Departamento de Ciência da Computação – IME-USP — 1o.semestre/2019

Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320)

Lista 6

Emparelhamentos

Data para entrega da lista: 23/abril/2019 (3af)

```
                            0
                            |
                            |
0======0------0======0------0======0------0======0------0
       |                    |                    |
       |                    |                    |
       0                    0                    0
```

E18. Prove que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

E19. Justifique se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: *Se G é um grafo conexo não-trivial simples, então para todo vértice v de G, escolhido arbitrariamente, sempre existe um emparelhamento <u>maximal</u> que cobre v.* (Diga antes qual é a sua resposta, e depois justifique.)

E20. Seja G um grafo simples com n vértices, n par, e $g(v) > n/2$ para todo v em $V(G)$. Prove que G tem 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

E21. Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 2k$ e tal que $g(v) \geq k \geq 1$ para todo v em G. Mostre que G tem um emparelhamento com pelo menos k arestas.

E22. Prove que se G é um grafo (X, Y)-bipartido com pelo menos uma aresta e $g(x) \geq g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, então existe em G um emparelhamento que cobre X.

E23. Um *retângulo latino* $m \times n$ é uma matriz com m linhas e n colunas, cujas entradas são símbolos, sendo que cada símbolo ocorre no máximo uma vez em cada linha e em cada coluna. Um *quadrado latino* de ordem n é um retângulo latino $n \times n$ sobre n símbolos.

Prove: Se $m < n$ então todo retângulo latino $m \times n$ sobre n símbolos pode ser estendido a um quadrado latino de ordem n.

Dicas: (i) usar o resultado do exercício E22 (mesmo que você não tenha resolvido esse exercício). (ii) Basta mostrar como se pode estender um retângulo latino $m \times n$, com $m < n$, a um retângulo latino $(m + 1) \times n$.

EXERCÍCIO EXTRA - Bônus 7

Bônus 7. Seja G um grafo bipartido com pelo menos uma aresta. Mostre que existe em G um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau $\Delta(G)$.

Recomendações

Seguir todas as recomendações dadas até a Lista 5, principalmente a de usar a terminologia adotada. Caprichar na apresentação. Entregar até a hora da aula.

Resolver individualmente e sem consultas a outras fontes!