# RESOLUÇÃO LISTA 7.

EXERCÍCIOS FEITOS: 1, 2, 5, 7, 8, 9, 11, 13

① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

a) $$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

b) BOM, SE $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. o $\det(df_{(x,y)}) \neq 0$ ENTÃO $df_{(x,y)}$ É INVERSÍVEL E ASSIM PELO TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA $\exists\, U$ VIZINHANÇA DE $(x,y)$ E $V$ VIZINHANÇA DE $f(x,y)$ TAL QUE $f|_U : U \to V$ É UM DIFEOMORFISMO. COMO $\det(df_{(x,y)}) = 4x^2+4y^2 \neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ENTÃO $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ É O CONJUNTO DE PONTOS.

c) SEJA $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0\}$ VOU PRIMEIRO PROVAR QUE $f|_A$ É INJETORA:

DE FATO SE $(a,b) \in \mathrm{Im}(f|_A) \Rightarrow \exists (x,y) \in A$ t.q $f(x,y) = (a,b)$ VOU PROVAR QUE $(x,y)$ É ÚNICO PONTO EM $A$ QUE SATISFAZ: $f(x,y) = (a,b)$.

ASSIM SE $(x,y) \in A$ ENTÃO SE $f(x,y) = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ $(*)$ $\overset{\text{Pois } x>0}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} y = \frac{b}{2x} \\ x^2+y^2 = a \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$

$\Rightarrow x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow$ SE $x^2 = t$ ENTÃO $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

OBSERVE QUE COMO $t = x^2$ ENTÃO COMO $x>0$, TEMOS QUE $t>0$ E COMO $a^2+b^2 \geq a^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{a^2+b^2} \geq |a| \Rightarrow a - \sqrt{a^2+b^2} \leq a - |a| \leq 0$ LOGO $t_2$ NÃO É UMA SOLUÇÃO POSSÍVEL LOGO $t = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ É A ÚNICA SOLUÇÃO. E ASSIM COMO $x^2 = t$ ENTÃO $x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ E $y = \frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$

É A ÚNICA SOLUÇÃO (POIS $x>0$) DE $(*)$.

ASSIM TEMOS QUE $f|_A$ É INJETORA.

OBSERVE QUE AO DESCOBRIR $x$ E $y$ EM $A$ COMO PRÉ-IMAGEM DE $(a,b)$, PODEMOS ENCONTRAR A IMAGEM DE $A$ POR $f$.

DE FATO, OBSERVE QUE: $(a,b) \in f(A) \Leftrightarrow x$ E $y$ COMO FUNÇÕES DE $(a,b)$ ESTÃO BEM DEFINIDAS

LOGO $f(A) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \neq 0\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2;$ SE $b=0$ ENTÃO $a>0\}$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA USANDO NÚMEROS COMPLEXOS:

A SOLUÇÃO DO ITEM c) PODE SER SIMPLIFICADA UTILIZANDO NÚMEROS COMPLEXOS:

IDENTIFICANDO $\mathbb{R}^2$ COM $\mathbb{C}$ ($(x,y) \mapsto z = x+iy$). A FUNÇÃO $f$ PODE SER ESCRITA COMO

$f(z) = z^2$. ASSIM: QUEREMOS PROVAR QUE $f$ É INJETORA QUANDO RESTRITO À $\{z \in \mathbb{C};\ Re(z) > 0\}$

MAS ISTO É CLARO POIS SE $w = f(z) = z^2$ ENTÃO $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ COM $z_1^2 = z_2^2 = w$, TEMOS AINDA QUE $z_1 = -z_2$

E ASSIM SÓ $z_1$ OU $z_2$ PODE TER PARTE REAL POSITIVA.

LOGO SE $w \in f(A)$ ENTÃO $\exists!\, z \in A$ t.q $f(z) = w$.

PARA ESTUDAR $f(A)$ BASTA OBSERVAR QUE SE $w \in \mathbb{C}$ $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (E SÃO AS ÚNICAS) SOLUÇÕES DE $z^2 - w = 0$. ASSIM SE $Re(z_1) \neq 0$, COMO $z_1 = -z_2$ OU $Re(z_1) > 0$ OU $Re(z_2) > 0$. LOGO OU $z_1 \in A$ OU $z_2 \in A$. LOGO OS ÚNICOS PONTOS QUE PODEM NÃO ESTAR EM $f(A)$ SÃO: $\{z^2;\ Re(z) = 0\} = B$

E DE FATO $f(A) \cap B = \emptyset$, POIS SE $w \in B$ ENTÃO $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ SOLUÇÕES DE $w = z^2$ E COMO OU $Re(z_1) = 0$ OU $Re(z_2) = 0$ (POIS $w \in B$) E $z_1 = -z_2$ ENTÃO $Re(z_1) = Re(z_2) = 0$ E ASSIM $w \notin f(A)$.

PARA TERMINAR BASTA OBSERVAR QUE $B = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) < 0 \text{ E } Im(z) = 0\}$

E ASSIM $f(A) = \mathbb{C} \setminus B$

d) $df^{-1}_{(0,2)} = (df_{(1,1)})^{-1}$

E $df_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (df_{(1,1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = df^{-1}_{(0,2)}$.

(2) a) $f(x,y) = (e^x \cdot \cos y, e^x \sin y)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in ]0, 2\pi[\}$

$\vdash f|_A$ É INJETORA.

DE FATO SE $f(x,y) = f(u,v)$, COM $(x,y),(u,v) \in A \Rightarrow \|f(x,y)\| = \|f(u,v)\| = e^x = e^u \Rightarrow x = u$.

E COMO $y \mapsto (\cos y, \sin y)$ É INJETORA PARA $y \in ]0, 2\pi[$. ENTÃO $f|_A$ É INJETORA.

b) BOM, COMO $f(x,y) = e^x \cdot (\cos y, \sin y)$ ENTÃO SE $x = \log(\sqrt{a^2+b^2})$ E $y = \theta(a,b)$ ONDE $\theta \in ]0, 2\pi[$ E $\theta(a,b)$ É O ANGULO QUE O VETOR $(a,b)$ FAZ COM $(0, \sqrt{a^2+b^2})$ NO SENTIDO ANTI-HORARIO. ENTÃO TEREMOS QUE $f(x,y) = (a,b)$. ASSIM PARA $(a,b)$ ESTAR NA IMAGEM DE A POR $f$. ENTÃO TEMOS QUE $\sqrt{a^2+b^2} > 0 \Rightarrow (a,b) \neq (0,0)$ E $\theta(a,b) \notin \{0, 2\pi\}$ LOGO SE $b = 0 \Rightarrow a < 0$. LOGO $f(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;$ OU $x \neq 0$ OU $x = 0$ E $y < 0\}$

c) COMO $df^{-1}_{(0,1)} = (df_{(0,\pi/2)})^{-1}$ ENTÃO $df_{(0,\pi/2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$df^{-1}_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5 Sim, DE FATO SEJA $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$ ENTÃO $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + x$.

AGORA OBSERVE QUE $\forall (x,y) \in f^{-1}(4)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ POIS SUPONHA POR ABSURDO QUE $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ E $f(x,y) = 4$. ENTÃO $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = x + 3y^2 \Rightarrow x = -3y^2$, ASSIM $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

$= (-3y^2)^3 + y^3 - 3y^3 = -27y^6 - 2y^3 = 4 \Longrightarrow y^3 = \dfrac{4 \pm \sqrt{4 - 16 \cdot 27}}{54} \notin \mathbb{R}$ ABSURDO!

AGORA NOS RESTA PROVAR QUE $f^{-1}(4) \neq \emptyset$. DE FATO SE DEFINIRMOS $\gamma(t) = (t,t)$

TEMOS QUE $f(\gamma(t)) = 2t^3 + t^2$, LOGO $f(\gamma(0)) = 0$ E $\lim_{t \to +\infty} f(\gamma(t)) = +\infty$ ASSIM PELO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIARIO $\exists s \in \mathbb{R}_{>0}$ t.q $f(\gamma(s)) = 4$, E ASSIM $(s,s) \in f^{-1}(4)$

LOGO SEJA $(c_1, c_2) \in f^{-1}(4)$ TEMOS PELO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLICITA TEMOS QUE

COMO $\frac{\partial f}{\partial y}(c_1, c_2) \neq 0$ ENTÃO $\exists$ $I$ INTERVALO ABERTO QUE CONTEM $c_1$ E $J$ INTERVALO ABERTO QUE CONTÉM $c_2$ E $\varphi: I \to J$ DE CLASSE $C^1$ TAL QUE SE $x \in I \Rightarrow f(x, \varphi(x)) = 4$.

ENTÃO $y = y(x) := \varphi(x)$ E ASSIM COMO $x^3 + x\varphi(x) + \varphi(x)^3 = 4 \Rightarrow 3x^2 + x \cdot \varphi'(x) + x \cdot \varphi(x) + 3\varphi(x)^2 \varphi'(x)$

$= 0 = \varphi'(x)\left[x + 3\varphi(x)^2\right] + 3x^2 + x\varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = \dfrac{-3x^2 - x\varphi(x)}{x + 3\varphi(x)^2} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x^2 - xy}{x + 3y^2}$

$_{//}^{1}$

(7) a) SEJA $f(x,y,z) = e^{x+y+z} + xyz$. ENTÃO $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{x+y+z} + xy$

SEJA $p = (0,1,-1)$, SEGUE QUE $f(p) = 1$ E COMO $\frac{\partial f}{\partial z}(p) = 1 \neq 0$ ENTÃO PELO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLICITA. $\exists\, U$ E $V$ VIZINHANÇAS DE $(p_1, p_2) = (0,1)$ E DE $p_3 = -1$ RESPECTIVAMENTE E $\varphi : U \to V \in C^1$ t.q $\forall (x,y) \in U$ $f(x,y,\varphi(x,y)) = 1$. ENTÃO $\varphi$ É UMA TAL FUNÇÃO $z(x,y)$.

BOM COMO $e^{x+y+\varphi(x,y)} + xy\,\varphi(x,y) = 1 \overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Rightarrow} e^{x+y+\varphi(x,y)} \cdot \left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right) + y\,\varphi(x,y) + xy \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(xy + e^{x+y+\varphi(x,y)}\right) = -y\varphi(x,y) - e^{x+y+\varphi(x,y)} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-y\varphi(x,y) - e^{x+y+\varphi(x,y)}}{xy + e^{x+y+\varphi(x,y)}}$$

ANALOGAMENTE: $$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-x\,\varphi(x,y) - e^{x+y+\varphi(x,y)}}{xy + e^{x+y+\varphi(x,y)}}$$

b) SEJA $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$. TEMOS QUE $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 - 1$

TOME $p = (0,0,1)$. SEGUE QUE $f(p) = 0$ E $\frac{\partial f}{\partial z}(p) = 2 \neq 0$. LOGO PELO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLICITA TEMOS QUE $\exists\, U$ E $V$ VIZINHANÇAS DE $(p_1, p_2) = (0,0)$ E $p_3 = 1$ RESPECTIVAMENTE E $\varphi : U \to V \in C^1$ t.q $\forall (x,y) \in U$ $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. LOGO $z(x,y) := \varphi(x,y)$ E ASSIM

COMO $x^3 + y^3 + \varphi(x,y)^3 - x - y - \varphi(x,y) = 0 \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} 3x^2 + 3\varphi(x,y)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) - 1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{1 - 3x^2}{3\varphi(x,y)^2 - 1}$. ANALOGAMENTE $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{1 - 3y^2}{3\varphi(x,y)^2 - 1}$

8) a) PRIMEIRO VAMOS OBSERVAR QUE SE $p = (2,0,1)$ ENTÃO $F(p) = 3$ E

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 5z^4 + 3xz^2 + 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 11 \neq 0$. ASSIM PELO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA $\exists\, U$ UM ABERTO DE $\mathbb{R}^2$ CONTENDO $(p_1, p_2) = (2,0)$, $I$ UM INTERVALO ABERTO CONTENDO $p_3 = 1$ E $\varphi : U \to I$ é $C^1$

t.q. $\forall (x,y) \in U$ $F(x,y,\varphi(x,y)) = 3$, $\varphi(p_1,p_2) = \varphi(2,0) = 1$ E ALÉM DISSO QUE $\forall (x,y,z) \in U \times I$

SE $F(x,y,z) = 3 \Rightarrow z = \varphi(x,y)$. QUE É O QUE QUERÍAMOS PROVAR.

b) COMO $F(x,y,\varphi(x,y)) = 3 = \varphi(x,y)^5 + x\,\varphi(x,y)^3 + 2y\,\varphi(x,y)$

$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\left(5\varphi(x,y)^4 + x \cdot 3 \cdot \varphi(x,y)^2 + 2y\right) + \varphi(x,y)^3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(2,0) \cdot (11) + 1 = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(2,0) = -1/11$. ANALOGAMENTE $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) + 2\varphi(x,y) \Rightarrow$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(2,0) \cdot (11) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(2,0) = \frac{-2}{11}$

TENHO A IMPRESSÃO QUE NA PRÓXIMA QUESTÃO DEVERIA SER:

9. Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z > 0\}$ e seja $F : U \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = \ln(xy+z)$.

   (a) Use o Teorema da Função Implícita para concluir que existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo $(1,0)$, um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo 1 e uma função de classe $C^1$ $f : U \to I$ tais que $F(x,y,z) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $y = f(x,z)$ para todo $(x,z) \in U$ e todo $y \in I$.

   (b) Calcule as derivadas parciais de $f$ no ponto $(1,0)$.

SE FOSSE ASSIM A RESOLUÇÃO SERIA:

9 a) PRIMEIRO OBSERVE QUE SE $p = (1,1,0)$ ENTÃO $F(p) = 0$ E COMO $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x}{xy+z} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(p) = 1 \neq 0$. ENTÃO PELO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA $\exists\, \mathcal{U}$ UM ABERTO DE $\mathbb{R}^2$ CONTENDO $(p_1, p_3) = (1,1)$, $I$ UM INTERVALO ABERTO CONTENDO $p_2 = 1$ E $\varphi : \mathcal{U} \to I \in C^1$ t.q. $\forall (x,z) \in \mathcal{U}$ - $F(x, \varphi(x,z), z) = 0$,

$p_2 = \varphi(p_1, p_3) = \varphi(1,0) = 1$ E ALÉM DISSO QUE $\forall (x,y,z) \in \mathcal{U} \times I$ SE $F(x,y,z) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x,z)$.

QUE É O QUE QUERIAMOS PROVAR.

b) COMO $F(x, \varphi(x,z), z) = 0 \overset{\partial/\partial x}{\Rightarrow} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x,z), z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,z) \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x,z), z)\right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)} = -1$$

E ANALOGAMENTE:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x, \varphi(x,z), z)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x,z), z)} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,0) = \frac{-1}{1} = -1$$

11) SEJA $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $C^1$ SUPONHA $F(3,-1,2)=(0,0)$ E

$$dF_{(3,-1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $G(y,z) = F(3,y,z)$ TEM $dG_{(-1,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ E $\det\left(dG_{(-1,3)}\right) = 3 \neq 0$, ENTÃO PELO TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA SEGUE QUE $\exists I$ INTERVALO ABERTO CONTENDO 3, $U$ ABERTO DE $\mathbb{R}^2$ CONTENDO $(-1,2)$ E $\varphi: I \to U \in C^1$ COM $\varphi(3) = (-1,2)$ E $\forall x \in I$ $F(x,\varphi(x)) = (0,0)$.

b) COMO $F(x,\varphi(x)) = 0 \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + dG(y,z) \cdot d\varphi_x$. ASSIM

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(3,-1,2) + dG_{(-1,2)} \cdot d\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} d\varphi_3 \Rightarrow d\varphi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (0 \quad 1)$$

13) SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ COM $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. ENTÃO SE $x, y \in \mathbb{R}$ COM $y > x$

TEMOS PELO TEOREMA DO VALOR MÉDIO QUE $f(x) - f(y) = f'(w) \cdot (x-y)$ ONDE $w \in ]x,y[$

ASSIM COMO $x - y \neq 0$ E $f'(w) \neq 0$ ENTÃO $f(x) - f(y) \neq 0 \to f(x) \neq f(y)$.

LOGO $f$ É INJETORA

DE FATO O MESMO NÃO VALE PARA $f: \mathbb{R}^n \circlearrowleft$ COM $n > 1$:

NO EX 2 TEMOS QUE SE $f(x,y) = e^x \cdot (\cos y, \sin y)$ NÃO SÓ TEM $df_{(x,y)} \neq 0$

MAS COMO $df_{(x,y)}$ É BIJETORA (INVERSÍVEL / ISOMORFISMO) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, MESMO $f$ NÃO

SENDO INJETORA.