Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320)

Lista 9

Coloração de vértices

Data para entrega da lista: 23/maio/2019 (5af)

E29. Seja G um grafo simples com n vértices, e seja α a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G. Prove que

(a) $n/\alpha \leq \chi(G) \leq n - \alpha + 1$.

(b) Caracterize (diga como são) os grafos G de ordem n tais que $\chi(G) = n - \alpha + 1$.

E30. Seja G um grafo de ordem n. Prove, por indução em n, que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

E31. Seja P um caminho de comprimento máximo em um grafo G. Mostre que $\chi(G) \leq |V(P)|$.

EXERCÍCIOS EXTRAS - Bônus 10 e Bônus 11 – entregar até 30/maio

Bônus 10. Seja G um grafo de ordem n que admite uma partição $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ tal que para todo par i, j, $1 \leq i < j \leq k$, existem vértices não-adjacentes $x \in V_i$ and $y \in V_j$. Prove que $\chi(G) \leq n - k + 1$. (OBS: os conjuntos da partição não são necessariamente independentes.) Sugestão: fazer a prova por indução em k.

Bônus 11. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervalos fechados na reta real. Seja G o grafo simples com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que para todo i, j,

$$v_i \text{ é adjacente a } v_j \text{ se e só se } I_i \cap I_j \neq \emptyset.$$

Mostre que $\chi(G) = \omega(G)$. (Lembramos que $\omega(G)$ denota a cardinalidade de uma clique máxima em G.) **Sugestão:** indução em n. Remova um intervalo que tem o menor extremo superior.

OBS: O grafo G acima definido é chamado de *grafo de intervalos.*

Recomendações

Seguir todas as recomendações dadas até a Lista 5, principalmente a de usar a terminologia adotada. Caprichar na apresentação. Entregar até a hora da aula.

Resolver individualmente e sem consultas a outras fontes!