Repaso Optimización Matemática

Lourdes Ortega & Luján García

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. UCCUYO

Julio 2024

El Problema de Programación Matemática

El problema de economización estática resulta en la assignación de los escasos recursos entre fines competitivos en un instante particular de tiempo. Matemáticamente, el problema es determinar los valores de ciertas variables, sujeto a un conjunto determinado de restricciones en los posibles valores, tal que se maximiza una función dada.
El problema es elegir los valores de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ llamadas *instrumetos* (incógnitas). Estos instrumentos son resumidos en un vector columna:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}'$$

llamado un vector instrumento. El cual es un vector en un espacio Euclideano n, E^n.

El vector instrumento $\mathbf{x}$ es asequible si satisface todas las restricciones del problema, y el conjunto de todos los vectores asequibles es el *conjunto de oportunidad* X, un subconjunto de E^n.
Dado que el problema es que la elección de un vector instrumento del conjunto de oportunidad, en un problema no-trivial el conjunto de oportunidades es no-vacio (es decir las restricciones no son inconsistentes) y se obtiene al menos dos puntos distintos. (Si se obtuviese un único punto entonces no tendríamos libertad de elección).
La *función objetivo* es un resumen matemático del objetivo del problemo. Es una función de valores-reales de los instrumentos:

$$F = F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

que se asume que es dada y que es continuamente diferenciable.

El Problema de Programación Matemática

El problema general de programación matemática es entonces la elección de un vector instrumento del conjunto de oportunidades tal que maximice el valor ded una función objetivo:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x})$$

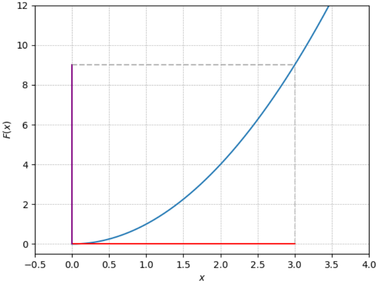
$$\text{s.t. } \mathbf{x} \in X$$

Cómo definimos un máximo global y cómo definimos un máximo local?

Teorema de Weierstrass

De acuerdo con el teorema si el conjunto de oportunidad X es compacto (es decir, cerrado y limitado, entonces X es un subconjunto del espacio Euclideano n) y no vacio y la función objetivo $F(\mathbf{x})$ es continua en X entonces $F(\mathbf{x})$ tiene un máximo global ya sea con una solución interior o un límite de X.

$$F(X) = \{z \in E | z = F(\mathbf{x}) \text{ para algún } \mathbf{x} \in X\}$$



Teorema de Local Global

Si el conjunto de oportunidades X es no vacío y compacto que es convexo y $F(\mathbf{x})$ es una función continua que es cóncava en X entonces un máximo local es un máximo global, y el conjunto de puntos en el cual el máximo es obtenido es convexo. Si además asumimos que $F(\mathbf{x})$ es estrictamente cóncava entonces la solución es única, es decir, hay un máximo global estricto.

Para establecer las condiciones de orden vamos a hacer referencia también a la geometría del problema. Por lo que vamos a tener:

- La curva de nivel de la función objetivo es el conjunto de puntos en el espacio euclidiano n para el cual el valor de la función objetivo es contante:

$$\{\mathbf{x} \in E^n | F(\mathbf{x}) = \text{ constante}\}$$

- La dirección de preferencia es la dirección en la cual el valor de la funcion objetivo, la constante, es aumentado más rápifo. La dirección de preferencia está dada por la dirección del vector gradiente de las primeras derivadas parciales de la función objetivo:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

un vector linea en el espacio euclideano apuntando en la dirección en la de mayor aumento de $F(\mathbf{x})$.

Problema de Programación Clásica

$$\max_{x} F(\mathbf{x})$$

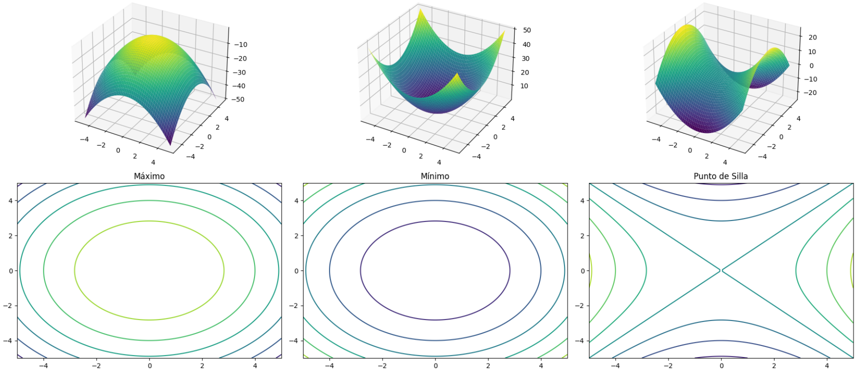
$$\text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Se asume que el número de instrumentos, n, y el número de restricciones, m, son finitos y que $n > m$, donde $n - m$ son los **grados de libertad del problema**.

Tarea: Qué sucedería si no se cumple? Demostrar.

$$F(x^*) \geq F(x^* + \Delta x)$$

Derivación de las condiciones de orden.

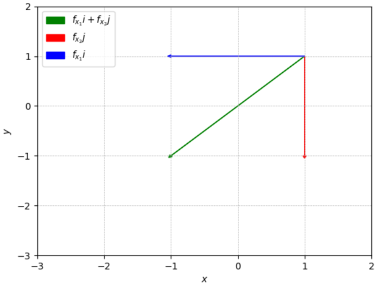


Problema de Programación Clásica: Caso No Restringido

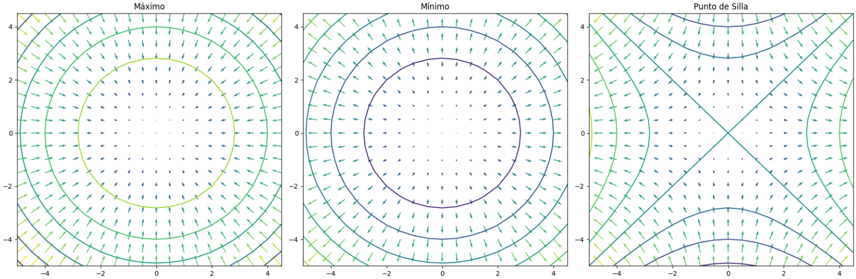
Para el caso de dos variables, podemos escribir al gradiente de la función entonces nos queda:

$$\nabla f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1, x_2)\mathbf{i} + f_{x_2}(x_1, x_2)\mathbf{j}$$

Para entender como sería empecemos con un único punto y veamos como dibujamos un único vector. Es claro que la dirección del vector y la magnitud del vector va a estar dado por el paralelogramo que se obtiene de la suma de los vectores $f_{x_1}(x_1, x_2)\mathbf{i}$ y $f_{x_2}(x_1, x_2)\mathbf{j}$



Problema de Programación Clásica: Caso No Restringido



Problema de Programación Clásica: Caso Restringido

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^*)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Para poder resolver este problema, sin embargo tenemos como condición:

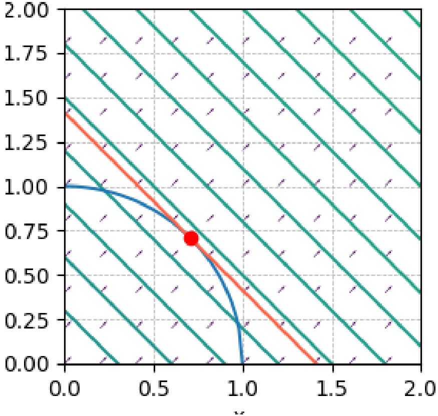
$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\right) = \rho \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = m$$

Tarea: Por qué?

Problema de Programación Clásica: Caso Restringido

$$F(x^*) \geq F(x)$$

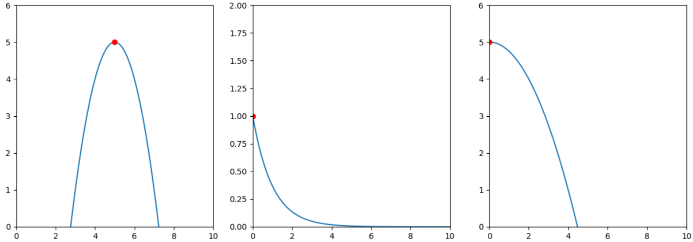
$$\text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$



Problema de Programación No Lineal: Condiciones de No Negatividad

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



Problema de Programación No Lineal: Condiciones de Kuhn-Tucker

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Podemos transformar al problema como:
Puede ser analizado utilizando los resultados de la anterior sección. Para ello se agrega a las restricciones una variable "slack"(holgura) la cual convierte las restricciones de desigualdad en igualdad:

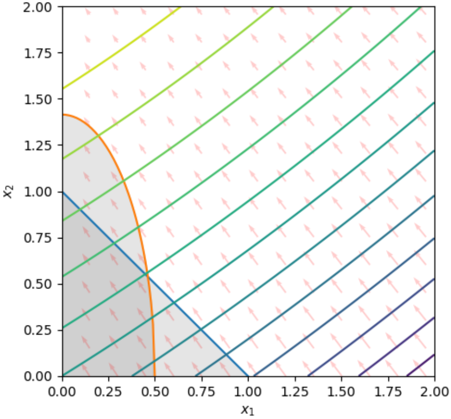
$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (s_1, s_2, \ldots, s_m)'$$

Por lo que podemos transformar al problema ahora en:

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{s}} F(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

Problema de Programación No Lineal: Condiciones de No Negatividad



Problema de Programación Lineal

El problema de programación lineal es el de elegir los valores no negativos de ciertas variables tal que se maximiza o se minimiza una función lineal sujeto a un conjunto de restricciones lineales.

$$\max_{\mathbf{x}} F = \mathbf{cx}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

De acuerdo al teorema de Kuhn-Tucker, $\mathbf{x}^*$ es una solución del problema de maximización si existe un vector fila $\mathbf{y}^*$ tal que, definiendo la función Lagrangiana como:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{cx} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$$

Problema de Programación No Lineal: Condiciones de No Negatividad

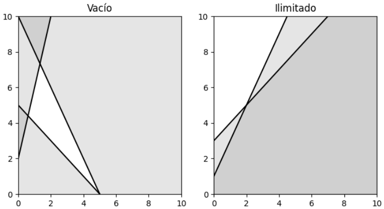
$$\left\{ \mathbf{x} \in E^n \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \right\}$$

La intersección de estas mitades de espacio cerradas en E^n forman un conjunto convexo poliédrico, o, si es limitado a un conjunto convexo poliedro. El conjunto de todos los vectores de instrumentos que satisfacen las $m + n$ desigualdades y las restricciones de no-negatividad, forma el *conjunto de oportunidades*:

$$X = \{ \mathbf{x} \in E^n | \, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0 \}$$

Problema de Programación Lineal

Geometricamente, entonces, el problema de programación lineal es encontrar el punto en E^n en la curva de nivel de la función objetivo que se encuentra más lejos de la dirección de la preferencia pero dentro del conjunto de oportunidad convexo polidral.
Como la función objetivo es continua y el conjunto de oportunidad es cerrado, por Teorema de Weierstrass una solución existe si el conjunto de oportunidad es no-vacio y limitado. Por lo tanto hay dos circunstancias en las cuales la solución puede que no exista.



Tenemos las siguientes condiciones de orden:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} - \mathbf{yA} \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = (\mathbf{c} - \mathbf{yA})\,\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{y}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}\,(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = 0$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

Problema de Programación Lineal

A todo problema de programación lineal corresponde un problema dual. Si el problema original, llamdo *problema primal* es un problema de programación lineal máximo:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{cx} \qquad \text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

entonces el *problema dual* es el problema de programación lineal mínimo:

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{yb} \qquad \text{s.t. } \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Para ello planteamos el Lagrangiano:

$$L = \mathbf{cx} + \mathbf{y}\left(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\right)$$

Distribuyendo $\mathbf{y}$:

$$L = \mathbf{cx} + \mathbf{yb} - \mathbf{yAx}$$

Reordenamos:

$$L = \mathbf{yb} + \left(\mathbf{c} - \mathbf{yA}\right)\mathbf{x}$$