

## Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320)

### Lista 7

#### Emparelhamentos

Data para entrega da lista: 9/maio/2019 (5af)

- E24.** Seja  $G$  um grafo simples no qual todo vértice tem grau pelo menos 1. Seja  $E$  um emparelhamento máximo em  $G$ . Prove que existe em  $G$  um conjunto  $F$  de arestas tal que todo vértice de  $G$  é extremo de pelo menos uma aresta em  $F$  e  $|F| = |V(G)| - |E|$ .
- E25.** Prove que se  $G$  é um grafo  $(X, Y)$ -bipartido simples com  $|X| = |Y| = k$  e  $A(G) > k(k-1)$ , então  $G$  tem um emparelhamento perfeito.

---

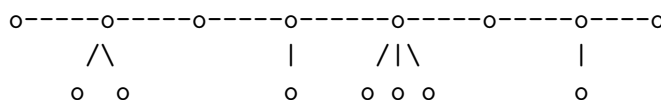
### EXERCÍCIO EXTRA - Bônus 8

Se você resolveu o exercício E25 (acima), faça uma segunda prova, distinta da que você fez.

---

### EXERCÍCIO EXTRA - para casa (não precisa entregar)

Uma *lagarta* ('*caterpillar*') é uma árvore  $T$  tal que o grafo que resulta após a remoção de todas as folhas de  $T$  é um caminho. (Tal caminho é a "coluna" da lagarta.)



Para  $k \geq 2$ , define-se a  $k$ -ésima potência de um grafo  $G$ , denotado por  $G^k$ , o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices que  $G$ , e no qual dois vértices distintos  $u$  e  $v$  são adjacentes se a distância entre  $u$  e  $v$  em  $G$  é no máximo  $k$ . (Em outras palavras, é o grafo obtido de  $G$  acrescentando-se arestas entre todos os pares de vértices (não-adjacentes) que estão à distância no máximo  $k$  em  $G$ .)

Prove que se  $G$  é uma lagarta com pelo menos 3 vértices, então  $G^2$  é hamiltoniano. (Há várias soluções; basta pensar se você consegue uma, e depois ver se consegue uma simples e elegante.)

---

### Recomendações

Seguir todas as recomendações dadas até a Lista 5, principalmente a de usar a terminologia adotada. Caprichar na apresentação. Entregar até a hora da aula.

---

**Resolver individualmente e sem consultas a outras fontes!**