On the Theory of the Competitive Firm Under Price Uncertainty - Sandmo

Note: This document is written in Spanish.

Central question: How does price uncertainty affect a competitive firm's output decision when the firm is risk-averse?

Key mechanism / result:

- Firms maximize expected utility of profits instead of expected profits
- The optimal supply is reduced relative to the certainty case
- Risk aversion introduces a premium against uncertainty (precautionary adjustment)
- Supply function depends negatively on price variance and the Arrow–Pratt measure of risk aversion

Intuition

- A risk-averse firm requires a higher expected price to compensate for uncertainty in market conditions, leading to a lower willingness to supply output.

Why it matters: Establishes the foundational result that uncertainty can systematically depress aggregate supply, forming the basis for modern theories of production decisions under risk.

Reference: Sandmo, A. (1971). *On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty*. American Economic Review, 61(1), 65–73. https://www.jstor.org/stable/1910541

On the Theory of the Competitive Firm Under Price Uncertainty

By Angar Sandmo

Debería volver a resolver el paper completo. El comienzo del paper esta mejor explicado y más organizado en el capítulo: Silberberg Capítulo 13, Apartado: Decisiones de Producción bajo Incertidumbre de Precios

Tema: Cómo las empresas toman decisiones de producción y precios cuando no tienen certeza de los precios futuros que enfrentaran sus productos.

Parte 1:

Las empresas maximizan la utilidad del benedicio.

von Neuman función de Utilidad:

$U'(\pi) > 0 \qquad U''(\pi) < 0 \rightarrow$ entonces: averso al riesgo

Función de costos:

$F(q) = C(q)$(costos variables)$+B$ (costos fijos)

Suposición general: Los costos marginales son crecientes

Por lo tanto, la función de beneficio esta dada por:

$\pi(q) = pq - C(q) - B$

$\max_q \quad E[U(pq - C(q) - B)]$

CPO (maximizar beneficio)

$\frac{\partial E[U]}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial (pq - C(q) - B)}{\partial q} = 0$

$\frac{\partial E[U]}{\partial q} = E[U'(p - C'(q))] = 0$

CSO

$D = \frac{\partial^2 E[U]}{\partial q^2} = \frac{\partial E[U'(p-C'(q))]}{\partial q} = E[U''(p - C'(q)) - U'(C''(q))]$

Aca el paper despeja de la primera condición de orden:

$E[U'(p - C'(q))] = 0$

$E[U'p] - E[U'C'(q)] = 0$

$E[U'p] = E[U'C'(q)]$

Le resta $E[U'\mu]$

$E[U'(p - \mu)] = E[U'(C'(q) - \mu)]$

Si el beneficio es: $\pi(q) = pq - C(q) - B$, el valor esperado del beneficio es:

$E[\pi] = \mu q - C(q) - B$ (la media de la distribución de precios)

$\pi(q) - pq = -C(q) - B$

$E[\pi] = \mu q + \pi(q) - pq$

$E[\pi] - (\mu - p)q = \pi(q)$

$\pi(q) = E[\pi] + (p - \mu)q$

Lógica lastriana (con mucho más sentido que la mía):

$\pi(q) = pq - C(q) - B$

$E[\pi] = \mu q - C(q) - B$

La diferencia entre el beneficio y el beneficio esperado es:

$\pi(q) - E[\pi] = pq - C(q) - B - \mu q + C(q) + B$

Por lo tanto, cuando el precio futuro sea mayor que el precio esperado $(p - \mu) > 0 \rightarrow p > \mu$, la utilidad de π será mayor que la utilidad de $E[\pi]$, el beneficio esperado.

$\pi(q) = E[\pi] + (+)q$

$U(\pi) > U(E[\pi])$

$U'(\pi) \leq U'(E[\pi])$ si $(p - \mu) \geq 0$

$U'(\pi)(p - \mu) \leq U'(E[\pi])(p - \mu)$

$E[U'(\pi)(p - \mu)] \leq E[U'(E[\pi])(p - \mu)]$

Por definición:

$E[U'(E[\pi])(p - \mu)] = U'(E[\pi])(\mu - \mu) = 0$

$E[U'(\pi)(p - \mu)] \leq 0$

Utilidad marginal averso al riesgo $\rightarrow$ Positiva

retomando: $E[U'(p - \mu)] = E[U'(C'(q) - \mu)]$

$E[U'(p - \mu)] = E[U'(C'(q) - \mu)] \leq 0$

Para que se cumpla la igualdad:

Sabiendo que Utilidad marginal averso al riesgo es positiva, si o si $C'(q) \leq \mu$

Esto implica entonces, que el output bajo incertidumbre es menor al output bajo certidumbre.

Que sucede cuando se aumenta la variabilidad, pero mantenemos la media, tal que:

$\gamma p + \theta$

Simultaneamente mientras aumento γ disminuye θ, tal que no se produce una variación de μ

$\mu \partial\gamma + \partial\theta = 0$

$\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} = -\mu$

La nueva función de beneficio:

$\pi = (\gamma p + \theta)q - C(q) - B$

Por lo tanto, $E[U(\pi)] = E[U(\gamma pq + \theta q - C(q) - B)]$

CPO

$\frac{\partial E[U(\pi)]}{\partial q} = E[U'(\pi)(\gamma p + \theta - C'(q))] = 0$

Producción óptima

$q^{\circ} = q(p, \gamma, \theta, B) \rightarrow \pi^{\circ} = \pi(p, \gamma, \theta, B, q^{\circ})$

Estática comparada

$E[U'(\pi)(\gamma p + \theta - C'(q))] = 0$

$E[U''(\pi)\frac{\partial q}{\partial \gamma}\left((p-\mu)q + (\gamma p + \theta)\frac{\partial q}{\partial \gamma} - C'(q)\frac{\partial q}{\partial \gamma}\right)(p - C'(q)) + U'(\pi)\frac{\partial q}{\partial \gamma}(p - \mu - C''(q)\frac{\partial q}{\partial \gamma})] \equiv 0$

Saco factor común de $\frac{\partial q}{\partial \gamma}$ en el primer término

$E[U''(\pi)\left((p-\mu)q + (\gamma p + \theta - C'(q))\frac{\partial q}{\partial \gamma}\right)(p - C'(q)) + U'(\pi)(p - \mu - C''(q)\frac{\partial q}{\partial \gamma})] \equiv 0$

Distribuyo $U''(\pi)$, $U'(\pi)$

$E[U''(\pi)(p-\mu)q(\gamma p+\theta-C'(q))+U''(\pi)(\gamma p+\theta-C'(q))(p-C'(q))\frac{\partial q}{\partial \gamma}+U'(\pi)(p-\mu)-U'(\pi)C''(q)\frac{\partial q}{\partial \gamma}] \equiv 0$

Despejo los términos que se encuentran multiplicados por $\frac{\partial q}{\partial \gamma}$

$E[U''(\pi)(p-\mu)q(p-C'(q))+U'(\pi)(p-\mu)] = -E[U''(\pi)(\gamma p+\theta-C'(q))(p-C'(q))\frac{\partial q}{\partial \gamma}-U'(\pi)C''(q)\frac{\partial q}{\partial \gamma}]$

Saco factor común de $\frac{\partial q}{\partial \gamma}$ en el lado izquierdo de la ecuación

$E[U''(\pi)(p-\mu)q(p-C'(q))+U'(\pi)(p-\mu)] = -E[U''(\pi)(\gamma p+\theta-C'(q))(p-C'(q))-U'(\pi)C''(q)]\frac{\partial q}{\partial \gamma}$

Reemplazo por la condición de segundo orden

$E[U''(\pi)(p-\mu)q(p-C'(q)) + U'(\pi)(p-\mu)] = -D\frac{\partial q}{\partial \gamma}$

Divido en ambos lados de la ecuación por $-D$

$-\frac{E[U''(\pi)(p-\mu)q(p-C'(q))]}{D} - \frac{E[U'(\pi)(p-\mu)]}{D} = \frac{\partial q}{\partial \gamma}$

Reordeno

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[U''(\pi)(p-\mu)(p-C'(q))]}{D} - \frac{E[U'(\pi)(p-\mu)]}{D}$

Análisis de la estática:

El signo del último término es negativo, dado $E[U'(C'(q)-\mu)] \leq 0$ que escribimos antes. Además el signo de D es negativo, dado a que se trata de la **CSO**.

Por lo tanto:

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[U''(\pi)(p-\mu)(p-C'(q))]}{(-)} - \frac{(-)}{(-)}$

Es decir, que es ambiguo el signo de la estática, excepto cuando: $C'(q) = \mu$. Ya que:

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[U''(\pi)(p-\mu)(p-\mu)]}{D} - A$

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[U''(\pi)(p-\mu)^2]}{D} - A$

El signo que tomaría el primer término tambien sería negativo ya que, dijimos que la función de utilidad era de un averso al riesgo decreciente. Por lo tanto $U'' < 0$

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[U''(\pi)(p-\mu)^2]}{D} - A$

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[(-)(+)]}{(-)} - A$

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -B - A = (-)$

En este caso, un aumento en la variabilidad de la distribución de los precios produce una disminución de las cantidades ofertadas de output.

Bajo certeza, la cantidad de producción se elige teniendo en cuenta los margenes, es por ello que la cantidad de costo fijo no importa ante la elección del nivel de output, y una variación infinitesimal de estos no varía las cantidades.

Bajo incertidumbre no sucede lo mismo. Derivamos respecto de B la **CPO**

$\frac{\partial q}{\partial B} = \frac{E[U''(\pi)(p-C'(q))]}{D}$

Se puede observar que si hay una variación, pero que signo tomaría?

Para ello el paper hace uso de las fórmulas de Arrow-Pratt de la aversion absoluta y relativa al riesgo.

Si hay un nivel de beneficios $\bar{\pi}$ tal que $p = C'(q)$, y la firma tiene una aversión absoluta al riesgo decreciente: podemos escribir:

$R_A(\pi) \leq R_A(\bar{\pi})$ para todos los $p \geq C'(q)$

Reemplazando con la fórmula de Arrow-Pratt:

$-\frac{U''(\pi)}{U'(\pi)} \leq R_A(\bar{\pi})$

Sabiendo que

$U'(\pi)(p - C'(q)) \geq 0$ para todos los $p \geq C'(q)$

Entonces:

$-U'(\pi)(p - C'(q)) \leq 0$

Multiplico en ambos lados de la ecuación, invierto el signo al multiplicar por un número negativo:

$-\frac{U''(\pi)}{U'(\pi)} - U'(\pi)(p - C'(q)) \geq R_A(\bar{\pi}) - U'(\pi)(p - C'(q)$

$U''(\pi)(p - C'(q)) \leq -R_A(\bar{\pi})U'(\pi)(p - C'(q)$

Aplico valor esperado en ambos lados:

$E[U''(\pi)(p - C'(q))] \geq -R_A(\bar{\pi})E[U'(\pi)(p - C'(q)]$

$E[U'(\pi)(p - C'(q)]$ es la condición de primer orden, que para mantenerse debe de ser igual a 0

$E[U''(\pi)(p - C'(q))] \geq 0$

Volviendo a $\frac{\partial q}{\partial B}$:

$\frac{\partial q}{\partial B} = \frac{E[U''(\pi)(p-C'(q))]}{D} = \frac{(+)}{(-)} = (-)$

Por lo tanto, para una firma aversa al riesgo un aumento de los infinetesimal de los costos si implica una variación de los cantidades de producción en forma negativa. Ya que esto implicaría una disminución de los beneficios esperados.

¿Qué sucede cuando aumenta el precio esperado?

Es equivalente a aumentar θ $(\gamma p + \theta)$, por lo tanto, veamos la estática comparada de las cantidades ante una variación de este parámetro:

$\frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{E[-qU''(\pi)(p-C'(q))-U'(\pi)]}{D}$

$\frac{\partial q}{\partial \theta} = -q\frac{E[U''(\pi)(p-C'(q))]}{D} - \frac{E[U'(\pi)]}{D}$

Comparando con la estática anterior, podemos reemplazar:

$\frac{\partial q}{\partial \theta} = -q\frac{\partial q}{\partial B} - \frac{E[U'(\pi)]}{D}$

Analicemos los signos, y veamos si podemos concluir algo:

$\frac{\partial q}{\partial \theta} = -q(-) - \frac{E[(+)]}{(-)} = (+)$

Podemos concluir que un aumento de la media de los precios genera un aumento de las cantidades producidas. Esto se genera por dos efectos, uno puramente de sustituación, el segundo término, y otro que refiere a que un aumento de la media equivaldría a una disminución de los costos fijos, el primer término. Por lo tanto, una firma que sea aversa al riesgo de manera decreciente, un aumento de los precios esperados generará un alza en las cantidades producidas por la firma.

¿Qué sucede cuando se aplica un impuesto a las ganancias? Aclaración, teniendo en cuenta que cuando la empresa tiene pérdidas, la empresa recibe una compensación por la misma o un crédito fiscal.

La nueva función de beneficio de la empresa estaría dada por:

$\pi(q) = (pq - C(q) - B)(1-t)$

La condición de primer y segundo orden permanece igual.

Si realizamos la estática comparada con respecto a la alícuota, obtenemos:

$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{E[\pi U''(\pi)(p-C'(q))]}{(1-t)D}$

Para poder determinar el signo de la estática, tenemos que conocer como es el riesgo averso relativo del sujeto.

Partiendo de la fórmula de Arrow, podemos:

$-\frac{U''(q)\pi}{U'(q)} = R_R(\pi)$

Cuando el riesgo averso relativo de la firma es decreciente, entonces:

$-\frac{U''(q)\pi}{U'(q)} \leq R_R(\bar{\pi})$ para todo los $p \geq C'(q)$

Como ya lo definimos antes.

Cuando la firma tiene RAR creciente, entonces:

$-\frac{U''(q)\pi}{U'(q)} \geq R_R(\bar{\pi})$ para todo los $p \geq C'(q)$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-U'(\pi)(p - C'(q))$ y obtenemos:

$U''(q)\pi(p - C'(q)) \leq -R_R(\bar{\pi})U'(\pi)(p - C'(q))$

$E[U''(q)\pi(p - C'(q))] \leq -R_R(\bar{\pi})E[U'(\pi)(p - C'(q))]$

Por condición de primer orden $E[U'(\pi)(p - C'(q))] = 0$, por lo tanto:

$E[U''(q)\pi(p - C'(q))] \leq 0$

Volviendo a la estática comparada, entonces:

$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{E[\pi U''(\pi)(p - C'(q))]}{(1-t)D} = \frac{(-)}{(1-t)(-)}$

Por lo tanto, un aumento de los impuestos aumenta las cantidades ofrecidas cuando la empresa es aversa al riesgo de forma creciente. Esto tiene lógica, ya que un aumento de los impuestos generaría una disminución de los beneficios que recibe la empresa y por lo tanto, una disminución del “riesgo que le genera”.

Si la empresa fuera aversa al riesgo decreciente solo basta con cambiar los signos de $E[U''(q)\pi(p - C'(q))] \leq 0$. De tal forma, la inecuación quedaría:

$E[U''(q)\pi(p - C'(q))] \geq 0$

Por lo tanto, para estas firmas, un aumento de los impuestos implicaría una disminución de la producción.

Conclusiones generales primer y segundo apartado:

a. La diferencia del beneficio esperado y el beneficio efectivo va a estar dado por la diferencia entre el precios esperado y el precio efectivo:

$\pi(q) = E[\pi] + (p - \mu)q$

b. El aumento de la variabilidad de los precios no tiene un efecto determinado en la variación de las cantidades. Sin embargo, cuando tanto el precio esperado μ como el costo esperado $C'(q)$ sean positivos, el aumento de la variabilidad va a causar una disminución de la cantidad ofrecida.

$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{qE[U''(\pi)(p-\mu)(p-C'(q))]}{D} - \frac{E[U'(\pi)(p-\mu)]}{D}$

El signo va a estar determinado por el primer término, ya que es ambigüo según los valores que tome $p, \mu, C'(q)$

c. Cuando la firma es riesgo aversa decreciente un aumento de los costos fijos, implica una disminución de las cantidades producidas:

$\frac{\partial q}{\partial B} = \frac{E[U''(\pi)(p-C'(q))]}{D}$

Y un traslado positivo de la media provoca un aumento de las cantidades ofrecidas:

$\frac{\partial q}{\partial \theta} = -q\frac{\partial q}{\partial B} - \frac{E[U'(\pi)]}{D}$

d. En cuanto al efecto de los impuestos sobre las cantidades producidas, depende de la aversidad al riesgo, y como esta varía ante cambios la variación del beneficio:

$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{E[\pi U''(\pi)(p - C'(q))]}{(1-t)D} = \frac{(-)}{(1-t)(-)}$

Cuando aumente la aversidad ante el aumento del beneficio, la empresa siempre optará por aumentar sus cantidades producidas cuando se le aplique un impuesto. Cuando la aversidad disminuya, la reacción será la contraria.

El paper concluye en como debe ser el nivel de beneficio para que la empresa produzca:

Suponiendo que x° es una cantidad en la que se cumple las condiciones de primer y segundo orden, x° va a ser el beneficio máximo que recibe la empresa, por lo tanto, debe de ser mayor (o igual en caso de producir 0) al beneficio que recibiría la firma si solo incurriera en costos fijos:

$E[U(\pi^\circ)] \geq U(-B)$

$E[U(px^\circ - C(x^\circ) - B)] \geq U(-B)$

Desarrollamos la primera parte de la ecuación con Taylor (no Swift), aproximando la función a μ, por lo tanto:

$E[U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) + U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^\circ(p-\mu) + \frac{1}{2!}U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}(p-\mu)^2 + ...]$

$E[U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) + U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^\circ(p-\mu) + \frac{1}{2!}U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}(p-\mu)^2] \geq U(-B)$

Distribuimos el valor esperado:

$E[U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)] + E[U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^\circ(p-\mu)] + E[\frac{1}{2!}U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}(p-\mu)^2] \geq U(-B)$

$U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) + U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^\circ(\mu-\mu) + \frac{1}{2}U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2] \geq U(-B)$

$U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) + \frac{1}{2}U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2] \geq U(-B)$

Reordenamos:

$U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B) \geq -\frac{1}{2}U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2]$

La ultima parte $x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2]$ se asemeja a la varianza de la distribución $\frac{(p-\mu)^2}{n}$

Dividimos todo en la primera derivada $U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)$, quedando:

$\frac{U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B)}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)} \geq -\frac{1}{2}\frac{U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2]}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)}$

Reorganizamos:

$\frac{U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B)}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)} \geq -\frac{U''(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)}\frac{x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2]}{2}$

$\frac{U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B)}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)} \geq AAR\frac{x^{\circ 2}E[(p-\mu)^2]}{2}$

El signo del último término depende de la aversion que tenga la firma. Cuando esta aversa al riesgo, según la fórmula Arrow-Pratt, el valor será positivo. Por lo tanto, como el lado izquierdo de la inecuación debe de ser mayor, se debe cumplir que obligatoriamente sea positivo, teniendo en cuenta que el denominador es positivo, solo nos queda establecer las restricciones para que el numerador lo sea y que así se cumpla la inecuación:

Por lo tanto:

$U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B) > 0$

Debe de ser positivo, reordenando:

$U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) > U(-B)$

Dada la monotonicidad de la función de utilidad, se debe cumplir también:

$\mu x^\circ - C(x^\circ) - B > -B$

$\mu > \frac{C(x^\circ)}{x^\circ}$

Por lo tanto, bajo incertidumbre de los precios, para que la firma produzca, el precio esperado debe de ser mayor al costo promedio. De esta forma, el beneficio es estrictamente positivo, y por lo tanto se cumple la inecuación $\frac{U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B)}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)} \geq AAR\frac{x^{\circ 2} E[(p-\mu)^2]}{2}$. Por otro lado, podemos observar que cuanto mayor sea el grado de aversión que tenga la firma más dificil será para ella entrar al mercado, ya que mayor deberan de ser los beneficio esperados para cumplir la desigualdad.

Por otro lado, cuando la empresa sea neutral al riesgo, la ecuación cambia, ya que:

$\frac{U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B)}{U'(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B)} \geq 0$

Tal que:

$U(\mu x^\circ - C(x^\circ) - B) - U(-B) \geq 0$

Bajo el mismo procedimiento anterior:

$\mu \geq \frac{C(x^\circ)}{x^\circ}$

Por lo tanto, ahora la empresa solo necesita de un beneficio esperado positivo y no estrictamente positivo como en las firmas aversas.

Conclusión La presencia de incertidumbre incrementa el umbral mínimo de rentabilidad requerido para que una firma decida producir. En el caso de una empresa aversa al riesgo, el precio esperado debe ser estrictamente superior al costo promedio para compensar el término adicional asociado a la varianza del precio y al grado de aversión al riesgo (capturado por la medida de Arrow–Pratt). Es decir, la firma exige una prima de riesgo para operar en el mercado.

Por el contrario, cuando la empresa es neutral al riesgo, la condición se relaja al requerir únicamente que el precio esperado sea igual o superior al costo promedio. En este sentido, la actitud frente al riesgo determina la viabilidad de la producción, reforzando la conclusión de que mayor aversión al riesgo implica menor disposición a producir y, por ende, una menor oferta agregada en equilibrio.