Equilibrium in Competitive Insurance Markets - Rothschild & Stiglitz

Note: This document is written in Spanish.

Central question: Can a competitive insurance market achieve equilibrium when insurers cannot observe individuals' risk types?

Key mechanism / main results:

- Asymmetric information: firms cannot distinguish high- from low-risk consumers
- Contracts must be incentive compatible: each type must voluntarily select its own contract
- When equilibrium exists, it is *separating*: different contracts for different risk types
- High-risk individuals impose a negative externality on low-risk individuals
- Under realistic conditions: **no competitive equilibrium may exist**

Economic intuition

- A *pooling contract* is unstable: a firm can profitably deviate by offering a slightly better contract to low-risk individuals
- A *separating contract* may be unprofitable: if low-risk individuals are too few, the contract that deters high-risk consumers loses money
- Competitive markets struggle to handle incentive and selection problems arising from private information

Why it matters:

- Challenges the classical view that competition guarantees the existence of equilibrium
- Provides a foundational model of adverse selection and screening in insurance markets
- Offers a framework to understand institutions in labor, financial, and public goods markets

Reference: Rothschild, M., & Stiglitz, J. (1976). *Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information.* The Quarterly Journal of Economics, 90(4), 629–649. https://doi.org/10.2307/1885326

Equilibrium in Competitive Insurance Markets - Rothschild & Stiglitz

Parte 1

Asumimos que las personas son idénticas en todos los aspectos excepto en la probabilidad de tener un accidente, y que son aversos al riesgo ($U'' < 0$); por lo tanto $V(p, \alpha)$ es cuasicóncava.

Mientras que la oferta de contratos es por parte de las firmas las cuales son neutrales al riesgo.

Definición de Equilibrio

Asumimos que los consumidores solo pueden comprar un contrato de seguro. Esto implica, de hecho, que el vendedor de seguro especifica tanto precios y cantidades de seguro comprado. En el equilibrio tenemos:

- Ningún contrato en el equilibrio hace beneficios esperados negativos.
- No hay ningún contrato por fuera del equilibrio que, si ofrecido, va a hacer un beneficio no-negativo.

Equilibrio con Consumidores Idénticos

$$\max_{\alpha_1, \alpha_2} V = (1-p)\,\alpha_1 - p\alpha_2$$

$$\text{s.t.} \quad (1-p)U\left(W-\alpha_1\right) + pU\left(W-\delta+\alpha_2\right) \geq (1-p)U\left(W\right) + pU\left(W-\delta\right)$$

Armamos el Lagrangiano del problema:

$$\mathscr{L} = (1-p)\,\alpha_1 - p\alpha_2 + \lambda\left[(1-p)U\left(W-\alpha_1\right) + pU\left(W-\delta+\alpha_2\right) - (1-p)U\left(W\right) - pU\left(W-\delta\right)\right]$$

CPO

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_1} = (1-p) - \lambda(1-p)U'\left(W-\alpha_1\right) = 0$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_2} = -p + \lambda p U'\left(W-\delta+\alpha_2\right) = 0$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = (1-p)U\left(W-\alpha_1\right) + pU\left(W-\delta+\alpha_2\right) - (1-p)U\left(W\right) - pU\left(W-\delta\right) = 0$

Condición de Equilibrio

$$U'\left(W-\alpha_1\right) = U'\left(W-\delta+\alpha_2\right)$$

Dada la concavidad de la función de utilidad $U'' < 0$, es necesario que:

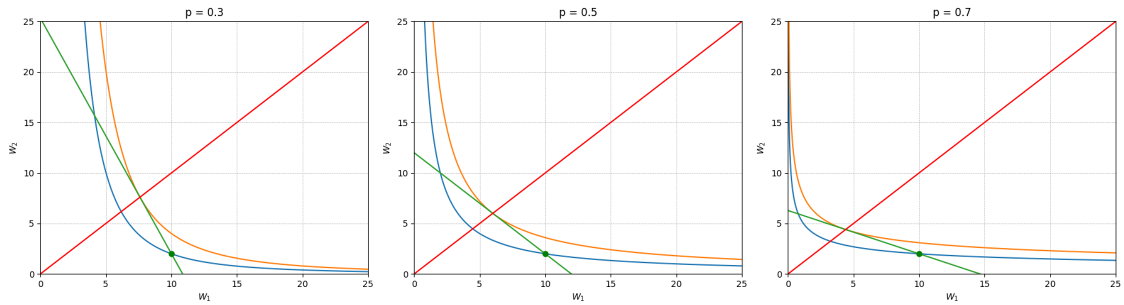
$$W-\alpha_1 = W-\delta+\alpha_2$$

$$\boxed{\delta = \alpha_1 + \alpha_2}$$

Dado también que trata de una empresa competitiva tenemos:

$$(1-p)\,\alpha_1 - p\alpha_2 = 0$$

$$\boxed{\alpha_1 = p\delta}$$



Como se trata de un "juego justo" (sobre la linea de valor esperado), el sujeto averso al riesgo siempre decide cubrirse.

Información Imperfecta: Dos clases de consumidores

Antes de los equilibrios pooling y separador demostremos que no es posible establecer un equilibrio con las restricciones que hemos establecido donde ambos se auto-seleccionan.

Sea μ la proporción de clientes de alta probabilidad.

$$\max_{\alpha_1^i,\alpha_2^i} V = \mu\left[(1-p^H)\,\alpha_1^H - p^H\alpha_2^H\right] + (1-\mu)\left[(1-p^L)\,\alpha_1^L - p^L\alpha_2^L\right]$$

s.t. $(1-p^H)U\left(W-\alpha_1^H\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) \geq (1-p^H)U\left(W\right) + p^H U\left(W-\delta\right)$

s.t. $(1-p^L)U\left(W-\alpha_1^L\right) + p^L U\left(W-\delta+\alpha_2^L\right) \geq (1-p^L)U\left(W\right) + p^L U\left(W-\delta\right)$

El Lagrangiano del problema nos queda:

$$\begin{gathered}
\mathscr{L} = \mu\left[(1-p^H)\,\alpha_1^H - p^H\alpha_2^H\right] + (1-\mu)\left[(1-p^L)\,\alpha_1^L - p^L\alpha_2^L\right] + \\
\lambda^H\left[(1-p^H)U\left(W-\alpha_1^H\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) - (1-p^H)U\left(W\right) - p^H U\left(W-\delta\right)\right] + \\
\lambda^L\left[(1-p^L)U\left(W-\alpha_1^L\right) + p^L U\left(W-\delta+\alpha_2^L\right) - (1-p^L)U\left(W\right) - p^L U\left(W-\delta\right)\right]
\end{gathered}$$

CPO

$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha_1^H} = \mu\left(1-p^H\right) - \lambda^H(1-p^H)U'\left(W-\alpha_1^H\right) = 0$

$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha_2^H} = -\mu p^H + \lambda^H p^H U'\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) = 0$

$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha_1^L} = \left(1-\mu\right)\left(1-p^L\right) - \lambda^L(1-p^L)U'\left(W-\alpha_1^L\right) = 0$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_2^L} = -\left(1-\mu\right)p^L + \lambda^L p^L U'\left(W-\delta+\alpha_2^L\right) = 0$

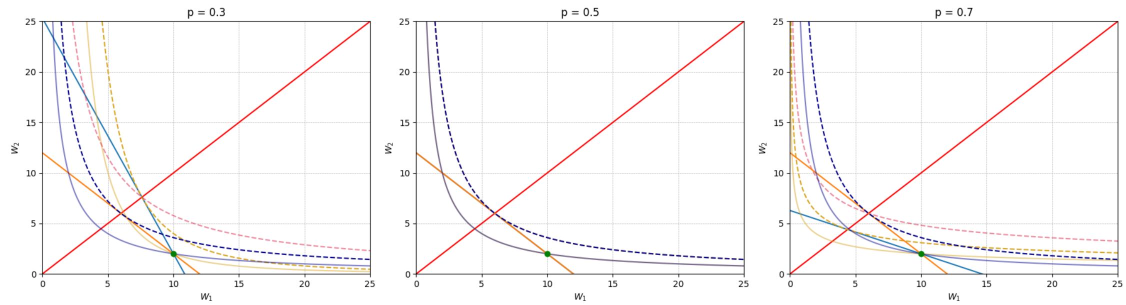
Por lo tanto, las condiciones de equilibrio serían:

$$W - \alpha_1^H = W - \delta + \alpha_2^H$$

$$W - \alpha_1^L = W - \delta + \alpha_2^L$$

Asegura a ambos sujetos, y a cada uno le cobra una póliza de:

$$\boxed{\alpha_1^i = p^i \delta}$$



Es claro que el sujeto con altas probabilidades tiene incentivos a hacerse pasar por el de baja probabilidad siempre y así alcanzar una mayor utilidad.

Equilibrio pooling/agrupador

A ambos les asignamos el mismo α_1, α_2

$$\max_{\alpha_1,\alpha_2} V = \mu\left[\left(1-p^H\right)\alpha_1 - p^H\alpha_2\right] + \left(1-\mu\right)\left[\left(1-p^L\right)\alpha_1 - p^L\alpha_2\right]$$

s.t. $(1-p^H)U\left(W-\alpha_1\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right) \geq (1-p^H)U\left(W\right) + p^H U\left(W-\delta\right)$

s.t. $(1-p^L)U\left(W-\alpha_1\right) + p^L U\left(W-\delta+\alpha_2\right) \geq (1-p^L)U\left(W\right) + p^L U\left(W-\delta\right)$

El Lagrangiano del problema es:

$$\mathscr{L} = \mu\left[\left(1-p^H\right)\alpha_1 - p^H\alpha_2\right] + \left(1-\mu\right)\left[\left(1-p^L\right)\alpha_1 - p^L\alpha_2\right] +$$
$$\lambda^H\left[(1-p^H)U\left(W-\alpha_1\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right) - (1-p^H)U\left(W\right) - p^H U\left(W-\delta\right)\right] +$$
$$\lambda^L\left[(1-p^L)U\left(W-\alpha_1\right) + p^L U\left(W-\delta+\alpha_2\right) - (1-p^L)U\left(W\right) - p^L U\left(W-\delta\right)\right]$$

El cual podemos escribir como:

$$\mathscr{L} = \mu\left[\left(1-p^H\right)\alpha_1 - p^H\alpha_2\right] + \left(1-\mu\right)\left[\left(1-p^L\right)\alpha_1 - p^L\alpha_2\right] +$$

$$\lambda^H \left[(1-p^H)U\left(W-\alpha_1\right)+p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^H)U\left(W\right)-p^H U\left(W-\delta\right)\right]+$$
$$\lambda^L \left[(1-p^L)U\left(W-\alpha_1\right)+p^L U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^L)U\left(W\right)-p^L U\left(W-\delta\right)\right]$$

$\bar{p} \equiv \mu p^H + (1-\mu)\,p^L$

CPO

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_1} = (1-\bar{p}) - \lambda^H U'\left(W-\alpha_1\right) - \lambda^L U'\left(W-\alpha_1\right) = 0$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_2} = -\bar{p} + \lambda^H U'\left(W-\delta+\alpha_2\right) + \lambda^L U'\left(W-\delta+\alpha_2\right) = 0$

Condiciones Complementarias

$\lambda^H \left[(1-p^H)U\left(W-\alpha_1\right)+p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^H)U\left(W\right)-p^H U\left(W-\delta\right)\right]=0$

$\lambda^L \left[(1-p^L)U\left(W-\alpha_1\right)+p^L U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^L)U\left(W\right)-p^L U\left(W-\delta\right)\right]=0$

Es claro que si se cumple la primera restricción con igualdad tenemos:

$$(1-p^H)U\left(W-\alpha_1\right)+p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^H)U\left(W\right)-p^H U\left(W-\delta\right)=0\geq$$
$$(1-p^L)U\left(W-\alpha_1\right)+p^L U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^L)U\left(W\right)-p^L U\left(W-\delta\right)$$

y

$$-p^H U\left(W-\alpha_1\right)+p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right)+p^H U\left(W\right)-p^H U\left(W-\delta\right)\geq$$
$$-p^L U\left(W-\alpha_1\right)+p^L U\left(W-\delta+\alpha_2\right)+p^L U\left(W\right)-p^L U\left(W-\delta\right)$$

Reordenando tenemos:

$$\left(p^H-p^L\right)\left[U\left(W\right)-U\left(W-\alpha_1\right)+U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-U\left(W-\delta\right)\right]\geq 0$$

El segundo paréntesis es claro que nos queda positivo, por lo tanto, demostramos que no puede suceder que bajo el equilibrio agrupador se satisfasga la restricción de participación de los sujetos altos con igualdad, ya que los sujetos de probabilidad baja no participarían.

De todas formas obtengamos α_1 y α_2 que resuelven el problema "fingiendo demencia" de que el grupo bajo no participará

Condición de Equilibrio

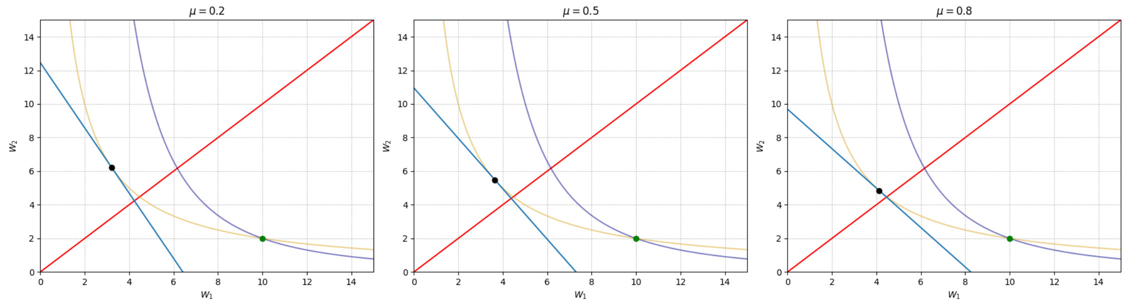
$$\frac{U'\left(w-\alpha_1\right)}{U'\left(w-\delta+\alpha_2\right)} = \frac{1-\bar{p}}{\bar{p}}$$

$$w-\alpha_1 = \left(U'\right)^{-1}\left[\frac{1-\bar{p}}{\bar{p}}U'\left(w-\delta+\alpha_2\right)\right]$$

Reemplazamos en la restricción:

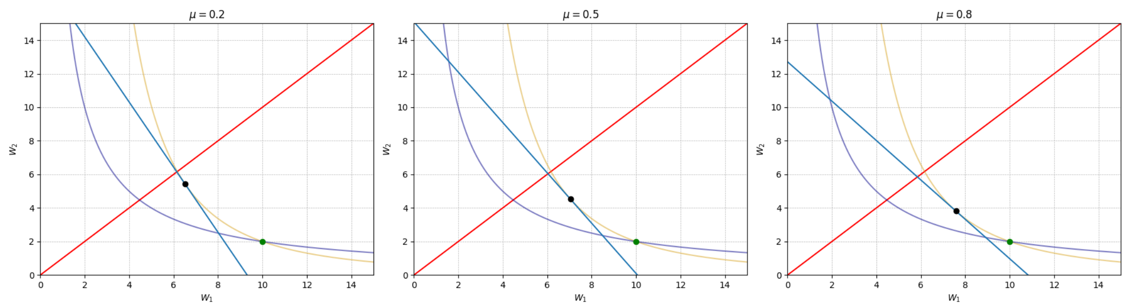
$(1-p^H)U\left\{\left(U'\right)^{-1}\left[\frac{1-\bar{p}}{\bar{p}}U'\left(w-\delta+\alpha_2\right)\right]\right\}+p^H U\left(W-\delta+\alpha_2\right)-(1-p^H)U\left(W\right)-p^H U\left(W-\delta\right)=0$

$$\alpha_1 = \alpha_1^* \left(\bar{p}, p^H, d\right)$$



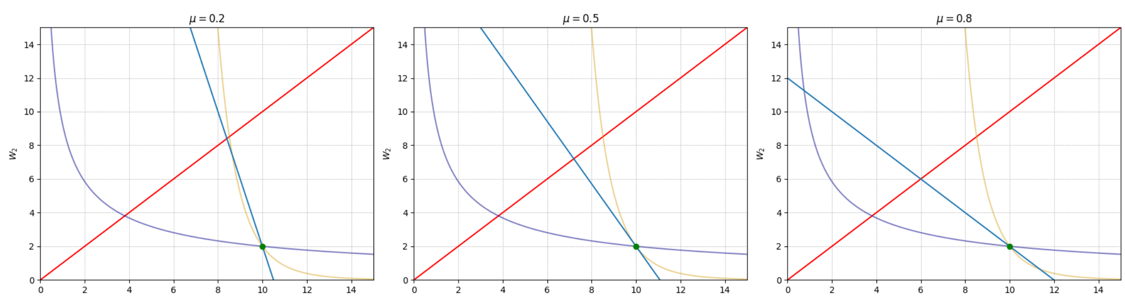
No solo eso, sino que cualquier contrato por encima de la recta roja generaría riesgo moral, por lo tanto es más que un no este equilibrio.

Supongamos ahora, que satisfacemos solo la restricción del sujeto de baja probabilidad con igualdad.



En este caso, nos queda que ambos tipos compran el contrato. Este no configura un equilibrio, ya que podría haber un contrato que ofreciese más consumo en cada estado de la naturaleza permitiría beneficio positivo, y sería preferido a este contrato por todas las partes. Por lo tanto, otra firma vendría y lo robaría.

Supongamos ahora que ambas restricciones se cumplen con igualdad. De forma tal que solo tenemos que resolver las restricciones. Esto nos termina quedando



En este caso cualquier contrato que se encontrara por encima de la recta de beneficio y por debajo de la curva del de alta probabilidad de choque implicaría un contrato para el cual los sujetos de baja probabilidad estarían dispuestos a aceptar, consumiendo más en ambos estados y aumentando el beneficio de la empresa.

Por lo tanto, tampoco constituye un equilibrio.

En este punto las pendientes de las curvas de indiferencia cumplen que:

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{p^H} = \frac{(1-p^H)}{p^H}\frac{U'(W_1)}{U'(W_2)}$$

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{p^L} = \frac{(1-p^L)}{p^L}\frac{U'(W_1)}{U'(W_2)}$$

Por lo tanto, esto implica que la pendiente de la curva de indiferencia $\bar{U}^H$ es $\frac{(1-p^H)}{p^H}\frac{p^L}{(1-p^L)}$ veces la pendiente de la curva de indiferencia de los sujetos de probabilidad baja.

Por lo tanto, finalmente resolvemos el problema, estableciendo la restricción de compatabilidad de incentivos:

$$\max_{\alpha_1^i,\alpha_2^i} V = \mu\left[\left(1-p^H\right)\alpha_1^H - p^H\alpha_2^H\right] + (1-\mu)\left[\left(1-p^L\right)\alpha_1^L - p^L\alpha_2^L\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & (1-p^H)U\left(W-\alpha_1^H\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) \geq (1-p^H)U\left(W\right) + p^H U\left(W-\delta\right)\\
\text{s.t.}\quad & (1-p^L)U\left(W-\alpha_1^L\right) + p^L U\left(W-\delta+\alpha_2^L\right) \geq (1-p^L)U\left(W\right) + p^L U\left(W-\delta\right)\\
\text{s.t.}\quad & (1-p^H)U\left(W-\alpha_1^H\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) \geq (1-p^H)U\left(W-\alpha_1^L\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^L\right)
\end{aligned}$$

Ya sabemos que la segunda restricción no se cumple con igualdad, ya que debe cumplirse la tercera restricción:

$$\max_{\alpha_1^i,\alpha_2^i} V = \mu\left[\left(1-p^H\right)\alpha_1^H - p^H\alpha_2^H\right] + (1-\mu)\left[\left(1-p^L\right)\alpha_1^L - p^L\alpha_2^L\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & (1-p^H)U\left(W-\alpha_1^H\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) \geq (1-p^H)U\left(W\right) + p^H U\left(W-\delta\right)\\
\text{s.t.}\quad & (1-p^H)U\left(W-\alpha_1^H\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) \geq (1-p^H)U\left(W-\alpha_1^L\right) + p^H U\left(W-\delta+\alpha_2^L\right)
\end{aligned}$$

CPO

$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha_1^H} = \mu\left(1-p^H\right) - \left(\lambda^H+\lambda^L\right)(1-p^H)U'\left(W-\alpha_1^H\right) = 0$

$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha_2^H} = -\mu p^H + \left(\lambda^H+\lambda^L\right)(1-p^H)U'\left(W-\delta+\alpha_2^H\right) = 0$

De estas condiciones entonces surge claramente que:

$$W-\alpha_1^H = W-\delta+\alpha_2^H$$

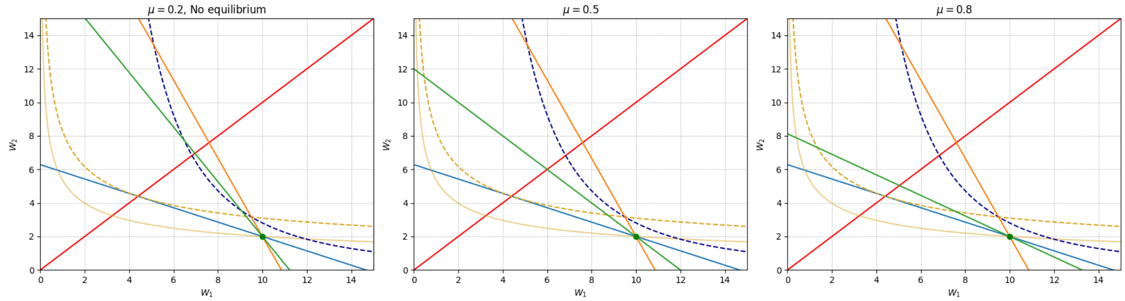
Y para asegurar que se cumple la restricción de beneficios igual cero, simplemente nos concentramos que $\mu\left[\left(1-p^H\right)\alpha_1^H - p^H\alpha_2^H\right]=0$, el equilibrio es el mismo que habíamos establecido arriba.

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_1^L} = (1-\mu)\left(1-p^L\right) - \lambda^L(1-p^H)U'\left(W-\alpha_1^H\right)=0$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha_2^L} = -\left(1-\mu\right)p^L + \lambda^L(1-p^H)U'\left(W-\delta+\alpha_2^H\right)=0$

$$\frac{\left(1-p^L\right)}{p^L}\frac{p^H}{\left(1-p^H\right)} = \frac{U'\left(W-\alpha_1^H\right)}{U'\left(W-\delta+\alpha_2^H\right)}$$

y se continua resolviend.



Conclusión el equilibrio de precio único de la teoría competitiva ya no funciona. Cuando hay equilibrio, tiene que ser con contratos que fijan precios y cantidades. Además, las personas de mayor riesgo generan una **externalidad negativa** sobre las de menor riesgo (y estas últimas una externalidad positiva sobre las de mayor riesgo). La existencia y forma del equilibrio dependen de supuestos que, con información perfecta, no importarían. Incluso, bajo condiciones bastante plausibles, **puede darse que el equilibrio ni siquiera exista**.