Conjectures in Cournot Duopoly under Cost Uncertainty - Suyeol and Iltae

Note: This document is written in spanish.

Central question: How do firms form output conjectures in a Cournot duopoly when they face uncertainty about the rival's cost structure?

Key mechanism / result:

- Firms hold subjective beliefs about competitor's marginal costs
- Strategic responses shift compared to certainty case
- Reaction functions move inward: output is lower under uncertainty
- The magnitude of adjustment is captured by conjecture parameters

Intuition

- Higher perceived cost uncertainty induces more cautious output choices, reducing the aggressive competition observed under complete information.

Why it matters: This framework formalizes how incomplete information on cost conditions alters strategic interaction and equilibrium outcomes in oligopolistic markets.

Reference: Ryu, S., & Kim, I. (2011) *Conjectures in Cournot Duopoly under Cost Uncertainty.* https://api.semanticscholar.org/CorpusID:55329444

Conjectures in Cournot Duopoly under Cost Uncertainty

By Suyeol Ryu and Iltae Kim

Tema: incertidumbre de costos en un modelo sencillo de duopolio de Cournot. $\Longrightarrow$ Las firmas no saben las cantidades que produce y va a producir la otra firma.

Cada firma desconoce la función de costos de su rival en el momento de elegir su nivel de producción. Por lo tanto, bajo incertidumbre, cada firma utiliza creencias subjetivas sobre la función de costos de la otra, representadas por una distribución de probabilidad propia. Las decisiones de producción se derivan de la maximización de la utilidad esperada frente a esas creencias, lo que genera diferencias respecto al equilibrio de Cournot bajo información completa.

Para comenzar introduce las funciones de costo y de precio, donde cada firma maximiza:

$\max_{q_i} \quad \pi_i = (a-q)q_i - c_i q_i$

Sabiendo que las cantidades ofrecidas en el mercado es la suma de las cantidades ofrecidas por cada firma, reescribimos:

$\max_{q_i} \quad \pi_i = (a-q_j-q_i)q_i - c_i q_i$

$\max_{q_i} \quad \pi_i = (a-q_j-q_i-c_i)q_i$

CPO

$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = a - q_j - 2q_i - c_i = 0$

CSO

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_i^2} = -2 < 0$

Una vez que ya sabemos que se cumplen las condiciones de orden, despejemos las cantidades de q_1

$a - q_j - 2q_i - c_i = 0$

$q_i = \frac{a-q_j-c_i}{2}$

Para la firma j se repite el proceso y llegamos:

$q_j = \frac{a-q_i-c_j}{2}$

Juntamos ambas funciones para conocer las cantidades de equilibrio, donde se cortan ambas curvas de reacción:

$q_i = \frac{a-\frac{a-q_i-c_j}{2}-c_i}{2} = \frac{a+c_j-2c_i}{4} + \frac{q_i}{4}$

$\frac{3}{4}q_i = \frac{a+c_j-2c_i}{4}$

$q_i = \frac{a+c_j-2c_i}{3}$

$q_j = \frac{a+c_i-2c_j}{3}$

Cuando introducimos la incertidubre, ambas empresas tienen información incierta sobre el costo marginal de la otra empresa.

$E(\pi_i|\Omega_i) = (a - E(q_j|\Omega_i) - q_i - c_i)q_i$

CPO

$\frac{\partial E(\pi_i|\Omega_i)}{\partial q_i} = a - E(q_j|\Omega_i) - 2q_i - c_i = 0$

CSO

$\frac{\partial^2 E(\pi_i|\Omega_i)}{\partial q_i^2} = -2 < 0$

Bajo el mismo proceso anterior llegamos a:

$q_i = \frac{a-E(q_j|\Omega_i)-c_i}{2}$

$q_j = \frac{a-E(q_i|\Omega_j)-c_j}{2}$

Como asumimos que no existe intercambio de información entre las empresas, el equilibrio va a variar según las expectativas que tenga cada empresa de la otra. Resolviendo el equilibrio, llegamos:

$q_i = \frac{a-E(q_j|\Omega_i)-c_i}{2}$

$E(q_j|\Omega_i) = E[\frac{a-E(q_i|\Omega_j)-c_j}{2}|\Omega_i]$

$E(q_j|\Omega_i) = \frac{1}{2}\left(a - E[E(q_i|\Omega_j)|\Omega_i] - E[c_j|\Omega_i]\right)$

De la misma forma:

$E(q_i|\Omega_j) = \frac{1}{2}\left(a - E[E(q_j|\Omega_i)|\Omega_j] - E[c_i|\Omega_j]\right)$

Por lo tanto:

$E(q_j|\Omega_i) = \frac{1}{2}\left(a - E[\frac{1}{2}\{a - E[E(q_j|\Omega_i)|\Omega_j] - E[c_i|\Omega_j]\}|\Omega_i] - E[c_j|\Omega_i]\right)$

$ $

$q_i = \frac{1}{2}\{a - \frac{1}{2}\left(a - E[\frac{1}{2}\{a - E[E(q_j|\Omega_i)|\Omega_j] - E[c_i|\Omega_j]\}|\Omega_i] - E[c_j|\Omega_i]\right) - c_i\}$

$ $

$q_i = \frac{1}{2}\{a - \frac{1}{2}\left(a - E[\frac{1}{2}\{a - E[\frac{1}{2}\left(a - E[E(q_i|\Omega_j)|\Omega_i] - E[c_j|\Omega_i]\right)|\Omega_j] - E[c_i|\Omega_j]\}|\Omega_i] - E[c_j|\Omega_i]\right) - c_i\}$

and so on... podríamos seguir reemplazando de forma tal que llegamos:

$q_i = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - ...)a - (\frac{1}{2}c_i + \frac{1}{2^3}(E[E[c_i|\Omega_j]|\Omega_i + ...]) + \frac{1}{2^2}E[c_j|\Omega_i] + \frac{1}{2^4}E[E[E[c_j|\Omega_i]|\Omega_j]|\Omega_i] + ...$

Suposición: las empresas tienen un valor esperado del costo de la otra forma que es igual al costo más un error llamado b_i donde se asume que es un sesgo no sistemático pequeño.

Esto implica que la expectativa de la empresa i sobre el sesgo esperado de la empresa j, b_i, es cero: $E(b_i|\Omega_i) = 0$

Por lo tanto, reemplazamos:

$E[E[c_i|\Omega_j]|\Omega_i] = E[(c_i + b_i)|\Omega_i] = E[c_i|\Omega_i] + E[b_i|\Omega_i] = c_i + E[b_i|\Omega_i] = c_i$

Podemos generalizar y llegar a las siguientes conclusiones:

$E\{...E[E[c_i|\Omega_j]|\Omega_i]...|\Omega_i\} = E[E[c_i|\Omega_j]|\Omega_i] = c_i$

$E\{...E[E[c_i|\Omega_j]|\Omega_i]...|\Omega_j\} = E[c_i|\Omega_j] = c_i + b_i$

Reemplazamos:

$q_i = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - ...)a - \frac{1}{2}c_i - \frac{1}{2^3}c_i + \frac{1}{2^2}(c_j + b_j) + \frac{1}{2^4}(c_j + b_j) + ...$

Simplificamos

$q_i = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - ...)a - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + ...)c_i + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ...)(c_j + b_j)$

Aplicamos la fórmula de una progresión geometrica tal que, en el primer término:

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$S^1_\infty = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$

En el segundo término:

$S^2_\infty = \frac{1/2}{1-1/2^2} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$

En el tercer término:

$S^3_\infty = \frac{1/2^2}{1-1/2^2} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

Reemplazamos a los equivalentes de la progresión geométrica de infinitos términos:

$q_i = \frac{1}{3}(a - 2c_i + c_j + b_j)$

Supongamos que hay valores máximos y mínimos para el sesgo, b_j, tal que b^u_j es el valor máximo de error y b^l_j es el valor mínimo de error. Por lo tanto:

$q^{max}_i = \frac{1}{3}(a - 2c_i + c_j + b^u_j) = \frac{1}{3}(a - 2c_i + c_j) + \frac{1}{3}b^u_j = q_i + \frac{1}{3}b^u_j$

$q^{min}_i = \frac{1}{3}(a - 2c_i + c_j + b^l_j) = \frac{1}{3}(a - 2c_i + c_j) + \frac{1}{3}b^l_j = q_i + \frac{1}{3}b^l_j$

Lo mismo sucede para la otra empresa, de forma tal, que las cantidades de equilibrio quedaran entre los valores máximos y mínimos.

$q^{min}_i \leq q_i \leq q^{max}_i$

$q^{min}_j \leq q_j \leq q^{max}_j$

$E[q_i|\Omega_j]^l = \frac{1}{2}(a - (c_i + b^l_i) - q_j) \leq E[q_i|\Omega_j] \leq E[q_i|\Omega_j]^u = \frac{1}{2}(a - (c_i + b^u_i) - q_j)$

$q_i = q_i + \frac{1}{3}b_j$

Finalmente, esto implica que si la expectativa de la empresa i sobre c_j es mayor (menor) que el c_j real, es decir que haya un error b_j positivo, entonces la producción de equilibrio $q_i°$, es mayor (menor) que la producción de equilibrio en condiciones de certeza, q_i.

Analicemos ahora el comportamiento respecto a la maximización de la utilidad esperada de cada firma:

La primera parte sigue al paper de Sandmo, por lo tanto he copiado lo que ya estaba en el análisis del paper correspondiente, continuando con ello:

La función de beneficio esta dada por $\pi(q) = pq - C(q) - B$, tal que:

$\max_q \quad E[U(pq - C(q) - B)]$

CPO (maximizar beneficio)

$\frac{\partial E[U]}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial(pq - C(q) - B)}{\partial q} = 0$

$\frac{\partial E[U]}{\partial q} = E[U'(p - C'(q))] = 0$

CSO

$D = \frac{\partial^2 E[U]}{\partial q^2} = \frac{\partial E[U'(p - C'(q))]}{\partial q} = E[U''(p - C'(q)) - U'(C''(q))]$

Retomando, tenemos la función de beneficio y la función de beneficio esperado:

$\pi(q) = pq - C(q) - B$

$E[\pi] = \mu q - C(q) - B$

La diferencia entre el beneficio y el beneficio esperado es:

$\pi(q) - E[\pi] = pq - C(q) - B - \mu q + C(q) + B$

Por lo tanto, cuando el precio futuro sea mayor que el precio esperado $(p - \mu) > 0 \rightarrow p > \mu$, la utilidad de π será mayor que la utilidad de $E[\pi]$, el beneficio esperado.

$\pi(q) = E[\pi] + (+)q$

$U(\pi) > U(E[\pi])$

$U'(\pi) \leq U'(E[\pi])$ si $(p - \mu) \geq 0$

$U'(\pi)(p - \mu) \leq U'(E[\pi])(p - \mu)$

$E[U'(\pi)(p - \mu)] \leq E[U'(E[\pi])(p - \mu)]$

Por definición:

$E[U'(E[\pi])(p - \mu)] = U'(E[\pi])(\mu - \mu) = 0$

$E[U'(\pi)(p - \mu)] \leq 0$

Utilidad marginal averso al riesgo $\rightarrow$ Positiva

retomando: $E[U'(p - \mu)] = E[U'(C'(q) - \mu)]$

$E[U'(p - \mu)] = E[U'(C'(q) - \mu)] \leq 0$

Para que se cumpla la igualdad:

Sabiendo que Utilidad marginal averso al riesgo es positiva, si o si $C'(q) \leq \mu$

Esto implica entonces, que el output bajo incertidumbre es menor al output bajo certidumbre.

Volviendo al caso de este paper, y bajo incertidumbre en la información de la otra firma, podemos plantear el mismo procedimiento. Asumiendo que ambas firmas son aversas al riesgo tal que u' 0 y $u'' < 0$, planteamos las nuevas condiciones de orden, de maximizar la utilidad esperada del beneficio:

La función de beneficio es $\pi_i = (a - q_j - q_i)q_i - c_i q_i$, tal que:

$\max_{q_i} \quad E[U(\pi_i|\Omega_i) = E[U((a - q_j - q_i)q_i - c_i q_i)|\Omega_i]$

La firma tiene incertidumbre sobre los costos que tiene la otra firma, por lo tanto, podemos reescribir:

$\max_{q_i} \quad E[U(\pi_i|\Omega_i)] = E[U((a - q_j|\Omega_i - q_i - c_i)q_i)]$

CPO

$\frac{\partial E[U(\pi_i|\Omega_i)]}{\partial q_i} = E[U'(\pi_i|\Omega_i)(a - q_j|\Omega_i - 2q_i - c_i)] = 0$

CSO

$\frac{\partial^2 E[U(\pi_i|\Omega_i)}{\partial q_i^2} = E[U''(\pi_i|\Omega_i)(a - q_j|\Omega_i - 2q_i - c_i)^2 - 2U'(\pi_i|\Omega_i)] < 0$

De la condición de primer orden, podemos distribuir el valor esperado y despejar $q_j|\Omega_i$, tal que:

$E[U'(\pi_i|\Omega_i)(a - 2q_i - c_i)] - E[U'(\pi_i|\Omega_i)q_j|\Omega_i] = 0$

$E[U'(\pi_i|\Omega_i)(a - 2q_i - c_i)] = E[U'(\pi_i|\Omega_i)q_j|\Omega_i]$

Por lo tanto si restamos en ambos lados $E[U'(\pi_i|\Omega_i)E(q_j|\Omega_i)]$

$E[U'(\pi_i|\Omega_i)(a - 2q_i - c_i - E(q_j|\Omega_i))] = E[U'(\pi_i|\Omega_i)(q_j|\Omega_i - E(q_j|\Omega_i))]$

Por otro lado, conocemos:

$\pi|\Omega_i = (a - 2q_i - c_i - q_j|\Omega_i)q_i$

$E[\pi|\Omega_i] = (a - 2q_i - c_i - E[q_j|\Omega_i])q_i$

La diferencia entre el beneficio y el beneficio esperado entonces es:

$\pi|\Omega_i - E[\pi|\Omega_i] = (a - 2q_i - c_i - q_j|\Omega_i)q_i - (a - 2q_i - c_i - E[q_j|\Omega_i])q_i$

$\pi|\Omega_i - E[\pi|\Omega_i] = -\{q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i]\}q_i$

En palabras significa que cuando el output de la otra firma termine siendo mayor al esperado $q_j|\Omega_i > E[q_j|\Omega_i]$, el beneficio efectivo de la firma va a ser menor al esperado.

Sabiendo que la utilidad marginal es creciente, y que entonces dado el caso anterior, el beneficio es menor al beneficio esperado podemos cuando $q_j|\Omega_i > E[q_j|\Omega_i]$, podemos escribir al primer término:

$u_i(\pi|\Omega_i) \geq u_i(E[\pi|\Omega_i])$

$u_i'(\pi|\Omega_i) \geq u_i'(E[\pi|\Omega_i])$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i]$

$u_i'(\pi|\Omega_i)(q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i]) \geq u_i'(E[\pi|\Omega_i])(q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i])$

Tomando valor esperado en ambos:

$E[u_i'(\pi|\Omega_i)(q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i])] \geq E[u_i'(E[\pi|\Omega_i])(q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i])]$

$E[u_i'(\pi|\Omega_i)(q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i])] \geq u_i'(E[\pi|\Omega_i])(E[q_j|\Omega_i] - E[q_j|\Omega_i])$

$E[u_i'(\pi|\Omega_i)(q_j|\Omega_i - E[q_j|\Omega_i])] \geq 0$

Volviendo a la ecuación $E[U'(\pi_i|\Omega_i)(a - 2q_i - c_i - E(q_j|\Omega_i))] = E[U'(\pi_i|\Omega_i)(q_j|\Omega_i - E(q_j|\Omega_i))]$

Entonces podemos reemplazar de forma tal que:

$E[U'(\pi_i|\Omega_i)(a - 2q_i - c_i - E(q_j|\Omega_i))] \geq 0$

Distribuimos el valor esperado

$E[U'(\pi_i|\Omega_i)]E[(a - 2q_i - c_i - E(q_j|\Omega_i))] \geq 0$

$E[U'(\pi_i|\Omega_i)](a - 2q_i - c_i - E(q_j|\Omega_i)) \geq 0$

Resolvemos para q_i

$a - 2q_i - c_i - E(q_j|\Omega_i) \geq 0$

$a - c_i - E(q_j|\Omega_i) \geq 2q_i$

Tanto para la empresa i, como para la j, por lo tanto:

$q_i \leq \frac{1}{2}(a - c_i - E(q_j|\Omega_i))$

$q_j \leq \frac{1}{2}(a - c_j - E(q_i|\Omega_j))$

Cada empresa reacciona a la otra de una manera que depende de las conjeturas basadas en su información. La curva de reacción de cada empresa reacciona $-\frac{1}{2}$ al cambio en el nivel de producción de la Empresa de la otra empresa, sin embargo, bajo incertidumbre la reacción es menor a $-\frac{1}{2}$.

De forma tal que podríamos reescribir a la diferencia de reacción con k_i. De esta forma las curvas de reacción nos quedan:

$q_i = \frac{1}{2}(a - c_i - q_j) - k_i$

$q_j = \frac{1}{2}(a - c_j - q_i) - k_j$

Resolvemos ambas ecuaciones:

$q_i = \frac{1}{2}(a - c_i - (\frac{1}{2}(a - c_j - q_i) - k_j)) - k_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a - c_i + \frac{1}{2}c_j + \frac{1}{2}q_i + k_j)) - k_i$

$q_i = \frac{1}{4}(a - 2c_i + c_j + 2k_j) - k_i + \frac{1}{4}q_i$

$\frac{3}{4}q_i = \frac{1}{4}(a - 2c_i + c_j + 2k_j) - k_i$

$q_i = \frac{1}{3}(a - 2c_i + c_j + 2k_j) - \frac{4}{3}k_i$

Reorganizamos:

$q_i{}^\circ = \frac{a-2c_i+c_j}{3} + \frac{2}{3}k_j - \frac{4}{3}k_i$

$q_j{}^\circ = \frac{a-2c_j+c_i}{3} + \frac{2}{3}k_i - \frac{4}{3}k_j$

Conclusión Los parámetros k_i y k_j miden el desvío de las curvas de reacción respecto al caso de información completa. En particular, capturan la reducción de las cantidades elegidas debido a la incertidumbre. El cociente $\frac{k_j}{k_i}$ representa la importancia relativa de los errores de estimación entre las firmas y determina la asimetría en las decisiones de producción.

En función de esta razón surgen tres configuraciones:

1. $\frac{k_j}{k_i} > 2$ La firma i es relativamente más optimista respecto a la producción de j. En equilibrio, q_i aumenta y q_j disminuye respecto al caso de certidumbre.

2. $0 < \frac{k_j}{k_i} < \frac{1}{2}$ La firma j es relativamente más optimista respecto a la producción de i. En equilibrio, q_j aumenta y q_i disminuye respecto al caso de certidumbre.

3. $\frac{1}{2} \leq \frac{k_j}{k_i} \leq 2$ Los errores de estimación son de magnitud similar. En equilibrio, ambas firmas producen menos que bajo certidumbre, lo que implica más prudencia estratégica por aversión al riesgo.

En resumen, la magnitud y la asimetría de los errores en las creencias sobre la conducta del rival determinan si la producción bajo incertidumbre se reduce para ambas firmas o si solo una de ellas actúa con mayor cautela. Por tanto, la interacción estratégica en este entorno depende críticamente de los valores de k_i y k_j.