

Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320)

Lista 3 - Árvores

Data para entrega dos exercícios:

E10 a E14 – 2/abril/2019 (3a.feira)

Bônus 4 e Bônus 5 – 4/abril/2019

- E10.** Existem grafos simples com exatamente duas árvores geradoras distintas? Justifique.
(Duas árvores geradoras T e T' de um mesmo grafo são distintas se $A(T) \neq A(T')$.)
- E11.** Prove que se G é uma árvore tal que $\Delta(G) \geq k$, então G tem pelo menos k folhas.
- E12.** Definição: Dado um grafo G , dizemos que um conjunto $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ de caminhos em G é uma *decomposição de G em caminhos*, se esses caminhos são dois-a-dois disjuntos nas arestas e $A(G) = A(P_1) \cup A(P_2) \cup \dots \cup A(P_k)$.
Prove que se T é uma árvore, então T admite uma decomposição \mathcal{P} em caminhos tal que pelo menos um dos extremos de cada caminho em \mathcal{P} é uma folha de T .
- E13.** Prove que todo grafo conexo G , simples e não-trivial, tem uma árvore geradora T tal que $G - A(T)$ é desconexo.
- E14.** Seja G um grafo conexo, T_1 e T_2 árvores geradoras distintas de G , e seja α uma aresta de T_1 .
Prove que existe uma aresta β em T_2 tal que $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G .

EXTRA - Bônus 4 e Bônus 5

Bônus 4 (Veja a definição dada no Exercício E12.) Prove que se T é uma *árvore* com n vértices, então T admite uma decomposição \mathcal{P} em caminhos, onde $|\mathcal{P}| \leq n/2$.

Bônus 5

Definição: Uma *k-coloração dos vértices* de um grafo é uma atribuição de no máximo k cores distintas aos vértices desse grafo tal que vértices adjacentes recebem cores distintas.

Definição: Dizemos que um grafo é *equi-bicolorido* se tem uma 2-coloração de seus vértices com igual número de vértices de cada cor.

Faça pelo menos duas provas distintas da seguinte afirmação: Toda árvore equi-bicolorida tem pelo menos uma folha de cada cor.

Recomendações

- (a) **Identificar a lista**, colocando o seu nome completo e curso.
- (b) **Escrever o enunciado de cada exercício** (mesmo que você não consiga resolver).
- (c) Deixar um **espaçamento duplo** entre as linhas para facilitar a correção.
- (d) **Usar a terminologia adotada nas notas de aula**.
- (e) **Caprichar na apresentação**: pode ser um texto manuscrito, em folhas sulfite (se entregar na aula), ou um arquivo em pdf (se entregar no Paca).

Resolver individualmente e sem copiar de outras fontes!