Capítulos 1 & 2 Mas-Colell

María Luján García & María Lourdes Ortega

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. UCCUYO

29 de julio de 2024

Qué estudiamos y cómo lo estudiamos?

La microeconomía se basa en el estudio de la toma de decisiones de los agentes económicos de forma individual dado el conjunto de posibilidades que estos presentan.

Sin embargo, la pregunta es cómo estudiamos la toma de decisiones?

- Enfoque basado en la Preferencia.
- Enfoque basado en la Elección.

Qué supuestos son necesarios para que los resultados sean consistentes.

Primero es esencial poder entender:

- Qué es una relación en teoría de conjuntos
- Qué propiedades tienen las relaciones
- Podríamos partir de otra relación?

Una elección involucra la comparación entre dos o más objetos los cuales podemos siempre considerar como siendo tomados de a dos a la vez, es decir de forma binaria.
Supongamos un agente que tiene un conjunto formado de la siguiente forma:

$$\mathbf{X} = \{x_1 = 2 \text{ pelotas de football};$$

$$x_2 = 1 \text{ pelota de handball}; x_3 = 3 \text{ pelotas de tenis}\}$$

Es claro que podemos establecer distintas relaciones entre los elementos de mi conjunto.
Por ejemplo, si R es una relación que ordena más grande en tamaño que, podríamos establecer:

$$x_1 R x_2 \wedge x_1 R x_3$$

Como podemos establecer M (Menor) que sea una relación tener menos pelotas que:

$$x_1 M x_3 \wedge x_1 \neg M x_2$$

A partir de una relación también puedo establecer otras relaciones. Por ejemplo, si tenemos que no sucede que tenga menos pelota un elemento a comparación que otro. Podemos decir que ese elemento tiene al menos tantas pelotas como el otro, A (Al menos):

$$x_1 \neg M x_2 \implies x_1 A x_2$$

y así podemos continuar realizando distintas comparaciones de los elementos de un conjunto.

Cada tipo de relaciones tiene un ordenamiento que genera características deseables o no deseables. Entre las mayores están:

1. Reflexividad: $\forall x \in X \qquad xRx$
2. Transitividad: $\forall x, y, z \in X \qquad (xRy \wedge yRz) \implies xRz$
3. Anti-simétrico: $\forall x, y \in X \qquad (xRy \wedge yRx) \implies x = y$
4. Completitud: $\forall x, y \in X \qquad (x \neq y) \implies (xRy \veebar yRx)$
5. Asimétrica: $\forall x, y \in X \qquad xRy \implies \neg(yRx)$
6. Simétrica: $\forall x, y \in X \qquad (xRy \wedge yRx) \implies x = y$

RELACIÓN DE PREFERENCIA: Los objetivos del tomador de decisiones están resumidos en la relación de preferencia $\succeq$ "al menos tan bueno como" .
Se pueden definir otras dos relaciones binarias en X:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \wedge \neg y \succeq x$$ **Preferencia estricta**

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x$$ **Relación de indiferencia**

Definición 1.B.1

La relación de preferencia $\succeq$ es racional si posee las siguientes dos características:

- Completititividad: para todo $x, y \in X$, tenemos $x \succeq y$ o $y \succeq x$ o ambas.
- Transitividad: para todo $x, y, z \in X$, si tenemos $x \succeq y$ y $y \succeq z$, entonces debe suceder que $x \succeq z$

Tarea: De qué otra forma podría ser la relación primitiva para generar un ordenamiento de las preferencias?

Proposición 1.B.1

Si $\succeq$ es racional entonces:
- $\succ$ es irreflexiva y transitiva.
- $\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.
- si $x \succ y \succeq z \Rightarrow x \succ z$

FUNCIÓN DE UTILIDAD: $u(x)$ asigna un valor numérico a cada elemento en X, ranqueando sus elementos según las preferencias del individuo.

Definición 1.B.2

Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succeq$ si, para todo $x, y \in X$:

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Proposición 1.B.2

Una relación de preferencia $\succsim$ puede ser representada por una función de utilidad unicamente si es racional.

Entonces se debe demostrar competitividad y transitividad

Entonces, en este primer enfoque hemos supuesto que los sujetos tienen un ordenamiento de las distintas canastas que bajo cierta coherencia podemos representarlo a partir de funciones de utilidad.
Por otro lado, este otro enfoque se basa en las decisiones que toma el sujeto. Definiendo por lo tanto que los sujetos tienen una estructura de elección.

Estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ posee dos elementos:
1) $\mathscr{B}$ es la familia de subconjunto no vacios de X. Esto implica que cada elemento de $\mathscr{B}$ es un ser $B \subset X$. Los llamamos conjuntos de presupuestos $B \in \mathscr{B}$.
2) $C(\cdot)$ es la regla de elección, esta asigna un conjunto no vacío de elementos elegidos $C(B) \subset B$ para cada conjunto presupuestario $B \in \mathscr{B}$.

Definición 1.C.1

La estructura de decisión $(\mathscr{B}, C(\cdot))$, satisface el **axioma débil de preferencia revelada** si la siguiente propiedad se sostiene:
Si para algún $B \in \mathscr{B}$ con $x, y \in B$ tenemos que $x \in C(B)$, entonces para cualquier otro $B' \in \mathscr{B}$ con $x, y \in B'$ y donde $y \in C(B')$, también debemos tener que $x \in C(B')$.

Definición 1.C.2

Dada una estructura de elección $(\mathscr{B}, C(B))$ la relación de preferencia revelada $\succeq^*$ es definida por:

$$x \succeq^* y \Leftrightarrow B \in \mathscr{B} : x, y \in B \ \wedge x \in C(B)$$

El AXIOMA DÉBIL DE LA PREFERENCIA REVELADA queda:

" Si x es revelado como al menos tan bueno como y, entonces y no puede ser revelado preferido a x."

La pregunta ahora es, un enfoque implica el otro? O hay doble implicancia entre sí?
Suponiendo que el individuo tiene preferencia racional $\succeq$ en X. Si se enfrenta con un subconjunto no vacio de alternativas $B \subset X$, su comportamiento maximizador es elegir uno de los elementos del conjunto:

$$C^*(B, \succeq) = \{x \in B : x \succeq y \qquad \forall \qquad y \in B\}$$

La relación de preferencia racional $\succeq$ genera a la estructura de decisión $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succeq))$

Proposición 1.D.1

Suponiendo que $\succeq$ es una relación de preferencia racional. Entonces la estructura de elección generada por $\succeq$, $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succeq))$ satisface el axioma débil.

PREFERENCIA Y ELECCIÓN: Relación entre Relaciones de Preferencia y Reglas de Elección

Definiciión 1.D.1

Dada la estructura de elección $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succeq))$, decimos que la relacion de preferencia racional $\succeq$ racionaliza (justifica) $C(\cdot)$ relativo a $\mathscr{B}$ si:

$$C(B) = C^*(B, \succeq)$$

para todos los $B \in \mathscr{B}$, si $\succeq$ genera la estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$.

la relación de preferencia racional $\succeq$ racionaliza (justifica) la regla de elección $C(\cdot)$ en $\mathscr{B}$ si las elecciones óptimas generadas por $\succeq$ coinciden con $C(\cdot)$ para todos los conjuntos presupuestarios en $\mathscr{B}$.

PREFERENCIA Y ELECCIÓN: Relación entre Relaciones de Preferencia y Reglas de Elección

Proposición 1.D.2

Si $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ es una estructura de elección tal que:
- Satisface el axioma débil.
- $\mathscr{B}$ incluye todos los subconjuntos de X de hasta 3 elementos,

entonces hay una relación de preferencia $\succeq$ que racionaliza $C(\cdot)$ relativo a $\mathscr{B}$; esto es $C(B) = C^*(B, \succeq)$ para todos los $B \in \mathscr{B}$.
Esta relación de preferencia racional es la única relación que lo hace.

Los commodities son los bienes y sevicios disponibles para comprar en el mercado. Un consumidor debe elegiir los niveles de consumo de commodities. La cantidad de estos es finita L

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix}$$

VECTOR DE COMMODITIES

Este vector es una lista de las distintas cantidades de diferentes commodities. Nos referimos al vector como *vector de consumo* o *canasta de consumo*.

ELECCIÓN DEL COSUMIDOR: El conjunto de consumo

El conjunto de consumo es un subconjunto del espacio de commodities $\mathbb{R}^L$: $X \subset \mathbb{R}^L$. Los elementos del conjunto de consumo son las canastas que el individuo puede consumir dadas las restricciones impuestas por el entorno.

Algunas restricciones:

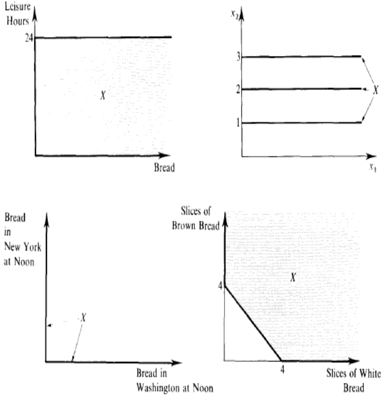


Figure 2.C.1 (left) A consumption set.

Figure 2.C.2 (right) A consumption set where good 2 must be consumed in integer amounts.

Figure 2.C.3 (left) A consumption set where only one good can be consumed.

Figure 2.C.4 (right) A consumption set reflecting survival needs.

Definición de **CONJUNTO DE CONSUMO**:

$$\boxed{X = \mathbb{R}^L_+ = \{x \in \mathbb{R}^L : x_l \geq 0 \quad \text{para } l = 1, \ldots, L\}}$$

Una caracteristicas especial del conjunto $\mathbb{R}^L_+$ es que es convexo, si $x \in \mathbb{R}^L_+$ y $x' \in \mathbb{R}^L_+$:

$$x'' = \alpha x + (1 - \alpha) x' \Rightarrow x'' \in \mathbb{R}^L_+$$

El consumidor también tiene una restricción económica importante: su elección está limitada a las canastas que puede comprar. Se introducen 2 supuestos para esta restricción:
1)Universalidad del mercado: L commodities son intercambiados en el mercado por precios públicamente conocidos.

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L \qquad \textbf{VECTOR DE PRECIOS}$$

2) Se asume que el consumidor es precio-aceptante.

ELECCIÓN DEL COSUMIDOR: Presupuesto competitivo

La ASEQUIBILIDAD de la canasta de consumo depende de 2 cosas: los precios de mercado (p) y la riqueza del consumidor (w). La canasta es asequible si su costo total no excede la riqueza del consumidor:

$$p \cdot x = p_1 x_1 + \cdots + p_L x_L \leq w$$

Definición 2.D.1

El conjunto presupuestario competitivo o Walrasiano $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ es el conjunto de todas las cesta de consumo asequibles para el consumidor que enfrenta los precios de mercado p y tiene riqueza de w.

El conjunto presupuestario Walrasiano es convexo $x \in B_{p,w}$ y $x' \in B_{p,w}$:

$$x'' = \alpha x + (1 - \alpha) x'$$

$$x'' \in B_{p,w}$$

ELECCIÓN DEL COSUMIDOR: Función de Demanda y Estática Comparativa

La demanda Walrasiana del consumidor $x(p, w)$ asigna un conjunto de canastas de consumo elegidas para cada par de precio-riqueza.
Cuando $x(p, w)$ tiene un sólo valor, hace referencia a un FUNCIÓN DE DEMANDA.

Definición 2.E.1

La correspondencia de demanda Walrasiana $x(p, w)$ es homogénea de grado cero si $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ para cualquier precio-riqueza y alpha mayor que cero.

Definición 2.E.2

La correspondencia de demanda Walrasiana $x(p, w)$ satisface la ley de Walras si para cada $p >> 0$ y $w > 0$, tenemos que $p \cdot x = w$ para todas las $x \in x(p, w)$.

ESTÁTICA COMPARATIVA:

*Efecto Riqueza:

Para cualquier (p, w), la derivada de $x_l(p, w)$ con respecto a la riqueza es conocida como el efecto riqueza en un bien.

$$D_w x(p, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L$$

Un commodity l es normal en (p, w), si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \geq 0$, es decir, es no decreciente en la riqueza.

Si el commodity l tiene un efecto riqueza negativo, entonces es inferior en (p, w).

Si todos los commodities son normales, entoncess la demanda es normal.

*Efecto precios:
Para cualquier (p, w), la derivada con respecto del precio es conocida como el efecto precios en un bien. El bien l es un bien Giffen en (p, w) si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} > 0$.

$$D_p x(p, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_L} \end{bmatrix}$$

Implicaciones de la homogeneidad y de la Ley de Walras

Proposición 2.E.1

Si la función de demanda Walrasiana $x(p, w)$ es homogenea de grado cero, entonces para todo p y w se cumple:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} w = 0$$

.

Esto implica que un cambio porcentual igual en los precios y la riqueza lleva a que no cambie la demanda. Es decir, que los efectos de precio (para todos los precios) y la riqueza se compensen de forma tal que la variación es igual a 0.

Dividiendo lo anterior por x_l

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l(p,w)} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \frac{w}{x_l(p,w)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{l,k}(p,w) + \varepsilon_{l,w}(p,w) = 0$$ **En términos de las elasticidades**

Proposición 2.E.2

Si la función de demanda Walrasiana $x(p, w)$ satisface la ley de Walras, entonces para todo p y w se cumple:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + x_k(p, w) = 0$$

Esto implica que los cambios en los precios de los bienes deben estar compensados por cambios en las cantidades demandadas de los bienes de tal manera que el ingreso del consumidor se mantenga constante.

Proposición 2.E.3

Si la función de demanda Walrasiana $x(p, w)$ satisface la ley de Walras, entonces para todo p y w se cumple:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} = 1$$

Esto implica que ante el cambio de la riqueza el sujeto reacomoadará su consumo de bienes de forma tal que se gasta todo su ingreso.

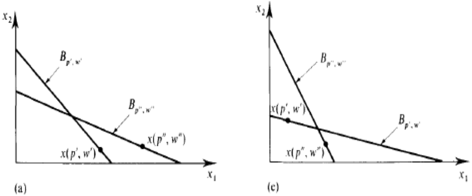
ELECCIÓN DEL COSUMIDOR: El axioma débil de la preferencia revelada y la Ley de la Demanda

Definición 2.F.1

La función de demanda Walrasiana $x(p, w)$ satisface el axioma debil de la preferencia revelada si la siguiente propiedad se sostiene para cualquiera dos situaciones de (p, w) y (p', w'):

$$\text{si} \qquad p \cdot x(p', w') \leq w \qquad \text{y} \qquad x(p', w') \neq x(p, w),$$

$$\text{entonces} \qquad p' \cdot x(p, w) > w'$$



ELECCIÓN DEL COSUMIDOR: El axioma débil de la preferencia revelada y la Ley de la Demanda

Proposición 2.F.1

Suponiendo que la función de demanda Walrasiana $x(p, w)$ es homogenea de grado cero y cumple la ley de Walras. Entonces $x(p, w)$ satisface el axioma débil si y solo si:
Para cada cambio compensado en los precios de la situación original $x(p, w)$ a un nuevo par de precio-riqueza $(p', w') = (p', p' \cdot x(p, w))$, tenemos:

$$(p' - p) \cdot [x(p', w') - x(p, w)] \leq 0$$

Con estricta desigualdad cuando $x(p, w) \neq x(p', w')$

La inecuación puede ser también escrita como:

$$\Delta p \cdot \Delta x \leq 0$$

Esto implica que la demanda y los precios se mueven en direcciones opuestas, es decir, tenemos la *Ley de Demanda*.
Pero el cumplimiento del axioma débil no es suficiente para llegar a la ley de demanda cuando los cambios de precios no son compensados, es decir, cuando p cambia y x deja de ser asequible.

ELECCIÓN DEL COSUMIDOR: El axioma débil de la preferencia revelada y la Ley de la Demanda

Si tenemos que la función de demanda es diferenciable en precios y riqueza, podemos establecer las mismas conclusiones en términos de diferenciales:
Como dijimos, el cambio total de x depende del efecto riqueza y el efecto precios, por lo tanto podemos escribir

$$x = x(p, w)$$

$$dx = D_p x(p, w) dp + D_w x(p, w) dw$$

Cuando establecemos que la riqueza es compensada de forma tal que el sujeto es capaz de comprar la misma cesta, tenemos

$$dw = dp x(p, w)$$

Por lo que reemplazando nos queda:

$$dx = D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)\left[dp x(p,w)\right]$$

Sacando factor común

$$dx = \left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T\right] dp$$

Reemplazando en la definición de WARP, nos queda:

$$dp\left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T\right] dp \leq 0$$

La matriz se encuentra dentro de los corchetes, es una matriz $L \times L$ semidefinida negativa. Cuyos elementos decimos son conocidos como *efecto sustitución*.

Preposición 2.F.2

Si una función de demanda Walrasiana diferenciable satisface la ley de Walras, homogeneidad de grado cero, y el axioma débil, entonce para cualquier (p, w) la matriz de Slutsky $S(p, w)$ satisface $v \cdot S(p, w) \cdot v \leq 0$ para cualquier $v \in \mathbb{R}^L$

Tarea

- Ver que signfica que una matriz sea semi-definida negativa.
- Qué propiedades tiene?
- Qué implica sobre s_{ii}?
- Qué implica si tengo dos bienes?

Preposición 2.F.3

Supongamos que la función de demanda Walrasiana $x(p, w)$ es diferenciable, homogénea de grado cero, y satisface la Ley de Walras. Entonces $p \cdot S(p, w) = 0$, y $S(p, w) \cdot p = 0$ para cualquie (p, w)

Tarea

- Demuestre ambos casos. Pista por algo pone lo que pone en la definición. Primero comenzar estableciendo que implica la definición para luego demostrar.