Clase 12 b

Atemporal, Temporal e Intertemporal Dualidad en la Teoría del Consumidor

Cooper y McLaren

1. Introducción

Una ventaja de la aplicación de la teoría de dualidad en los problemas de optimización económica es que, mediante la elección juicios de la función principal, las funciones de respuestas requeridas de un agente económico pueden ser derivadas sin recurrir a la optimización explícita.

En el contexto del problema de optimización dinámica, las relaciones duales entre funciones instantáneas pueden ser llamadas utilidad atemporal. Tal vez de mayor interés, sin embargo, sería la dualidad temporal, o la relación entre los valores presentes de secuencias de correspondientes funciones instantáneas padres.

2. Resultados Preliminares

Sea $\mathbb{R}^n$ un espacio euclidiano. Sea Ω^n el n-ortante no-negativo. Denotemos $\mathbb{R}^1$ con $\mathbb{R}$, y Ω^1 con Ω. Sea Ω^n_+ el n-ortante positivo.

Sea $q \in \Omega^n$ sea el vector de consumo, Sea $p \in \Omega^n_+$ el vector de precios. Sea $f(q)$ una función de utilidad instantánea $f : \Omega^n \to \mathbb{R}$.

De esta forma, el problema de maximización intertemporal queda determinado por:

$$\max_q U = f(q)$$

s.t. $p'q \leq x$

Es decir, maximizo la utilidad eligiendo mi vector consumo q, donde mi ingreso es igual a x. La función lagrangiana del problema es:

$$\mathscr{L} = f(q) + \lambda \left[x - p'q\right]$$

Condición de equilibrio

$$\nabla f(q) = \lambda \nabla x$$

La función de utilidad indirecta $g : \Omega \times \Omega_{+}^{n} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por:

$$g(x,p) = \max_{q} \{f(q)|p'q \leq x\}$$

Las propiedades de la función indirecta de utilidad son:

1. g es continua.
2. g es no-decreciente en x.
$$\frac{\partial g(x,p)}{\partial x} = \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}\right|_{*} = \lambda \geq 0$$
3. g es no-creciente en p.
$$\frac{\partial g(x,p)}{\partial p} = \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p}\right|_{*} = -\lambda q \leq 0$$
4. g es cuasi-convexa en p.

Por definición:
$$g\left(\alpha p + (1-\alpha)p'\right) \leq \max\left\{g\left(p\right), g\left(p'\right)\right\}$$

Si $\max\left\{g\left(p\right), g\left(p'\right)\right\} = g\left(p\right)$, esto implica que $p \geq p'$ dada la tercera propiedad. Esto también implica que $p \geq \alpha p + (1-\alpha)p'$. Por lo tanto, dada la segunda propiedad debe cumplirse que es cuasi-convexa.

5. g es homogénea de grado cero en (x, p)

$$g(x,p) = \max_{q} \{f(q)|p'q \leq x\} \equiv \max_{q} \{f(q)|tp'q \leq tx\} = g(tx,tp)$$

$$g(x,p) \equiv g(tx,tp)$$

6. $\exists \bar{x}$ s.t. g es cóncava en x para $x \geq \bar{x}$

Es decir, existe un nivel de ingreso a partir del cual los rendimientos marginales del ingreso son decrecientes. Tal que, si $x_1, x_2 \geq \bar{x}$ entonces sucede que:

$$g\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, p\right) \geq \alpha g(x_1,p) + (1-\alpha)\, g(x_2,p)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$p'q^{*}(x_1) \equiv x_1 \text{ y } p'q^{*}(x_2) \equiv x_2$$

Sea $x_3 \equiv \alpha x_1 + (1 - \alpha x_2)$, podemos mostrar que:

$$p'q_{\alpha} = p'\left[\alpha q^{*}(x_1) + (1-\alpha)q^{*}(x_2)\right] = \alpha p'q^{*}(x_1) + (1-\alpha)p'q^{*}(x_2) = x_3$$

Es decir, que q_{α} es asequible para x_3. Cómo $f(q)$ es cóncava entonces tenemos que:

$$f\left(\alpha q^{*}(x_1) + (1-\alpha)\, q^{*}(x_2)\right) \geq \alpha f(q^{*}\left(x_1\right)) + (1-\alpha)\, f(q^{*}\left(x_2\right))$$

No obstante observemos que el lado izquierdo es equivalente a $f(q_\alpha)$. Mientras que el lado derecho es equivalente a la función de utilidad indirecta en cada caso:

$$f\left(q_\alpha\right) \geq \alpha g(x_1, p) + (1-\alpha)\, g(x_2, p)$$

Sea $g(x_3, p)$ la función de utilidad indirecta cuando x_3. Debido a que la función maximiza y q_α forma parte del conjunto de opciones debe suceder que:

$$g(x_3, p) \geq f\left(q_\alpha\right) \geq \alpha g(x_1, p) + (1-\alpha)\, g(x_2, p)$$

Lo que, reemplazando por la construcción de x_3, implica que:

$$g\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2, p\right) \geq \alpha g(x_1, p) + (1-\alpha)\, g(x_2, p)$$

La concavidad refleja utilidad marginal del ingreso decreciente.

Mientras que el problema de minimización del costo es:

$$\min_q h = p'q$$

s.t. $f(q) \geq u$

La función lagrangiana del problema es:

$$\mathscr{L} = p'q + \lambda\left[u - f(q)\right]$$

Condición de equilibrio

$$\nabla(p'q) = \lambda \nabla f(q)$$

Podemos reexpresar el problema tal que $x = p'q$

$$\mathscr{L} = x + \lambda\left[u - f(q)\right] + y\left[x - p'q\right]$$

Resolviendo minimización por partes:

$$\min \mathscr{L}' = \lambda \left\{ u - f(q) + \frac{y}{\lambda}\left[x - p'q\right] \right\}$$

Esto resuelve a $q(x, p)$, tal que:

$$\mathscr{L} = x + \lambda\left[u - g(x, p)\right]$$

La función de gasto indirecto $h : \mathbb{R} \times \Omega_+^n \to \Omega$ es definida por:

$$h(u,p) = \min_{q} \{p'q | f(q) \geq u\} = \min_{x} \{x | g(x,p) \geq u\}$$

Las propiedades de la función indirecta de gasto son:

1. h es continua y no negativa.
2. h es creciente en u.
$$\frac{\partial h(u,p)}{\partial u} = \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u}\right|_{*} = \lambda > 0$$
3. h es no-decreciente en p.
$$\frac{\partial h(u,p)}{\partial p} = \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p}\right|_{*} = q^{*} \geq 0$$
4. h es cóncava en p.
$$\frac{\partial^2 h(u,p)}{\partial p^2} = \left.\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial p^2}\right|_{*} = \frac{\partial q^{*}}{\partial p} < 0$$
5. h es homogénea de grado 1 en p.
$$th(u,p) = t \min_{q} \{p'q | f(q) \geq u\} \equiv \min_{q} \{tp'q | f(q) \geq u\} = h(u,tp)$$
6. $\exists \bar{u}$ s.t. h es convexa en u para $u \geq \bar{u}$

Es decir, existe un nivel de utilidad a partir del cual los costos marginales de la utilidad son crecientes. Tal que, si $u_1, u_2 \geq \bar{u}$ entonces sucede que:

$$h\left(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2, p\right) \leq \alpha h(u_1,p) + (1-\alpha)\, h(u_2,p)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$f\left(q^{*}(u_1)\right) \equiv u_1 \text{ y } f\left(q^{*}(u_2)\right) \equiv u_2$$

Sea $u_3 \equiv \alpha u_1 + (1 - \alpha u_2)$, podemos mostrar que:

$$\alpha f\left(q^{*}(u_1)\right) + (1-\alpha) f\left(q^{*}(u_2)\right) = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 = u_3$$

Cómo $f(q)$ es cóncava entonces tenemos que:

$$f(q_\alpha) = f\left(\alpha q^{*}(u_1) + (1-\alpha)\, q^{*}(u_2)\right) \geq \alpha f(q^{*}\left(u_1\right)) + (1-\alpha)\, f(q^{*}\left(u_2\right))$$

No obstante observemos que el lado derecho es igual a u_3:

$$f\left(q_\alpha\right) \geq u_3$$

Por lo tanto, q_α es una canasta fatible. Dada la definición de q_α tenemos que:

$$p'q_\alpha = p'\left(\alpha q^*(u_1) + (1-\alpha)\, q^*(u_2)\right) = \alpha p' q^*(u_1) + (1-\alpha) p' q^*(u_2) = \alpha h(u_1, p) + (1-\alpha) h(u_2, p)$$

Pero como estamos minimizando para u_3 aún cuando q_α es posible, debe suceder que:

$$p'q_\alpha \geq p'q^*(u_3) = h(u_3, p)$$

Lo que implica:

$$\alpha h(u_1, p) + (1-\alpha) h(u_2, p) \geq h(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2, p)$$

Las condiciones (vi) en ambos problemas son necesarias para asegurar la existencia de una solución del problema intertemporal.

Identidad de Roy

$$q^*(x, p) = -\frac{g_p(x, p)}{g_x(x, p)}$$

Identidad de Shephard o **Teorema de Hotelling**

$$q^{**}(u, p) = h_p(u, p)$$

Por conveniencia técnica en lo que sigue asumimos que g y h son al menos diferenciables doblemente continuas $g \in C^2$ en (x, p) y $h \in C^2$ en (u, p).

3. Los Problemas Intertemporales

El problema de maximización intertemporal queda definido como, la restricción presupuestaria se escribe como:

$$rw(t) - x(t) \leq \dot{w}(t)$$

Es decir, la variación del stock de deuda debe ser de al menos la diferencia entre los intereses ganados y lo consumido.

Reordenando:

$$\dot{w}(t) - rw(t) \geq x(t)$$

Resolvemos por el método del factor integrante:

$$e^{-rt}\dot{w}(t) - re^{-rt}w(t) \geq e^{-rt}x(t)$$

Integrando:

$$\int_0^\infty e^{-rt}\dot{w}(t) - re^{-rt}w(t)dt \geq \int_0^\infty e^{-rt}x(t)dt$$

El lado izquierdo es igual a $\int (udv/dt + vdu/dt)dt = \int d(uv)/dtdt = uv$. Por lo tanto:

$$e^{-rt}w(t) \geq \int_0^\infty e^{-rt}x(t)dt$$

Reordenando:

$$w(t) \geq e^{rt}\int_0^\infty e^{-rt}x(t)dt$$

Evaluamos $w(0) = w$:

$$w \geq \int_0^\infty e^{-rt}x(t)dt$$

El problema de maximización de la utilidad intertemporal queda determinado por $V : \Omega \times \Omega_+^{n+2} \rightarrow R$, tal que:

$$V\left(w, p, r, \delta\right) = \max_{\{x(t)\}}\left\{\int_0^\infty e^{-\delta t}g\left(x(t), p\right)dt \middle| \int_0^\infty e^{-rt}x(t)dt \leq w\right\}$$

Mientras que para el problema de minimización del gasto tenemos:

$$\delta v(t) - u(t) \geq \dot{v}(t)$$

Este es el problema dual e implica el gasto necesario para cierta utilidad también conocidos como los problemas de *costo de ir*.

De la misma forma que antes puede verse que:

$$\dot{v}(t) - \delta v(t) \leq u(t)$$

Es decir, el cambio en el stock de utilidad $v(t)$ en el tiempo, neto del efecto del descuento temporal a la tasa δ, debe igualar el flujo instantáneo de utilidad $u(t)$. En otras palabras, la evolución de $v(t)$ refleja cómo se acumula el valor presente de la utilidad, descontada en el tiempo. Resolviendo por método del factor integrante:

$$v(t) \leq e^{\delta t}\int_0^\infty e^{-\delta t}u(t)dt$$

Evaluando que $v(0) = v$:

$$v \leq \int_0^\infty e^{-\delta t} u(t) dt$$

El problema de minimización queda determinado por:

$$W\left(v, p, r, \delta\right) = \min_{\{u(t)\}} \left\{ \int_0^\infty e^{-rt} h(u(t), p) dt \middle| \int_0^\infty e^{-\delta t} u(t) dt \geq v \right\}$$

En ambos casos, se hace uso de funciones indirectas estáticas. En el problema de maximización, se trata de determinar cómo distribuir la riqueza inicial en consumo a lo largo del tiempo para alcanzar la máxima utilidad descontada. En el problema de minimización, se busca cómo distribuir el flujo de utilidad en el tiempo para alcanzar un nivel dado al menor costo presente posible. En ambos enfoques, las tasas de descuento juegan un papel central al ponderar temporalmente los flujos intertemporales.

En cada caso, la optimización se realiza sobre la clase por partes de funciones continuas. En ambos problemas, la función Lagrangiana es monotónica en el control, por lo que en el óptimo, las restricciones deben mantenerse con igualdad.

4. Relaciones iniciales óptimas

Para el problema de maximización de la utilidad el problema queda definido por:

$$\max_{\{x(t)\}} V = \int_0^\infty e^{-\delta t} g\left(x(t), p\right) dt$$

s.t. $\dot{w}(t) = rw(t) - x(t)$

La función Hamiltonina de valor actual es:

$$H_c(w, y, x; p, r) = g\left(x(t), p\right) + y\left[rw(t) - x(t)\right]$$

$y = e^{\{}\delta t\}\lambda \implies \dot{y} = \delta y + \dot{\lambda} \implies \dot{\lambda} = y - \delta y$

CPO

$H_x = g_x(x, p) - y \leq 0$

$H_{\{}w\} = ry = -\dot{y} + \delta y$

$H_y = rw(t) - x(t) = \dot{w}(t)$

Cuando la solución es interior, la primera restricción se cumple con igualdad.

Mientras que el problema de minimización puede plantearse como:

$$\min_{\{u(t)\}} W = \int_0^\infty e^{-rt} h\left(u(t), p\right) dt$$

s.t. $\dot{v}(t) = \delta v(t) - u(t)$

La función Hamiltonina de valor actual es:

$$L_c(v, z, u; p, r) = h\left(u(t), p\right) + z\left[\delta v(t) - u(t)\right]$$

CPO

$H_u = h_u(u, p) - z \geq 0$

$H_{\{}v\} = \delta z = -\dot{z} + rz$

$H_z = \delta v(t) - u(t) = \dot{v}(t)$

Cuando la solución es interior, la primera restricción se cumple con igualdad.

Observemos que, de la teoría estática tenemos que:

$$g(x, p) = u \Leftrightarrow h(u, p) = x$$

Tal que:

$$g_x(x, p) = h_u^{-1}(u, p)$$

Tomando las primeras condiciones de primer orden de ambos problemas tenemos que:

$$g_x(x, p) = y \text{ y } h_u(u, p) = z$$

Por lo tanto, en el problema intertemporal:

$$y(t) = z^{-1}(t)$$

Esto implica que la utilidad marginal intertemporal del ingreso es igual al inverso del costo marginal intertemporal de alcanzar una determinada utilidad.

Dado el teorema de la función implícita, podemos resolver a x y u en función de su precio sombra tal que:

$$x = x(y, p)$$

$$u = u(z, p)$$

Sustituyendo en las funciones hamiltonianas tenemos:

$$H_c^0(w, y; p, r) = g\left(x(y, p), p\right) + y\left[rw(t) - x(y, p)\right]$$

$$\text{s.t } \dot{y}(t) = \delta y - H_w^0 = (\delta - r)\, y \tag{1}$$
$$\dot{w}(t) = H_y^0 = rw(t) - x(y,p) \tag{2}$$

Mientras que en el problema de minimización:

$$L_c^0(v,z;p,r) = h\left(u(z,p),p\right) + z\left[\delta v(t) - u(z,p)\right]$$

$$\text{s.t } \dot{z}(t) = \delta z - L_v^0 = (r - \delta)\, z \tag{3}$$
$$\dot{v}(t) = L_z^0 = \delta v(t) - u(z,p) \tag{4}$$

5. Análogos intertemporales del Teorema de Roy y Hotelling

Para eliminar la variable y de H_c^0 hacemos uso del resto de condiciones. Las trayectorias óptimas de la variable de estado y la variable de co-estado quedaría determinada por:

$$w(t) = w(t; w, p, r, \delta) \text{ y } y(t) = y(t; w, p, r, \delta)$$

Definimos la siguiente función de $w(t)$ para el momento 0 tal que:

$$\psi(w,p,r,\delta) \equiv \dot{w}(0; w, p, r, \delta)$$

Mientras que la variable de coestado:

$$\mu(w,p,r,\delta) = y(0; w, p, r, \delta)$$

Tomando la segunda restricción y evaluando en cero tenemos:

$\dot{w}(0; w, p, r, \delta) = rw(0) - x(\mu(w,p,r,\delta), p)$

Establecimos que $w(0) = w$, reemplazando con la función que determinamos y reordenando:

$x(\mu(w,p,r,\delta), p) = rw - \psi(w,p,r,\delta)$

Definimos:

$$\phi(w,p,r,\delta) \equiv rw - \psi(w,p,r,\delta)$$

Notemos que en la vecindad de (w,p,r,δ) las funciones ψ, ϕ y μ heredan las propiedades de continuidad del hamiltoniano. (Esto se debe al Teorema de la Función Implícita y a la estructura del problema de control óptimo)

Ahora definimos sintéticamente los Hamiltoninos:

$$M(w,p,r,\delta) \equiv H_c^0\left(w,\mu(w,p,r,\delta);p,r\right) \tag{5}$$
$$\equiv g\left(\phi(w,p,r,\delta),p\right) + \mu(w,p,r,\delta)\left[rw - \phi(w,p,r,\delta)\right] \tag{6}$$

Colocando también las condiciones de orden en el óptimo:

$g_x\left(\phi(w,p,r,\delta),p\right) \equiv \mu(w,p,r,\delta)$

$r\mu(w,p,r,\delta) \equiv -\frac{d}{dt}\mu(w,p,r,\delta) + \delta\mu(w,p,r,\delta) = -\mu_w(w,p,r,\delta)\psi(w,p,r,\delta) + \delta\mu(w,p,r,\delta)$

$\psi(w,p,r,\delta) \equiv rw - \phi(w,p,r,\delta)$

Resumidamente:

$$g_x \equiv \mu \tag{a}$$

$$\mu_w\psi \equiv [\delta - r]\,\mu \tag{b}$$

$$\psi \equiv rw - \phi \tag{c}$$

Observemos que:

$$M_w = g_x\phi_w\psi + \mu_w\left(rw - \phi\right) + \mu r - \mu\phi_w\psi$$

Utilizando las equivalencias podemos ordenar:

$M_w = \left(g_x - \mu\right)\phi_w\psi + \mu_w\psi + \mu r$

$$M_w \equiv \delta\mu \tag{d}$$

Teorema 1 (Análogo intertemporal del Teorema de Roy) *Para el problema de maximización de la utilidad intertemporal, y para aquellos w para los cuales $M_{ww} \neq 0$, la función de ahorro óptimo, ψ, puede ser obtenida de la función μ o a partir de la función M diferenciando tal que:*

$$\psi \equiv \mu_w^{-1}\left[\delta - r\right]\mu = \left[\delta - r\right]M_{ww}^{-1}M_w$$

A partir de utilizar las condiciones (b) y (d).

Mientras que la función de demanda individual óptima $q^*(w,p,r,\delta)$ puede ser obtenida de:

$$q^* = -\delta M_w^{-1}M_p + \left[\delta - r\right]M_{ww}^{-1}M_{wp}$$

Derivando el hamiltoniano con respecto de p:

$$M_p = g_x\phi_p + g_p + \mu_p\left(rw - \phi\right) - \mu\phi_p$$

Reordenando:

$$M_p = g_p + \mu_p \psi \implies g_p = M_p - \mu_p$$

Dado el teorema de Roy, tenemos que:

$$q^* = -\frac{g_p}{g_x}$$

Reemplazando por las condiciones que hemos establecido

$$q^* = \left(\mu_p \psi - M_p\right) \mu^{-1}$$

Utilizando la función de ahorro óptimo y las condiciones de primer orden en el óptimo se obtiene la expresión de q^*.

Lo mismo para el problema de **minimización del gasto**.

$$v(t) = v(t; v, p, r, \delta) \text{ y } z(t) = z(t; v, p, r, \delta)$$

Definimos la siguiente función de $v(t)$ para el momento 0 tal que:

$$\xi(w, p, r, \delta) \equiv \dot{v}(0; v, p, r, \delta)$$

Mientras que la variable de coestado:

$$\eta(v, p, r, \delta) = z(0; v, p, r, \delta)$$

Tomando la segunda restricción y evaluando en cero tenemos:

$\dot{v}(0; v, p, r, \delta) = \delta v(0) - u(\eta(v, p, r, \delta), p)$

Establecimos que $v(0) = v$, reemplazando con la función que determinamos y reordenando:

$u(\eta(v, p, r, \delta), p) = \delta v - \xi(v, p, r, \delta)$

Definimos:

$$\theta(v, p, r, \delta) \equiv \delta v - \xi(v, p, r, \delta)$$

Notemos que en la vecindad de (v, p, r, δ) las funciones ξ, θ y η heredan las propiedades de continuidad del hamiltoniano.

Ahora definimos sintéticamente los Hamiltoninos:

$$\begin{aligned} N(v, p, r, \delta) &\equiv L_c^0\left(v, \mu(w, p, r, \delta); p, r\right) && (7) \\ &\equiv h\left(\theta(v, p, r, \delta), p\right) + \eta(v, p, r, \delta)\left[\delta v - \theta(v, p, r, \delta)\right] && (8) \end{aligned}$$

Colocando también las condiciones de orden en el óptimo:

$h_u\left(\theta(v,p,r,\delta),p\right) \equiv \eta(v,p,e,\delta)$

$\delta\eta(v,p,r,\delta) \equiv -\frac{d}{dt}\eta(v,p,r,\delta) + r\eta(v,p,r,\delta) = -\eta_v(v,p,r,\delta)\xi(v,p,r,\delta) + r\eta(v,p,r,\delta)$

$\xi(v,p,r,\delta) \equiv \delta v - \theta(v,p,r,\delta)$

Resumidamente:

$$h_u \equiv \eta \tag{a}$$

$$\eta_v \xi \equiv [r-\delta]\,\eta \tag{b}$$

$$\xi \equiv \delta v - \theta \tag{c}$$

Observemos que:

$$N_v = h_u\theta_v\xi + \eta_v\left(\delta v - \theta\right) + \eta\delta - \eta\theta_v\xi$$

Utilizando las equivalencias podemos ordenar:

$N_v = \left(h_u - \eta\right)\theta_v\xi + \eta_v\xi + \eta\delta$

$$N_v \equiv \eta r \tag{d}$$

Teorema 2 (Análogo intertemporal del Teorema de Hotelling) *Para el problema de minimización del gasto intertemporal, y para aquellos v para los cuales $N_{vv} \neq 0$, la función de política óptima, ξ, puede ser obtenida de la función η o a partir de la función N diferenciando tal que:*

$$\xi \equiv [r-\delta]\,\eta_v^{-1}\eta = [r-\delta]\,N_{vv}^{-1}N_v$$

A partir de utilizar las condiciones (b) y (d).

Mientras que la función de demanda restringida individual óptima $q^{**}(u,p,r,\delta)$ puede ser obtenida de:

$$q^{**} = N_p + \frac{1}{r}\,[\delta - r]\,N_{vv}^{-1}N_vN_{vp}$$

Derivando el hamiltoniano con respecto de p:

$$N_p = h_u\theta_p + h_p + \eta_p\left(\delta v - \theta\right) - \eta\theta_p$$

Reordenando:

$$N_p = h_p + \eta_p \xi \implies h_p = N_p - \eta_p \xi$$

Dado el teorema de Hotelling, tenemos que:

$$q^{**} = h_p$$

Aplicando para nosotros nos queda

$$q^{**} = N_p - \eta_p \xi$$

Utilizando la función de política óptima y las condiciones de primer orden en el óptimo se obtiene la expresión de q^{**}.

Para operacionalizar estos resultados, un enfoque consistiría en especificar condiciones de regularidad sobre las funciones M y N. Estas derivarían en principio de H_c^0 y L_c^0, más condiciones necesarias sobre la forma de las soluciones de cada problema.

Optamos por una ruta alternativa aprovechando la dualidad intertemporal entre g y V, y entre h y W. A continuación se demostrará que $V[W]$ es cóncava [convexa] en $w[v]$ y, por lo tanto, es diferenciable en casi todas partes. En consecuencia, salvo en puntos angulares, $V[W]$ —siendo la función característica de Hamilton asociada con el Problema de maximización [minimización]— satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, que en la notación anterior puede escribirse, para el Problema de maximización, como $V = \frac{M}{\delta}$ [y para el Problema de minimización, como $W = \frac{N}{r}$].

Se sigue que V es al menos de clase C^1 y, dado que $V_w = \mu$, que V_w es al menos de clase C^1 entre puntos angulares de la trayectoria óptima $w(t)$. [Observaciones similares aplican para W y $W_v = \eta$.] Notamos que, en puntos angulares, y y H_c^0 son continuos y, por ende, μ, M y V son absolutamente continuos en w. [Análogamente, η, N y W son absolutamente continuos en v.]

Dado lo establecido entonces, en el problema de maximización de la utilidad intertemporal:

$$V = \frac{M}{\delta}$$

Tal que:

$$V_w = \frac{M_w}{\delta} \qquad V_{ww} = \frac{M_{ww}}{\delta} \qquad V_{wp} = \frac{M_{wp}}{\delta}$$

Por lo tanto, en términinoos de V el Teorema 1 implica:

$$\psi \equiv \mu_w^{-1} [\delta - r] \mu = [\delta - r] V_{ww}^{-1} V_w$$

$$q^* = -\delta V_w^{-1} V_p + [\delta - r] V_{ww}^{-1} V_{wp}$$

Mientras que para nuestro problema de minimización del gasto intertemporal:

$$W = \frac{N}{r}$$

Tal que:

$$W_u = \frac{N_u}{r} \qquad W_{uu} = \frac{N_{uu}}{r} \qquad W_{up} = \frac{N_{up}}{r}$$

En términos de W, el teorema 2 implica:

$$\xi \equiv [r - \delta]\, W_{vv}^{-1} W_v$$

$$q^{**} = rW_p + [\delta - r]\, W_{vv}^{-1} W_v W_{vp}$$

6. Dualidad Intertemporal entre las funciones de costo y riqueza

Teorema 3 *Sea $h(u,p)$ satisface las condiciones de gasto indirecto (atemporal). Definimos $W(v,p,r,\delta) \equiv \min_{\{u(t)\}} \left\{ \int_0^\infty e^{-rt} h(u(t),p)dt \middle| \int_0^\infty e^{-\delta t} u(t)dt \geq v \right\}$. Entonces $W : \mathbb{R} \times \Omega_+^{n+2} \to \Omega$ satisface las siguientes condiciones*:

1. W es convexa en v

Por definición de convexidad debe suceder entonces que:

$$W\left(\alpha v^1 + (1-\alpha)\, v^2, p, r\delta\right) \leq \alpha W\left(v^1, p, r\delta\right) + (1-\alpha)\, W\left(v^2, p, r\delta\right)$$

Donde $\alpha v^1 + (1-\alpha)\, v^2 \equiv u^3$.

Dada la convexidad de h tenemos:

$$h(u^3(t),p) \leq \alpha h(u^1(t),p) + (1-\alpha) h(u^2(t),p)$$

Integrando en ambos lados con el factor $e^{-rt} > 0$ (no cambia desigualdad)

$$\int_0^\infty h(u^3(t),p)dt \leq \alpha \int_0^\infty h(u^1(t),p)dt + (1-\alpha) \int_0^\infty h(u^2(t),p)dt$$

Dado que W es el mínimo sobre todas las trayectoriasfactibles. Entonces:

$$W\left(u^3, p, r\delta\right) \leq \alpha W\left(v^1, p, r\delta\right) + (1-\alpha)\, W\left(v^2, p, r\delta\right)$$

2. W es continua y no-negativa
3. W es creciente en v.

Dado teorema de la función envolvente:

$$W_v = \frac{N_v}{r} = \eta = h_u > 0$$

4. Tenemos:
    1. $\dot{W}_v = [r - \delta]\, W_v$,
    2. $\dot{W}_r = W + rW_r$,
    3. $\dot{W}_\delta = rW_\delta - vW_v$

Para ello partimos de la función Hamiltonieana, reemplazando por las condiciones de orden:

$$rW = N = h\left(\theta(v, p, r, \delta), p\right) + \eta(v, p, r, \delta)\left[\delta v - \theta(v, p, r, \delta)\right]$$

$$rW = h + W_v \xi$$

Derivando respecto de v:

$$rW_v = h_u \theta_v + W_{vv}\xi + W_v \xi_v = \eta\theta_v + \dot{W}_v + \eta\xi_v$$

Dada la condición de orden $(\theta_v + \xi_v)\,\eta = (\theta_v + \xi_v)\, W_v = \delta W_v$, la condición (c).

Lo que equivale a la primera igualdad:

$$\dot{W}_v = [r - \delta]\, W_v$$

Derivando respecto de r:

$$W + rW_r = h_u \theta_r + W_{vr}\xi + W_v \xi_r = \eta\theta_r + \dot{W}_r + \eta\xi_r$$

Dada la condición de orden $(\theta_r + \xi_r)\,\eta = (\theta_r + \xi_r)\, W_v = 0$, la condición (c).

Lo que equivale a la segunda igualdad:

$$\dot{W}_r = W + rW_r$$

Derivando respecto de δ:

$$rW_\delta = h_u \theta_\delta + W_{v\delta}\xi + W_v \xi_\delta = \eta\theta_\delta + \dot{W}_\delta + \eta\xi_\delta$$

Dada la condición de orden $(\theta + \ \delta)\,\eta = (\theta + \ \delta)\, W_v = vW_v$, la condición (c).

Lo que equivale a la tercera igualdad:

$$\dot{W}_\delta = rW_\delta - vW_v$$

5. W es homogénea de grado 1 en p.

$$h(u, tp) = th(u, tp)$$

Integrando en ambos lados con el factor de descuento e^{-rt}:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} h(u, tp)dt = t \int_0^{\infty} e^{-rt} h(u, tp)dt$$

s.t $\int_0^{\infty \mathrm{e}}\{-\delta t\}u(t)dt \geq v$

Equivale a:

$$W(v, tp, r, \delta) = tW(v, p, r, \delta)$$

6. W es no-decreciente en p.

Sea $p_2 > p_1$: Dada la propiedad de homogeneidad sea $\alpha = \frac{p_2}{p_1} > 1$. Por lo tanto:

$$W(v, p_2, r, \delta) = \alpha W(v, p_1, r, \delta) \geq W(v, p_1, r, \delta)$$

7. W es decreciente en r.

Sea $r_1 > r_2$, sea u^i la utilidad óptima para r^i. Entonces:

$$W(v, p, r^2, \delta) = \int_0^{\infty} e^{-r^2 t} h(u^2, p)dt > \int_0^{\infty} e^{-r^1 t} h(u^2, p)dt \geq \int_0^{\infty} e^{-r^1 t} h(u^1, p)dt = W(v, p, r^1, \delta)$$

8. W es creciente(decreciente) en δ cuando $v > 0 (< 0)$.

Sea $\delta_1 > \delta_2$, sea u^i la utilidad óptima para δ^i. Entonces:

$\int_0^{\infty} e^{-\delta^1 t} u^1(t)dt = v > 0 \implies u_1$ es asequible para δ^2 pero no es óptima. Por lo tanto:

$$W(v, p, r, \delta^1) = \int_0^{\infty} e^{-rt} h(u^1, p) > \min_{\{u(t)\}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-rt} h(u(t), p)dt | \int_0^{\infty} u(t)dt \geq v \right\} = W(v, p, r, \delta^2)$$

Si $\int_0^{\infty} e^{-\delta^2 t} u^2(t)dt = v < 0 \implies u_2$ es asequible para δ^1 pero no es óptima. Por lo que el resultado es análogo.

9. W es cóncava en p.

Sea u^i la función óptima para (v, p^i, r, δ), tal que tenemos p^1 y p^2. Sea $p^3 = \alpha p^1 + (1-\alpha)p^2$, y u^3 es el nivel óptimo que le corresponde. Entonces:

$$W(v, p^3, r, \delta) = \int_0^{\infty} e^{-rt} h(u^3, p^3)dt \geq \int_0^{\infty} e^{-rt} \alpha h(u^3, p^1) + (1-\alpha)h(u^3, p^2)dt$$

Por otro lado tenemos:

$$\int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^3,p^1)dt \geq \int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^1,p^1)dt$$

$$\int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^3,p^2)dt \geq \int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^2,p^2)dt$$

Multiplicando por α y $1-\alpha$ y sumando:

$$\int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^3,p^1)dt \geq \alpha \int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^1,p^1)dt + (1-\alpha)\int_0^\infty e^{-rt}\alpha h(u^2,p^2)dt = \alpha W(v,p^1,r,\delta) + (1-\alpha)W(v,p^2,r,\delta)$$

Juntando:

$$W(v,\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2, r,\delta) \geq \alpha W(v,p^1,r,\delta) + (1-\alpha)W(v,p^2,r,\delta)$$

10. Siempre que W es estrictamente convexa en v, $\dot{W}_{vv}/W_{vv} > r-2\delta$.

Que W es estrictamente convexa en V, θ, puede ser definido como $\theta \equiv \delta v - [r-\delta]W_{vv}^{-1}W_v$ y $\theta_v = 2\delta - r + \dot{W}_{vv}/W_{vv}$. Pero de la ecuación de orden tenemos que $h_{\theta\theta}\theta_v = W_{vv}$ Ahora $h_{\theta\theta} \geq 0$ a partir de la condición de Legendre. Por lo tanto, cuando $W_{vv} > 0$ (es decir, es estrictamente convexa) tenemos $\theta_v > 0$, implicando que:

$$\theta_v = 2\delta - r + \dot{W}_{vv}/W_{vv} > 0$$

$$\dot{W}_{vv}/W_{vv} > r - 2\delta$$

11. Definimos $\bar{W}(\bar{v},p) : \mathbb{R} \times \Omega_+^n \rightarrow \Omega$ por $\bar{W}(\bar{v},p) \equiv rW(v,p,r,\delta) - [r-\delta]W_{vv}^{-1}(v,p,r,\delta)W_v^2(v,p,r,\delta)$ donde $\bar{v} \equiv \delta v - [r-\delta]\, W_{vv}^{-1}W_v$. Entonces $\bar{W}(\bar{v},p)$ es cóncava en p.

Primero mostramos que $\bar{W}(\bar{v},p)$ es bien definida. Definamos $F(\bar{v},p,v,r,\delta) \equiv rW(v,p,r,\delta) - [r-\delta]W_{vv}^{-1}(v,p,r,\delta)W_v^2(v,p,r,\delta) \equiv rW(v,p,r,\delta) - W_v(v,p,r,\delta)[\delta v - \bar{v}]$. Ahora $F_v = rW_v - W_{vv}[\delta v - \bar{v}] - \delta W_v = 0$ por definición de $\bar{v}$. Utilizando la condición es 5 (a) tenemos $\bar{v} = [r-\delta]W_{vv}^{-1}W_v = \delta v - \bar{v}$. Por lo tanto $F_r = W + rW_r - W_{vr}[\delta v - \bar{v}] = W + rW - W_{vr}\dot{v} = 0$ a partir de (b). También $F_\delta = rW_\delta - W_{v\delta}[\delta v - \bar{v}] - vW_v = rW_\delta - W_{v\delta}\dot{v} - vW_v = 0$ a partir de (c). Por lo tanto $F(\bar{v},p,v,r,\delta) \equiv \bar{W}(\bar{v},p)$ y surge de la siguiente ecuación del Hamiltoniano-Jacobi que $\bar{W}(\bar{v},p) = h(\bar{v},p)$.

Como podemos definirla como $h(\bar{v},p)$ entonces al igual que nuestras demostraciones la continuidad y la concavidad de la función $\bar{W}$ surge de las propiedades de la función de gasto h.

Teorema 4 *Sea $W(v,p,r,\delta)$ que satisface las condiciones de W. Definamos $\theta(v,p,r,\delta) \equiv \delta v - [r-\delta]W_{vv}^{-1}W_v$ y, por lo tanto, definimos $h(\theta,p) \equiv rW - W_v[\delta v - \theta]$. Entonces, sobre su dominio de definición, $h(\theta,p)$ satisface las condiciones de la función de gasto atemporal con θ reemplazando u.*

1. h es continua y no negativa.
2. h es creciente en θ.

$$h_\theta(\theta,p) = W_v > 0$$

3. h es cóncava en p.

Debido a que se trata de la misma funcional que W.

4. h es homogénea de grado 1 en p.

$$th(u,p) = rtW_p(p) - tW_{vp}(p)[\delta v - \theta] = rW(tp) - W_v(tp)[\delta v - \theta] = h(u,tp)$$

5. h es no-decreciente en p.

Al igual que antes demostrable a partir de homogeneidad de grado 1.

6. $\exists \bar{u}$ s.t. h es convexa en u para $u \geq \bar{u}$

$$h_\theta(\theta,p) = W_v > 0$$

Diferenciando respectode θ:

$$h_{\theta\theta} = W_{vv}$$

Por definición de θ, tenemos $\theta_v = 2\delta - r + \frac{\dot{W}_{vv}}{W_{vv}}$. Cumpliendo con las características $W_{vv} > 0$ lo que implica que $h_{\theta\theta} > 0$. Es decir es convexa.

Esta dualidad permite condiciones en W que pueden ser utilizadas en condiciones derivadas sobre la demanda intertemoral compensada de utilidad, el teorema de Hotelling por lo tanto:

$$q^{**} = rW_p + [\delta - r]\, W_{vv}^{-1} W_v W_{vp}$$

Teorema 5 *Denotemos la matriz de respuesta alprecio q_p^{**} por K. La dinámica análoga a las condiciones de Slutsky-Samuelson-Hicks son*:

1. $Kp = 0$ (pero no necesariamente $p'K = 0$) Dado el Lema de Hotelling:

$$q^{**}(v,p,r,\delta) = h_p(\theta(v,p,r,\delta),p)$$

Derivando respecto de p:

$$q_p^{**} = h_{pu}\theta_p + h_{pp} = K$$

Multiplicando por p:

$$Kp = h_{pu}\theta_p p + h_{pp}p$$

Utilizando las condiciones de orden podemos escribir tenemos que $\theta = \delta v - [r - \delta]W_{vv}^{-1}W_v$, el cual como W es homogénea de grado 1 en p, θ es homogénea de grado 0. Lo que implica que $\theta_p = 0$. El segundo término es cero daada la homogeneidad de grado cero de h_p.

2. K es simétrica si y solo si $\theta_p = 0$.

Mostremos que $\theta_p \neq 0$ entonces sucede que no es simétrica. Si $\theta_p \neq 0$ para que sea simétrica debe suceder que la multiplicación de $h_{pu}\theta_p$ sea simétrica, para ello las dos matrices deben ser que $h_{p\theta} = \alpha\theta_p$, para un escalar α. Pero $p'h_{p\theta} = h_\theta > 0$ mientras que $p'(\alpha\theta_p) = 0$. Entonces la simetría implica que $\theta_p = 0$

$$h_{pu} = \alpha\theta_p$$

3. Si K es simétrica entonces es negativa semidefinida.

Si K es simétrica, es decir θ_p es igual a cero. Entonces:

$$K = h_{pp}$$

Donde dadas las propiedades de la función de gasto h_{pp} es simétrica y semidefinida negativa.

En resumen, los efectos dinámicos sobre la demanda compensada K pueden perder simetría debido a variaciones en el precio sombra θ_p de la restricción intertemporal de utilidad. A diferencia del caso estático —donde la matriz de Slutsky es siempre simétrica—, aquí la simetría de K depende críticamente de que $\theta_p = 0$, es decir, de que no haya ajustes intertemporales en el valor marginal de la utilidad θ. Solo cuando estos efectos dinámicos se anulan $\theta_p = 0$, K recupera las propiedades clásicas: simetría y semidefinición negativa. Esto refleja cómo la optimización intertemporal introduce asimetrías en las respuestas de precios, vinculadas a la evolución temporal de las restricciones del problema.

7. Dualidad Temporal

Teorema 6 *Sea la función de valor óptimo V y la función de riqueza W definidas por los problemas de maximización y minimización intertemporal respectivamente. Entonces* a. *V y W satisfacen $V(W(v, p, r, \delta), p, r, \delta) = v$* b. *$W$ satisface las condiciones determinadas en la minimización de la riqueza si y solo si $V : \Omega \times \Omega_+^{n+2} \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:*

1. V es cóncava en w.
2. V es continua.
3. V es no-creciente en w.
4. Tenemos
   1. $\dot{V}_w = [\delta - r]V_w$
   2. $\dot{V}_r = \delta V_r - wV_w$
   3. $\dot{V}_\delta = V + \delta V_\delta$
5. V es homogénea de grado cero en (w, p).
6. V es no-creciente en p.
7. V es no-decreciente en r.
8. V es decreciente en δ mientras $V > 0$.
9. V es cuasi-convexa en p.
10. Siempre que V es estrictamente cóncava en w, $\dot{V}_{ww}/V_{ww} > \delta - 2r$
11. Definimos $\bar{V}(\bar{w}, p : \Omega \times \Omega_+^n \to \mathbb{R}$ a partir de $\bar{V}(\bar{w}, p) \equiv \delta V(w, p, r, \delta) - [\delta - r]V_{ww}^{-1}(w, p, r, \delta)V_w^2(w, p, r, \delta)$ donde $\bar{w} \equiv rw - [\delta - r]V_{ww}^{-1}V_w$. Entonces $\bar{V}(\bar{w}, p)$ es cuasi-convexa en p.

Para probar que los problemas son análogos tenemos:

$$V(w,p,r,\delta) = \max_{\{x(t)\}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\delta t} g(x(t),p)dt \middle| \int_0^\infty e^{-rt} x(t)dt \le w \right\} = \max_{\{u(t)\}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\delta t} u(t)dt \middle| \int_0^\infty e^{-rt} h(u(t),p)dt \le w \right.$$

por monotonicidad (la restricción se cumple con igualdad.

De la parte b. observemos que las características de 1-3 y 5-9 al igual que para W que se desprendían de h, en este caso son las características de g que se cumplen dado el teorema de la función implícita, y las características de V y W.

Para demostrar 4. el procedimiento es parecido al anterior:

$$\delta V = M = g\left(\phi(w,p,r,\delta),p\right) + \mu(w,p,r,\delta)\left[rw - \phi(w,p,r,\delta)\right]$$

Que podemos también escribir como:

$$\delta V = g + V_w \psi$$

Derivamos respecto de w:

$$\delta V_w = g_x \theta_w + V_{ww}\psi + V_w \psi_w = \mu\theta_w + V_{ww}\psi + \mu\psi_w$$

Dada la condición de orden $\left(\theta_w + \psi_w\right)\mu = \left(\theta_w + \psi_w\right)V_w = rV_w$, la condición (c).

Lo que equivale a la primera condición:

$$\dot{V}_w = \left[\delta - r\right] V_w$$

Derivamos respecto de r:

$$\delta V_r = g_x \phi_r + V_{wr}\psi + V_w \psi_r$$

Dada la condición de orden $\left(\phi_r + \psi_r\right)\mu = \left(\phi_r + \psi_r\right)V_w = wV_w$, la condición (c).

Lo que equivale a la primera condición:

$$\dot{V}_r = \delta V_r - wV_w$$

Derivamos respecto de δ:

$$V + \delta V_\delta = g_x \phi_\delta + V_{w\delta}\psi + V_w \psi_\delta$$

Dada la condición de orden $\left(\phi +\ \delta\right)\mu = \left(\phi +\ \delta\right)V_w = 0$, la condición (c).

Lo que equivale a la primera condición:

$$\dot{V}_\delta = V + \delta V_\delta$$

A partir de sustituir la definición de $\bar{V}$ en $\bar{W}$ surge que $\bar{W}(\bar{v}, p) = \bar{w}$ si y solo si $\bar{V}(\bar{w}, p) = \bar{v}$, en la región de no saciedad. Por construcción $\bar{W}$ satisface las propiedades de la función de costo y, por lo tanto, $\bar{V}$ satisface las propiedades de la función de utilidad indirecta.

8. Dualidad Intertemporal entre la función de utilidad indirecta y las funciones óptimas de valor

La dualidad atemporal provee un link entre las funciones indirectas de la función de utilidad y función de gasto, y en las anteriores hemos mostrado el link entre la dualidad intertemporal de la función de gasto y la función de riqueza y dualidad temporal de la utilidad temporal y la función de riqueza. Poor lo tanto los siguientes dos teoremas le siguen de forma inmediata:

Teorema 7 *Sea $g(x, p)$ que satisface las condiciones de la función de utilidad indirecta, y definamos $V(w, p, r, \delta) = \max_{\{x(t)\}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\delta t} g(x(t), p) dt \middle| \int_0^\infty e^{-rt} x(t) dt \leq w \right\}$. Entonces $V : \Omega \times \Omega_+^{n+2} \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones de la función de utilidad intertemporal.*

Teorema 8 *Sea $V(w, p, r, \delta)$ satisface las condiciones de la función de utilidad intertemporal. Definimos $\psi(w, p, r, \delta) = [\delta - r] V_{ww}^{-1} V_w$, $\phi(w, p, r, \delta) = rw - \psi$, y $g(\psi, p) = \delta V - V_w[rw - \phi]$. Entonces bajo el dominio de definición, $g(\phi, p)$ satisface las condiciones de la función de utilidad indirecta con ϕ reemplazando x.*

Los Teoremas 7 y 8 establecen una dualidad entre la función de utilidad indirecta instantánea $g(x, p)$ y la función de valor intertemporal $V(w, p)$. Si g cumple ciertas condiciones (R_g), entonces V definida a través de la maximización intertemporal satisface propiedades R_V. Al aplicar el Teorema 8, V permite derivar una nueva función g^* que es cóncava en x, "concavificando" así a g. Esta dualidad permite obtener ecuaciones de demanda dinámicas directamente derivando V, evitando optimización explícita. El proceso es cerrado: si g^* se usa para reconstruir V^*, se recupera $V^* = V$, mostrando consistencia entre ambos enfoques.

Conclusión

Este trabajo usa las funciones de utilidad indirecta (g) y coste (h) para definir las funciones de valor óptimo (V) y riqueza (W). Generalizamos la dualidad clásica (g h) introduciendo nuevas relaciones (g V, h W, V W), permitiendo que g no sea cóncava en x y h no sea convexa en u.

Hallazgos principales:

Dualidad flexible: Relajamos supuestos de convexidad, pero si imponemos concavidad estricta en g, V hereda propiedades fuertes (ej. concavidad estricta en w).

Teorema de Roy intertemporal: Derivamos una versión dinámica para obtener demandas diferenciando V.

Resultados no intuitivos: V mantiene propiedades como quasi-convexidad en precios sin asumir curvatura en la utilidad directa, análogo a la dualidad estática.