A Contribution to the Empirics of Economic Growth - Mankiw, Romer and Weil

Note: This document is written in Spanish. The document also includes the code used to reproduce (or approximate) the regressions, simulations, and results reported by the authors.

Central question: How do differences in capital accumulation, labor, and human capital explain cross-country income differences?

Key mechanism / result:

- Augments the Solow growth model by including human capital
- Shows that physical and human capital accumulation account for most observed differences in output per worker
- Predicts convergence conditional on similar savings rates and population growth

Intuition:

- Countries with higher savings in physical and human capital will grow faster and reach higher steady-state output levels
- Human capital acts as a multiplier on physical capital, reinforcing growth effects

Why it matters: Provides a quantitative framework linking capital accumulation to income differences and convergence, forming the basis for modern empirical growth accounting.

Reference: Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. N. (1992). *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*. Quarterly Journal of Economics, 107(2), 407–437. https://doi.org/10.2307/2118477

Una Contribución a las Empíricas de Crecimiento Económico

I. El Modelo de Solow de Libro

Comenzamos a partir de rapidamente revisar el modelo de crecimeitno de Solow. Nos concentramos en las implicaciones para datos de países cruzados.

A. El Modelo

El modelo de Solow tomma a la tasa de ahorro, al crecimiento de la población y al progreso económico como exógenos. Hay dos factores, capital y trabajo, los cuales son pagados sus productividades marginales. Asumimos que la función de producción es Cobb-Douglas, tal que la producción en el momento t esta dado por:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}$$

Y tenemos:

$$L(t) = L(0)e^{nt}$$

$$A(t) = A(0)e^{gt}$$

El número de unidades efectivas de trabajo, $A(t)L(t)$ entonces crecen a la tasa $n+g$. De esta forma tenemos que:

$$\frac{Y}{AL} = y = \frac{K}{AL}^{\alpha} = k^{\alpha}$$

Además tenemos que:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Dividiendo por AL, tenemos $\frac{\dot{K}}{AL} = sy - \delta k$, y como podemos escribir: $\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - k\frac{\dot{A}L}{AL}$ podemos escribir:

$$\dot{k} = sy - (n+g+\delta)\,k = sk^{\alpha} - (n+g+\delta)\,k$$

Por lo tanto, el capital de estado estacionario:

$$k^{*} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La predicción central del modelo de solow podemos plantearla como:

$$\frac{Y}{AL} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Que podemos reescribir como

$$\frac{Y}{L} = A(0)e^{gt}\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Tomando logarimos entonces nos queda:

$$\log\left[\frac{Y(t)}{L(t)}\right] = \log A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\log s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\log(n+g+\delta)$$

Dado que este modelo asume que los factores son pagados sus productos marginales, no solo predice el signo pero también las magnitudes de los coeficientes de ahorro y el crecimiento de la población. Especificamente, dado a que la participación del capital α es más o menos un tercio, el modelo implica que la elasticidad del ingreso per capita con respecto a la tasa de interés es aproximadamente 0.5 y la elasticidad con respecto de $(n+g+\delta)$ es aproximadamente -0.5.

[1]:
```
import pandas as pd

df=pd.read_excel('editada mankiw_romer_weil.xlsx')
df
```

[1]:
```
     number            Country  N  Sample I  O  GDP/adult 1960  GDP/adult 1985  \
0         1            Algeria  1        1  0          2485.0          4371.0
1         2             Angola  1        0  0          1588.0          1171.0
2         3              Benin  1        0  0          1116.0          1071.0
3         4           Botswana  1        1  0           959.0          3671.0
4         5       Burkina Faso  1        0  0           529.0           857.0
..      ...                ... ..      ... ..             ...             ...
116     117          Australia  1        1  1          8440.0         13409.0
117     118               Fiji  0        0  0          3634.0             NaN
118     119          Indonesia  1        1  0           879.0          2159.0
119     120        New Zealand  1        1  1          9523.0         12308.0
120     121   Papua New Guinea  1        0  0          1781.0          2544.0

     Growth of GDP  Growth of working age pop   I/Y  School
0              4.8                        2.6  24.1     4.5
1              0.8                        2.1   5.8     1.8
2              2.2                        2.4  10.8     1.8
3              8.6                        3.2  28.3     2.9
4              2.9                        0.9  12.7     0.4
..             ...                        ...   ...     ...
116            3.8                        2.0  31.5     9.8
117            4.2                        NaN  20.6     8.1
118            5.5                        1.9  13.9     4.1
119            2.7                        1.7  22.5    11.9
120            3.5                        2.1  16.2     1.5

[121 rows x 11 columns]
```

[2]:
```python
#El método esta suponiendo que todos tienen la misma trayectoria solo que␣
 ↪algunos estan es distintos momentos.
#En teoría evolutiva es la teoría evolutiva neoclásica, todos los humanos son␣
 ↪iguales.

df['g + d + n']=df['Growth of working age pop'] + 5 #Lo dice el paper.

import numpy as np
df['loggdn']= np.log(df['g + d + n'])
df['logIY']= np.log(df['I/Y'])
df['logGDPadult1985']= np.log(df['GDP/adult 1985'])
```

[3]:
```python
import statsmodels.formula.api as smf
from statsmodels.iolib.summary2 import summary_col

reg1=smf.ols('logGDPadult1985~ logIY + loggdn',data=df[df['N']==1]).fit()
reg2=smf.ols('logGDPadult1985~ logIY + loggdn',data=df[df['Sample I']==1]).fit()
reg3=smf.ols('logGDPadult1985~ logIY + loggdn',data=df[df['O']==1]).fit()

summary1 =summary_col([reg1, reg2, reg3],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}"})

df['loggdnIY']= np.log(df['I/Y']) - np.log(df['g + d + n'])
reg4=smf.ols('logGDPadult1985~ loggdnIY',data=df[df['N']==1]).fit()
reg5=smf.ols('logGDPadult1985~ loggdnIY',data=df[df['Sample I']==1]).fit()
reg6=smf.ols('logGDPadult1985~ loggdnIY',data=df[df['O']==1]).fit()

summary2 =summary_col([reg4, reg5, reg6],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",
                                'Implied a' : lambda x: f"{x.params[1]/(1 + x.
 ↪params[1]):.4f}",
                                '' : lambda x: f"({1/(1 + x.params[1])**2 * x.
 ↪bse[1]:.4f})"})


print(summary1)
print('')
print('Restricted Regression')
print(summary2)
```

```
=============================================
                Non-Oil  Intermediate   OECD
---------------------------------------------
Intercept      8.0353   8.5679       9.1352
               (1.2789) (1.3051)     (2.1501)
logIY          1.4240   1.3176       0.4999
               (0.1431) (0.1709)     (0.4339)
loggdn         -1.9898  -2.0172      -0.7419
               (0.5634) (0.5339)     (0.8522)
R-squared      0.6009   0.5989       0.1059
R-squared Adj. 0.5925   0.5878       0.0118
see            0.6891   0.6106       0.3774
=============================================
Standard errors in parentheses.

Restricted Regression

=============================================
                Non-Oil  Intermediate   OECD
---------------------------------------------
Intercept      6.8724   7.0929       8.6244
               (0.1206) (0.1456)     (0.5333)
loggdnIY       1.4880   1.4310       0.5538
               (0.1247) (0.1391)     (0.3653)
R-squared      0.5974   0.5917       0.1031
R-squared Adj. 0.5932   0.5861       0.0582
see            0.6885   0.6119       0.3684
Implied a      0.5981   0.5886       0.3564
               (0.0201) (0.0235)     (0.1513)
=============================================
Standard errors in parentheses.
```

[4]:

```python
a=reg3.wald_test('logIY = loggdn')
a.pvalue
```

```
C:\Python 3.10.6\lib\site-packages\statsmodels\base\model.py:1906:
FutureWarning: The behavior of wald_test will change after 0.14 to returning
scalar test statistic values. To get the future behavior now, set scalar to
True. To silence this message while retaining the legacy behavior, set scalar to
False.
  warnings.warn(
```

[4]: array(0.19589764)

[5]:

```python
a1=reg4.params[1]/(1 + reg4.params[1])
a2=reg5.params[1]/(1 + reg5.params[1])
a3=reg6.params[1]/(1 + reg6.params[1])
a1,a2,a3
```

[5]: (0.5980697679983922, 0.588639096489607, 0.356434965948391)

[6]:
```
#https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty
#Error estandar de una función no lineal, nos queda:
s1=1/(1 + reg4.params[1])**2 * reg4.bse[1]
s2=1/(1 + reg5.params[1])**2 * reg5.bse[1]
s3=1/(1 + reg6.params[1])**2 * reg6.bse[1]

s1,s2,s3
```

[6]: (0.020142230257784974, 0.02354215894476898, 0.1512973833651088)

II. Agregando Acumulación de Capital Humano al Modelo de Solow

A. El Modelo

Sea la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha-\beta}$$

Donde H es el stock de capital humano, y todas las otras variables son definidas como antes. Sea s_k la fracción de ingreso gastado en inversión de capital físico y s_h la fracción invertida en capital humano. La evolución de la economía esta determinado por

$$\dot{k}(t) = s_k y(t) - (n + g + \delta)\, k(t)$$

$$\dot{h}(t) = s_h y(t) - (n + g + \delta)\, h(t)$$

Donde $y = Y/AL$ y así con las otras, que se dice que son las cantidad por unidad de trabajo efectivo. Estamos asumiendo que la misma función de producción aplica al capital human, al capital físico y al consumo. En otras palabras, una unidad de consumo puede ser transformada sin costo a una unidad de capital físico o una unidad de capital humano. En asición, asumimos que el capital humano se deprecia a la misma tasa que el captial físico. Tenemos entonces que las cantidades de estado estacionario resultan ser:

$$0 = s_k y^*(t) - (n + g + \delta)\, k^*(t)$$

$$0 = s_h y^*(t) - (n + g + \delta)\, h^*(t)$$

Despejando y reemplazando con $y^* = k^{\alpha} h^{\beta}$

$$k^* = \left(\frac{s_k h^{\beta}}{n + g + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$\left[\frac{n+g+\delta}{s_h}h^{1-\beta}\right]^{1/\alpha} = k^*$$

$\left(\frac{n+g+\delta}{s_h}h^{1-\beta}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{s_k h^\beta}{n+g+\delta}\right)^{\alpha}$

$h^{(1-\beta)(1-\alpha)} = \left(\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)h^{\beta\alpha}$

$$h^* = \left(\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}$$

$$\left[\frac{n+g+\delta}{s_h}\left(\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{1-\beta/(1-\alpha-\beta)}\right]^{1/\alpha} = k^*$$

$$\left[(n+g+\delta)^{-\alpha/(1-\alpha-\beta)}\left(s_k^\alpha s_h^{\alpha\beta/(1-\beta)}\right)^{1-\beta/(1-\alpha-\beta)}\right]^{1/\alpha} = k^*$$

$$k^* = \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{n+g+\delta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}$$

Sustituyendo en y tenemos:

$$\frac{Y}{AL} = \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{n+g+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{\beta/(1-\alpha-\beta)}$$

$$\frac{Y}{AL} = \left(\frac{s_k}{n+g+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{s_h}{n+g+\delta}\right)^{\beta/(1-\alpha-\beta)}$$

Tomando logaritmo:

$$\log\left[\frac{Y}{L}\right] - \log A = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log s_h - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\log(n+g+\delta)$$

Retomando que $A(t) = A_0 e^{gt}$ tenemos:

$$\log\left[\frac{Y}{L}\right] = \log A_0 + gt\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log s_h - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\log(n+g+\delta)$$

Esta ecuación muestra como el ingreso per cápita depende en el crecimiento de la población y en la acumulación del stock de capital humano y físico. Aun esperamos que $\alpha = 1/3$, además ahora tenemos que los coeficientes no son $\alpha/1-\alpha$ por lo que no vamos a esperar que sea 0.5, sino que va a depender de β. De forma tal que la presencia de capital humano incrementa el impacto de la acumulación de capital físico en el ingreso.

Hay una forma alternativa de expresar el rol del capital humano, para ello si utilizamos el nivel de capital humano de estado estacionario

$s_h = \left(h^{1-\alpha-\beta}(n+g+\delta)s_k^{-\alpha}\right)^{1/1-\alpha}$

Reemplazando:

$\log\left[\frac{Y}{L}\right] = \log A_0 + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log\left[\left(h^{1-\alpha-\beta}(n+g+\delta)s_k^{-\alpha}\right)^{1/1-\alpha}\right] - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}(n+g+\delta)$

$\log\left[\frac{Y}{L}\right] = \log A_0 + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha}\log h^* + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\frac{1}{1-\alpha}\log(n+g+\delta) - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\frac{\alpha}{1-\alpha}\log s_k - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\log(n+g+\delta)$

$\log\left[\frac{Y}{L}\right] = \log A_0 + gt + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha}\log h^* + \left(\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\right)\log(n+g+\delta)$

$$\log\left[\frac{Y}{L}\right] = \log A_0 + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha}\log h^* + \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left(\frac{\beta-(\alpha+\beta)(1-\alpha)}{1-\alpha}\right)\log(n+g+\delta)$$

Simplificando nos queda

$$\log\left[\frac{Y}{L}\right] = \log A_0 + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\log s_k + \frac{\beta}{1-\alpha}\log h^* + \frac{\alpha}{1-\alpha}\log(n+g+\delta)$$

El modelo con capital humano sugiere dos posibles formas de modificar nuestras regresiones. Una forma es estimar el modelo de Solow de forma reducida, y la segunda forma es incluyendo h^*. Es claro que cada especificación predice diferentes coeficientes para nuestras variables.

[7]:
```
df['logSchool']= np.log(df['School'])



reg7=smf.ols('logGDPadult1985~ logIY + loggdn + logSchool',data=df[df['N']==1]).
  ↪fit()
reg8=smf.ols('logGDPadult1985~ logIY + loggdn + logSchool',data=df[df['Sample␣
  ↪I']==1]).fit()
reg9=smf.ols('logGDPadult1985~ logIY + loggdn + logSchool',data=df[df['O']==1]).
  ↪fit()

summary3 =summary_col([reg7, reg8, reg9],
                      stars=False,
                      model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                      info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
  ↪df_resid):.4f}"})

df['loggdnIY']= np.log(df['I/Y']) - np.log(df['g + d + n'])
df['loggdnSch']= np.log(df['School']) - np.log(df['g + d + n'])

reg10=smf.ols('logGDPadult1985~ loggdnIY + loggdnSch',data=df[df['N']==1]).fit()
reg11=smf.ols('logGDPadult1985~ loggdnIY + loggdnSch',data=df[df['Sample␣
  ↪I']==1]).fit()
reg12=smf.ols('logGDPadult1985~ loggdnIY + loggdnSch',data=df[df['O']==1]).fit()

summary4 =summary_col([reg10, reg11, reg12],
```

```python
                      stars=False,
                      model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                      info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",
                                 'Implied a' : lambda x: f"{x.params[1]/(1 + x.
 ↪params[1]+ x.params[2]):.4f}",
                                 '' : lambda x: f"({(1+ x.params[2])/(1 + x.
 ↪params[1] + x.params[2])**2 * x.bse[1]:.4f})",
                                 'Implied b' : lambda x: f"{x.params[2]/(1 + x.
 ↪params[1]+ x.params[2]):.4f}",
                                 ' ' : lambda x: f"({(1+ x.params[1])/(1 + x.
 ↪params[1] + x.params[2])**2 * x.bse[2]:.4f})"})



print(summary3)
print('')
print('Restricted Regression')
print(summary4)
```

```
=============================================
               Non-Oil  Intermediate   OECD
---------------------------------------------
Intercept      8.6592   8.1084       8.7833
               (0.9448) (0.9736)     (1.8849)
logIY          0.6967   0.7004       0.2761
               (0.1328) (0.1506)     (0.3889)
loggdn         -1.7452  -1.4998      -1.0755
               (0.4159) (0.4032)     (0.7560)
logSchool      0.6545   0.7305       0.7676
               (0.0727) (0.0952)     (0.2933)
R-squared      0.7856   0.7807       0.3524
R-squared Adj. 0.7788   0.7714       0.2444
see            0.5077   0.4547       0.3300
=============================================
Standard errors in parentheses.

Restricted Regression

=============================================
               Non-Oil  Intermediate   OECD
---------------------------------------------
Intercept      7.8531   7.9662       8.7163
               (0.1400) (0.1544)     (0.4662)
loggdnIY       0.7383   0.7091       0.2829
               (0.1236) (0.1377)     (0.3339)
```

```
loggdnSch       0.6571   0.7330       0.7686
                (0.0725) (0.0931)     (0.2843)
R-squared       0.7839   0.7806       0.3523
R-squared Adj.  0.7794   0.7745       0.2841
see             0.5070   0.4516       0.3212
Implied a       0.3082   0.2904       0.1379
                (0.0357) (0.0400)     (0.1403)
Implied b       0.2743   0.3002       0.3746
                (0.0220) (0.0267)     (0.0867)
=============================================
Standard errors in parentheses.
```

III. Crecimiento Endógeno y Convergencia

En los últimos años, los economistas que estudian crecimiento se han girado más a modelos de crecimiento endógeno. Estos modelos tienen la característica del supuesto de rendimientos no decrecientes a un conjunto de factores de producción reproducibles. Dentro de las implicaciones de este supuesto tenemos que los países que ahorran más crecen más indefinidamente y que los países no convergen en ingreso per cápita, aun cuando tengan las mismas preferencias y tecnología.

Debido a que la hipótesis de convergencia de Solow, parecía inconsistente con la evidencia entre países, la cual indicaba que la tasa de crecimiento per cápita no estaban relacionadas con el nivel de producto per cápita inicial.

A. Teoría

El modelo predice que los países alcanzan diferentes estados estacionarios. Por lo tanto, el modelo de Solow no predice convergencia, únicamente predice que el nivel de ingreso per cápita converge al valor de estado estacionario de cada país. En otras palabras, el modelo de Solow predice convergencia solo luego de controlar los determinantes del estado estacionario, algo que podría ser llamado "convergencia condicional".

Además, el modelo de Solow hace predicciones cuantitativas sobre la velocidad de convergencia al estado estacionario. Sea y^* el nivel de ingreso de estado estacionario. Al igual que en el power y como en Sala i Martin, podemos escribir a la tasa de crecimiento del capital como:

$$\gamma_k = sAk^{\alpha-1} - (\delta + n + g)$$

Colocando k en logaritmos tenemos $\log k \implies k = e^{\log k}$

Por lo tanto tenemos que:

$$\gamma_k = sAe^{-(1-\alpha)\log k} - (\delta + n + g)$$

Por lo tanto, si derivamos respecto de $\log k$, nos queda:

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \log k} = -(1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\log k}$$

Dado el estado estacionario nos queda:

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \log k} = \lambda^* = -(1-\alpha)\,(\delta + n + g)$$

Por lo tanto, podemos escribir a γ_k aproximando por Taylor al rededor del óptimo:

$\gamma_k = sAe^{-(1-\alpha)\log k} - (\delta + n + g)$

$\gamma_k = \gamma_k\,(\log k^*) + -(1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\log k}\,[\log k^* - \log k]$

Por lo tanto, nos queda:

$$\gamma_k = \lambda^*\,[\log k^* - \log k]$$

Donde podemos escribir:

$$\frac{\partial \log k}{\partial t} = \lambda^*\,[\log k^* - \log k]$$

Resolvemos la ecuación diferencial la cual nos queda:

$\frac{\partial \log k}{\partial t} - \lambda^* \log k = 0$

Solución homogénea: $\log k(t) = Ae^{rt}$

$\log k = Ae^{-\lambda^* t}$

Solución particular: $\log k(t) = c$

$0 = \lambda^*\,[\log k^* - c]$

$\log k^* = c$

Por lo tanto, tenemos:

$$\log k = Ae^{-\lambda^* t} + \log k^*$$

Evaluando en $t = 0$

$\log k_0 = A + \log k^*$

$A = \log k_0 - \log k^*$

$$\log k(t) = (\log k_0 - \log k^*)e^{-\lambda^* t} + \log k^* = (1 - e^{-\lambda^* t})\log k^* + \log k_0 e^{-\lambda^* t}$$

De la misma forma tenemos que $\gamma_y = \gamma_k$ por lo tanto, podemos escribir:

$$\log y(t) = (1 - e^{-\lambda^* t})\log y^* + \log y_0 e^{-\lambda^* t}$$

Restando en $\log y_0$ en ambos lados:

$$\log y(t) - \log y_0 = (1 - e^{-\lambda^* t}) \log y^* + (1 - e^{-\lambda^* t}) \log y_0$$

Teniendo encuenta que $y^* = \left(\frac{s_k}{n+g+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{s_h}{n+g+\delta}\right)^{\beta/(1-\alpha-\beta)}$. Por lo tanto, podemos reemplazar:

$$\log y(t) - \log y_0 = (1 - e^{-\lambda^* t}) \log \left[\left(\frac{s_k}{n+g+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{s_h}{n+g+\delta}\right)^{\beta/(1-\alpha-\beta)} \right] + (1 - e^{-\lambda^* t}) \log y_0$$

$$\log y(t) - \log y_0 = (1 - e^{-\lambda^* t}) \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \log s_k + (1 - e^{-\lambda^* t}) \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \log s_h - (1 - e^{-\lambda^* t}) \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \log(n+\delta+g) + (1 - e^{-\lambda^*$$

Por lo tanto, en el modelo de crecimiento del ingreso de Solow es una función de los determinantes del estado estacionario y el nivel incial del ingreso.

Los modelos de crecimiento endógeno hace predicciones muy diferentes del modelo de Solow relacionado con la convergencia entre países. En modelos de crecimiento endógeno no hay nivel de ingreso de estado estacionario; diferencias entre los países en ingresos per cápita pueden persistir indefinidamente, aun si los países tienen las mismas tasas de ahorro y las tasas de crecimiento de la población. Los modelos de crecimiento endógeno con un único sector, aquellos con la función de producción "$Y = AK$", predice no convergencia de cualquier tipo.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación como:

$$\log y(t) - \log y_0 = \beta_0 + \beta_1 \log y_0$$

Donde $\beta_1 = (1 - e^{-\lambda^* t})$ que despejando nos queda: $\log(1 - \beta) = -\lambda^* t$

B. Resultados

Ahora testeamos las predicciones de convergencia del modelo de Solow. En la tabla III el log del ingreso per cápita aparece solo en lado derecho. Esta tabla reproduce los resultados de muchos otros autores en los fallos del ingreso a converger. El coeficiente en el nivel inicial per cápita es apenas positivo para la muestra de no-petróleo y cero para la muestra intermedia, y ambas regresiones el R^2 ajustado es esencialmente cero. No hay tendencia para los países pobres de crecer a una tasa más rápida en promedio que los países ricos.

[8]:
```
df['logGDPadult1960']= np.log(df['GDP/adult 1960'])
df['logGDP6085']= df['logGDPadult1985']-df['logGDPadult1960']
reg13=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960',data=df[df['N']==1]).fit()
reg14=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960',data=df[df['Sample I']==1]).fit()
reg15=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960',data=df[df['O']==1]).fit()

summary5 =summary_col([reg13, reg14, reg15],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
```

```
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",'implied lambda' : lambda x: f"{np.log(1-x.params[1])/25:.
 ↪4f}",' ' : lambda x: f"({1/((1-x.params[1])*25)* x.bse[1]:.4f})"})
print(summary5)
```

```
==============================================
                Non-Oil  Intermediate   OECD
----------------------------------------------
Intercept       -0.2666  0.5875       3.6863
                (0.3796) (0.4329)     (0.6849)
logGDPadult1960 0.0943   -0.0042      -0.3411
                (0.0496) (0.0548)     (0.0785)
R-squared       0.0363   0.0001       0.4855
R-squared Adj.  0.0262   -0.0136      0.4597
see             0.4405   0.4077       0.1830
implied lambda  -0.0040  0.0002       0.0117
                (0.0022) (0.0022)     (0.0023)
==============================================
Standard errors in parentheses.
```

La Tabla III muestra, sin embargo, que hay una tendencia significativa hacia la convergencia en la muestra OECD. El coeficiente en el nivel inicial del ingreso es significativamente negativo, y el R^2 ajustado de la regresión es 0,46. Este resultado confirma los descubrimientos de Dowrick y Nguyen, entre otros.

La Tabla IV agrega nuestra medida de tasas de inversión y de crecimiento de la población en el lado derecho de la regresión. En todas las muestras el coeficiente del nivel incial del ingreso es ahora significativamente negativo, esto es, hay una evidencia fuerte de convergencia. Además, la inclusión de la inversión y la tasa de crecimiento de la población son sustanciales para el ajuste de la regresión.

```
[9]: reg16=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960 +logIY +␣
 ↪loggdn',data=df[df['N']==1]).fit()
reg17=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960 +logIY + loggdn',data=df[df['Sample␣
 ↪I']==1]).fit()
reg18=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960 +logIY +␣
 ↪loggdn',data=df[df['O']==1]).fit()

summary6 =summary_col([reg16, reg17, reg18],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",'implied lambda' : lambda x: f"{np.log(1-x.params[1])/25:.
 ↪4f}",' ' : lambda x: f"({1/((1-x.params[1])*25)* x.bse[1]:.4f})"})
print(summary6)
```

```
==============================================
```

```
                Non-Oil  Intermediate   OECD
---------------------------------------------
Intercept       0.3311   1.3820       3.8726
                (0.8008) (0.8768)     (1.0207)
logGDPadult1960 -0.1409  -0.2278      -0.3499
                (0.0520) (0.0573)     (0.0657)
logIY           0.6472   0.6459       0.3901
                (0.0867) (0.1039)     (0.1761)
loggdn          -0.3023  -0.4575      -0.7662
                (0.3044) (0.3074)     (0.3452)
R-squared       0.4019   0.3788       0.6767
R-squared Adj.  0.3828   0.3526       0.6228
see             0.3507   0.3258       0.1529
implied lambda  0.0053   0.0082       0.0120
                (0.0018) (0.0019)     (0.0019)
=============================================
Standard errors in parentheses.
```

La Tabla V agrega nuestra medida de capital humano en lado derecho de la regresión en la Tabla IV. Esta nueva variable disminuye aun más el coeficiente del nivel inicial del ingreso, y nuevamente mejora el ajuste de la regresión.

[10]:
```python
reg19=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960 +logIY + loggdn +␣
 ↪logSchool',data=df[df['N']==1]).fit()
reg20=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960 +logIY + loggdn +␣
 ↪logSchool',data=df[df['Sample I']==1]).fit()
reg21=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960 +logIY + loggdn +␣
 ↪logSchool',data=df[df['O']==1]).fit()

summary6 =summary_col([reg19, reg20, reg21],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",'implied lambda' : lambda x: f"{np.log(1-x.params[1])/25:.
 ↪4f}",' ' : lambda x: f"({1/((1-x.params[1])*25)* x.bse[1]:.4f})"})
print(summary6)
```

```
=============================================
                Non-Oil  Intermediate   OECD
---------------------------------------------
Intercept       1.8739   2.4977       4.1550
                (0.8457) (0.8838)     (0.9979)
logGDPadult1960 -0.2884  -0.3660      -0.3977
                (0.0616) (0.0674)     (0.0702)
logIY           0.5237   0.5376       0.3318
                (0.0869) (0.1023)     (0.1734)
loggdn          -0.5057  -0.5450      -0.8634
```

```
                (0.2886) (0.2884)     (0.3377)
logSchool       0.2311   0.2705       0.2277
                (0.0595) (0.0804)     (0.1450)
R-squared       0.4855   0.4653       0.7176
R-squared Adj.  0.4633   0.4348       0.6512
see             0.3270   0.3044       0.1470
implied lambda  0.0101   0.0125       0.0134
                (0.0019) (0.0020)     (0.0020)
==============================================
Standard errors in parentheses.
```

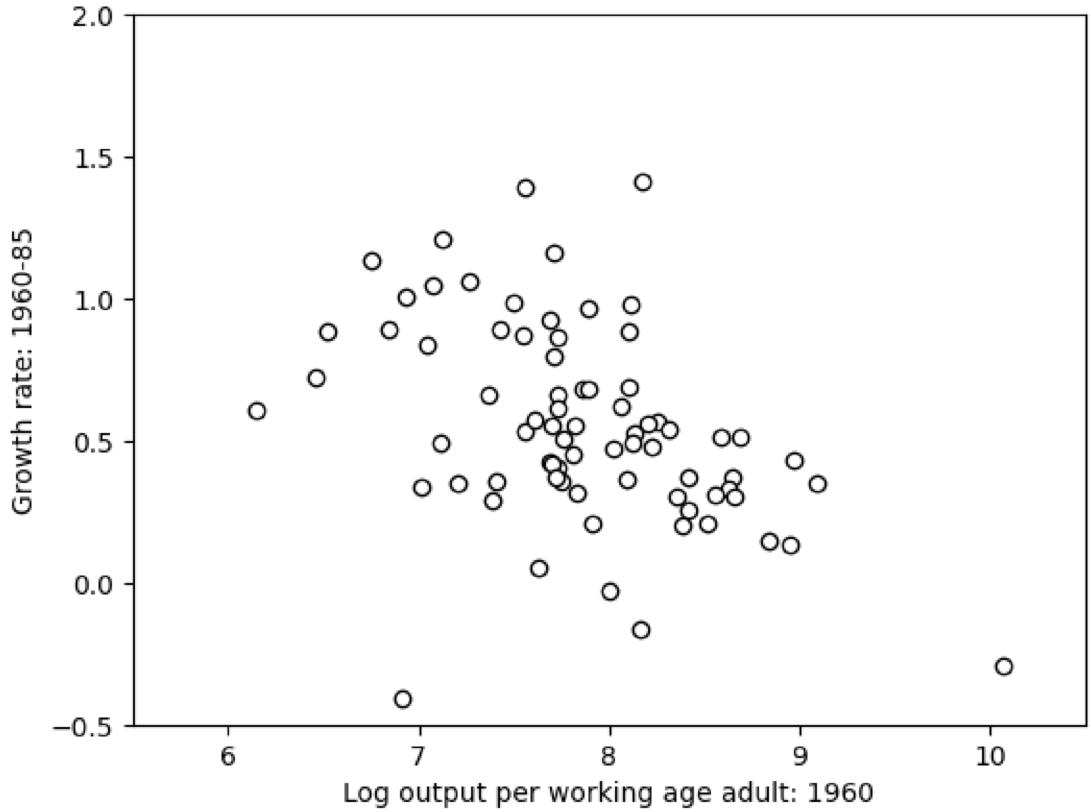
La Figura I presenta una demostración gráfica del efecto de agregar la medida de crecimiento de la población y de acumulación de capital humano y físico la usual "imagen de convergencia", primero presentado por Romer [1987]. El panel superior presenta un gráfico de puntos de nuestro ejemplo intermedio en la tasa de crecimiento anual promedio del ingreso per cápita de 1960 a 1985 contra el logaritmo del ingreso per cápita en 1960. Claramente, no hay evidencia de que los países que comenzaron pobres tiendan a crecer más rápido. El segundo panel de la figura quita el efecto de los logaritmos de la tasa de inversión y de $(n + g + \delta)$ de ambos el nivel de ingreso y la tasa de crecimiento. Esta imagen muestra que si los países no varían en su inversión y tasa de crecimiento de la población entonces habrá una tendencia más fuerte de los países pobres para crecer más rápido que los ricos. El tercer panel de la Figura I elimina nuestra variable de capital humano en adición a la inversión y las tasas de crecimiento de la población; la tendencia hacia la convergencia es aún más fuerte.

[11]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.scatter(df[df['Sample I']==1]['logGDPadult1960'],df[df['Sample␣
 ↪I']==1]['logGDP6085'], color='white', edgecolors='black')
plt.xlabel('Log output per working age adult: 1960')
plt.ylabel('Growth rate: 1960-85')
plt.xlim(5.5,10.5)
plt.ylim(-0.5,2)
```

[11]:
```
(-0.5, 2.0)
```

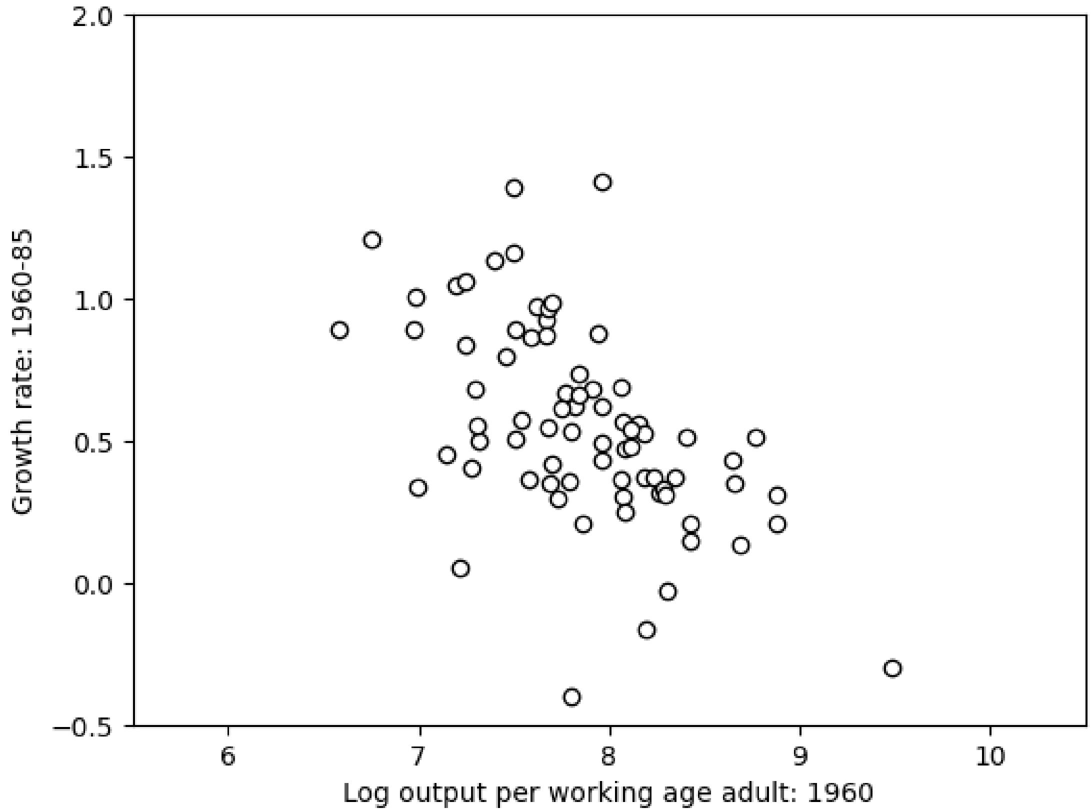
[12]:
```
aux1=smf.ols('logGDPadult1960~ logIY + loggdn',data=df[df['Sample I']==1]).
 ↪fit().resid + df[df['Sample I']==1]['logGDPadult1960'].mean()
aux2=smf.ols('logGDP6085~ logIY + loggdn',data=df[df['Sample I']==1]).fit().
 ↪resid + df[df['Sample I']==1]['logGDP6085'].mean()


plt.scatter(aux1,aux2, color='white', edgecolors='black')
plt.xlabel('Log output per working age adult: 1960')
plt.ylabel('Growth rate: 1960-85')
plt.xlim(5.5,10.5)
plt.ylim(-0.5,2)
```

[12]: (-0.5, 2.0)



[13]:
```
aux3=smf.ols('logGDPadult1960~ logIY + loggdn + logSchool',data=df[df['Sample␣
 ↪I']==1]).fit().resid + df[df['Sample I']==1]['logGDPadult1960'].mean()
aux4=smf.ols('logGDP6085~ logIY + loggdn + logSchool',data=df[df['Sample␣
 ↪I']==1]).fit().resid + df[df['Sample I']==1]['logGDP6085'].mean()


plt.scatter(aux3,aux4, color='white', edgecolors='black')
plt.xlabel('Log output per working age adult: 1960')
plt.ylabel('Growth rate: 1960-85')
plt.xlim(5.5,10.5)
plt.ylim(-0.5,2)
```

[13]:
```
(-0.5, 2.0)
```



Los resultados en las tablas IV y V son notables no solo por su descubrimiento de convergencia, sino también por las tasas en la cual la convergencia ocurre. Los valores implícitos de λ, el parámetro que gobierna la velocidad de convergencia, son derivados del coeficiente $\ln Y60$. Los valores en la tabla IV son mucho menos de lo que predice un libro del modelo de Solow. Aun así las estimaciones de la Tabla V se encuentran mucho más cercanas a lo que el modelo de Solow aumentado predice. Aun así las estimaciones en Tabla V son más cercanas a lo que el modelo de Solow predice por dos razones. Primero, el modelo aumentado predice una tasa de convergencia más lenta que el modelo sin capital humano. Segundo, el resultado empírico incluyendo el capital humano implica que una tasa de convergencia más rápida que los resultados empíricos sin capital humano. Por lo tanto, una vez más, la inclusión del capital humano puede ayudar a explicar algunos resultados que parecen anómalos desde el punto de vista del modelo de Solow de manual.

Tabla VI presenta estimaciones en las ecuaciones imponiendo la restricción que $\ln(s_k)$, $\ln(s_h)$ y $\ln(n+\delta+g)$ suman cero. Encontramos que la restricción no es rechazada y que imponerla tiene casi no efectos. Las últimas líneas en la Tabla VI presenta los valores implícitos de $\alpha + \beta$. Los estimados de α se encuentran en el intervalo 0.38 y 0.48, y los estimados de beta son 0.23 en las tres muestras. Comparado con los resultados en la Tabla II, estas regresiones dan algún peso mayor al capital físico y uno menor al capital humano.

En contraste a los resultados de la Tabla I a la VI, los resultados para la muestra OECD en las tablas V y VI son similares a los de las otras muestras. Una interpretación que reconcilia la similitud entre muestras acá y la disimilitud en las especificaciones anteriores parte del estado estacionario representa una mayor participación de la variación entre países en los ingresos per cápita para los OECD que es muestras más amplias. Si los países OECD están lejos de su estado estacionario, entonces el crecimiento de la población y el capital humano no han tenido impacto completo en sus estándares de vivir; por lo tanto, obtenemos coeficientes más bajos y bajos R^2

[14]:
```
reg22=smf.ols('logGDP6085 ~ logGDPadult1960 + loggdnIY +␣
 ↪loggdnSch',data=df[df['N']==1]).fit()
reg23=smf.ols('logGDP6085 ~ logGDPadult1960 + loggdnIY +␣
 ↪loggdnSch',data=df[df['Sample I']==1]).fit()
reg24=smf.ols('logGDP6085 ~ logGDPadult1960 + loggdnIY +␣
 ↪loggdnSch',data=df[df['O']==1]).fit()

summary5 =summary_col([reg22, reg23, reg24],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",
                                'implied lambda' : lambda x: f"{np.log(1-x.
 ↪params[1])/25:.4f}",
                                '  ' : lambda x: f"({1/((1-x.params[1])*25)* x.
 ↪bse[1]:.4f})",
                                'Implied a' : lambda x: f"{x.params[2]/(-x.
 ↪params[1] + x.params[2]+ x.params[3]):.4f}",
                                '' : lambda x: f"({(-x.params[1]+ x.params[3])/
 ↪(-x.params[1] + x.params[2] + x.params[3])**2 * x.bse[2]:.4f})",
                                'Implied b' : lambda x: f"{x.params[3]/(-x.
 ↪params[1] + x.params[2]+ x.params[3]):.4f}",
                                ' ' : lambda x: f"({(-x.params[1]+ x.params[2])/
 ↪(-x.params[1] + x.params[3] + x.params[2])**2 * x.bse[3]:.4f})",
                                })




print(summary5)
```

```
==============================================
                Non-Oil  Intermediate   OECD
----------------------------------------------
Intercept       2.4569   3.0903        3.5537
                (0.4730) (0.5297)      (0.6336)
logGDPadult1960 -0.2979  -0.3724       -0.4022
                (0.0604) (0.0669)      (0.0692)
loggdnIY        0.5007   0.5063        0.3953
                (0.0822) (0.0951)      (0.1517)
loggdnSch       0.2352   0.2657        0.2412
```

```
                 (0.0592) (0.0800)     (0.1424)
R-squared        0.4816   0.4599       0.7074
R-squared Adj.   0.4651   0.4371       0.6586
see              0.3265   0.3038       0.1454
implied lambda   0.0104   0.0127       0.0135
                 (0.0019) (0.0019)     (0.0020)
Implied a        0.4843   0.4425       0.3806
                 (0.0410) (0.0463)     (0.0905)
Implied b        0.2275   0.2322       0.2322
                 (0.0442) (0.0537)     (0.1053)
==============================================
Standard errors in parentheses.
```

Agregado para comparar con NAZRUL ISLAM, realizamos la regresión de convergencia sin capital humano.

[16]:
```
df['logGDPadult1960']= np.log(df['GDP/adult 1960'])
df['logGDP6085']= df['logGDPadult1985']-df['logGDPadult1960']
reg13=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960  + loggdnIY',data=df[df['N']==1]).
 ↪fit()
reg14=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960  + loggdnIY',data=df[df['Sample␣
 ↪I']==1]).fit()
reg15=smf.ols('logGDP6085~ logGDPadult1960  + loggdnIY',data=df[df['O']==1]).
 ↪fit()

summary5 =summary_col([reg13, reg14, reg15],
                     stars=False,
                     model_names=['Non-Oil', 'Intermediate', 'OECD'],
                     info_dict={'see' : lambda x: f"{np.sqrt(x.ssr / x.
 ↪df_resid):.4f}",
                                'implied lambda' : lambda x: f"{np.log(1-x.
 ↪params[1])/25:.4f}",
                                ' ' : lambda x: f"({1/((1-x.params[1])*25)* x.
 ↪bse[1]:.4f})",
                                'Implied a' : lambda x: f"{x.params[2]/(-x.
 ↪params[1] + x.params[2]):.4f}",
                                '' : lambda x: f"({(1-x.params[1])/(-x.
 ↪params[1] + x.params[2])**2 * x.bse[2]:.4f})"})
print(summary5)
```

```
==============================================
                 Non-Oil  Intermediate   OECD
----------------------------------------------
Intercept        1.1056   1.8228       3.0966
                 (0.3535) (0.3921)     (0.6008)
logGDPadult1960 -0.1506   -0.2342      -0.3520
                 (0.0513) (0.0559)     (0.0655)
```

```
loggdnIY        0.6181   0.6220       0.4742
                (0.0825) (0.0944)     (0.1513)
R-squared       0.3945   0.3761       0.6607
R-squared Adj.  0.3817   0.3587       0.6250
see             0.3510   0.3243       0.1524
implied lambda  0.0056   0.0084       0.0121
                (0.0018) (0.0018)     (0.0019)
Implied a       0.8041   0.7265       0.5739
                (0.1606) (0.1590)     (0.2998)
==============================================
Standard errors in parentheses.
```