Demostración Teorma vNM

1 von Neumann-Morgenstern Utilidad Esperada

Axioma (5.1) $\succ$ es una relación de preferencia.

Axioma (5.2) *Independencia* Para todo $p, q, r \in P$ y $\alpha \in (0, 1]$, $p \succ q$ implica:

$$p \succ q \implies \alpha p + (1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$$

Axioma (5.3) *Continuidad* Para todo $p, q, r \in P$, si $p \succ q \succ r$ entonces existe un $a, b \in (0, 1)$ tal que:

$$\alpha p + (1-\alpha)r \succ q \succ bp + (1-b)r$$

Teorema (5.4) Una relación binaria $\succ$ en P satisface los axiomas $(5.1 - 3)$ si y solo si existe una función $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p \succ q \Leftrightarrow \sum_z u(z)p(z) > \sum_z u(z)q(z)$$

Además, si u representa $\succ$ en el sentido de (5.5), entonces una función $u' : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ también representa $\succ$ en este sentido si y solo existe un número real $c > 0$ y d tal que $u'(\cdot) = cu(\cdot) + d$.

Lema (5.6) Si $\succ$ en P satisface los Axiomas $(5.1 - 3)$ entonces:

1. $p \succ q$ y $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ implica $\beta p + (1-\beta)q \succ \alpha p + (1-\alpha)q$

Tenemos:

$$p \succ q$$

Dado el axioma 2 entonces tenemos:

$$\beta p + (1-\beta)q \succ \beta q + (1-\beta)q \equiv q$$

$$L \equiv \beta p + (1-\beta)q$$

Entonces tenemos:

$$L \succ q$$

Dado axioma 2 entonces:

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)L+\frac{\alpha}{\beta}L \succ \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)q+\frac{\alpha}{\beta}L$$

$$L \succ \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)q+\alpha p+(\frac{\alpha}{\beta}-\alpha)q$$

$$\boxed{\beta p+(1-\beta)q \succ \alpha p+(1-\alpha)\,q}$$

2. $p \succeq q \succeq r$ y $p \succ r$, implica que existe un único $\alpha^* \in [0,1]$ tal que $q \sim \alpha^* p+(1-\alpha^*)r$

Dado 1. entonces tenemos que si existe un α^* tal que $q \sim \alpha^* p+(1-\alpha^*)r$. Este debe ser único, porque si hubieran dos $\alpha \neq \alpha'$ tal que $\alpha > \alpha'$ entonces tenemos que:

$$q \sim \alpha p+(1-\alpha)r$$

$$q \sim \alpha' p+(1-\alpha')r$$

$$\alpha p+(1-\alpha)r \succ \alpha' p+(1-\alpha')r \implies q \succ q$$

Lo cual es una contradicción.

Sea:

$$\alpha^* = \sup\left\{\alpha \in [0,1] : q \succeq \alpha p+(1-\alpha)r\right\}$$

Ahora tenemos que demostrar que frente a este α^* se cumple que $\sim$ es decir, no se cumple $\succ$.

Si sucediese que α^* es tal que $\alpha^* p+(1-\alpha^*)r \succ q$ entonces sería contrario a su construcción y sería una contradicción.

Si sucediese que $q \succ \alpha^* p+(1-\alpha^*)r$. Tal que:

$$p \succ q \succ \alpha^* p+(1-\alpha^*)r$$

Entonces por continuidad podemos tener un β tal que:

$$q \succ (1-\beta)p+\beta\left(\alpha^* p+(1-\alpha^*)r\right)$$

$$q \succ \left[1-\beta(1-\alpha^*)\right]p+\beta(1-\alpha^*)r$$

Donde $\beta(1-\alpha^*) \leq (1-\alpha^*)$. Lo que por 1. implica que debe suceder que $[1-\beta(1-\alpha^*)]\,p + \beta(1-\alpha^*)r \succ \alpha^* p + (1-\alpha^*)r$, por lo tanto no podría suceder que α^* sea un máximo.

3. $p \sim q$ y $\alpha \in [0,1]$ implica $\alpha p + (1-\alpha)r \sim \alpha q + (1-\alpha)r$ para todo $r \in P$.

La forma más sencilla implicaría demostrar que $\succeq$ también cumple independencia si $\succ$ lo cumple. Supongamos por contradicción que si tenemos:

$$p \succeq q$$

Sucede que

$$\alpha p + (1-\alpha)r \neg \succeq \alpha q + (1-\alpha)r$$

Como se trata que $\succeq$ es completa entonces debe suceder que:

$$\alpha q + (1-\alpha)r \succ \alpha p + (1-\alpha)r \implies q \succ p$$

Lo cual es una contradicción.

Como $\succeq$ también cumple independencia. Entonces tenemos que:

$$\alpha p + (1-\alpha)r \succeq \alpha q + (1-\alpha)r$$

$$\alpha q + (1-\alpha)r \succeq \alpha p + (1-\alpha)r$$

Lo cual implica que por construcción de $\sim$ también se cumple la independencia.

Lema (5.7) Si $\succ$ en P satisface los axiomas $(5.1-3)$, entonces existe z^0 y z_0 en Z tal que $\delta_{z^0} \succeq p \succeq \delta_{z_0}$, para todo $p \in P$.

Si tenemos todos los resultados de certeza, entonces podemos ordenrlos de más preferidos a menos preferios tal que:

$$\delta_{z^0} \succeq \delta_2 \succeq \cdots \succeq \delta_{n-1} \succeq \delta_{z_0}$$

Si sucede que $\delta_{z^0} \sim \delta_{z_0}$ entonces, por Lema 5.6_3, debe suceder que todos los estados son indiferentes y, por lo tanto, todas las loterías reportan la misma utilidad.

Si sucede que $\delta_{z^0} \succ \delta_{z_0}$, entonces dado el Lema 5.6_2, tenemos que cualquiera de los resultados e certeza puede ser escrito tal que:

$$\delta_i \sim \alpha_i \delta_{z^0} + (1-\alpha_i)\delta_{z_0} \qquad \text{donde } i \in [0,1]$$

La construcción de cualquier lotería estaría dada por:

$$L \equiv \sum_i \beta_i \delta_i \equiv \sum_i \beta_i \left(\alpha_i \delta_{z^0} + (1-\alpha_i)\delta_{z_0}\right)$$

Tal que $\sum_i \beta_i = 1$. De manera que podemos escribirla:

$$L \equiv \alpha_p \delta_{z^0} + (1-\alpha_p)\delta_{z_0}$$

Donde $\sum_i \beta_i \alpha_i = \alpha_p$, donde es claro que $\alpha_p \in [0,1]$, y $1 - \sum_i \beta_i \alpha_i = \sum_i \beta_i - \sum_i \beta_i \alpha_i = \sum_i \beta_i (1-\alpha_i)$. De esta forma tenemos que:

$$\delta_{z^0} \succeq p \succeq \delta_{z_0} \qquad \forall p$$

Por lo tanto, **existe** un α_p y dado Lema 5.6_2 es **único** para p.

De esta forma, para demostrar el teorema definimos.

Para todo $p \in P$:

$$f(p) = \alpha \text{ tal que } \alpha \delta_{z^0} + (1-\alpha)\delta_{z_0} \sim p$$

Observemos que si $q \succ p$, entonces:

$$\alpha_q \delta_{z^0} + (1-\alpha_q)\delta_{z_0} \sim q$$

y

$$\alpha_p \delta_{z^0} + (1-\alpha_p)\delta_{z_0} \sim p$$

Entonces:

$$\alpha_q \delta_{z^0} + (1-\alpha_q)\delta_{z_0} \succ \alpha_p \delta_{z^0} + (1-\alpha_p)\delta_{z_0} \Leftrightarrow \alpha_q > \alpha_p$$

Que implica:

$$\alpha_q > \alpha_p \Leftrightarrow f(q) > f(p)$$

Además, para todo $p, q \in P$ y $\alpha \in [0,1]$ tenemos que:

$$\alpha p + (1-\alpha) q \sim \alpha \left[\alpha_p \delta_{z^0} + (1-\alpha_p)\delta_{z_0}\right] + (1-\alpha)\left[\alpha_q \delta_{z^0} + (1-\alpha_q)\delta_{z_0}\right]$$

Lo cual implica que.

$$\alpha p + (1-\alpha) q \sim \alpha \left[f(p) \delta_{z^0} + (1-f(p))\delta_{z_0}\right] + (1-\alpha)\left[f(q) \delta_{z^0} + (1-f(q))\delta_{z_0}\right]$$

Reordenando:

$$\alpha p + (1-\alpha)q \sim [\alpha f(p) + (1-\alpha)f(q)]\, \delta_{z^0} + [\alpha(1-f(p)) + (1-\alpha)(1-f(q))]\, \delta_{z_0}$$

$$\alpha p + (1-\alpha)q \sim [\alpha f(p) + (1-\alpha)f(q)]\, \delta_{z^0} + [1-\alpha f(p) + (1-\alpha)f(q)]\, \delta_{z_0}$$

Por definición de f entonces:

$$f(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha f(p) + (1-\alpha)f(q)$$

Por lo tanto, a cada loteria p la podemos escribir como:

$$f(p) = \sum_z \alpha_z f(\delta_z)$$

Tal que $\sum_z \alpha_z = 1$. Si $u(z) = f(\delta_z)$, entonces:

$$f(p) = \sum_x u(z)p(z)$$