Fouricle原理及实现方法

1. Fourier Series 与 DFT

我们要绘制 2 维平面上的任意一条封闭曲线 $\mathcal{C}$，假设它由以时间 t 为参数的方程描述，即：

$$\mathcal{C}:\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases},\quad t\in[0,T]$$

其中 T 为周期，并且满足 $f(0)=f(T),g(0)=g(T)$ 以保证它是闭的。由Fourier级数理论，可以对 $\mathcal{C}$ 进行 Fourier级数 展开并保留前 $2M+1$ 项，得到其近似曲线 $\mathcal{S}_{2M+1}$：

$$\mathcal{S}_{2M+1}:\begin{cases}x=\sum_{n=-M}^{M}c_f(n)\exp\left(i\frac{2\pi}{T}nt\right)\\y=\sum_{n=-M}^{M}c_g(n)\exp\left(i\frac{2\pi}{T}nt\right)\end{cases},\ \text{where}\begin{cases}c_f(n)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t\\c_g(n)=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t\end{cases}\tag{1.1}$$

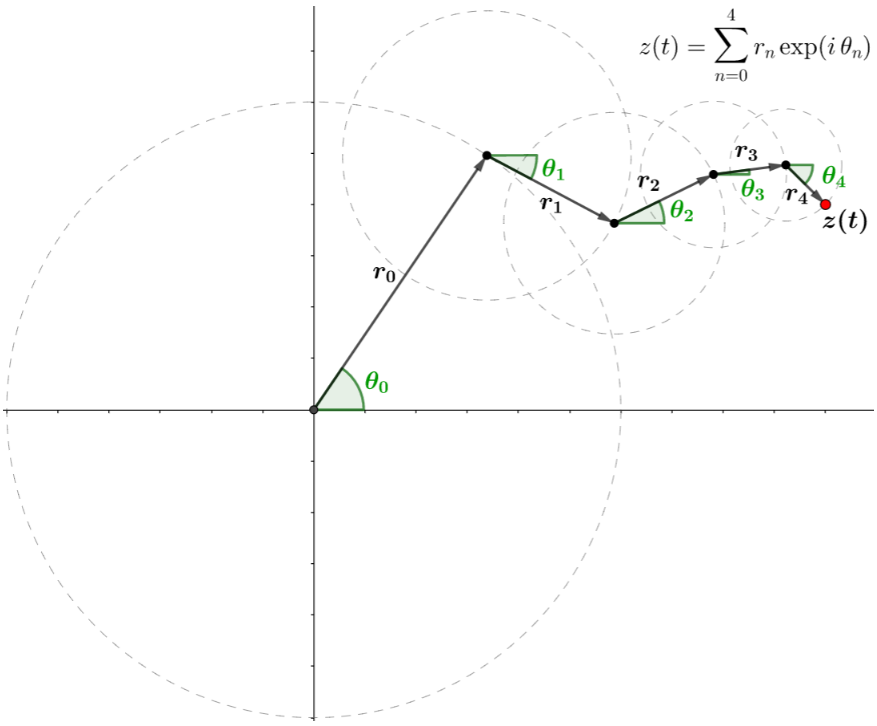
注意式(1.1)中的横纵坐标仍为 t 的参数方程，但是该式子分析起来是较为复杂的，不妨以复数 $z=x+yi$ 作为变量，则将曲线重新表示为 $\mathcal{C}:z=h(t)=f(t)+g(t)i,\ t\in[0,T]$, 于是 $\mathcal{S}_{2M+1}$ 可重写为:

$$\mathcal{S}_{2M+1}:z=\sum_{n=-M}^{M}c_h(n)\exp\left(i\frac{2\pi}{T}nt\right),\ \text{where}\ c_h(n)=\frac{1}{T}\int_0^T h(t)\exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t\tag{1.2}$$

我们现在来分析式(1.2)，它的左半部分是什么意思？给定时刻 $t\in[0,T]$，能得到复平面上一点 $z(t)$，它由 $2M+1$ 个项求和得到，其中每一个项（即右半部分）是一个复数，若用模-幅角表示这个复数，可得:

$$\begin{aligned}c_h(n)\cdot\exp\left(i\frac{2\pi}{T}nt\right)&=|c_h(n)|\cdot\exp\left(i\frac{2\pi}{T}nt+i\arg\left[c_h(n)\right]\right)\\&=r_n\cdot\exp\left(i\omega_n t+i\varphi_n\right)=r_n\cdot\exp[i\,\theta_n(t)]\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中 $r_n=|c_h(n)|$, $\omega_n=2\pi n/T$, $\varphi(n)=\arg[c_h(n)]$, $\theta_n(t)=\omega_n t+\varphi(n)$, 也就是说，求和的第 n 项其实对应于半径为 r_n 的圆上的一点，对应幅角为 $\theta_n(t)$. 那么，整个求和表示什么意思？我想下面这张图已经足以表达了。注意图中的下标与前文不一致，仅作示意用。



前面我们讨论的是：对于一个连续曲线 $\mathcal{C}$ 的 $2M+1$ 项 Fourier级数展开的近似曲线 $\mathcal{S}_{2M+1}$. 但是很多时候我们所用的曲线不是由连续的表达式给出的，而是由一系列离散的点给出，即

$$\mathcal{C}_N : \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$$

注意前面的 $\boldsymbol{z}$ 是粗体，表示它是一个向量。此时就不能再用Fourier级数得到 $\mathcal{S}_{2M+1}$, 因为 $c_h(n)$ 计算过程中的积分无法求解。在这种情况下，应该使用 **离散Fourier变换(DFT)** 代替Fourier级数。注意我们现在不再是用 $2M+1$ 个项求和来近似 $\mathcal{C}_N$, 而是同样使用 N 个项求和的形式等价地表示 $\mathcal{C}_N$. 具体地，由DFT理论可得：

$$\mathcal{S}_N : w_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot \exp\left(i\frac{2\pi nk}{N}\right), \text{ where } c_k = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{1.4}$$

式(1.4)的左半部分与式(1.2)一致，只是系数的计算方法由积分变为了求和，因此它的分析方式是类似的。注意这里的 $\mathcal{S}_N$ 不是在近似 $\mathcal{C}_N$, 而是两者完全等价，表示同一条曲线，即 $w_n = z_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. 为什么我要有意的用不同符号区分它们呢？因为在之后会介绍线简化算法，即通过平滑采样、过滤或手动调节等方法来改变原始曲线数据，使其更光滑且能用尽可能少的点来表示。 无论在什么语境中，我总是使用 $\mathcal{C}$ 来表示原始曲线数据，而用 $\mathcal{S}$ 表示实际用于绘图的曲线数据。

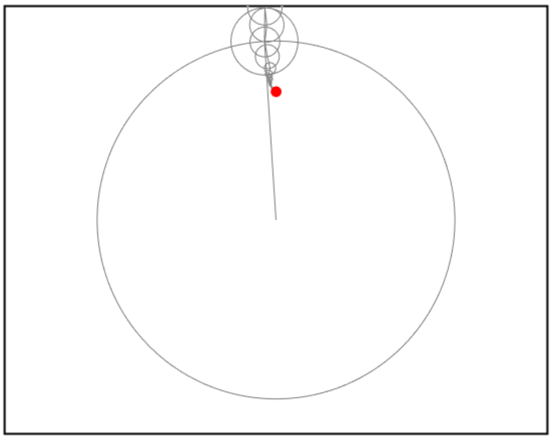
下面给出该部分的实现方法：

```matlab
% --- 获得圆数据, w(:,k+1)表示第k+1时刻每个圆的圆心坐标, w(0,k+1) = 0+0i
function [w, radius] = getCircles(z, N)
    c = fft(z, N) / N;                                 % 对复数序列做DFT(使用计算更快的fft)
    [radius, index] = sort(abs(c), 'descend');         % 每个圆的半径(降序)和对应索引
    phase = angle(c(index));                           % 每个圆的初相角(降序)
    freq = 2 * pi * (index - 1) / N;                   % 每个圆的频率(降序)
    w = zeros(N + 1, N, 'like', 1+1i);                 % 预分配内存: (N+1)×N 的全零复数矩阵
    for k = 0:N-1
        w(2:N+1, k+1) = cumsum(radius .* exp(1i*(freq * k + phase)));
    end
 end
```

上述代码与源代码不完全一致，是为了便于读者理解而做了适当的修改。 其中我们按半径降序重新排列了这些圆，这是为绘图美观考虑的，使其能够以大圆套小圆的方式绘制。由于我们需要得到 $k = 0, 1, \dots, N-1$ 时的所有圆的数据，只需要得到它们的圆心坐标就行了。我们固定第一个圆心在原点，即 `w(0,:) = 0+0i`, 由于 `w` 初始即为全0复数矩阵，所以实际上无需作修改。 `w(n,k+1)` 表示的是第 $k+1$ 时刻的圆心坐标，它其实就是式(1.4)左半部分前 $k+1$ 项的和，注意 `cumsum(x)` 得到的是 `x` 的累积和。 `freq(n)` 表示的是第 n 个圆转动的频率，相当于式(1.3)中的 ω_n. 为便于绘图，我们还将降序后的半径作为输出，具体的绘图方式如下：

```matlab
% --- 在给定坐标轴ax上绘制动画,其中 u,v 分别为 w 的实部和虚部
function draw_epicycle(ax, x, y, u, v, radius, N)
    for k = 1:N
        cla(ax);     % 清除坐标区现在的曲线数据
        viscircles(ax, [u(1:N, k), v(1:N, k)], radius), hold(ax, 'on'); % 每个圆周
        line(ax, u(:, k), v(:, k)), hold(ax, 'on');          % 两个圆心之间的连线
        line(ax, x(1:k), y(1:k)),   hold(ax, 'on');          % 已绘制的曲线数据
        plot(ax, u(end, k), v(end, k)), hold(ax, 'off');     % 当前绘制的曲线上的点
        drawnow;     % 更新图窗，使图像立即在屏幕上显示
    end
end
```

上述代码中省略了控制图形属性的参数项，具体的参数可以参考源代码。 该函数生成的动画如下（pdf只能看图片，要查看动画请使用Markdown或HTML打开）：



2. 线简化算法

2.1 样条平滑采样

2.2 贝塞尔平滑采样

2.3 N-th Point算法

2.4 径向距离滤除

2.5 垂直距离滤除

2.6 Opheim算法

2.7 Lang算法

2.8 Douglas-Peucker算法

2.9 Visvalingam算法

2.10 Reumann-Witkam算法

2.11 Zhao-Saalfeld算法

3. 图像分割

3.1 边缘检测算法

3.2 描图画线

3.3 自动从图像中生成曲线