# Représentations vectorielles I. Intro

**18 mars 2019**

*—Lexicologie, terminologie, dictionnairique—*

**Ressources recommandées :**
— https ://www.fast.ai/2017/07/17/num-lin-alg/ (opérations matricielles)
— Jurafsky and Martin chap. 6 https ://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/6.pdf

**Commandes pour utiliser des matrices avec numpy**

Un vecteur est une matrice de dimensions $1 \times n$, où une liste numpy : a = np.array([1,2,5])
Le $i$=ième élément du vecteur : a[i]
Accéder aux éléments avec indice $\geq i$ du vecteur : a[i :]
Accéder aux éléments avec indice $< i$ du vecteur : a[ :i]
Une matrice (dimensions $n \times m$) est une liste de listes : b = np.array([[3,2,9],[1,5,1],[0,3,4]])
Accéder à la ligne $i$ de la matrice : b[i] ou b[i, :]
Accéder à la colonne $j$ de la matrice : b[ :, j]
L'élément $i, j$ de la matrice est celle de l'$i$ -ième ligne, $j$ -ième colonne : b[i, j]
Créer une matrice de dimensions $5 \times 6$ avec des valeurs zéro partout : c = np.zeros([5,6])
Transposée d'une matrice A : $A_{ij}$ devient $B_{ji}$, soit on échange les lignes et les colonnes.

La **longueur** du vecteur (aussi appelé sa **norme l2**), où $n$ est le nombre de ses dimensions :

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1}$$

(cf. théorème de Pythagore pour un vecteur de deux dimensions).

La **norme l1** du vecteur est la somme de toutes les valueurs :

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

Il s'agit dans les deux cas des normes **du vecteur** ; pour obtenir le vecteur normalisé, il faut diviser le vecteur par la norme.

**Multiplication de deux vecteurs** :
avec le même nombre $n$ de dimensions (*produit scalaire, dot product, inner product*) :

$$x \times y = x_1y_1 + x_2y_2....x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{3}$$

Par exemple :

a = np.array([1, 0, 3])
b = np.array([0, 9, 9])

$$a \times b = 1 \times 0 + 0 \times 9 + 3 \times 9 = 27 \tag{4}$$

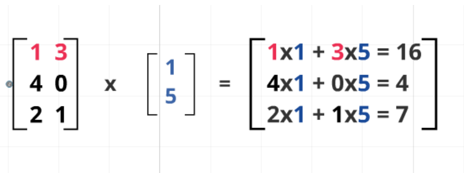
Multiplication vecteur-vecteur, vecteur-matrice, matrice-matrice dans numpy :

$$c = np.dot(a, b) \tag{5}$$

ou

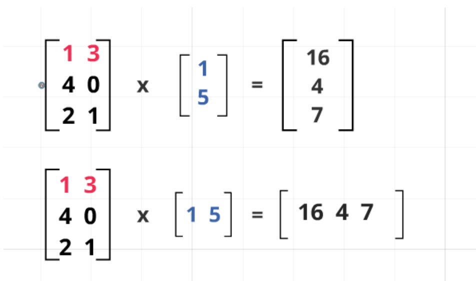
$$c = np.matmul(a, b) \tag{6}$$

**Multiplication matrice-vecteur** :
la multiplication d'une matrice avec un vecteur donne un vecteur, dont le $i$ -ième élément est le produit scalaire de la ligne $i$ de la matrice et du vecteur :




I. Multiplication de matrice avec un vecteur de colonne.

La matrice a les dimensions $m \times n$, et le vecteur $n \times 1$ (ou $1 \times n$), donc le nombre des colonnes de la matrice = la dimensionnalité du vecteur.



**Multiplication matrice-matrice** :
produits des matrice A de taille $m \times n$ et matrice B de taille $n \times p$ (nombre des colonnes dans A = nb des lignes dans B) :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \tag{7}$$

donc on multiplie les lignes de A avec les colonnes de B. Intuitivement : on prend les colonnes de la matrice B un par un et on fait le même calcul que plus haut sous "multiplication de matrice avec un vecteur".

$C_{ij}$ contient donc le produit des vecteurs de ***l'i-ième ligne de A et de la j-ième colonne de B***.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 32 & 18 \\ 144 & 50 \end{bmatrix}$$

**Exercices I.**

1. A la main : calculez le résultat.
   — vecteur - vecteur :

   $$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} =$$

   — matrice - vecteur :

   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

2. Créez une matrice A $15 \times 10$ peuplée avec les nombres entiers naturels impairs en ordre croissant de gauche à droite et de haut en bas. (Tip : vous pouvez utiliser np.arange, puis np.reshape pour modifier les dimensions une fois que vous avez la suite des valeurs).

   — Sélectionnez colonnes avec indice 2-5, dans une matrice B.
   — Sélectionnez les lignes 0-4, dans une matrice C.
   — Créez un vecteur z de dimension 10, avec une valeur de 1 à l'indice 4, zéro ailleurs.
   — Calculez le produit scalaire de la première ligne de A avec z.
   — Calculez le produit de la matrice C avec z.

3. A la main : calculez le résultat.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

4. Créez (automatiquement) une matrice A $10 \times 10$ peuplée avec les nombres de 0 à 99, de gauche à droite et de haut en bas.
   — Sélectionnez les parties correspondant aux nombres de 60 à 99, dans une matrice B.
   — Sélectionnez les multiples de 10 dans A, dans un vecteur y.
   — Sélectionnez les lignes de 3 à 6 incluses, et les colonnes de 0 à 5 incluses, dans une matrice C.
   — Créez un vecteur z avec les multiples de 3 entre 21 et 48 inclus.
   — Calculez le produit scalaire des multiples de 10 (A) et des multiples de 3.
   — Pour chaque ligne 60..69, 70..79 jusqu'à 99, calculez le produit scalaire du vecteur correspondant avec le vecteur z.
5. `https://github.com/fastai/numerical-linear-algebra/blob/master/README.md`
   — Le premier exercice sous "Matrix and Tensor Products" (AIDS)
   — Le deuxième exercice sous "Matrix and Tensor Products" (shopping)

**Exercices TAL. Vecteurs de mots**

1. Nous allons créer des représentations vectorielles des mots à partir de co-occurrences dans un corpus. On va créer une matrice M dans lequel chauque ligne correspond à un mot $w$, et chauqe colonne correspond à un mot de contexte $c$. La liste des mots $w$ et $c$, identiques, se trouve dans le fichier words.lst.

   $M_{i,j}$ est donné par le nombre de co-occurrence du mot $w_i$ avec le mot $c_j$ dans une fenêtre de 5 mots. La co-occurrence d'un mot $w$ avec lui -même n'est pas définie, seulement les mots du contexte sont pris en compte.

   Complétez le programme vector1.py selon les instructions pour créer M.
2. Utiliser les indices $i, j$ des mots $w_i$ et $c_j$ dans M, et la liste $word$, pour faire le lien entre la matrice M et les mots du vocabulaire. Ecrivez une fonction qui demande à l'utilisateur de rentrer deux mots, et renvoie le nombre de co-occurrences des deux mots. Evitez l'exception si le mot n'est pas dans la matrice.

3. La norme l1 du vecteur est la somme de toutes les valueurs :

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{8}$$

où $n$ est le nombre des dimensions. Diviser les valeurs du vecteur de co-occurrences brutes par la norme l1 donne les valeurs de 'fréquence relative', qui peuvent être interprêtées comme une distribution de probabilité, parce qu'elles somment à 1.

La norme l2 du vecteur est sa longueur :

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{9}$$

Il s'agit dans les deux cas des normes **du vecteur** ; pour obtenir le vecteur normalisé, il faut diviser les valeurs de chaque dimension par la norme.
Normalisez la matrice **par colonnes**, selon la norme l2. Utilisez np.linalg.norm.

4. Les mots sont représentés comme des vecteurs. Nous cherchons les mots les plus similaires. Nous utiliserons la similarité cosinus entre deux vecteurs. Ele est compris entre -1 (vecteurs opposés) et 1 (similaires).

$$cos(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (y_i)^2}} \tag{10}$$

Ecrivez une fonction qui prend deux mots en entrée, et renvoie la similarité cosinus entre leurs vecteurs. Testez-la avec des mots sur la liste topfreq.
*Utilisez np.linalg.norm pour la norme des deux vecteurs.*