

## Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320)

### Lista 2 - Exercícios E6 a E9

## Conceitos básicos e grafos eulerianos

**Data para entrega dos exercícios: 26/março/2019**

- E6.** Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem (pelo menos) um vértice em comum.
- E7.** Prove por indução em  $k$  que o conjunto das arestas de um grafo conexo simples com  $2k$  arestas,  $k \geq 2$ , pode ser particionado em caminhos de comprimento 2. A afirmação continuaria válida se omitíssemos a hipótese de conexidade? Justifique.
- E8.** Prove que um grafo conexo  $G$  é euleriano se e só se  $G$  contém circuitos  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , dois a dois disjuntos nas arestas, tais que  $A(G) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ . (Exercício 21 do Capítulo 2.)
- E9.** Prove que todo grafo conexo simples  $G$  pode ser representado como a união de dois grafos *disjuntos nas arestas*  $G_1$  e  $G_2$ , tais que  $G_1$  é acíclico e  $G_2$  é um grafo cujos vértices são todos de grau par. (OBS: Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  não precisam ser conexos, e podem ter vértices em comum.)

Definição: A *união* de dois grafos  $H_1$  e  $H_2$ , denotado por  $H_1 \cup H_2$ , é o grafo com conjunto de vértices  $V(H_1) \cup V(H_2)$  e conjunto de arestas  $A(H_1) \cup A(H_2)$ .

---

### Para casa - não precisa entregar

[Casa 2.1] Seja  $G$  um grafo conexo, sem laços, cujos vértices têm grau par, e que possui um número par de arestas. Prove que as arestas de  $G$  podem ser coloridas com as cores *azul* e *vermelha*, de forma que em cada vértice incida o mesmo número de arestas azuis e vermelhas.

[Casa 2.2] Prove que, se  $G$  é um grafo auto-complementar de ordem  $4k + 1$ , então  $G$  tem um vértice de grau  $2k$ .

[Casa 2.3] Prove que para todo inteiro  $k > 1$  existe um grafo simples  $k$ -regular de ordem  $2k$  e diâmetro 2. (Dica: para simplificar a prova, exiba grafos cuja construção seja bem simples, de modo que as propriedades fiquem bem aparentes.)

---

### Recomendações

- (a) **Identificar a lista**, colocando o seu nome completo e curso.
- (b) **Escrever o enunciado de cada exercício** (mesmo que você não consiga resolver).
- (c) Deixar um **espaçamento duplo** entre as linhas para facilitar a correção.
- (d) **Usar a terminologia adotada nas notas de aula**.
- (f) **Caprichar na apresentação**: pode ser um texto manuscrito, em folhas sulfite (se entregar na aula), ou um arquivo em pdf (se entregar no Paca).

**Resolver individualmente e sem copiar de outras fontes!**