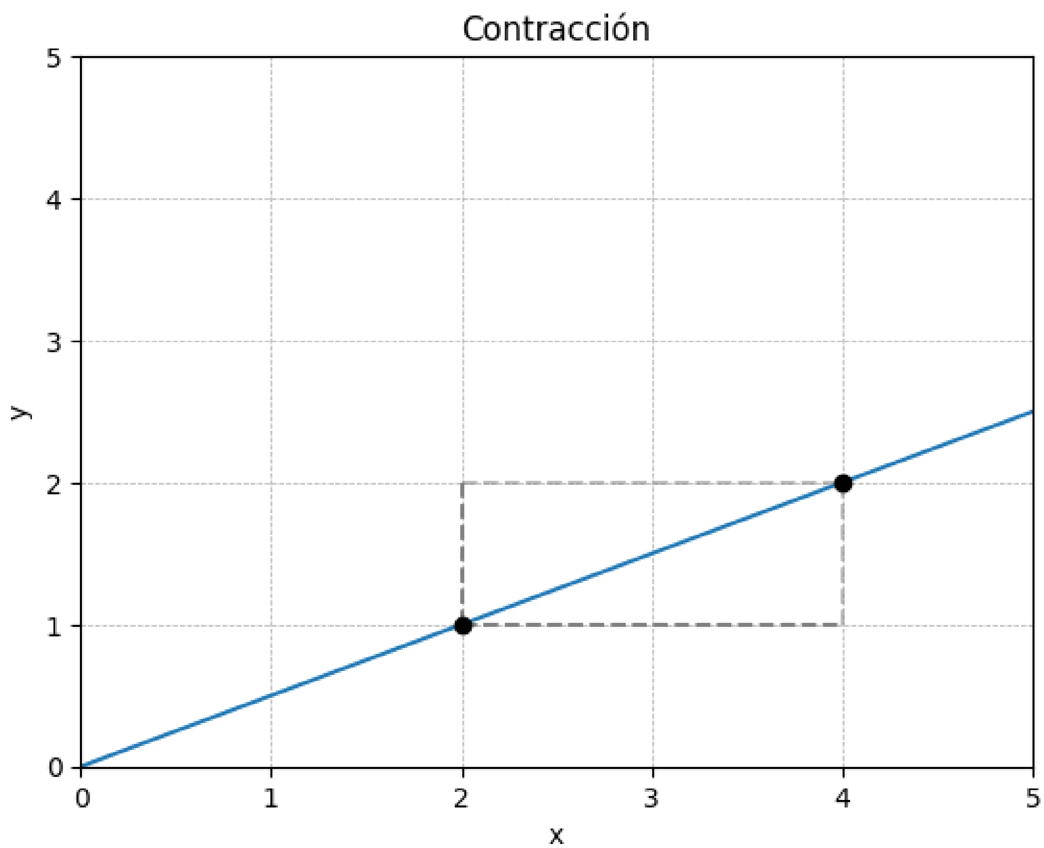
Para toda sucesión $(x_n) \subset A$ *tal que* $|x_n - x_m| \to 0$ *cuando* $n, m \to \infty$*, existe* $x \in A$ *tal que* $x_n \to x$.

Definición M.L.2 Fijemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que $\Phi : A \to A$ es una contracción (o una contracción que se automapea) si existe un número real $0 < K < 1$, tal que:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in A$$

donde el ínfimo del conjunto de todos los K es llamado *coeficiente de contracción* de Φ.

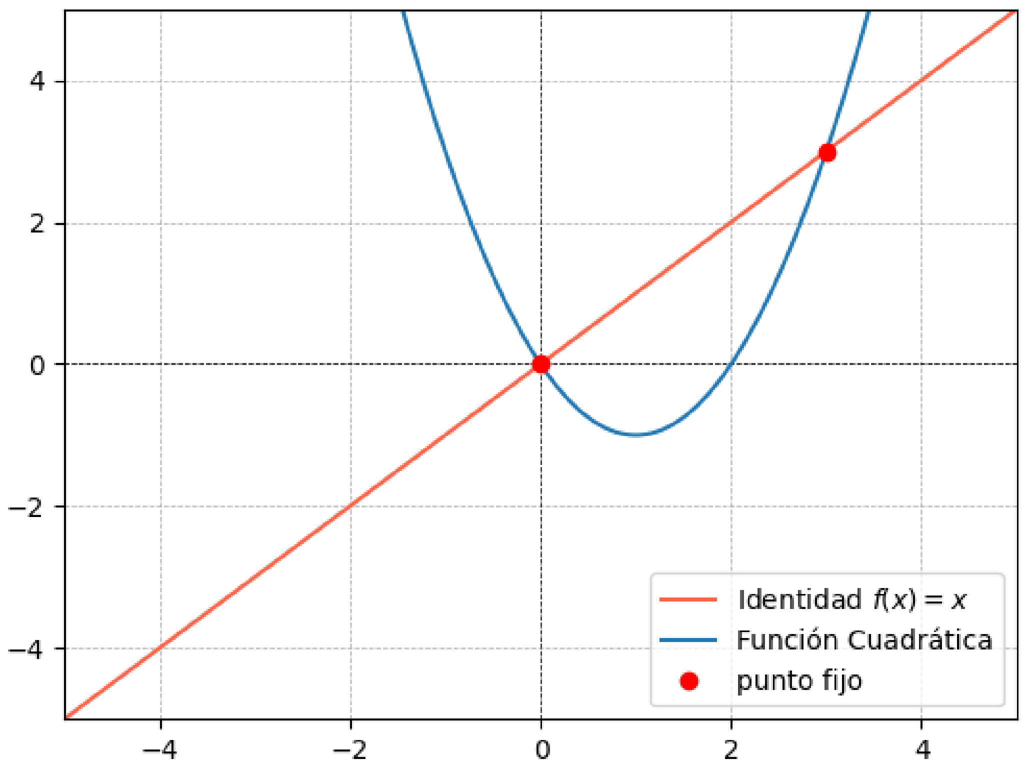
(Por definición, toda contracción es continua. A medida que la distancia disminuye, entonces la distancia de la imagen también disminuye)



3. Teorema de Punto Fijo I

En economía la técnica más frecuente para establecer la existencia de soluciones al equilibrio de un sistema de ecuaciones consiste en establecer el problema como la búsqueda de un *punto fijo* de una función o correspondencia $f : A \to A$, de algún conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ a si mismo.

Un vector $x \in A$ es un punto fijo de la función $f(\cdot)$ si $x = f(x)$ [o en el caso de la correspondencia, si $x \in f(x)$]. Esto es, el vector se mapea a si mismo tal que permanece "fijo". La razón de proceder de esta, algunas veces redundante, forma es que importantes teoremas matemáticos para probar la existencia de un punto fijo ya estan disponibles.



Teorema M.L.1 (Teorema de Punto Fijo de Banach) Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^N$ es un *espacio métrico completo*. Si $\Phi : A \to A$ es una *contracción*, entonces existe un **único** $x^* \in A$ tal que $\Phi(x^*) = x^*$.

Demostración existencia

Para un $x_0 \in X$, definimos $x_n = \Phi^n(x_0)$. Por definición de contracción, entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| = \|\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})\| &\leq K_n \|x_n - x_{n-1}\| && (1)\\
&\leq K_n \|\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_{n-2})\| \leq K_n K_{n-1} \|x_{n-2} - x_{n-2}\| && (2)\\
&\quad \vdots && (3)\\
&\leq \prod_{i=1}^{n} K_i \|x_1 - x_0\| && (4)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, esto implica que $|x_{n+1} - x_n| = |\Phi(x_n) - x_n| = \left|\prod_{i=1}^{n} K_i \left|x_1 - x_0\right|\right|$

Sea $K^* = \sup K_i$, tal que:

$$\prod_{i=1}^{n} K_i \leq \prod_{i=1}^{n} K^*$$

Aplicando límites a ambos lados, y por definición de $0 < K^* < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} K_i \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} K^* = \lim_{n\to\infty} {K^*}^n \to 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} K_i \to 0$$

Demostración unicidad

Supongamos que

$$\Phi(x^*) = x^* \quad \text{y} \quad \Phi(y^*) = y^*$$

con $x^* \neq y^*$.

Ahora, usando que Φ es una contracción, tenemos que para alguna constante $0 < K < 1$:

$$\|\Phi(x^*) - \Phi(y^*)\| \leq K \|x^* - y^*\|$$

Pero como x^* y y^* son puntos fijos,

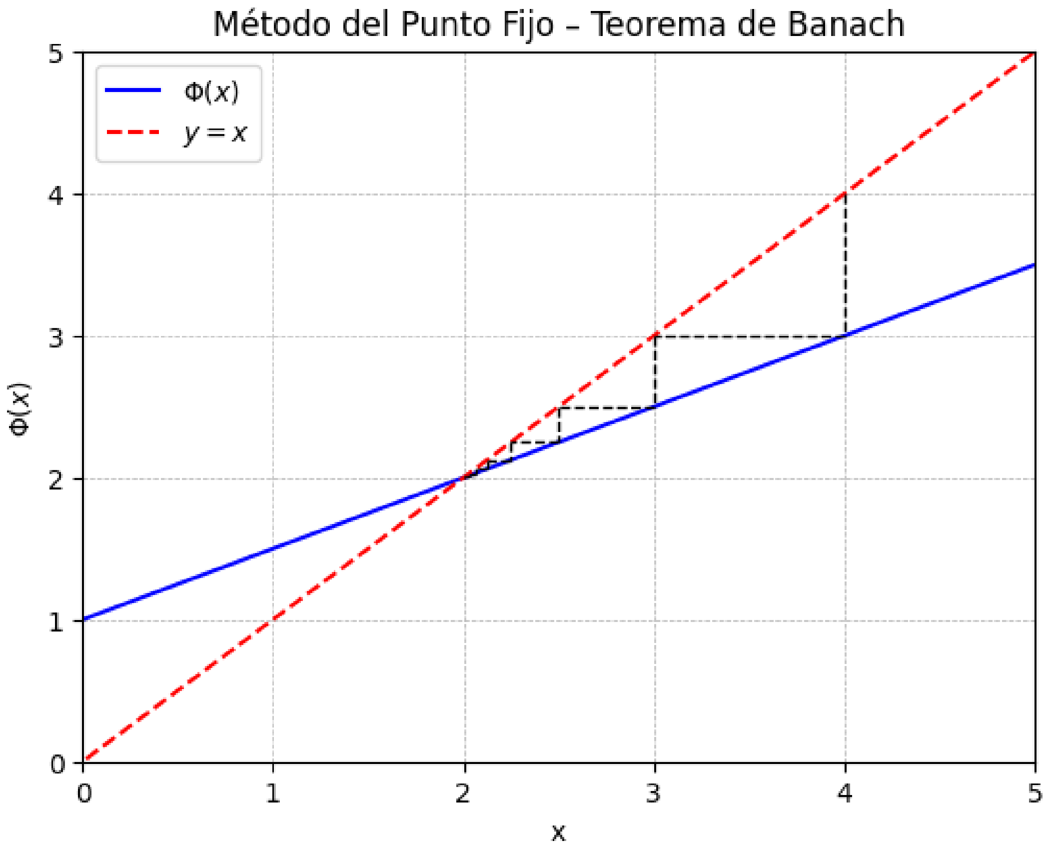
$$\|x^* - y^*\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(y^*)\| \leq K \|x^* - y^*\|$$

Despejando:

$$(1 - K)\|x^* - y^*\| \leq 0$$

Pero $1 - K > 0$, así que la única manera de que esta desigualdad se cumpla es que

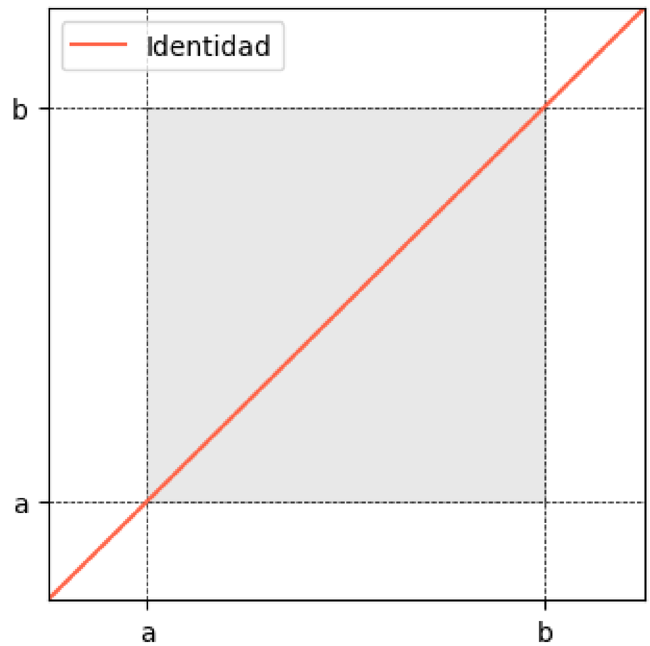
$$\|x^* - y^*\| = 0 \implies x^* = y^*$$



Teorema M.I.1 (Teorema de Punto Fijo de Brouwer) Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo, y que $f : A \to A$ es una función continua de A a si misma. Entonces $f(\cdot)$ tiene un punto fijo; esto es hay un $x \in A$ tal que $x = f(x)$.

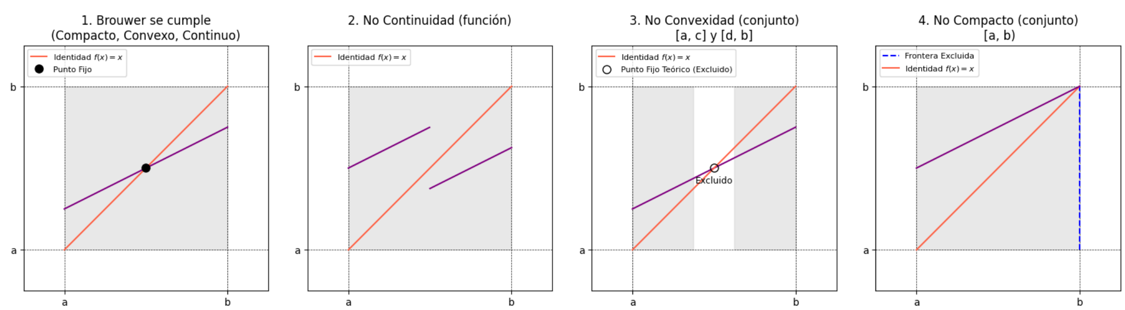
La demostración matemática del teorema implica topología avanzada (demostración en Lefschetz), no obstante se utiliza de heurísticas para poder interpretarlo.

Si consideramos un $A \subset \mathbb{R}^1$. Si A es compacto y convexo, debe haber un intervalo cerrado, digamos $[a, b]$. Además, el rango de $f(x)$ se encuentra *dentro* de $[a, b]$. Debido a que $f(x)$ es definida para todo $x \in A$, tal que la gráfica debe ir del límite izquierdo al límite derecho del gráfico.



Debido a que $f(x)$ es continua, el gráfico no debe tener "roturas" y, por lo tanto, en algún momento intersepta la diagonal, tal que $x = f(x)$.

Por ejemplo:



Veamos que la imagen es un subconjunto de A (como se ve en la gráfica 1).

Existencia de Equilibrio en Equilibrio General

Supongamos una economía sencilla de forma tal que solo se trata de una economía de intercambio.

Las funciones de demanda excedente **Supuesto 1 (F)** A todo $\mathbf{p}$ corresponde un número único $z_i(\mathbf{p})$ llamado función de demanda excedente de i y, por lo tanto, un vector único $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ de demanda excedente:

$$z_i(\mathbf{p}) = x_i(\mathbf{p}) - y_i(\mathbf{p}) - \bar{x}_i$$

Supuestos principales **Supuesto 2 (H)** $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(k\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} > 0$ y $k > 0$, las funciones de demanda excedente son homogéneas de grado cero en $\mathbf{p}$.

La suma del valor de todas los excedentes de demanda es menor que cero. Suponiendo que d_h es la proporción de beneficio recibido por los individuos tal que $\sum_h d_h = 1$. Los individuos necesariamente consumen tal que su "ingreso" es menor que su gasto, es decir:

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{h} + d_n\mathbf{p}\mathbf{y} \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_\mathbf{h}$$

Sumando para todos los individuos:

$$\mathbf{p}\sum_h \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{h} + \mathbf{p}\mathbf{y}\sum_h d_n \geq \mathbf{p}\sum_h \mathbf{x}_\mathbf{h}$$

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} + py \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_\mathbf{h}$$

Reordenando:

$$\mathbf{p}\mathbf{z} \leq 0$$

Supuesto 4 (W) Para todo $\mathbf{p} \in S_n$, $\mathbf{p}\mathbf{z} = 0$

Bajo no-saciedad local tal que si $x \succ x'$ si sucede que $x > x'$, entonces debe suceder que la restricción se cumple con igualdad.

Supuesto 5 (C) La función vectorial de la demanda $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ es continua en todo el dominio de su definición S_n

El equilibrio **Definición 1 (E)** $\mathbf{p}^* \in S_n$ se llama un equilibrio si $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$ cuando $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ se reiva de las acciones preferidas de los aagentes.

Teorema 1 Si W y $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$, entonces $z_i(\mathbf{p}^*) < 0$ implica que $p_i^* = 0$

$$E = \{\mathbf{p}|\, \mathbf{z}(\mathbf{p}) \leq 0; \qquad \mathbf{p} \in S_n\}$$

La existencia del equilibrio. El caso de dos bienes Supongamos dos extremos $\mathbf{p}' = (0,1)$ y $\mathbf{p}'' = (1,0)$ claramente ambos pertenecen a S_2. Si no existe equilibrio entonces debe suceder que $z_1(p') > 0$ por W entonces $z_2(p') = 0$, mientras que $z_2(p'') > 0$ y por W entonces $z_1(p'') = 0$. Si no sucediera ello, es decir, que $z_1(p') \leq 0$ entonces p' sería un equilibrio dada nuestra definición.

Sea ahora $\mathbf{p}(m) = m\mathbf{p}' + (1-m)\mathbf{p}''$ entonces debe suceder un m^* tal que $p_i > 0$ para 1,2 y se cumpla W. Como $p', p'' > 0$ entonces debe suceder que $z_1, z_2 > 0$.

Esto se debe dado el supuesto de continuidad de las demandas.

Existencia del equilibrio: muchos bienes Reglas obtenidas del caso de dos bienes:

1. Excedente de demanda $\implies$ aumenta el precio.
2. Excedente de oferta $\implies$ se reduce o no aumenta el precio.
3. No cambia cuando el excedente es cero.
4. Se multiplica tal que los precios estén en la simplex S_n, es decir, los precios relativos se mantienen constantes

Paso 1: construcción proyección

$$M_i(\mathbf{p}) > 0 \qquad \text{si } z_i(\mathbf{p}) > 0$$

$$M_i(\mathbf{p}) = 0 \qquad \text{si } z_i(\mathbf{p}) = 0$$

$$p_i + M_i(\mathbf{p}) > 0$$

Se propone:

$$M_i(\mathbf{p}) = \max\{0, k_i z_i(\mathbf{p})\}$$

De esta forma podemos interpretar:

$$\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p})$$

Como el cambio de los precios, tal que cuando $z_i(\mathbf{p}) \leq 0$ el cambio en los precios es nulo. Mientras que cuando $z_i(\mathbf{p}) > 0$ el precio p_i aumenta en el "siguiente periodo".

No obstante esto implicaría que $\mathbf{p}$ podría crecer por fuera de la simpex tal que $\mathbf{pe} > 1$, donde $\mathbf{e}$ es un vector fila de unos, por lo tanto, es necesario normalizar:

$$T(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p})}{[\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p})]\,\mathbf{e}}$$

Para demostrar que se trata de una proyección tenemos que demostrar que $c \equiv [\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p})]\,\mathbf{e} > 0$. De esta forma distribuyendo $\mathbf{e}$, tenemos:

$$c = \mathbf{pe} + \mathbf{M}(\mathbf{p})\mathbf{e} = 1 + \mathbf{M}(\mathbf{p})\mathbf{e}$$

Dado que por construcción tenemos que $M_i(\mathbf{p}) \geq 0$ para todo i, debe suceder que

$$c > 0$$

Paso 2: el resultado matemático

Definición 2 a. Si $T(\mathbf{p})$ es una proyección que llev los puntos de S_n a puntos en S_n, decimos que la proyección proyecta S_n en si mismo.

b. Si para algún $\mathbf{p}^*$ tenemos $\mathbf{p}^* = T(\mathbf{p}^*)$, entonces $\mathbf{p}^*$ un punto fijo de $T(\mathbf{p})$

Es claro que $T(\mathbf{p})$ es continua debido a z_i, por lo tanto, necesitamos de (C), además S_n es cerrado y limitado, es decir, es compacto. Y S_n es claramente convexo.

Paso 3: El punto fijo es un equilibrio

$$\{[\mathbf{p}^* + \mathbf{M}(\mathbf{p}^*)]\, \mathbf{e}\}\, \mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{M}(\mathbf{p}^*)$$

$$\{[\mathbf{p}^* + \mathbf{M}(\mathbf{p}^*)]\, \mathbf{e} - 1\}\, \mathbf{p}^* = \mathbf{M}(\mathbf{p}^*)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}^*) = \lambda \mathbf{p}^*$$

Multiplicando por $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*)$ tenemos:

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \lambda\left(\mathbf{p}^*\mathbf{z}(\mathbf{p}^*)\right) = \lambda 0 = 0$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$$

Observemos que esto debe cumplirse para cada i, debido a que $M_i(\mathbf{p}^*)z_i(\mathbf{p}^*) \geq 0$ en todos los casos, entonces si uno es positivo no es posible que se compense con algún efecto negativo por lo que debe cumplirse para cada i:

$$M_i(\mathbf{p}^*)z_i(\mathbf{p}^*) = 0$$

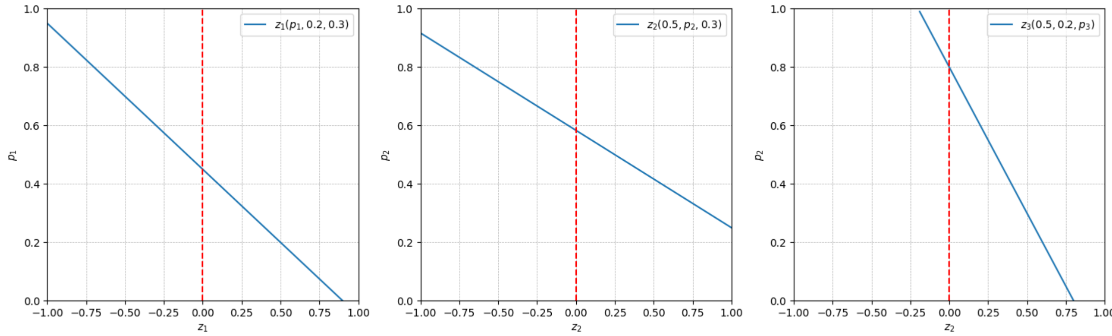
Si $z_i > 0$ debería suceder que $M_i = 0$, no obstante por construcción de $\mathbf{M}$ si $z_i > 0$ entonces $M_i > 0$. Lo cual implica que no puede suceder que $z_i > 0$ lo que implica que $z_i \leq 0$, lo cual implica que es un equilibrio.

Teorema 2 Si F, H, W y C entonces existe un equilibrio para una economía competitiva con un número finito de bienes.

Simulación 3 bienes:

$$\begin{cases} z_1 & = 1 - 2p_1 + p_2 - p_3 \\ z_2 & = 1 + \frac{1}{2}p_1 - 3p_2 \\ z_3 & = 2 - p_2 - p_3 \end{cases}$$

Buena definición de las funciones de exceso de demanda!



Comenzamos con un punto tal que: $[0, 0, 1]$ y ahí comienza el ajuste. Específicamente como funciona:

Función de "ajuste de precios"

Evaluamos las demandas:

$$\begin{cases} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 1 \\ z_3 &= 1 \end{cases}$$

Formamos la función $\mathbf{M}(\mathbf{p})$, donde k_i sería la velocidad de ajuste. Para simplificar suponemos la misma velocidad $k = 0.1$.

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \begin{cases} M_1 &= 0 \\ M_2 &= 0.1 \\ M_3 &= 0.1 \end{cases}$$

Y evaluamos:

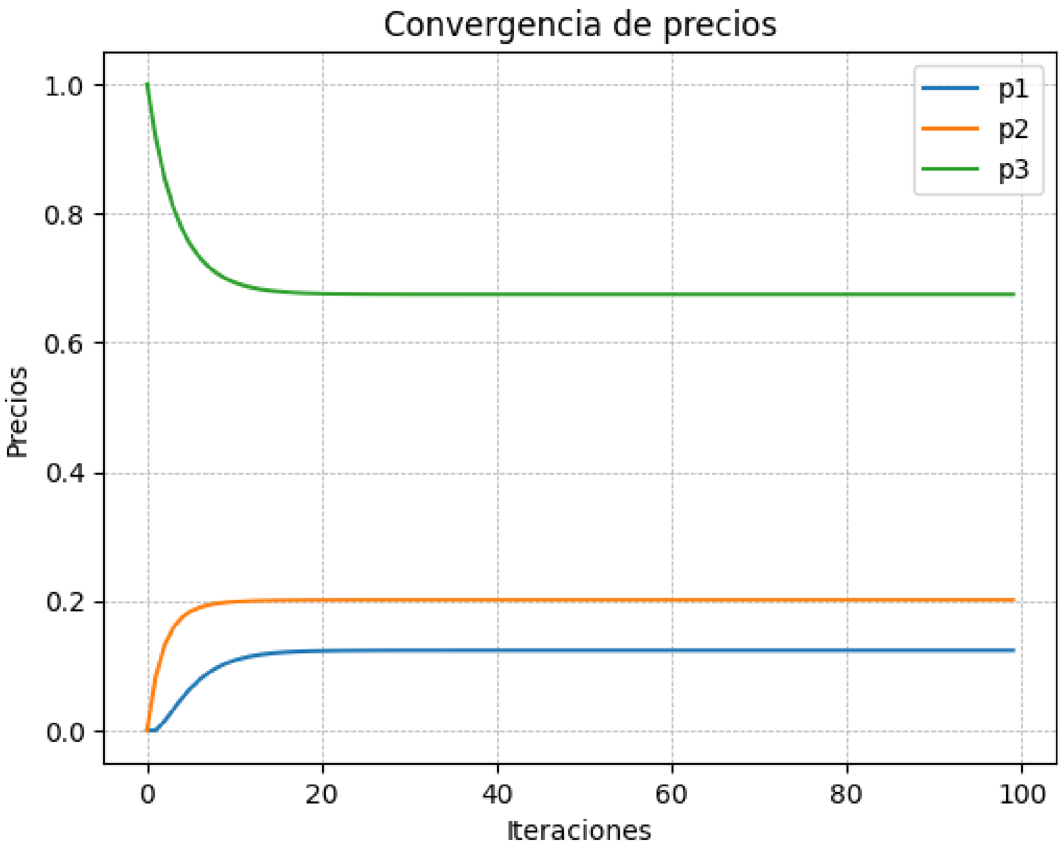
$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{cases} T_1 &= \frac{0}{[0+0]+[0+0.1]+[1+0.1]} \\ \\ T_2 &= \frac{0+0.1}{[0+0]+[0+0.1]+[1+0.1]} \\ \\ T_3 &= \frac{1+0.1}{[0+0]+[0+0.1]+[1+0.1]} \end{cases}$$

$$\mathbf{T}([0,0,1]) = \begin{cases} T_1 &= 0 \\ \\ T_2 &= 0.083 \\ \\ T_3 &= 0.917 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$(0, 0.083, 0.917) = \mathbf{T}([0, 0, 1])$$

Veamos que es una función que tiene tres entradas y mapea hacia tres salidas. Dada la normalización entonces mapea de $[0, 1]^3$ a un conjunto dentro de $[0, 1]^3$.



Veamos que nuestro cálculo es el mismo que el del historial:

```
[13]: array([[0.        , 0.        , 1.        ],
             [0.        , 0.08333333, 0.91666667]])
```

Precios de equilibrio:

```
[14]: array([0.12362622, 0.20172974, 0.67464404])
```

Gráfica del espacio de precios

Podemos representar el espacio de precios en una economía con tres bienes como un conjunto de puntos en tres dimensiones, donde cada coordenada indica el precio relativo de un bien. La función de ajuste de precios (que indica cómo cambian los precios en función del exceso de demanda) también tiene tres componentes (como vimos antes)..

Para representar la función gráficamente necesitaríamos seis dimensiones: tres para el punto de partida (los precios actuales) y tres para la imagen (los precios ajustados). Como esto no es posible de visualizar, una alternativa es **aplanar la representación** utilizando un **campo vectorial**: en lugar de graficar directamente la función, mostramos en cada punto del espacio de precios un vector que indica la dirección y magnitud del ajuste.

De esta forma cada vector parte del punto de precio y se corre:

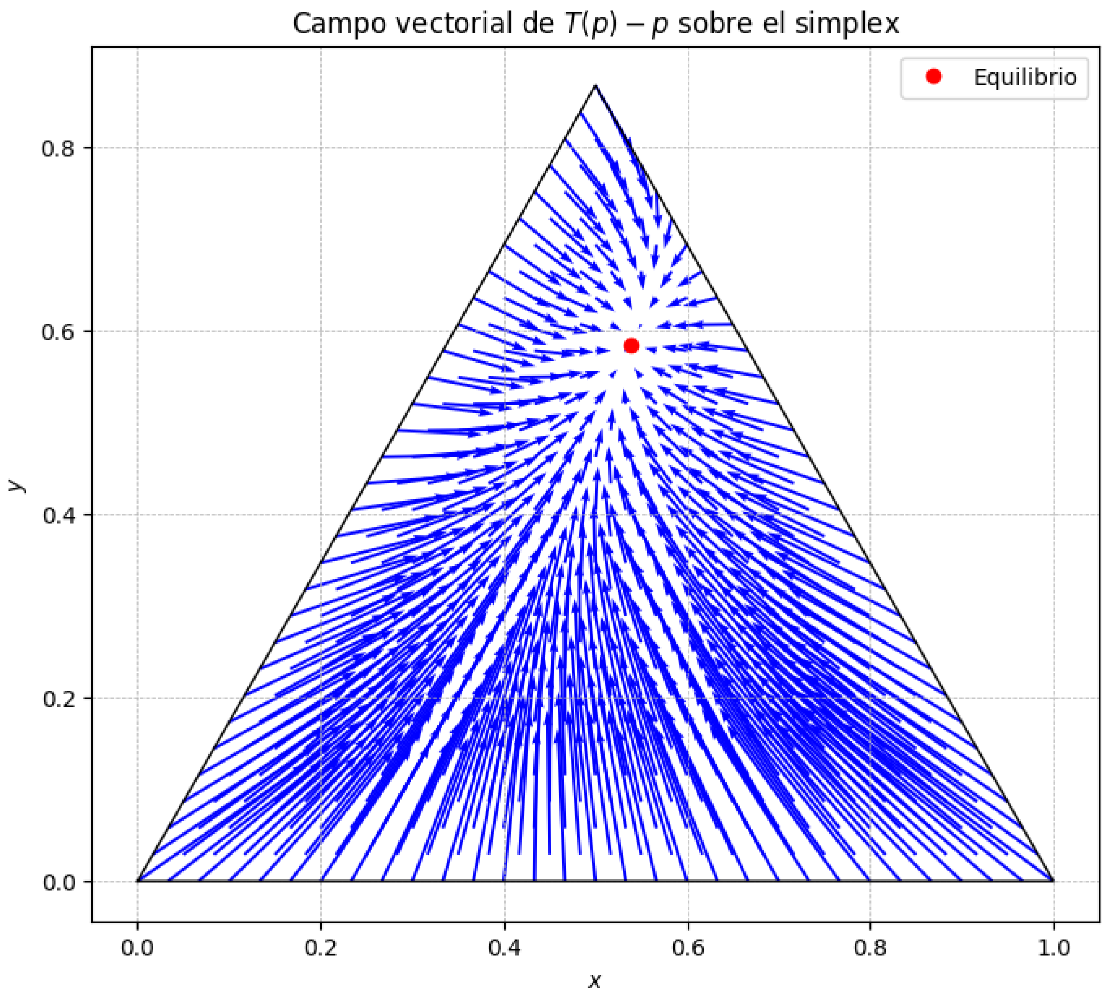
$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$$

que podría considerarse como "la variación en el tiempo" -> relacionarlo con la "derivada" en el tiempo. Ver apéndice A.

Este campo muestra la dinámica de los precios. Es decir, los precios se mueven en la dirección del vector hasta estabilizarse, es decir, hasta alcanzar un punto de equilibrio donde ya no haya exceso de demanda y los vectores se anulen.

No obstante, es posible reducir la dimensión de la gráfica. Aunque inicialmente contamos con tres dimensiones, la restricción de que la suma de los precios sea igual a uno implica que existe un **grado de libertad** menos: un precio queda determinado por los otros dos. Por lo tanto, una manera de representar estos precios es a través de un **simplex**, que captura esta dependencia y permite visualizar el conjunto en un espacio de dimensión reducida.

Geométricamente, el simplex corresponde a la envoltura convexa (*convex hull*) de un conjunto de puntos extremos, es decir, la figura convexa más pequeña que contiene todos los puntos del conjunto. Esta propiedad es fundamental para el análisis y visualización de vectores cuyas componentes suman uno.

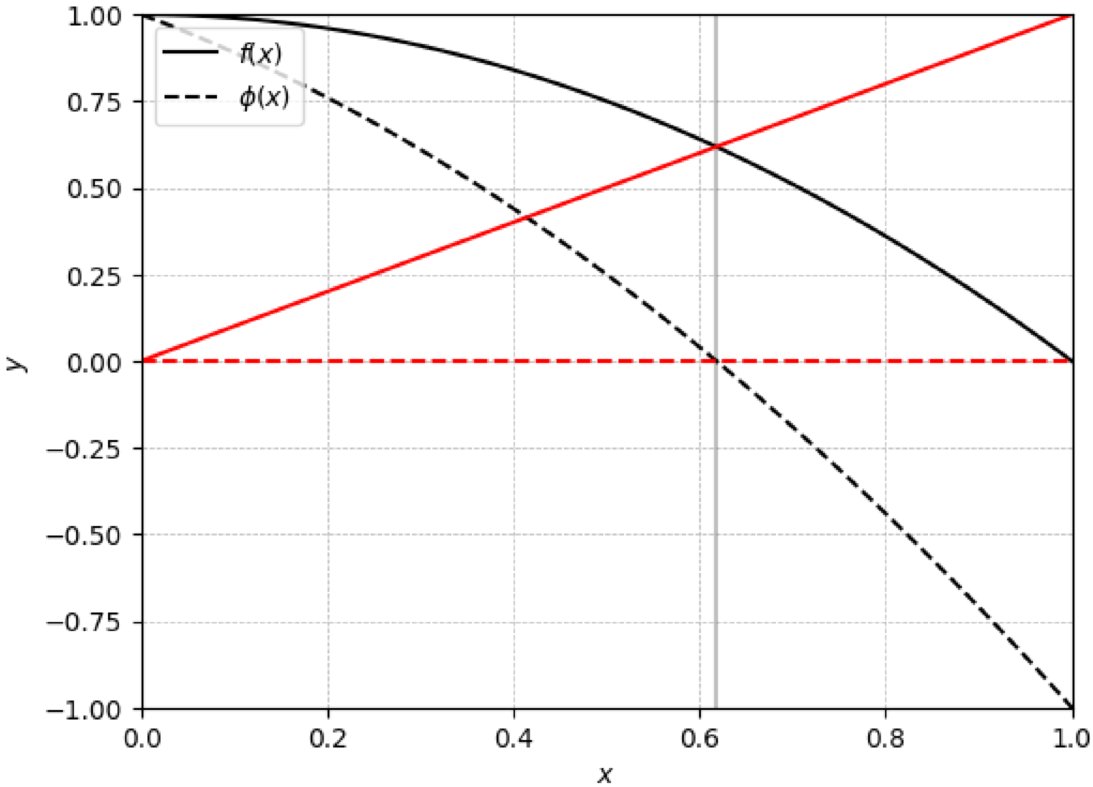


Una demostración más formal

Dado que tenemos una función continua en un espacio compacto podemos aplicar el *Teorema de Weierstrass*, entonces la función definida para el espacio A tiene un máximo y un mínimo.

Sea la función:

$$\Phi(x) = f(x) - x$$



Sean los puntos extremos del conjunto a y b respectivamente, tal que $B \subset [a,b]$, por corolario debe suceder que $f[[a,b]]$ también es conjunto cerrado, que tiene un máximo y un mínimo que dijimos que va a estar $[a,b]$.

Por teorema del valor medio tengo que $\Phi(a) \leq 0$ y $\Phi(b) \geq 0$ (si tengo al revés puedo simplemente invertir la función, y llegar al mismo resultado), entonces puedo establecer una secuencia para a_n y a_b de forma tal que:

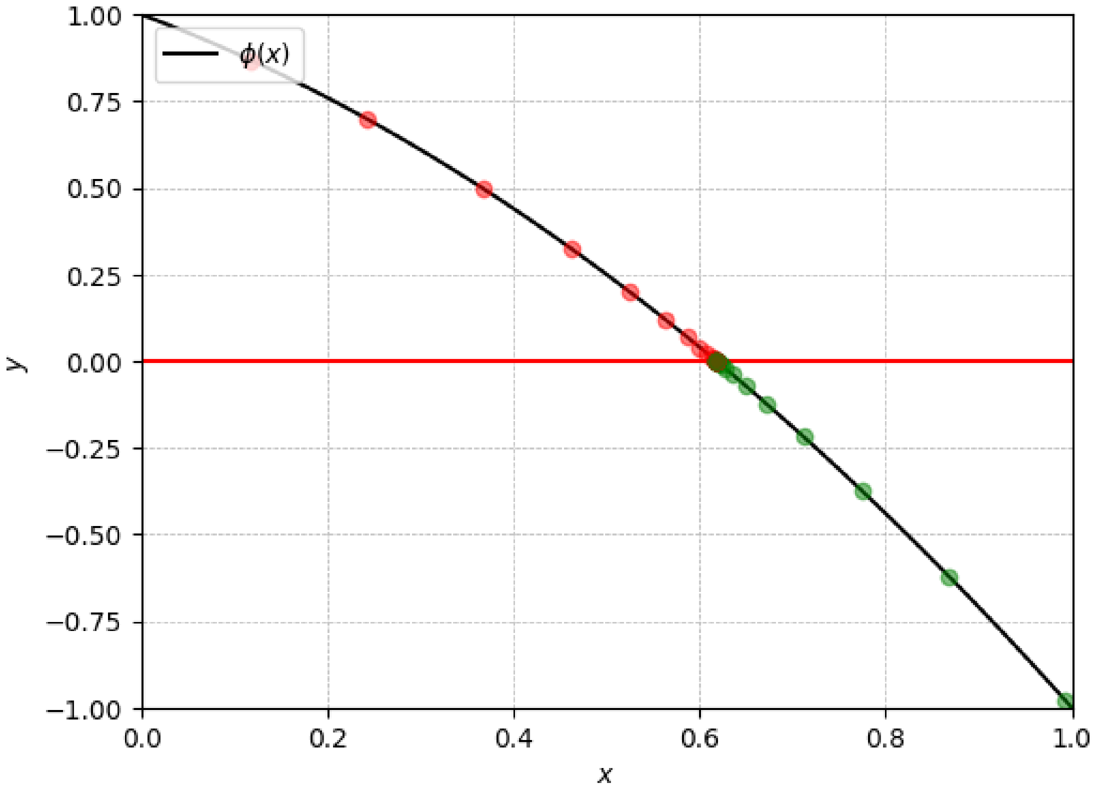
$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

De forma tal que se cumpla que $\Phi(a_n) \leq 0$ para todo $a \in \{a_n\}_{n\in N}$ y $\Phi(b_n) \geq 0$ para todo $b \in \{b\}_{n\in N}$. De forma tal que:

$$\Phi(\tilde{x}) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = 0$$

Donde $\lim_{n\to\infty} a_n \to \tilde{x}$. Por construcción de Φ debe suceder entonces que:

$$F(\tilde{x}) = \tilde{x}$$



Solución a partir de iteración

La idea central es transformar la ecuación $x = f(x)$ en una forma donde un lado de la ecuación se use para generar una secuencia que, con suerte, converja a la solución. La forma más común de método iterativo es la iteración de punto fijo:

$$x_n = g(x_{n-1})$$

El objetivo de un método iterativo es que la secuencia generada se acerque cada vez más a la solución real. Decimos que la iteración converge si la secuencia $\{x_n\}$ se aproxima a un valor límite a medida que n tiende a infinito:

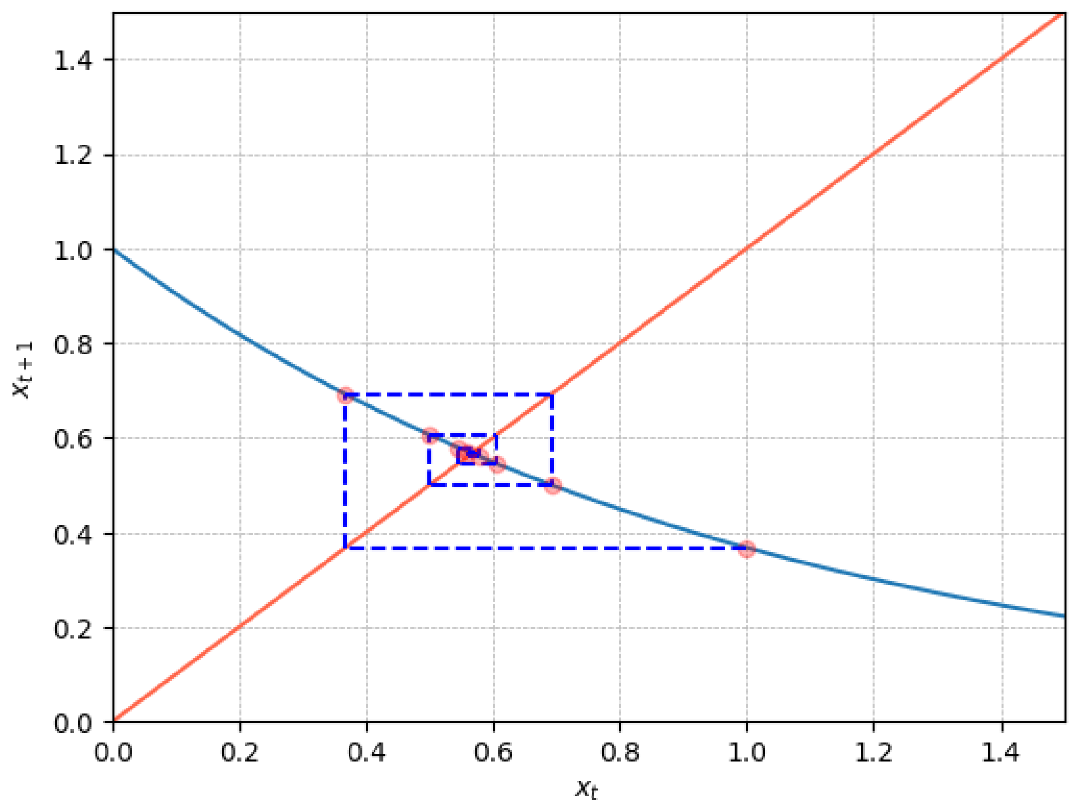
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

De esta forma tenemos entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) \implies \alpha = g(\alpha)$$

Por lo tanto, tenemos un punto fijo por definición.

(Hay ciertas funciones que pueden tener un punto fijo y que no exista método iterativo el cual converja, para ello ver ecuaciones en diferencia)



Axioma de continuidad en las preferencias y la discontinuidad de demandas

Uno de los axiomas fundamentales de la teoría del consumidor es la continuidad de las preferencias. Este axioma implica que, si un consumidor prefiere un conjunto de consumo x a otro y, entonces también prefiere a x todos los puntos suficientemente cercanos a y. Formalmente, garantiza que el conjunto de consumo preferido (o indiferente) a un punto dado es cerrado.

El axioma de continuidad en las preferencias nos permite representar las preferencias mediante una **función de utilidad continua**.

De esta forma, cuando se elimina el supuesto de continuidad, incluso si se mantienen otros axiomas (como completitud y transitividad), puede fallar la existencia de una función de utilidad continua -> con ello también pueden aparecer discontinuidades en las funciones de demanda.

Veamos, que para poder construir nuestra función de "ajuste de precios" supusimos que las demandas de exceso eran continuas, y por lo tanto, la función de ajuste también era continua. Lo que nos permite asegurar que se cumple el *Teorema de Brouwer*.

Por lo tanto, si las funciones de demanda individual (o de demanda excedente) son discontinuas, puede fallar la existencia de un precio que iguale oferta y demanda en todos los mercados simultáneamente.

Preferencias Lexicográficas El orden lexicográfico hace referencia al modo en que las palabras se organizan alfabéticamente en un diccionario: se comparan primero por la primera letra, luego por la segunda, y así sucesivamente hasta encontrar una diferencia que permita establecer un orden. Esta lógica secuencial e inflexible es la que inspira el concepto de preferencias lexicográficas en teoría del consumidor.

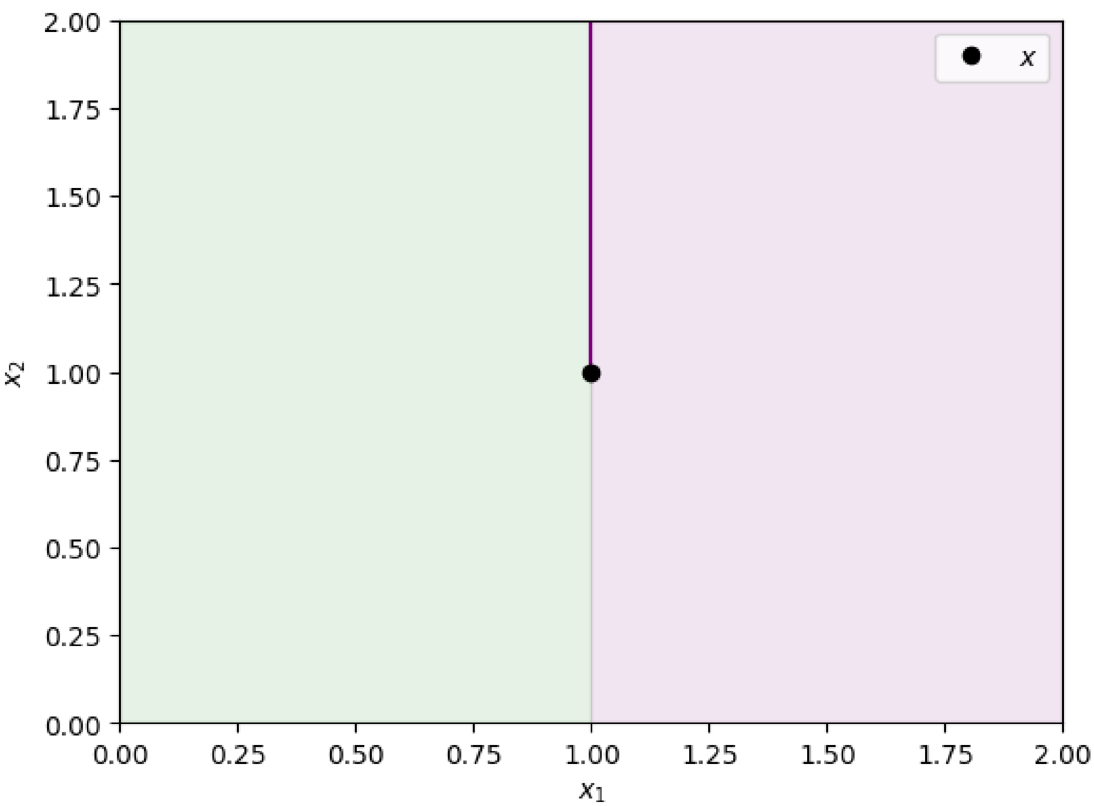
En este contexto, establecer un orden lexicográfico entre bienes implica suponer que existen bienes estrictamente prioritarios sobre otros, de modo que una canasta que contenga una mayor cantidad del bien más prioritario será siempre estrictamente preferida, sin importar cuánto del bien restante contenga la otra canasta. Solo en caso de empate exacto en el bien prioritario se procede a comparar el siguiente.

Más formalmente: las preferencias lexicográficas constituyen una relación de preferencia que prioriza jerárquicamente los bienes, de forma que las cantidades del bien de menor rango solo se consideran relevantes cuando las cantidades de los bienes superiores son iguales. Para el caso de dos bienes y un espacio de consumo $\mathbb{R}^2_+$, definimos que el consumidor prefiere la canasta de la siguiente forma:

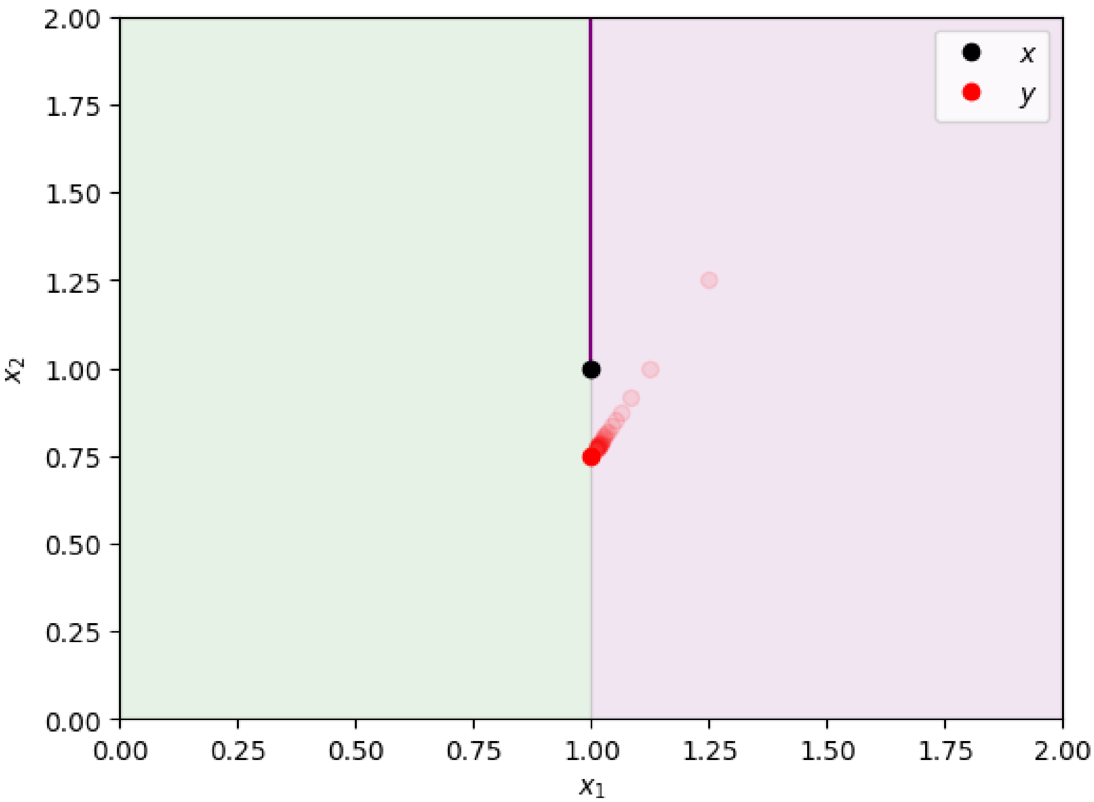
$$x \succ y \implies \begin{cases} (x_1 > y_1) \\ (x_1 = y_1) \wedge (x_2 > y_2) \end{cases}$$

Es claro que puede extenderse naturalmente a N bienes, ordenados de forma jerárquica, tal que x_i es estrictamente prioritario a x_{i+1} para todo $i = 1, \dots, N-1$.

Intento de graficar curvas de indiferencia



Veamos, a partir de nuestras definiciones de conjuntos abiertos y cerrados, que los conjuntos de "al menos tan buena como" y "al menos tan mala como" dejan de ser cerrados. Esto ocurre debido a la no continuidad de las preferencias, ya que una sucesión de puntos (x_1^n, x_2^n) que converge a (y_1, y_2) puede ser al menos tan buena como x para todo n, pero el límite y deja de ser al menos tan buena como x



Veamos que sucede en equilibrio general más sencillo (2x2) cuando tenemos discontinuidad.

Ejemplo: Preferencias Discontinuas y No Unicidad del Equilibrio Consideremos una economía de intercambio puro con dos bienes y dos agentes, A y B, cuyas preferencias son del tipo **sustitutos perfectos** pero con una **regla de desempate discontinua**:

- Ambos agentes valoran las canastas según la suma $x_1 + x_2$.
- Sin embargo, ante dos canastas con la misma suma, **el agente A prefiere la que tenga más del bien 1**, mientras que **el agente B prefiere la que tenga más del bien 2**.

Formalmente, sus preferencias no son continuas: si nos acercamos a una canasta que tiene más del bien que el agente prefiere en el caso de empate, la relación de preferencia "salta" en ese punto. Esta discontinuidad **viola el axioma de continuidad**, y en consecuencia, **no existe una función de utilidad continua que represente esas preferencias**.

Demostración no continuidad preferencias

Dentro de una curva de indiferencia (es decir, para canastas donde $x_1 + x_2$ es constante), el agente A prefiere estrictamente la canasta con mayor cantidad del bien 1.

Según la definición de continuidad de las preferencias, si una sucesión de canastas x^n converge a x, y $x^n \succeq y$ para todo n, entonces debe cumplirse que $x \succeq y$.

Construimos un contraejemplo para esta condición:

Sea $x^n = (x_1 + \frac{1}{n}, x_2 + 1)$ y $y = (x_1 + 1, x_2)$. Entonces para todo n:

$$x_1^n + x_2^n = x_1 + \frac{1}{n} + x_2 + 1 > x_1 + 1 + x_2 = y_1 + y_2$$

Por lo tanto, $x^n \succ_A y$ para todo n.

Pero cuando $n \to \infty$, $x^n \to x = (x_1, x_2 + 1)$. Entonces:

$$x_1 + x_2 + 2 = y_1 + y_2$$

Así que ambas canastas se encuentran en la misma curva de indiferencia. Bajo las preferencias del agente A, dado que las sumas son iguales, la canasta con mayor cantidad del bien 1 es estrictamente preferida. Pero $x_1 < x_1 + 1$, por lo tanto:

$$x \prec_A y$$

Esto contradice el requisito de que $x \succeq_A y$, y por lo tanto, las preferencias no son continuas.

Obtención curvas de demanda

$\max_{x_1^A, x_2^A} x_1 + x_2$

s.a. $x_1 + px_2 = w_1^A + pw_2^A$

CPO

$1 - \lambda \leq 0$

$1 - p\lambda \leq 0$

(Condiciones de Kuhn-Tucker)

Las condiciones de Kuhn-Tucker implican que A elegirá el bien más barato, resolviendo empates a favor del bien 1. Por lo tanto, la demanda neta de A depende del precio p:

$$ND^A = \begin{cases} \left(pw_2^A, -w_2^A\right) & \text{si } p > 1 \\ \left(w_2^A, -w_2^A\right) & \text{si } p = 1 \\ \left(-w_1^A, \frac{w_1^A}{p}\right) & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

De forma análoga, el agente B prefiere estrictamente más del bien 2 cuando $x_1 + x_2$ es igual, por lo que B siempre resolverá empates a favor del bien 2:

$$ND^B = \begin{cases} (pw_2^B, -w_2^B) & \text{si } p > 1 \\ (-w_1^B, w_1^B) & \text{si } p = 1 \\ \left(-w_1^B, \frac{w_1^B}{p}\right) & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

Para determinar la existencia de un equilibrio walrasiano (WE), debe cumplirse el equilibrio de mercado:

$ND_1^A + ND_1^B = 0 \implies ND_2^A + ND_2^B = 0$

La forma que exista equilibrio entonces sucede cuando:

(Normalizamos $p_2 = 1$)

- $p_1 = 1$, y únicamente bajo la condición:

$w_2^A - w_1^B = 0 \implies w_2^A = w_1^B$

Esta condición implica que las cantidades que cada agente está dispuesto a intercambiar deben ser iguales: el agente A debe querer vender exactamente la cantidad de bien 2 que el agente B desea comprar, y viceversa para el bien 1. Dado que el agente A solo está dispuesto a vender su dotación de bien 2, y que el agente B solo puede adquirir bien 1 usando su dotación de bien 1, el equilibrio requiere que la cantidad que A desea vender sea igual a la cantidad que B puede ofrecer a cambio. Por lo tanto, una condición necesaria para el equilibrio es que $w_2^A = w_1^B$.

Las dotaciones w_1^A y w_2^B no afectan la viabilidad del intercambio porque, en equilibrio, estas cantidades no se intercambian: cada agente conserva su dotación del bien que no desea intercambiar.

- $p_1 = (1, \infty)$, y únicamente bajo la condición.

$w^A = (w_1^A, 0)$ y $w^B = (w_1^B, 0)$

- $p_1 = (-\infty, 1)$, y únicamente bajo la condición.

$w^A = (0, w_2^A)$ y $w^B = (0, w_2^B)$

Donde en estos dos últimos casos extremos ambos agentes consumen únicamente su dotación.

Este ejemplo ilustra cómo la discontinuidad en las preferencias puede inducir discontinuidades en las funciones de demanda y dar lugar a múltiples equilibrios, incluyendo situaciones de no intercambio (cuando las dotaciones están perfectamente alineadas con las preferencias) o incluso la **no existencia de equilibrio**.

Por ejemplo, si $w_2^A > w_1^B > 0$, el agente A desea vender una cantidad de bien 2 superior a la que el agente B está dispuesto a adquirir con su dotación de bien 1, haciendo imposible el equilibrio de mercado. Esta situación revela cómo, en ausencia de continuidad en las preferencias, la existencia de un equilibrio walrasiano ya no está garantizada, aun en economías simples de intercambio puro.

(Graficas interactivas disponibles en ipynb)

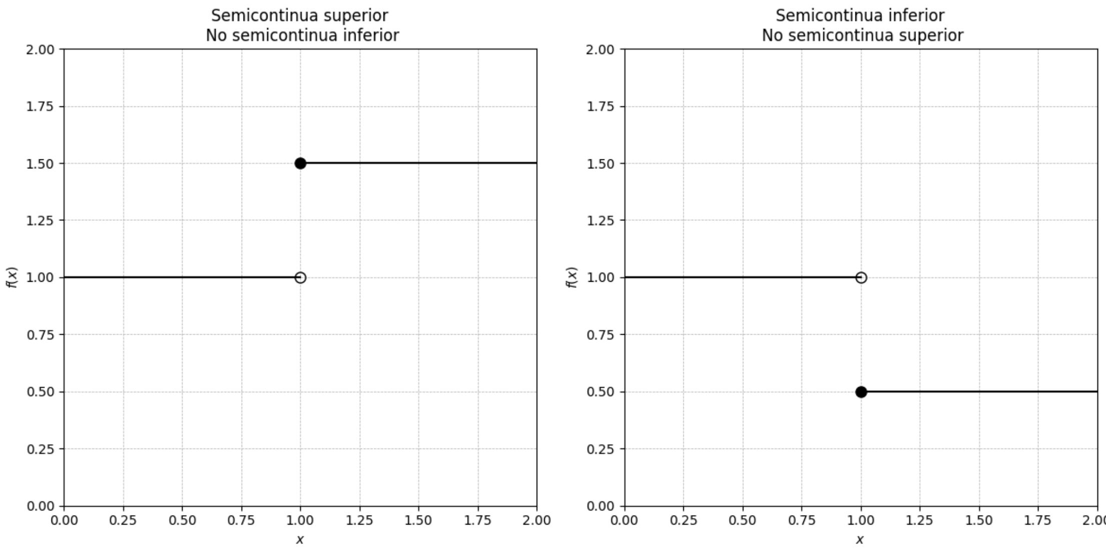
3. Más definiciones de Continuidad

Definición M.L.3 Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superior (USC) (semicontinua inferior (LSC)) en un punto $x \in X$ si, para cualquier secuencia $x^m \in X$ que tenga como límite x, el límite superior (inferior) de los valores de la función es menor (mayor) o igual al valor de la función en el punto x:

$$\lim_{x_m \to x} \sup f(x^m) \leq f(x)$$

$$\left(\lim_{x_m \to x} \inf f(x^m) \geq f(x) \right)$$

Es decir, "no puedo pegar un salto hacia abajo" cuando tengo usc, mientras que no puede ser hacia arriba cuando tengo lsc. Es claro que una función usc y lsc es continua.

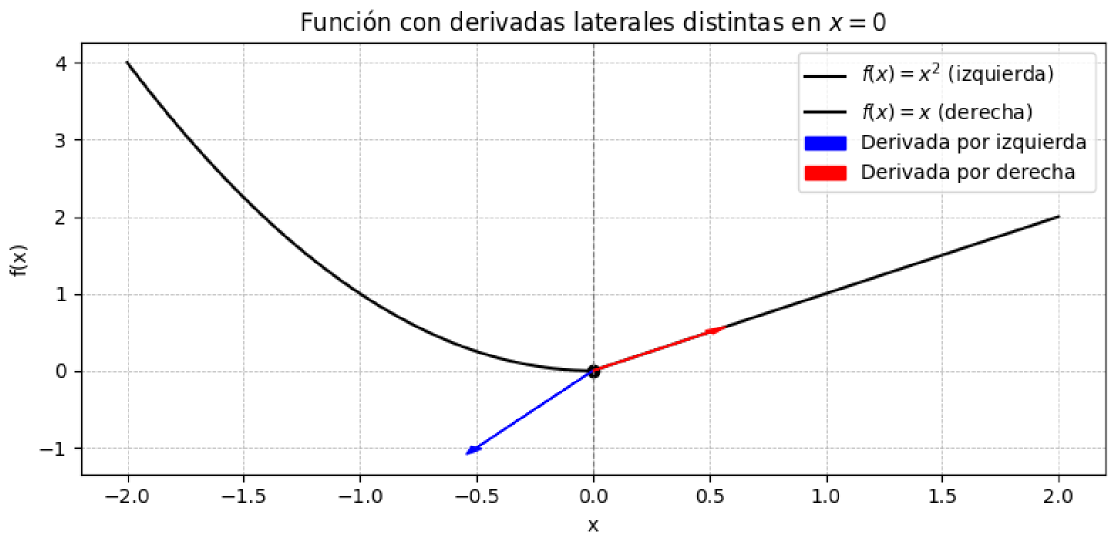


Definición M.L.4 Una función $f : X \to \mathbb{R}$ tiene derivada por derecha (izquierda) en un punto $x \in X$, denotada como $f'_+(x)$, si para cualquier secuencia $x_m \in X$ que se acerque a x solo desde valores mayores (menores) a x, es decir, $x^m \to x, x^m > x$, la secuencia de los cocientes incrementales se acerca a un valor específico:

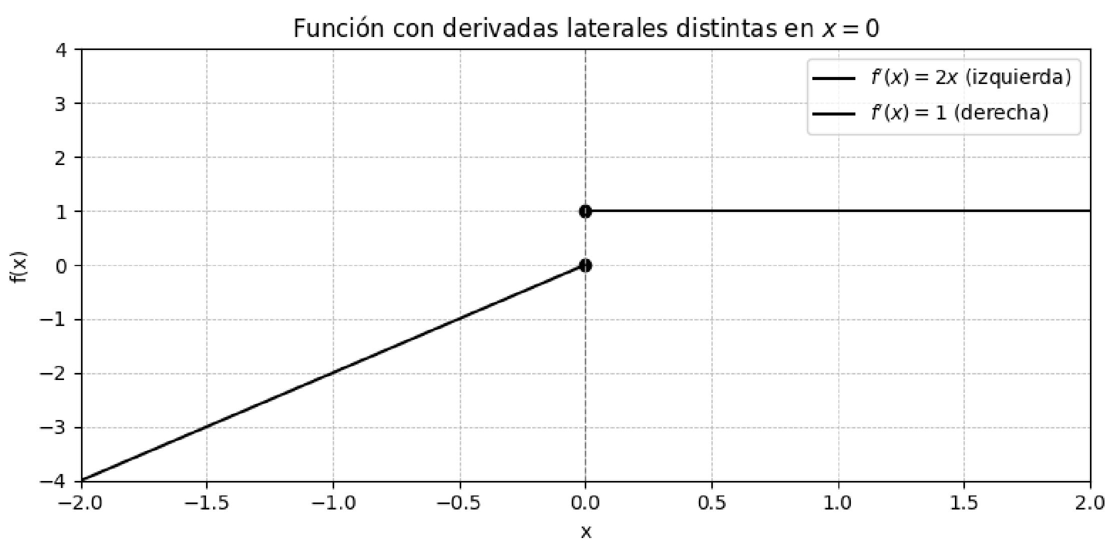
$$f'_+(x) = \lim_{m \to \infty, x^m > x} \frac{f(x^m) - f(x)}{x^m - x}$$

$$\left(f'_-(x) = \lim_{m \to \infty, x^m < x} \frac{f(x^m) - f(x)}{x^m - x} \right)$$

Si una función no tiene la misma derivada por derecha que por izquierda entonces presenta un "pico".



Veamos que esto implica que la derivada de la función es **no continua**

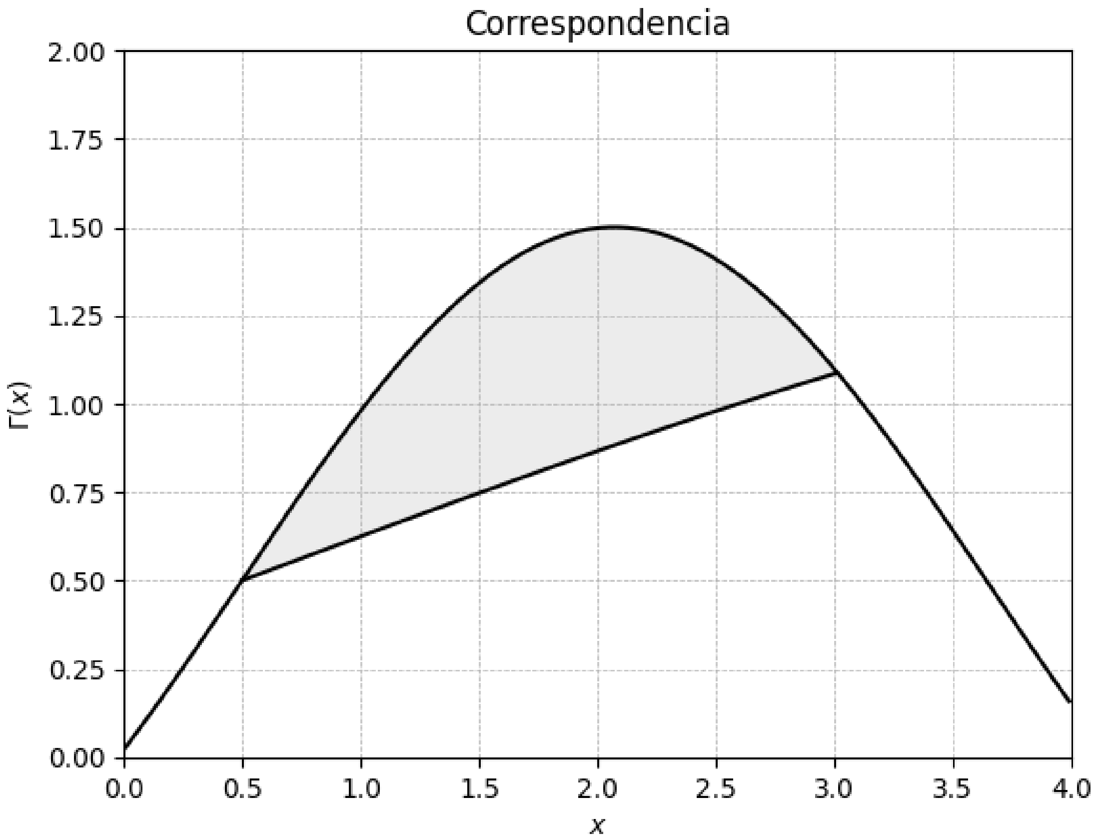


4. Correspondencia

M.H Correspondencia

Definición M.H.1: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, una *correspondencia* $\Gamma : A \to \mathbb{R}^K$ es una regla que asigna a un conjunto $\Gamma(x) \subset \mathbb{R}^K$ para cada $x \in A$.

Notemos que cuando, para cada $x \in A$, $\Gamma(x)$ es compuesto por precisamente un elemento, entonces $\Gamma(\cdot)$ puede ser visto como una función en el sentido usual. Notemos también que la definición permite para $\Gamma(x) = \emptyset$, pero típicamente consideramos solo correspondencias con $\Gamma(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in A$. Finalmente, si para algún conjunto $Y \subset \mathbb{R}^K$ tenemos $\Gamma(x) \subset Y$ ara cada $x \in A$, indicando con $\Gamma : A \to Y$.



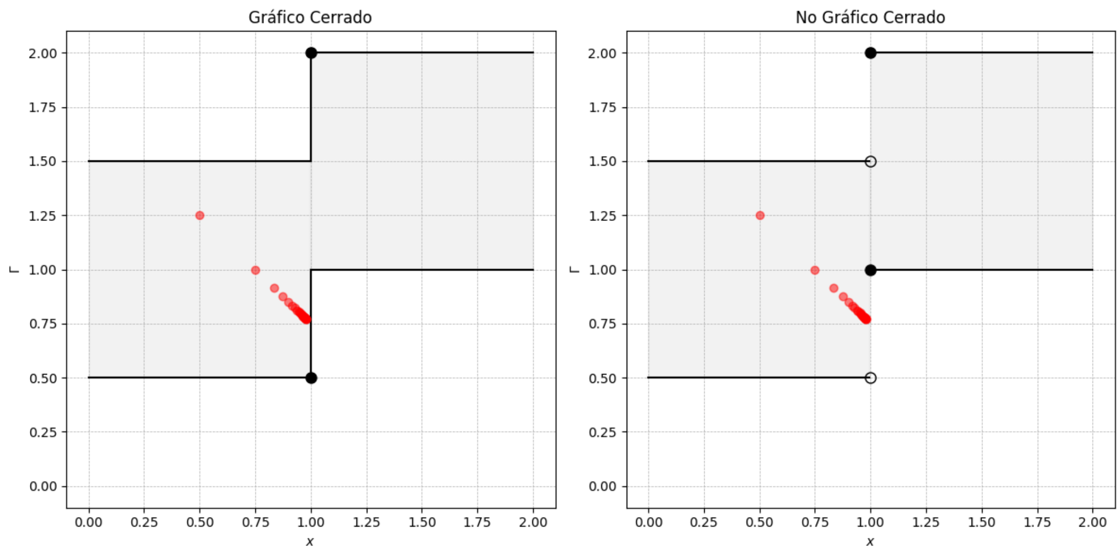
Cómo consideramos continuidad en la noción de correspondencias?

Definición M.H.2: Dada $A \subset \mathbb{R}^N$ y un conjunto cerrado $Y \subset \mathbb{R}^K$, la correspondencia $\Gamma : A \to Y$ tiene *gráfico cerrado* si para dos secuencias $x^m \to x \in A$ y $y^m \to y$ con $x^m \in A$ y $y^m \in \Gamma(x^m)$ para cada m, tenemos $y \in \Gamma(x)$.

Notemos que el concepto de gráfico cerrado es simplemente nuestra noción de conjunto cerrado aplicado al conjunto $\{(x, y) \in A \times Y : y \in \Gamma(x)\}$.

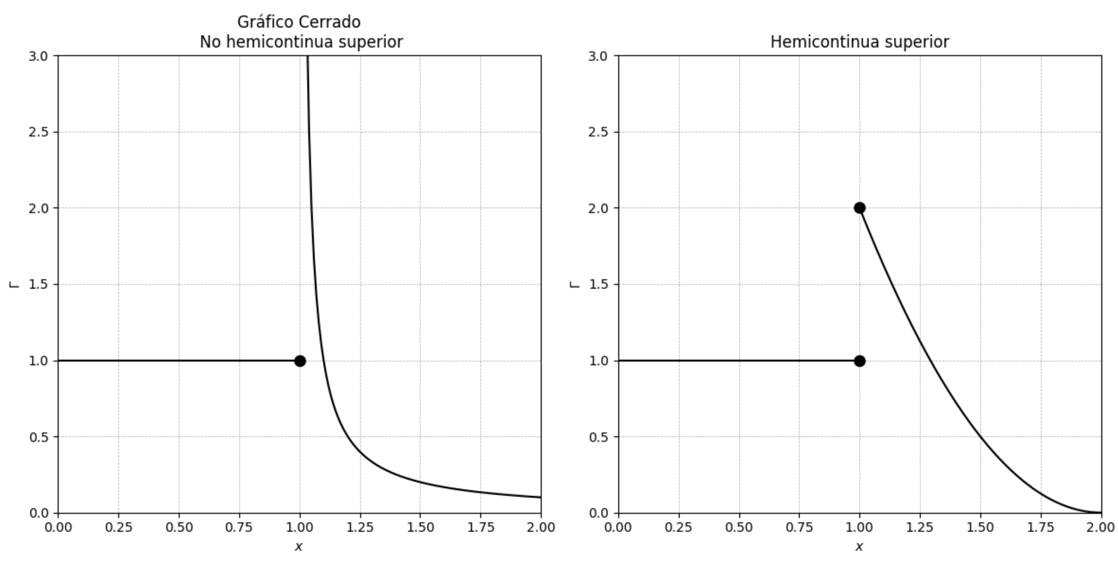
Por lo tanto, cuando suponemos que tenemos gráfico cerrado en una correspondencia es similar a decir, que no pueden haber fronteras no contenidas en la correspondencia.

Mas sencillo observarlo con un ejemplo que no se cumpla:



Definición M.H.3 Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ y el conjunto cerrado $Y \subset \mathbb{R}^K$, la correspondencia $\Gamma : A \to Y$ es *hemicontinuo superior* (uhc) si tiene gráfico cerrado y su imagen son conjuntos limitados, esto es, para cada conjunto compacto $B \subset A$ el conjunto $\Gamma(B) = \{y \in Y : y \in \Gamma(x) \text{ para algún } x \in B\}$ es limitado.

Si vemos nuestra gráfica de arriba tenemos que la correspondencia es hemicontinua superior. Pero entonces que diferencia hay entre "gráfico cerrado" y hemicontinua? Es que cuando hablamos de hemicontinua hemos establecido que la imagen es un conjunto cerrado también.

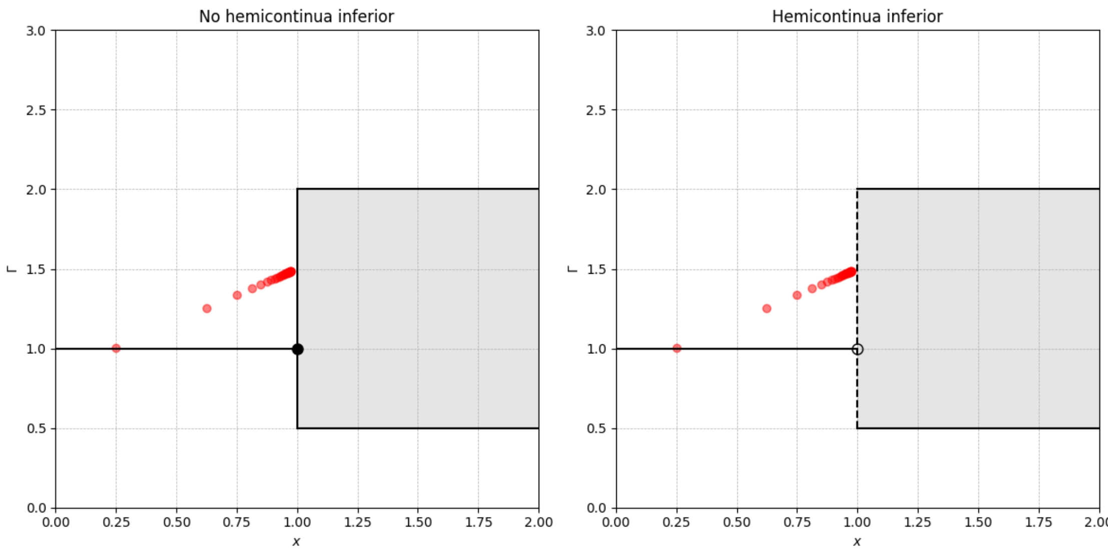


Teorema M.H.1: Dada $A \subset \mathbb{R}^N$ y el conjunto cerrado $Y \subset \mathbb{R}^K$, supongamos que $\Gamma : A \to Y$ es una correspondencia de un único valor (es decir, que es una función). Entonces $\Gamma(\cdot)$ es una correspondencia hemicontinua superior si y solo si es una función continua.

Si la función es continua, entonces tiene gráfico cerrado y, por lo tanto, es hemicontinua superior.

Si se trata de una función hemicontinua entonces cualquier secuencia $x^m \to x \in A$ con $x^m \in A$ para todo m también forma parte de la secuencia. De esta forma si dibujara una función discontinua implicaría que hay un punto de la correspondencia donde "de la nada" desaparece, lo que contradiría lo que supusimos de hemicontinuidad.

Definición M.H.4: Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ y el conjunto compacto $Y \subset \mathbb{R}^K$, la correspondencia $\Gamma : A \to Y$ es *hemicontinua inferior* (lhc) si para cada secuencia $x^m \to x \in A$ con $x^m \in A$ para todo m, y para cada $y \in \Gamma(x)$, podemos encontrar una secuencia $y^m \in y$ y un entero M tal que $y^m \in \Gamma(x^m)$ para $m > M$.



Veamos que a diferencia de uhc, que una correspondencia sea lhc no necesita que sea *gráfico cerrado*.

La hemicontinuidad inferior a diferencia de la hemicontinuidad superior, impide que haya una "**explosión**" de puntos en el conjunto imagen. Es decir, garantiza que no puede suceder que, de la nada, nuevos puntos comiencen a formar parte del conjunto imagen cuando nos acercamos a un punto específico. Si un resultado es posible en el límite, debe haber resultados "cercanos" en los conjuntos de imágenes de puntos cercanos.

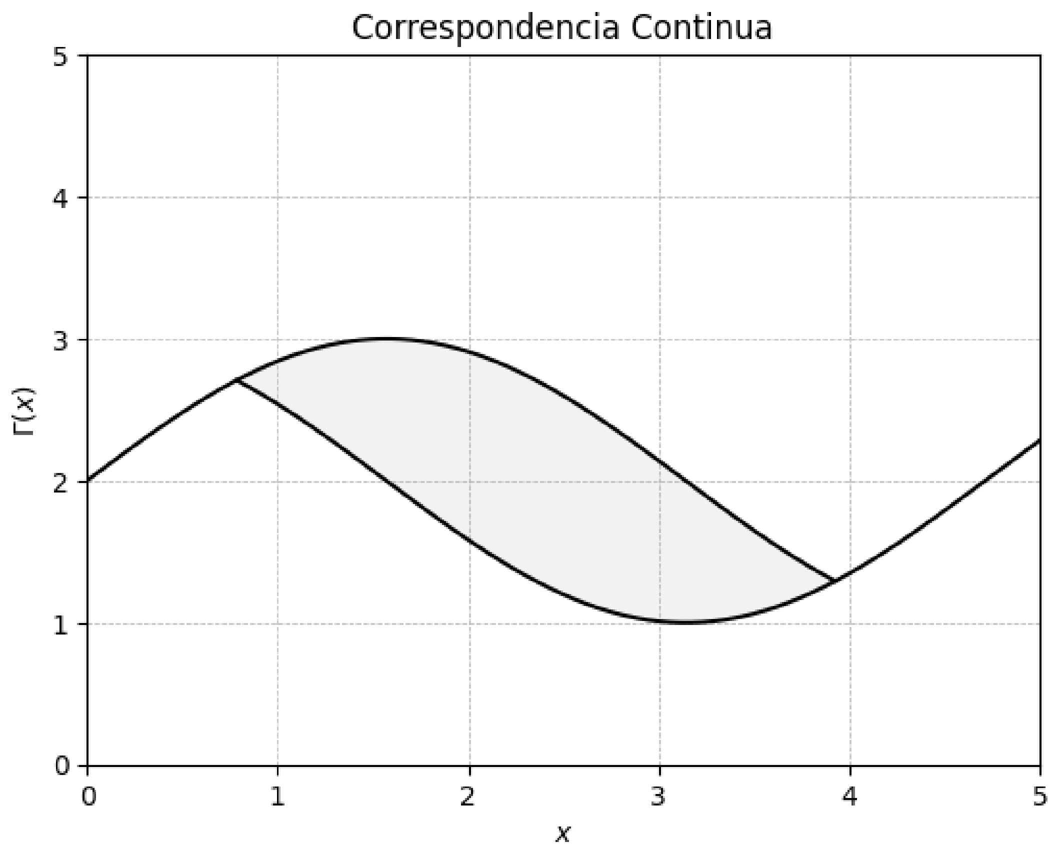
Si bien uno podría decir que el gráfico derecho tampoco muestra muy bien esto de que el punto también pertenece a la gráfica, puede pensarse en términos de conjuntos abiertos: al acercarse suficientemente a un punto, debe existir algún índice $m > M$ a partir del cual se verifique la inclusión exigida por la definición.

Teorema M.H.1.b: Dada $A \subset \mathbb{R}^N$ y el conjunto cerrado $Y \subset \mathbb{R}^K$, supongamos que $\Gamma : A \to Y$ es una correspondencia de un único valor (es decir, que es una función). Entonces $\Gamma(\cdot)$ es una correspondencia hemicontinua inferior si y solo si es una función continua.

Si se trata de una función continua, entonces ningún valor "aparece" de la nada, lo que implica que entonces es hemicontinua inferior.

Por otro lado, si es hemicontinua inferior si llegara a "quebrarse" tal que no fuera un función continua implicaría necesariamente que hay un punto que de la nada aparece y "salta" lo cual negaría que se tratara de hemicontinua inferior y por lo tanto, por contradicción queda demostrado.

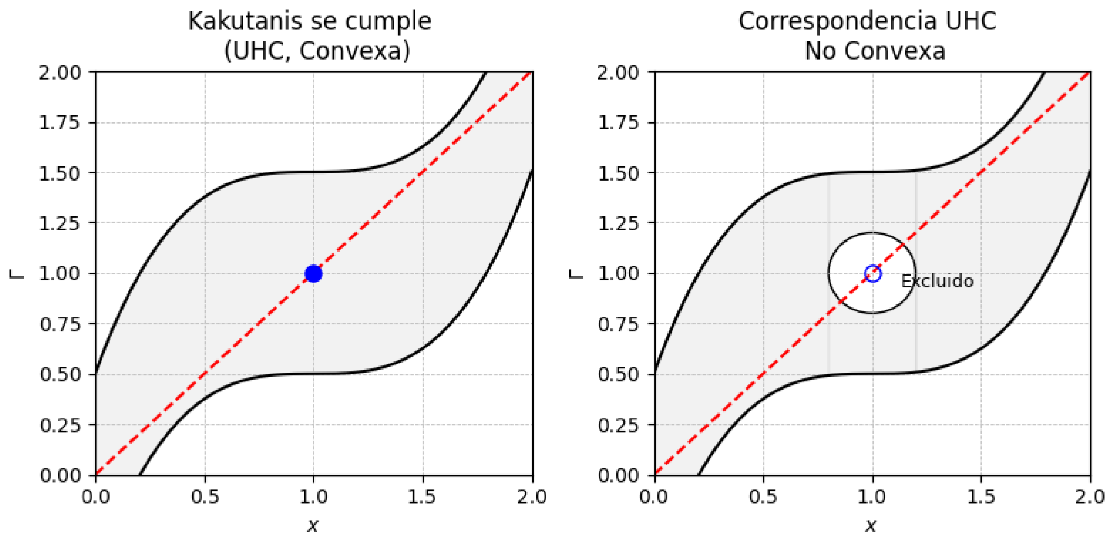
Definición M.H.5: Dada una correspondencia que cumple ser hemicontinua superior y hemicontinua inferior, entonces decimos que la correspondencia es *continua.*



5. Teorema de Punto Fijo II

Teorema M.I.2 (Teorema de Punto Fijo de Kakutanis) Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo, y que $\Gamma : A \to A$ es una correspondencia hemicontinua superior de A hacia sí misma con la propiedad de que el conjunto $f(x) \subset A$ es no vacío y convexo para cada $x \in A$. Entonces $\Gamma(\cdot)$ tiene un punto fijo; esto es, hay un $x \in A$, tal que $x \in \Gamma(x)$.

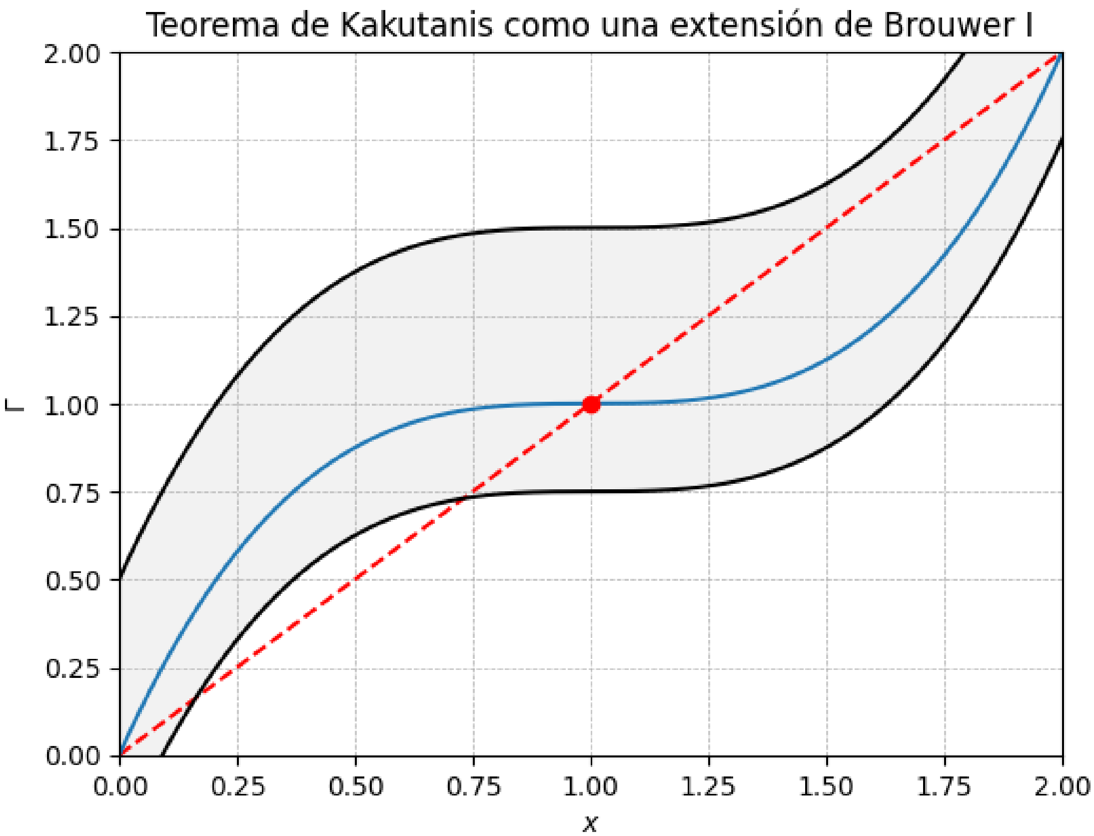
Gráficamente no cumplir con alguno de los supuestos implica:



La violación de los supuestos en cuanto al conjunto A producen los mismos problemas que en el Brouwer. La violación de UHC podría llegar a producir el mismo problema que el presentado en Brouwer al no tener continuidad.

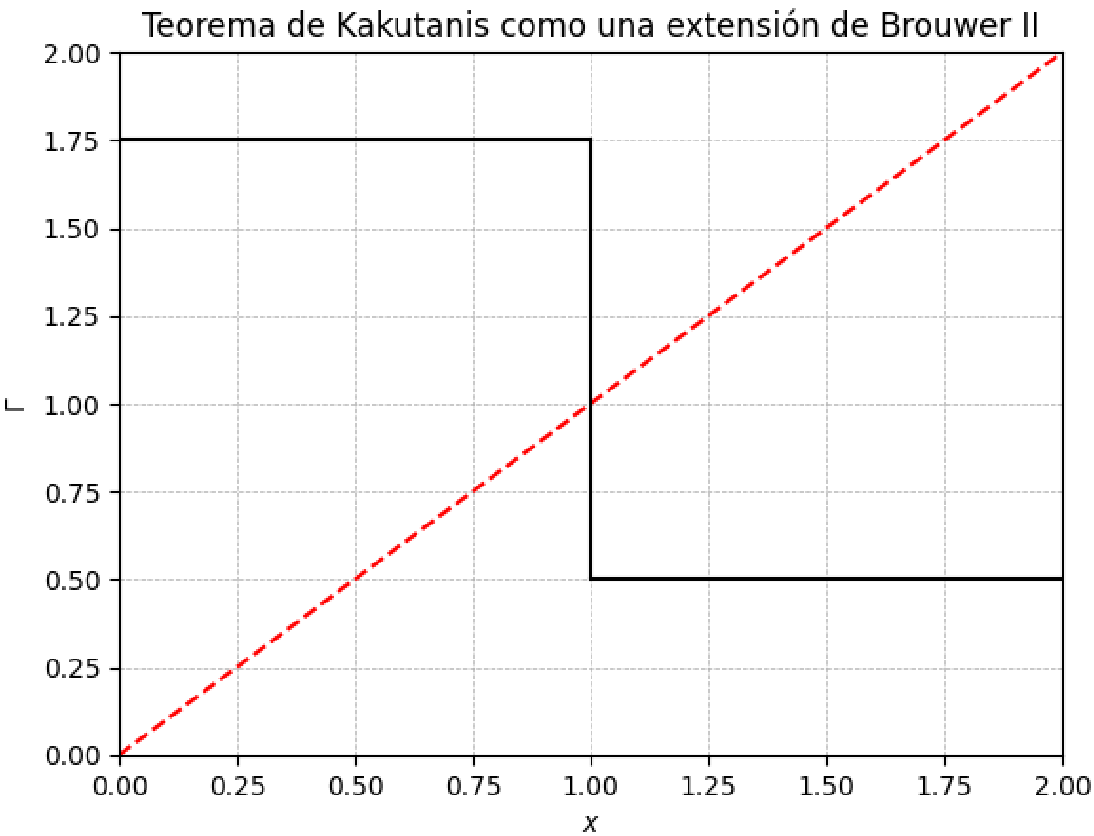
Observemos, que el teorema de Kakutanis es una simple extensión del teorema de Brouwer:

Si tenemos una correspondencia como la anterior, donde parece una función con "líneas gruesas", podríamos dibujar una función continua que quedara contenida en la correspondencia que nos permitiría aplicar el teorema de Brouwer y, por lo tanto, confirmar la existencia de (al menos) un punto fijo.

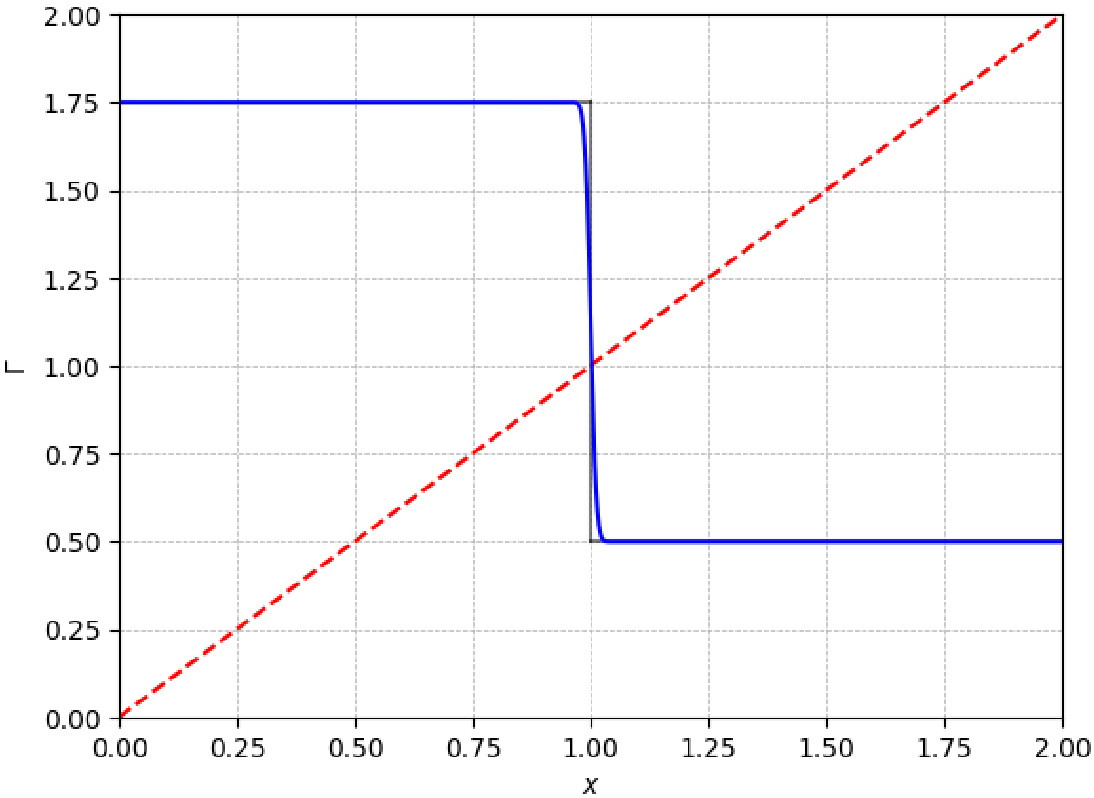


No obstante, qué sucede cuando la correspondencia se "degenera" y no podemos graficar una función.

Visualicemos con la siguiente simple gráfica.



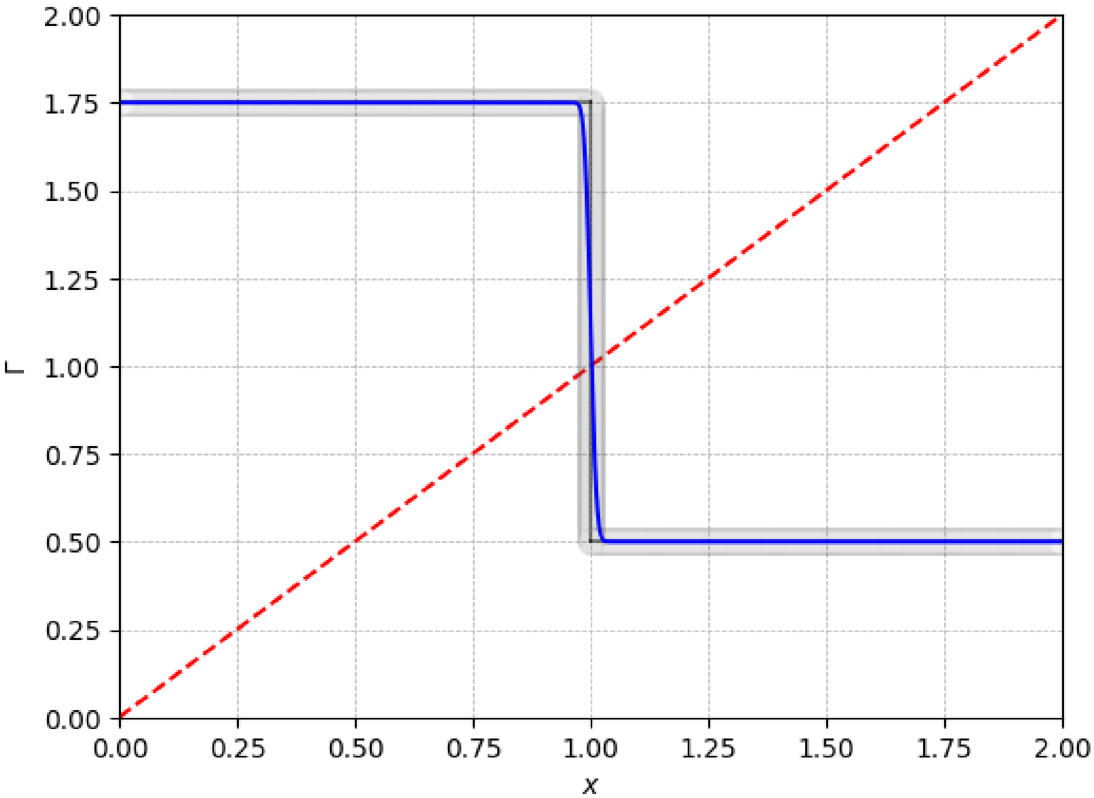
Si intentamos dibujar una función continua para poder aplicar el teorema de Brouwer nos queda:



Observemos que claramente nos queda una función que se acerca, no obstante:

$$\neg\forall x \in A \qquad f(x) \in \Gamma(x)$$

Por lo tanto, "aumentamos" a la correspondencia en un ϵ para cada valor de x. Tal que nos queda una función que puede "pasar" por la correspondencia "inflada".



A medida que $\epsilon \to 0$, nos acercamos a la correspondencia originl, tal que tenemos una secuencia de puntos fijos aproximados al punto fijo.

Tenemos un $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(g \in F) = \{(x, y) \in S \times S | \exists (x^*, y^*) \in S \times S, \text{ donde } y^* \in G(x^*) \text{ y } \|(x, y) - (x^*, y^*)\| < \epsilon\}$$

Por lo tanto, siempre voy a poder encontrar una **función continua** tal que se encuentre dentro de la correspondencia inflada $F(x)_\epsilon$.

Existencia de Equilibrio General en Juegos - Paper Nash 1950

Nash demuestra que todo juego finito (es decir, con un número finito de jugadores y estrategias puras) posee al menos un equilibrio en estrategias mixtas. En este contexto, una estrategia mixta consiste en asignar una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras disponibles. Y decimos que existe un equilibrio en el sentido de Nash, cuando ninguno de los individuos tiene incentivos a modificar su "respuesta".

El espacio de estrategias mixtas de cada jugador es un simplex de probabilidad, que es compacto y convexo. El conjunto de perfiles de estrategias mixtas (producto cartesiano de los simplex de cada jugador) es entonces un subconjunto no vacío, compacto y convexo del espacio euclidiano $[0, 1]^N$.

Entonces hasta ahora cumplimos con las condiciones de **dominio** para Kakutanis. Ahora revisamos las condiciones de imagen:

La correspondencia de **mejor respuesta** asigna a cada perfil de estrategias del resto de los jugadores el conjunto de estrategias propias que maximizan la utilidad esperada.

Esta correspondencia siempre es **no vacía**, es decir, siempre existe una acción que es al menos mejor respuesta que el resto de acciones (o todas son igual de buenas).

Además, dada la **continuidad** de la función de pagos, esto permite asegurar que “no hayan saltos” en la forma de reaccionar -> es decir, se trata de una correspondencia con gráfico cerrado.

Finalmente, se cumple la convexidad del conjunto de mejores respuestas. Tal que, si hay múltiples estrategias (puras o mixtas) que son igualmente óptimas para un jugador dadas las acciones de los demás, entonces **cualquier promedio ponderado** de esas estrategias óptimas también será una estrategia óptima. (Pensar en el teorema de utilidad esperada, y la ” linealidad de la utilidad esperada respecto a la estrategia propia”)

Esto hace que se cumpla las condiciones en cuanto al dominio, lo que implica que existe un punto fijo.

En el caso de dos jugadores, el equilibrio puede representarse como el punto fijo del siguiente sistema:

$$(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) = \begin{cases} BR_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ \\ BR_2(\sigma_1, \sigma_2) \end{cases}$$

donde $BR_i(\cdot)$ denota la correspondencia de mejor respuesta del jugador i ante las estrategias del oponente.

A. Apéndice Campos Vectoriales

Definición Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es un mapeo:

$$\mathbf{F} : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

En términos más simples, un campo vectorial es una asignación de una "flecha" (un vector) a cada "ubicación" (un punto) dentro de una región del espacio. La longitud de la flecha indica la magnitud de alguna propiedad en ese punto, y la orientación de la flecha indica la dirección de esa propiedad.

Para ilustrar la aplicación de un campo vectorial en la descripción del movimiento, consideremos el ejemplo de una pelota que es arrojada a un valle. Asumamos que la topografía de este valle puede ser representada por la siguiente función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Esta función describe un paraboloide con su punto mínimo alcanzado en el origen $(0, 0)$. Si la pelota se encuentra en cualquier punto del valle, intuitivamente se dirigirá hacia $(0, 0)$. La pregunta que surge es: cómo es la trayectoria de esa pelota, es decir, cómo llega exactamente a ese punto?

Para determinar la dirección de descenso más pronunciado en cada punto del valle, utilizamos el gradiente de la función de la superficie.

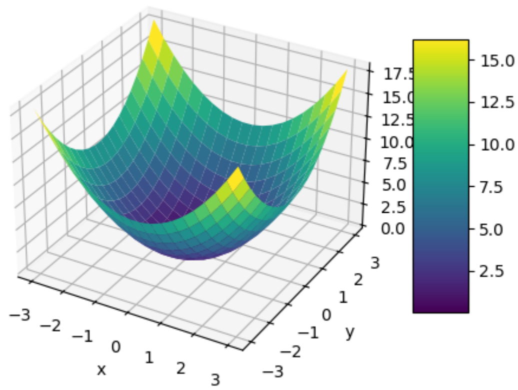
Con el gradiente:

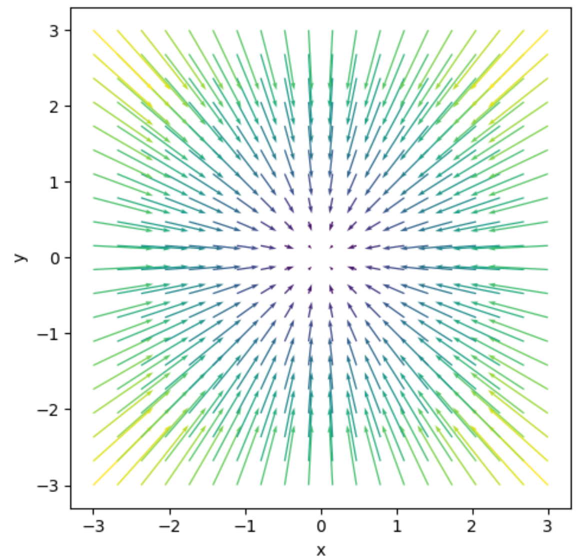
$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} 2x \\ 2y \end{cases}$$

Que a su vez se puede expresar también en notación vectorial estándar:

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

El negativo de este campo vectorial nos indica la dirección y "fuerza" con la que la pelota tenderá a moverse en cada ubicación, guiándola por la pendiente más pronunciada directamente hacia el punto mínimo en $(0, 0)$.





Mientras mayor es la altura en la que se encuentra posicionada la pelota entonces mayor es la velocidad con la que baja.