DIXIT & STIGLITZ (1977) - Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity

Note: This document is written in Spanish.

Central question: How does monopolistic competition with product differentiation shape market structure, firm behavior, and welfare?

Key mechanism / result:

- Consumers value variety: utility increases with the number of differentiated goods
- Firms face increasing returns to scale due to fixed costs
- Symmetric equilibrium with markups above marginal cost
- Trade-off between scale economies and love for variety determines welfare and equilibrium number of firms

Intuition:

- Market power arises not from scarcity but from differentiation
- Fixed costs limit entry, preventing an infinite expansion of varieties
- Optimal variety balances productive efficiency (lower costs) and consumer preference for diversity

Why it matters: Establishes the microeconomic foundations of monopolistic competition widely used in macro and international trade models, including the "new trade theory" and modern models of product variety.

Reference: Dixit, A. K., & Stiglitz, J. E. (1977). *Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity.* American Economic Review, 67(3), 297–308. https://www.jstor.org/stable/1831401

Competencia Monopolística y Diversidad del Producto óptima

El problema básico interesado en la producción en el bienestar económico es si la solución del mercado de tipos y cantidades de bienes son óptimas. Es bastante conocido que hay los problemas puede surgir de tres razones: justicia distributiva, efectos externalidades y economías a escala. Este paper se centra en el último de ellos.

El principio básico es fácilmente establecido. Un bien debe ser producido si los costos pueden ser cubiertos por la suma de ingresos y una medida apropiada definida del excedente del consumidor. La cantidad óptima es entonces encontrada a partir de igualar el precio de demanda y el costo marginal:

$$P - CMg = 0$$

Tal óptimo puede ser establecido en el mercado si la discriminación perfecta de precios es posible. De otra manera enfrentamos problemas conflictivos. En un mercado competitivo donde se cumple la condición marginal va a ser insostenible porque habría beneficios negativos. Un elemento del monopolio permitiría beneficios positivos, pero violaría la condición marginal. Por lo tanto esperamos que la solución de mercado sea subóptima. Sin embargo, una estructura mucho más precisa debe ser establecida en el problema si somos capaces de entender la naturaleza del sesgo involucrado.

Es útil pensar en la pregunta a partir de una de cantidad versus diversidad. Con economías a escala, los recursos pueden ser guardados para prdoucir menos bienes y mayores cantidades de cada uno. Sin embargo, esto deja menos variadad, lo cual implica alguna perdida de bienestar. Es facil y probablemante no tan irreal modelar economías a escala a partir de suponer que cada bien potencial implica algún costo establecido fijo y algún costo marginal. Modelar la desabilidad de variabilidad ha sido pensado como algo dificil, y varios enfoques indirectos han sido asoptados. El modelo espacial de Hotelling, el enfoque de característica de Lancaster, y el modelo de selección de cartera media-varianza han sido todos utilizados. Esto lleva a resultados que involucran costos de transporte o correlaciones entre bienes o seguros, y que son difíciles de interpretar en términos generales. Nosotros por lo tanto tomamos ruta directa, notando que la convexidad de las superficies de indiferencia en una función de utilidad convencional definida por las cantidades de todos los bienes potenciales implica deseabilidad por la variedad. Por lo tanto, un consumidor que es indiferente entre las cantidades (1,0) y (0,1) de dos bienes prefiere la mezcla (1/2,1/2) a los extremos. La ventaja de este punto de vista es que el resultado involucra las funciones de elasticidad propia y cruzada, y por lo tanto es más fácil de entender.

Hay un caso particular de interés en el cual nos concentramos. Este es si los bienes potenciales en un grupo o sector o industrias son bienes sustituos entre ellos, pero pobremente sustitutos para los otros bienes en la economía. Entonces somos guíados a examinar la solución de mercado en relación al óptimo, que implica sesgos dentro de los grupos, y entre los grupos y el resto de la economía. De forma tal que podemos establecer separabilidad de la función de utilidad tal que:

$$u = U(x_0, V(x_1, x_2, ...))$$

I. Caso Elasticidad Constante

A. Funciones de demanda Dado a que V es la función de demanda CES, podemos escribir:

$$u = U\left(x_0, \left[\sum x_i^{\rho}\right]^{1/\rho}\right)$$

Por concavidad sabemos que $\rho < 1$. Cuando 1 tenemos función sustitutos perfectos, mientras menor que uno tendemos a complementarios perfectos. Dado a que queremos permitir la situación donde x_i puede ser cero, tenemos que $\rho > 9$, tal que no se trate de una función logaritmino (o más complementarios).

La restricción presupuestaria es:

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I$$

Dado a que tenemos separabilidad, sabemos que podemos maximizar en dos etapas, de forma tal que:

$$\left[\sum x_i^{\rho}\right]^{1/\rho} = y$$

y

$$q = \left[\sum p_i^{-1/\beta}\right]^{-\beta}$$

Tal que $\beta \equiv (1-\rho)/\rho$, el cual es positivo debido a que $0 < \rho < 1$.

Podemos demostrarlo a partir de minimización del costo:

$$\min_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

s.t. $y = \left[\sum x_i^{\rho}\right]^{1/\rho}$

La función Lagrangiana del problema sería:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + q\left[y - \left[\sum x_i^{\rho}\right]^{1/\rho}\right]$$

CPO

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = p_i - q\left[\sum x_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} x_i^{\rho-1} = 0$

Por lo tanto, nos queda:

$$p_i = q y^{1-\rho} x_i^{\rho-1}$$

Es decir la función de demanda queda dada por:

$$x_i = \left(\frac{q}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} y$$

Elevando por ρ en ambos lados y sumando tenemos:

$\sum x_i^\rho = \sum \left(\frac{q}{p_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} y^\rho$

Dada la restricción y simplificando podemos escribirtenemos:

$1 = q^{\frac{\rho}{1-\rho}} \sum \left(\frac{1}{p_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}}$

Por lo tanto reordenando nos queda:

$q^{-\beta} = \sum p_i^{-\beta}$

$$q = \left[\sum p_i^{-\beta}\right]^{-1/\beta}$$

Maximizamos:

$$\max U\left(x_0, \left[\sum x_i^\rho\right]^{1/\rho}\right)$$

s.t. $I = x_0 + qy$

CPO

$$\frac{(\partial U/\partial y)}{(\partial U/\partial x)} = q \implies s(q)$$

Tal que nos queda:

$$y = I\frac{s(q)}{q}$$

Reemplazando:

$I = x_0 + I\frac{s(q)}{q}q$

$$x_0 = I\left(1 - s(q)\right)$$

Donde s es una función que depende de la forma de U. Escribiendo a $\sigma(q)$ a la elasticidad de sustitución entre x_0 y y, tenemos que $\theta(q)$ como la elasticidad de sustitución de la función s;

$$\frac{\partial s}{\partial q}\frac{q}{s} = \frac{qs'(q)}{s(q)} = \theta(q)$$

Entonces encontramos:

$$\theta(q) = (1-\sigma(q))(1-s(q)) < 1$$

Donde $\theta(q)$ puede ser negativo cuando la elasticidad de sustitución exceda uno.

Ahora nos queda resolver la segunda parte del problema:

$$\max \left(\sum x_i^\rho\right)^{1/\rho}$$

s.t. $qy = \sum x_i p_i$

Por lo tanto en las condiciones de orden nos queda:

$(\sum x_i^\rho)^{1/\rho - 1} x_i^{\rho-1} - \lambda p_i = 0$

Por lo tanto, la condición de equilibrio es:

$$\frac{x_j}{x_i} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

Reemplazando, en la restricción:

$qy = x_i p_i + \sum x_i \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} p_j = x_i p_i^{\frac{1}{1-\rho}} \sum \left(\frac{1}{p_j}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} = x_i p_i^{\frac{1}{1-\rho}} \sum p_j^{-1/\beta}$

Despejamos:

$$qy \frac{\left(\sum p_j^{-1/\beta}\right)^{-1}}{p_i^{\frac{1}{1-\rho}}} = y \frac{q^{1+\frac{\rho}{1-\rho}}}{p_i^{\frac{1}{1-\rho}}} = x_i$$

$$x_i = y \left(\frac{q}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

Consideremos el cambio de p_i en q, nos queda:

$$\frac{\partial q}{\partial p_i} = \left[\sum p_j^{-1/\beta}\right]^{-\beta-1} p_i^{-1/\beta - 1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{p_i}{q} = \left(\frac{q}{p_i}\right)^{1/\beta}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\log x_i = \log y + \frac{1}{1-\rho} \log q - \frac{1}{1-\rho} \log p_i$$

Derivando respecto de p_i, y siempre y cuando los precios de los productos en un grupo no tengan diferentes ordenes de marnituf, podemos asumir que n es tan grande que el efecto de p en q es lo suficientemente pequeño, tal que:

$$\frac{\partial \log x_i}{\partial p_i} = -\frac{1}{1-\rho}$$

Como podemos escribir $\rho = \frac{1}{1+\beta}$. Podemos reemplazar

$$\frac{\partial \log x_i}{\partial p_i} = -\frac{1}{1-\frac{1}{1+\beta}} = -\frac{1+\beta}{\beta}$$

Sin embargo, si todos los precios del grupo se mueven conjuntamente, los efectos inidivudales pequeños agregan una cantidad significativa. Si hay una situación simétrica, donde $x_i = x$ y $p_i = p$, para todo i, tenemos:

$q = \left[\sum p^{-1/\beta}\right]^{-\beta} = \left[p^{-1/\beta}n\right]^{-\beta}$

$$q = pn^{-\beta} = pn^{-\frac{1-\rho}{\rho}}$$

Reemplazando en la restricción presupuestaria:

$pn^{-\beta}y = pxn$

$$y = xn^{1+\beta} = xn^{\frac{1}{\rho}}$$

Esto junto con las demandas que ya habíamos obtenido:

$y = I\frac{s(q)}{q}$

$x_i = y\left(\frac{q}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$

Nos permite escribir:

$x = I\frac{s(q)}{pn^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}\left(\frac{pn^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{p}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} = I\frac{s(q)}{pn^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}n^{-\frac{1}{\rho}}$

$$x = \frac{Is(q)}{pn}$$

Tomando logaritmos y derivando respecto de p nos queda:

$\log x = \log I + \log s(q) - \log p - \log n$

$$\frac{\partial \log x}{\partial \log p} = \frac{\log s(q)}{\partial \log p} - 1 = -[1-\theta(q)]$$

Como ya establecimos que $\theta(q) < 1$, entonces es claro que nos queda que la pendiente de la curva de demanda es negativa. Recordemos que estamos considerando que esta pendiente es cuando todos los precios del mismo grupo se mueven.

Podemos observar que:

$$\left|\frac{\partial \log x_i}{\partial p_i}\right| > \left|\frac{\partial \log x_i}{\partial p}\right|$$

Reemplazando tenemos

$$\frac{1+\beta}{\beta} > 1-\theta(q)$$

$$\frac{1}{\beta} + \theta(q) > 0$$

Además tenemos por condición de primer orden de maximización de la segunda etapa que:

$$\frac{x_j}{x_i} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

Lo que podemos escribir como:

$$TMS = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{1-\rho}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \log \frac{x_j}{x_i}}{\partial \log TMS} = \frac{\partial \log \frac{x_j}{x_i}}{\partial (1-\rho) \log \frac{x_j}{x_i}} = \frac{1}{1-\rho}$$

Es decir, $\frac{1}{1-\rho}$ es la elasticidad de sustitución entre cualquier dos bienes dentro del mismo grupo.

B. Equilibrio de Mercado Cada bien es producido por una firma, la cual intenta maximizar beneficios, y la entrada ocurre hasta que la empresa marginal queda indiferente. La condición de maximización de la firma es:

$$\pi_i = p_i x_i(p_i) - c x_i(p_i) - a$$

Donde a es un coste fijo y c es el costo marginal el cual es una constante.

CPO

$x(p_i) + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i} - c \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = 0$

Multiplicando por $\frac{p_i}{x_i}$ nos queda:

$\frac{\partial \log x}{\partial \log p_i} \left[p_i \frac{\partial \log p_i}{\partial \log x} + p_i - c\right] = 0$

$$p_i\left(1-\frac{\beta}{1+\beta}\right)=c$$

Por lot anto, el precio de equilibrio común para cada variedad que es producida es de:

$$p_e=c(1+\beta)=\frac{c}{\rho}$$

CSO

Debe suceder que el beneficio de la empresa en el margen, sea la empresa n, es igual a cero, tal que:

$$(p_n-c)x_n=a$$

Reemplazando con la demanda que obtuvimos x_n y la condición de equilibrio, tenemos que:

$\left(\frac{c}{\rho}-c\right)\frac{Is(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}=c\frac{1-\rho}{\rho}\frac{Is(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}=a$

$$\frac{Is(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}=\frac{a}{\beta c}$$

Debido a que $s(q)$ es una función monotónica de q, por la definición de condición de equilibrio, nos queda que $\frac{Is(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}$ es una función monotónica de n, lo que implica que el equilibrio es único.

Donde $\frac{s(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}$ indica como la curva de deamnda de cada firma se traslada a medida que aumenta el número de firmas, podemos observar que:

$\frac{\partial \frac{s(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}}{\partial n_e}=-\beta\frac{s'(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}p_e n_e^{-\beta-1}-\frac{s(p_e n_e^{-\beta})}{(p_e n_e)^2}p_e$

$\frac{\partial \frac{s(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e}}{\partial n_e}=-\frac{s(q)}{p_e n_e^2}\left[\beta\frac{s'(q)}{s(q)}q+1\right]$

Por lo tanto, mientras tengamos que:

$$1+\beta\theta(q)>0$$

Sucede que un aumento del número de firmas traslada la curva de demanda DD de cada firma. Esta condición es la misma condición que indica que la curva individual es más elástica que cuando se mueven todos los precios.

La condición puede ser violada si $\sigma(q)$ es lo suficientemente alto más que uno. En este caso, un incremento en n reduce q y traslada la demanda hacia el sector monopolístico de forma tal que la curva de demanda aumenta.

Hay dos formas en las que puede suceder, sin embargo, que la curva de demanda es fija para el grupo en total. Para ello debe suceder que $\beta=0$ o $\sigma(q)=1$.

El primero de los casos sucede cuando $\rho=1$, sin embargo, excluimos este caso, ya que estaríamos indicando sustitutos perfectos de forma tal que no se valora la diversidad. El segundo caso es que

$\sigma(q) = 1$, es decir la sustitución entre x_0 y y, de esta forma nos queda que no hay sustitución entre ellos, y más bien el presupuesto es constante para cada bien.

Finalmente, reemplazando juntando todas las condiciones podemos escribir las cantidades de producto de equilibrio para cada firma activa:

$$x_e = \frac{a}{\beta c}$$

C. Óptimo Restringido Con economías de escala, la solución no restringida o primer mejor óptimo requiere un precio menor al precio promedio y, por lo tanto, es necesario transferencias hacia las firmas para cubrir esas pérdidas.

Por lo tanto, sería más apropiado la noción de óptimo de forma restringida donde cada firma debe tener beneficios no-negativos. Esto puede ser alcanzado a partir de regulaciones, o estableciendo o eliminando subsidios e impuestos.

Por lo tanto, ahora vamos a elegir n, p_i y x_i de forma tal que se maximice la utilidad y satisfaga la función de demand ay los beneficios de cada empresa sean no negativos.

Teniendo $I = 1$, el problema de maximizar u, se vuelve el de minimizar q:

$$\min_{n,p} pn^{-\beta}$$

s.t. $(p - c)\,\frac{s(pn^{-\beta})}{pn} = a$

El Lagrangiano del problema nos queda:

$$L = pn^{-\beta} + \lambda\left[a - (p - c)\,\frac{s(pn^{-\beta})}{pn}\right]$$

CPO

$\frac{\partial L}{\partial n} = \beta pn^{-\beta-1} - \lambda\,(p-c)\left[-\beta \frac{s'(pn^{-\beta})}{pn} pn^{-\beta-1} - \frac{s(pn^{-\beta})}{(pn)^2} p\right] = \beta pn^{-\beta-1} - \lambda\,(p-c)\,\frac{s(q)}{pn^2}\left[-\beta\theta(q) - 1\right] = 0$

$\frac{\partial L}{\partial p} = n^{-\beta} - \lambda\left[\frac{s(pn^{-\beta})}{pn} + (p-c)\,\frac{s'(pn^{-\beta})}{pn} n^{-\beta} - (p-c)\,\frac{s(pn^{-\beta})}{(pn)^2} n\right] = n^{-\beta} - \lambda \frac{s(q)}{p^2 n}\left[p + (p-c)\,\theta(q) - (p-c)\right] = 0$

Juntando ambas condiciones nos queda:

$\beta \frac{p}{n} = -\,(p-c)\,\frac{p}{n}\,\frac{\beta\theta(q)+1}{(p-c)\theta(q)+c}$

$\beta\left(\frac{c}{p-c} + \theta(q)\right) = (\beta\theta(q) + 1)$

$$\frac{\frac{c}{p-c} + \theta(q)}{\beta\theta(q) + 1} = \frac{1}{\beta}$$

Y puede ser demostrado que la condición de segundo orden también se mantiene.

De esta condición de equilibrio, podemos obtener p_c, despejando:

$\frac{c}{p-c} = \frac{\beta\theta(q)+1}{\beta} - \theta(q)$

$\frac{c}{p-c} = \frac{1}{\beta}$

$c\beta = (p-c)$

$$p_c = c(1+\beta)$$

Es claro que el precio restringido es igual al precio que establecimos antes y, por lo tanto, obtenemos el mismo número de firmas. Es decir, que el equilibrio de competencia monopolística es idéntico al óptimo restringido por la falta de subsidios.

D. Óptimo No restringido Esta solución podemos compararla con el caso en el que (nuevamente en caso simétrico) debemos elegir n y x tal que se maximiza la utilidad. Tal que el precio que se paga es igual al costo medio, es decir que tenemos dado que tenemos que $y = xn^{1+\beta}$, $q = pn^{-\beta}$, y normalizando $I = 1$, podemos escribir:

$x_0 = 1 - q_e y_e = 1 - pn^{-\beta}xn^{1+\beta} = 1 - \frac{a+cx}{x}n^{-\beta}xn^{1+\beta}$

$$x_0 = 1 - n(a+cx)$$

Reemplazando tenemos:

$$\max_{x,n} u = U\left(1 - n\left(a+cx\right), xn^{1+\beta}\right)$$

CPO

$-U_0 nc + U_y n^{1+\beta} = 0$

$-U_0\left(a+cx\right) + \left(1+\beta\right)U_y xn^{\beta} = 0$

De las condiciones de primer orden, del principio sabemos que $\frac{U_y}{U_0} = q$. Por lo tanto de la primera condicón de orden podemos escribir:

$$q = \frac{c}{n^{\beta}}$$

$$p_u = c$$

Es decir que se cumple la condición de marginalidad.

Utilizando las condiciones que indicamos antes

Juntando ambas condiciones nos queda:

$$\frac{nc}{a+cx} = \frac{n}{(1+\beta)x}$$

$(1+\beta)xc = a + cx$

$$x = \frac{a}{c\beta}$$

La transferencia a las firmas es exactamente igual al precio del costo fijo total an, ya que estas cubren el costo variable ($p = c$). Por lo tanto, el ingreso disponible para gastar es $I = 1 - an$, de forma tal que:

$$x = (1 - an)\,\frac{s(pn^{-\beta})}{pn}$$

El número de firmas entonces queda definido por:

$\frac{a}{c\beta} = (1 - an)\,\frac{s(cn^{-\beta})}{cn}$

$$\frac{a/\beta}{(1 - an_u)} = \frac{s(cn^{-\beta})}{n_u}$$

Ahora podemos comparar a las firmas activas. En ambas tenemos que las cantidades que produce cada una de las firmas activas son iguales:

$$x_c = x_e = x_u = \frac{a}{\beta c}$$

Está claro que el óptimo sin restricciones tiene una utilidad mayor que el óptimo con restricciones. Además, el nivel de ingreso total en él es menor que en el último. Además la suma de ingreso es menor que en el primero, por lo que necesariamente debe suceder que:

$$q_u < q_c = q_e$$

Por lo tanto, como el valor de x es el mismo en ambos óptimos, debe suceder que:

$$n_0 > n_c = n_e$$

Por lo tanto, el óptimo no restringido tiene verdaderamente más variedad que el óptimo restringido y el de equilibrio. Este es otro punto que contradice el folclore sobre la diversidad excesiva.

Además, podemos comparar las participaciones en el presupuesto, de forma tal que:

$$s_u \gtreqless s_c \Leftarrow \theta(q) \gtreqless 0$$

Es decir, cuando $\sigma(q) \gtreqless 1$, o la elasticidad de sustitución entre los bienes sea convexa o cóncava, mientras más convexas sean las curvas de indiferencia entonces $\theta(q)$ es más positivoy, por lo tanto, mayor es la participación en el presupuesto.

Hasta el momento hemos supuesto que la elasticidad de sustitución **dentro del sector, o intra-sector** es constante.

II. Caso de Elasticidad Variable

La función de utilidad es ahora:

$$u = x_0^{1-\gamma}\left\{\sum v(x_i)\right\}^{\gamma}$$

Donde v es creciente y cóncava. Sin embargo, como $V(\bar{x}) = \sum v(x_i)$ no es homotética no se puede aplicar el presupuesto en dos etapas.

Del problema de maximización tenemos las siguientes condiciones de orden:

$\frac{\partial L}{\partial x_0} = (1-\gamma)x_0^{-\gamma}\left\{\sum v(x_i)\right\}^{\gamma} - \lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \gamma x_0^{1-\gamma}\left\{\sum v(x_i)\right\}^{\gamma-1} v'(x_i) - p_i\lambda = 0$

Por lo tanto, nos queda:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\frac{\sum v(x_i)}{x_0 v'(x_i)} = \frac{1}{p_i}$$

Se puede mostrar que la elasticidad ded la curva de demanda en el grupo grande es:

$$-\frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_i} = -\frac{v'(x_i)}{x_i v''(x_i)}$$

Es claro que se diferencia del primer caso, porque ahora si depende de x_i.

Por lo que podemos escribir:

$$\frac{1+\beta(x)}{\beta(x)} = -\frac{v'(x_i)}{x_i v''(x_i)}$$

Teniendo un equilibrio simétrico de forma tal que $x_i = x$ y $p_i = p$, nos queda:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\frac{pn \cdot v(x)}{v'(x)} = x_0$$

Reemplazando en la restricción tenemos:

$I = \frac{(1-\gamma)}{\gamma}\frac{pn \cdot v(x)}{v'(x)} + pnx$

Sacando como factor común del lado derecho pnx

$I = pnx\left[\frac{(1-\gamma)v(x)+\gamma v'(x)x}{\gamma v'(x)x}\right]$

$I = pnx\left[\frac{(1-\gamma)+\gamma\frac{v'(x)x}{v(x)}}{\gamma\frac{v'(x)x}{v(x)}}\right]$

Sea $\rho(x) = \frac{v'(x)x}{v(x)}$, podemos escribir:

$I = pnx\left[\frac{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}{\gamma\rho(x)}\right]$

Por lo tanto, nos queda:

$$x = \frac{I}{np}\omega(x)$$

Donde $\omega(x) = \frac{\gamma\rho(x)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}$

$I = x_0 + pn\frac{I}{np}\omega(x)$

$$x_0 = I\left[1-\omega(x)\right]$$

La maximización del beneficio es igual que antes

$$\pi_i = p_i x_i(p_i) - c x_i(p_i) - a$$

CPO

$x(p_i) + p_i\frac{\partial x_i}{\partial p_i} - c\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = 0$

$$p_i\left(1 - \frac{\beta(x)}{1+\beta(x)}\right) = c$$

Por lo tanto, el precio de equilibrio común para cada variedad que es producida es de:

$$p_e = c(1+\beta(x_e))$$

CSO

Debe suceder que el beneficio de la empresa en el margen, sea la empresa n, es igual a cero, tal que:

$$(p_e - c)x_e = a$$

Sustituyendo la condición de orden tenemos

$cx_e(1+\beta(x_e)) = a + cx_e$

$$\frac{cx_e}{a+cx_e} = \frac{1}{1+\beta(x_e)}$$

Mientras que si reemplazamos obtenemos el número de firmas:

$\frac{c\frac{I}{nc(1+\beta(x_e))}\omega(x_e)}{a+cx_e} = \frac{1}{1+\beta(x_e)}$

Simplificamos:

$$n_e = \frac{I\omega(x_e)}{a+cx_e}$$

Para unicidad nuevamente tenemos que la curva específica es más elástica que la conjunta.

Vamos ahora al máximización restringida, de forma tal que tenemos:

$u = \left(\frac{(1-\gamma)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\omega(x_e)v(x)}{a+cx}\right)^{\gamma}$

Reemplazando a ω tenemos:

$u = \left(\frac{(1-\gamma)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\frac{\gamma\rho(x)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}v(x)}{a+cx}\right)^{\gamma}$

Por lo que podemos escribir:

$$u = (1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^{\gamma}\frac{1}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}\left(\frac{\rho(x)v(x)}{a+cx}\right)^{\gamma}$$

Derivamos respecto de x e igualamos a cero para maximizar:

$-(1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^{\gamma}\gamma\rho'(x)\frac{1}{[(1-\gamma)+\gamma\rho(x)]^2}\left(\frac{\rho(x)v(x)}{a+cx}\right)^{\gamma} + (1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^{\gamma}\gamma\frac{1}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)}\left(\frac{\rho(x)v(x)}{a+cx}\right)^{\gamma-1}\left[\frac{\rho'(x)v(x)}{a+cx} + \frac{\rho(x)v'(x)}{a+cx} - \frac{\rho(x)v(x)}{(a+cx)^2}c\right] = 0$

$-\frac{\rho'(x)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)} + \left(\frac{\rho(x)v(x)}{a+cx}\right)^{-1}\left[\frac{\rho'(x)v(x)}{a+cx} + \frac{\rho(x)v'(x)}{a+cx} - \frac{\rho(x)v(x)}{(a+cx)^2}c\right] = 0$

$-\frac{\rho'(x)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)} + \left[\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} - \frac{c}{a+cx}\right] = 0$

Podemos escribir a $\rho'(x)$ como:

$-\frac{\rho'(x)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)} + \frac{\frac{v'(x)}{v(x)} + x\frac{v''(x)}{v(x)} - x\frac{v'(x)^2}{v(x)^2}}{\rho(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{c}{a+cx}$

$-\frac{\rho'(x)}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\frac{\beta(x)}{(1+\beta(x))} = \frac{c}{a+cx}$

Por lo tanto, multiplicando en ambos lados por x:

$-\frac{\rho'(x)x}{(1-\gamma)+\gamma\rho(x)} + \frac{1}{(1+\beta(x))} = \frac{cx}{a+cx}$

Reescribiendo.

$$\frac{cx_c}{a+cx_c} = \frac{1}{1+\beta(x_c)} - \frac{\omega(x)x\rho'(x_c)}{\gamma\rho(x_c)}$$

Por lo tanto, todo depende de $\rho'(x)$:

$$x_c \gtrless x_e \quad \rho'(x) \lesseqgtr 0$$

Con beneficio igual cero en cada caso, los puntos (x_e, p_e) y (x_c, p_c) se encuentran en la misma curva de costo promedio, lo que implica que:

$$p_c \gtrless p_e \quad x_c \lesseqgtr x_e$$

Además, tenemos que la curva de demanda deve ser tangente al costo marginal y la curva de demanda conjunta es mucho más empinada. Por lo tanto, si $x_c > x_e$, y tenemos el punto (x_c, p_c), este debe encontrarse en la curva de demadna conjunta mucho más lejos que (x_e, p_e), lo que implica que el número de firmas será menor.

$$n_c \gtreqless b_e \quad x_c \lesseqgtr x_e$$

Finalmente en ambos casos tenemos que $\rho(x_c) < \rho(x_e)$, lo cual implica que $\omega(x_c) < \omega(x_e)$, implicando que:

$$x_{0c} > x_{0e}$$

Esto se debe a que en el margen, si $\rho'(x)$ **cada firma encuentra más beneficioso expandirse más de lo que sería deseable**.

Caso sin restricciones, nuevamente nos queda:

$$\max_{xn} u = [nv(x)]^{\gamma} [1 - n(a + cx)]^{1-\gamma}$$

CPO

$\gamma [nv(x)]^{\gamma-1} [1 - n(a + cx)]^{1-\gamma} nv'(x) - (1 - \gamma) [nv(x)]^{\gamma} [1 - n(a + cx)]^{-\gamma} nc = 0$

$\gamma [nv(x)]^{\gamma-1} [1 - n(a + cx)]^{1-\gamma} v(x) - (1 - \gamma) [nv(x)]^{\gamma} [1 - n(a + cx)]^{-\gamma} (a + cx) = 0$

De la primera condición tenemos:

$\frac{\gamma[nv(x)]^{\gamma-1}[1-n(a+cx)]^{1-\gamma}v'(x)}{(1-\gamma)[nv(x)]^{\gamma}[1-n(a+cx)]^{-\gamma}} = c$

La cual es la misma condición que habíamos establecido arriba. Por lo tanto, es claro que tenemos que:

$$p_u = c$$

Juntando a ambas restricciones entonces podemos escribir:

$$\frac{nv'(x)}{v(x)} = \frac{nc}{a + cx}$$

Por lo tanto nos queda:

$$\rho(x_u) = \frac{cx_u}{a + cx_u}$$

De la segunda condición de primer orden podemos esdcribir:

$\gamma [1 - n(a + cx)] = (1 - \gamma)n(a + cx)$

$\gamma = n(a + cx)$

Por lo tanto:

$$n_u = \frac{\gamma}{a + c x_u}$$

Por lo tanto, nos queda:

$$x_u \gtreqless x_c \Leftarrow \rho'(x) \lesseqgtr 0$$

Tenemos que el precio sin restricciones es el más bajo de los tres casos, además, tenemos que para el caso no restringido pueden haber más empresas y más grandes como no.

III. Equilibrio Asimétrico

Qué sucede cuando tenemos más grupos de bienes? En el caso real, si no hay azúcar que es producida, puede suceder que la demanda por café sea tan baja que la producción no sea beneficiosa cuando hay costos establecidos. Esto abre el tema de complementariedad. Sin embargo, tenemos problemas aun cuando los grupos de bienes son sustitutos.

Es claro que vamos a tener que uno u el otro va a tener que ser producido, pero es posible que la elección de uno vaya en la dirección equivocada?

Para ello suponemos un modelo mezclado de lo que veniamos estableciendo:

$$u = x_0^{1-s} \left\{ \left[\sum x_{i1}^{\rho_1} \right]^{1/\rho_1} + \left[\sum x_{i2}^{\rho_2} \right]^{1/\rho_2} \right\}^s$$

Los equilibrios por lo tanto estan dados por:

1.
$$\bar{x}_1 = \frac{a_1}{c_1 \beta_1}, \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{p}_1 = c_1 \left(1 + \beta_1\right)$$

$$\bar{n}_1 = \frac{s \beta_1}{a_1 \left(1 + \beta_1\right)}$$

$$\bar{q}_1 = \bar{p}_1 \bar{n}_1^{-\beta_1} = c_1 \left(1 + \beta_1\right) \left(\frac{a_1 \left(1 + \beta_1\right)}{s \beta_1} \right)^{\beta_1}$$

$$\bar{u}_1 = s^s \left(1 - s\right)^{1-s} \bar{q}_1^{-s}$$

2.
$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = \frac{a_2}{c_2 \beta_2}$$

$$\bar{p}_2 = c_2 \left(1 + \beta_2\right)$$

$$\bar{n}_2 = \frac{s \beta_2}{a_2 \left(1 + \beta_2\right)}$$

$$\bar{q}_2 = \bar{p}_2 \bar{n}_2^{-\beta_2} = c_2 \left(1 + \beta_2\right) \left(\frac{a_2 \left(1 + \beta_2\right)}{s \beta_2}\right)^{\beta_2}$$

$$\bar{u}_2 = s^s \left(1 - s\right)^{1-s} \bar{q_2}^{-s}$$

Las primeras ecuaciones on un equilibrio de nash, si y solo si no le paga a la firma producir un bien para el segundo grupo. La demadna para tal bien es:

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 \geq \bar{q}_1, \\ \frac{s}{p_2} & \text{si } p_2 < \bar{q}_1. \end{cases}$$

Por lo tanto, requerimos que:

$$\max_{p_2} \left(p_2 - c_2\right) x_2$$

Reemplazando con la función de demanda:

$$\max_{p_2} \left(p_2 - c_2\right) \frac{s}{p_2} = s \left(1 - \frac{c_2}{\bar{q}_1}\right) < a_2$$

Por lo tanto, requerimos que:

$s - a_2 < s \frac{c_2}{\bar{q}_1}$

$$\bar{q}_1 < \frac{s c_2}{s - a_2}$$

De forma similar tenemos:

$$\bar{q}_2 < \frac{s c_1}{s - a_1}$$

Ahora consideremos el nivel óptimo. De esta forma tenemos que:

$$\max u = x_0^{1-s} \left\{ x_1 n_1^{1+\beta_1} + x_2 n_2^{1+\beta_2} \right\}^s$$

s.t. $1 = x_0 + n_1 \left(a_1 + c_1 x_1\right) + n_2 \left(a_2 + c_2 x_2\right)$

Debido a que tenemos que u es cóncava al origen (dada la forma de la función) en el espacio (n_1, n_2) y la restricción es lineal, debe suceder entonces que tenemos una solución de esquina.

Por lo tanto, para poder determinar cual es el máximo, tenemos que comparar los valores de q_i, de forma tal que tenemos que el menor maximiza la utilidad. (Por ello se agrega la linea de 45 grados en el gráfico dos.

Mientras que las otras dos barras nos marcan si a la empresa le conviene o no le conviene participar en el mercado.

(VER GRÁFICA PAPER)

En la interpretación del modelo con consumidores heterogéneos y curvas de indiferencia social, los bienes demandados inelásticamente serán aquellos que son intensamente deseados por unos pocos consumidores. Así pues, tenemos una razón "económica" por la que el mercado conducirá a un sesgo en contra de la ópera en relación con los partidos de fútbol, y una justificación para la subvención de la primera y un impuesto sobre los segundos, siempre que la distribución del ingreso sea óptima.

IV. Conclusiones

El poder de monopolio, el cual es un ingrediente necesario en los mercados con no-convexidades, es usualmente considerado que distorsiona los recursos fuera del sector que se concentra. Sin embargo, es claro que bajo poder de monopolio le permite pagar los costos fijos, y el ingreso no está limitado, la relación de poder de mercado y la dirección de la distorsión ya no es tan obvia.

Cuando tenemos elasticidades constantes, observamos que la solución restringida era óptima. Mientras que con elasticidades variables podíamos tener sesgos de elección para cualquiera de los lados.

Con demanda asimétrica y condiciones de costo también observamos bias con demandas muy inelásticas y costos muy altos.

El principio general detrás de ello resulta que la solución de mercado considera el beneficio en el margen, mientras que el planificador tiene en cuenta el excedente del consumidor.