Prova 1.4 - MAT0206

Aluno: Matheus Tavoram de Laurentys

NUSP: 9793714

Q1.

X é enumerável.

~~Seja $f: X \to P(\mathbb{N})$ dada por $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(x_1, \dots, x_{p-1})\}$, Ou seja, f mapeia as sequências nos~~

Seja S o conjunto de todas as sequênias finitas ~~dos~~ formadas por números naturais e não periódicas*.

Seja $f: X \to S$ dada por $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_1, \dots, x_{p-1})$, ou seja, f mapeia as sequências periódicas na sequência que, de fato, se repete.

- f é bijetora
  - → f é injetora pois não existem duas sequências diferentes e X como o mesmo "núcleo" sendo repetido.
  - → f é sobrejetora, pois toda sequência finita pode ser uma sequência periódica, repetindo, em ordem, todos os seus elementos infinitamente.

$\Rightarrow |X| = |S|$

~~Seja T o conj~~

· Sejam $S_1, \dots, S_i, \dots$ para $i \in \mathbb{N}$ os subconjuntos de S que contém as sequências de i elementos.

$\cdot\ S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$

$\cdot\ |S| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |S_i|$

· Sejam $f_1, \dots, f_i, \dots$ funções tais que $i \in \mathbb{N}$ e $f_i : S_i \to \mathbb{Z}^i$, dadas por $f((x_1, \dots, x_i)) = (x_1, \dots, x_i)$.

→ Como visto na lista 2, $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^d$ é enumerável.

→ É claro que f_i é injetora. Sendo assim, tem-se que $|S_i| \leq |\mathbb{Z}^i|$, mostrando que $\forall i \in \mathbb{N}$, S_i é ~~contável~~ enumerável.

→ Como $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ e cada S_i é enumerável, então S é união ~~de~~ enumerável de conjuntos enumeráveis. Como visto em aula, S, portanto, é enumerável.

→ Como $|X| = |S|$, X é enumerável.

* Talvez periódico não seja a palavra correta, pois as sequências de S são finitas. O que quero dizer é que $(1,2,3,1,2,3) \notin S$, mas $(1,2,3) \in S$.

Q2.

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $X_\alpha := \alpha + A = \{\alpha + x \mid x \in A\}$

A denso $\to$ X_α denso

$a < b$

· Seja (a, b) um intervalo não vazio de $\mathbb{R}$ qualquer.
· Considere, então, o intervalo $(a - \alpha, b - \alpha)$. Como A é denso em $\mathbb{R}$, $\exists x \in A$ tq $a - \alpha < x < b - \alpha$. Sendo assim, é claro que $\exists x \in A$ tq $a < x + \alpha < b$.
$\Rightarrow$ Como, por definição, $x + \alpha \in X_\alpha$, então existe um elemento de X_α que pertence ao intervalo (a, b). Como a e b são quaisquers, então X_α é denso em $\mathbb{R}$.

b) A aberto $\to$ X_α aberto

Seja $x \in X_\alpha$. É claro que $a = x - \alpha$ pertence a A. Como A é aberto $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}$ tq $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$.
Como $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$, então $(a - \varepsilon + \alpha, a + \varepsilon + \alpha)$ está contido em X_α. Sendo assim, $\forall x \in X_\alpha$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}$ tq $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X_\alpha$. Logo, ~~$X_\alpha$ é denso~~ X_α é aberto.

c) • A limitado $\to$ X_α limitado

• $\inf X_\alpha = \alpha + \inf A$

• Sejam a, b com $a < b$ tais que $A \subset [a, b]$. Tais a e b existem pois A é limitado.

• Considerando o intervalo $[a+\alpha, b+\alpha]$, percebe-se que $X_\alpha \subset [a+\alpha, b+\alpha]$.

$\to$ [Por contradição]

Seja $x \in X_\alpha$ tq $x \notin [a+\alpha, b+\alpha]$. Se for esse o caso, então $x - \alpha \notin [a, b]$. Porém, como $x - \alpha \in A$ e $A \subset [a, b]$, tem-se contradição.

$\to$ Logo X_α é limitado.

• Seja $a = \inf A$. É claro que $a + \alpha$ é cota inferior de X_α, pois $\forall x \in X_\alpha$, $x - \alpha \leq a$ e $x - \alpha \in A$. Porém, $a + \alpha$ é, também, a maior das cotas inferiores de X_α.

$\to$ [Por contradição]

~~Seja~~ ~~$\beta > a + \beta$ tal que~~

Seja $\beta > a + \alpha$ tal que $\forall x \in X_\alpha$, $\beta \leq x$. Se fosse esse o caso então $\beta - \alpha \leq x - \alpha$. Porém, como $\beta - \alpha > a$ e $\beta - \alpha \leq x - \alpha$, com $x - \alpha \in A$, então a não seria ínfimo de A, uma contradição com a hipótese. Logo $\inf X_\alpha = \alpha + \inf A$, pois $a + \alpha$ é a maior das cotas inferiores.

Q3

a) $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \leq 0 < 2 \leq y$.

$A_n = (x + \frac{1}{n}; y - \frac{1}{n}] = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{n} < \alpha \leq y - \frac{1}{n}\}$

$B_n = [x + \frac{1}{n}; y - \frac{1}{n}) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{n} \leq \alpha < y - \frac{1}{n}\}$

• $(x, y) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\forall n$ e $(x, y) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

~~⇒ É claro que $\forall n$, $x + \frac{1}{n} \leq x < y \leq$~~

→ Seja $0 < \varepsilon \leqslant \frac{y-x}{2}$. Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, então existem p, q tq $0 < \frac{p}{q} < \varepsilon$. Se $p \neq 1$, tomo $\frac{1}{q}$ e mantém-se que $0 < \frac{1}{q} < \varepsilon$.

→ $x + \varepsilon \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Prova: Tomo $n = q$, logo, $x + \varepsilon$ pertence a $(x + \frac{1}{n}; y - \frac{1}{n}]$ e, tambem que $x + \varepsilon \in [x + \frac{1}{n}; y - \frac{1}{n})$. $x + \varepsilon \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ também.

→ $y - \varepsilon \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $y - \varepsilon \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Prova: Analoga a de cima: tomando $n = q$, é claro que $x \leq 0 < y - \varepsilon < 2 \leq y$ e que, assim, $y - \varepsilon \in (x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$ e $y - \varepsilon \in [x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n})$.

• $\forall z \leqslant x$, $z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

→ $\forall n$, $z < x + \frac{1}{n}$, claramente, pois $x < x + \frac{1}{n}$. Dessa forma $z \notin [x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n})$ e $z \in (x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$ para nenhum n.

$\cdot\ \forall z \geq y,\ z \notin A_n$ e $z \notin B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

→ Prova igual a acima.

Portanto temos que.

$$(-\infty, x] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \qquad (-\infty, x] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

$$[y, +\infty) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \qquad [y, +\infty) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

$$(x, y) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (x, y) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Logo, pode-se concluir que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (x, y)$$

b) → Vou considerar "fixados $x < y$ reais, ..."

A afirmativa continua verdadeira. A prova continua a mesma a menos de um fato. Ao passo que no item a tomei

A afirmativa continua verdadeira. Apesar da condição adicional do item anterior, esta não foi usada na prova. Isto é, a prova de (a) serve para provar este item também.

Q4. A, B diferentes de $\emptyset$ e limitados

$A, B \subset \mathbb{R}^+$

a) A aberto $\rightarrow \sup A \notin A$

• Como A aberto, por definição, se $x \in A$, então $\exists\, \varepsilon$ tq o intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$, com $\varepsilon \neq 0$

→ [Por contradição]

Seja $s = \sup A$, ~~Sendo assim~~ e $s \in A$. Sendo assim, $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset A$. Dessa forma, seja $0 < \alpha < \varepsilon$, $s + \alpha \in A$. Porém, isso é uma contradição, pois s é $\sup A$ e $s+\alpha \in A$ é tal que $s+\alpha > s$

→ Sendo assim, A aberto $\rightarrow \sup A \notin A$.

b) $0 \in \bar{A} \rightarrow \inf A = 0$?

Sim, é verdadeiro.

• É claro que 0 é cota inferior, pois $A \subset \mathbb{R}^+$

• Como $0 \in \bar{A}$, então $0 \in A$ ou $0 \in \partial A$.

→ Se $0 \in A$:

[Por contradição]

Seja $x \in A$ tq $x < 0$. Porém, com $x < 0$, $x \notin \mathbb{R}^+$. Isso é contradição com o fato de $A \subset \mathbb{R}^+$

→ Se $0 \in \partial A$:

Como $A \neq \emptyset$ e 0 cota inferior de A, $\forall x \in A$, $x \geq 0$.

~~Como~~ Sendo assim, com o fato de $0 \in \partial A$, $0 = \inf A$.

c) $\inf A \in \partial A$?

~~Propriedade~~

-> Usarei como definição de fronteira:

$\forall a \in \partial A, \forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}, (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ e $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

A afirmação é verdadeira.

Seja $\alpha = \inf A$. É claro que $\forall a \in A, \alpha \leq a$. É claro também que $\forall x < \alpha, x \notin A$.

-> Logo, temos que $\forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}, (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pois α é a maior cota inferior

-> Temos, também, que $\forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R} (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \cap A^c \neq \emptyset$, pois $\forall x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha), x \notin A$, logo $x \in A^c$.

-> Sendo assim, $\alpha = \inf A$ está na fronteira A.

Extra: Sejam X, Y limitados

$$d_H(X,Y) := \max\left\{ \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} |x-y|, \sup_{y\in Y} \inf_{x \in X} |x-y| \right\}$$

Sejam A, B, C limitados de $\mathbb{R}$

Mostrar que $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$

$\rightarrow A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ $\rightarrow$ Lucas Alfonso aprovou.

[Por contradição] $d_H(A,B) > d_H(A,C) + d_H(C,B)$

Seja $d_H(A,B) = |a_b - b_a|$

- Caso exista algum c^* como $a_b \leq c^* \leq b_a$.
  - $\rightarrow$ Se $d_H(A,C) = |a_b - c^*|$ e $d_H(C,B) = |c^* - b_a|$
    $\rightarrow$ Contradição! $(|a_b - b_a| = |a_b - c^*| + |c^* - b_a|)$
  - $\rightarrow$ Se existirem diversos $c_1^*, \dots, c_m^*, \dots$ entre a_b e b_a, o problema persiste ~~já que~~ se os d_H forem entre algum c_i^* e a_b e outro c_j^* e b_a — já que toma-se o supremo das distâncias dos c_j^*. Contradição.
  - $\rightarrow$ Se $d_H(A,C)$ ou $d_H(C,B)$ for entre algum a ou b e algum c' fora do intervalo $[a_b, b_a]$, há contradição, pois isso indica que há alguma distância maior que a do intervalo. Logo, $|a_b - b_a| < |a - c^+| + |a - c^-|$, com c^- ou c^+ fora do intervalo.

→ Logo,

$d_H(A,B) > d_H(A,C) + d_H(C,B)$ implica que $\exists c \in C$ tq $a_b \leq c \leq b_a$, sendo $d_H(A,B) = |a_b - b_a|$

Seja então, $\tilde{c} \in C$ o mais próximo elemento de C de a. É claro que $|a_b - \tilde{c}| < |a_b - b_a|$.

Porém, se b_a é o elemento de B mais próximo de $\tilde{c}$, há contradição, pois isso faria com que $|\tilde{c} - b| > |a_b - b_a|$.

Dessa forma, existe algum $\tilde{b}$ mais próximo de $\tilde{c}$.

Todavia, é necessário que:

(I) • $|\tilde{c} - \tilde{b}| + |a_b - \tilde{c}| < |a_b - b_a|$

(II) • $|a_b - \tilde{b}| > |a_b - b_a|$

(I) Conforme hipótese da contradição

(II) Conforme $d_H(A,B) = |a_b - b_a|$

Acontece que $|a_b - \tilde{b}| = |\tilde{c} - \tilde{b}| + |a_b - \tilde{c}|$, logo (I) $\Rightarrow |a_b - \tilde{b}| < |a_b - b_a|$. Isso é uma contradição com (II).

Portanto, de fato, $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$