Disciplinas:
MAP 5706 - Introdução à Análise Real (DINTER)
MAP 0216 - Introdução à Análise Real
MAT 0206 - Análise Real

Semestre: 2020/2

Professor: Rodrigo Bissacot - Sala 147A - IME-USP

mail: rodrigo.bissacot@gmail.com

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:

`https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/analise2020`

Monitores:

João Maia - mail: joao.vitor.maia@usp.br
Rafael Severiano - mail: rafaelseveriano@usp.br
Thiago Alexandre - mail: thiago2.alexandre@usp.br
Thiago Raszeja - mail: tcraszeja@gmail.com

Monitorias:

João Maia - Segundas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Alexandre - Terças 17h-18h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Rafael Severiano - Quintas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Raszeja - Sexta 19h-20h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO.

Lista 4: Supremo e Ínfimo. Topologia da Reta Parte I: Abertos, Fechados, Fronteira e Fecho de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

ENTREGA: DIA 23 DE OUTUBRO - SEXTA ÀS 23:59 -

HORÁRIO DE SÃO PAULO

MODO DE ENVIAR A LISTA: Envie sua lista para o endereço **prova.analise.2020@gmail.com**, com o seguinte assunto (título) da mensagem, em maiúsculo:

LISTA 4 - NOME - NUSP - SIGLA DA DISCIPLINA

SOBRE A ENTREGA DESTA LISTA 3 E DA LISTA 4:

NO DIA 23 ENVIE APENAS UMA DAS LISTAS. CORRIGIREMOS APENAS UMA DELAS. OS QUE JÁ ENVIARAM A LISTA 3, SE QUISEREM TROCAR, E QUE SEJA CORRIGIDA SUA LISTA 4, BASTA ENVIAR A LISTA 4 E COMENTAR ISSO NA MENSAGEM.

SOBRE A UTILIZAÇÃO DA LISTA 4 NA P1 NESTA SEXTA:

DIFERENTEMENTE DAS LISTAS 1, 2 E 3, CASO NECESSITE DE ALGUM RESULTADO DA LISTA 4 EM UMA ALGUMA QUESTÃO DA PROVA, VOCÊ PRECISA REPROVAR A QUESTÃO NA PROVA. (REFAZER A QUESTÃO QUE QUEIRA USAR).

Exercício 1. Seja K um corpo ordenado. Sejam, a, $b \in K$ tais que $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Mostre que $a \leq b$.

Definição. *Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é* `limitado superiormente` *quando existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq \beta$, para todo $x \in A$. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ é* `limitado inferiormente` *quando existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq x$, para todo $x \in A$. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ é* `limitado` *quando A for limitado inferiormente e superiormente.*

Exercício 2. Sejam $A \subset B$ subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\inf B \leq \inf A$ quando B é limitado inferiormente.
(b) Mostre que $\sup A \leq \sup B$ quando B é limitado superiormente.
(c) Conclua que quando A e B são limitados temos que

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

(d) É verdade que, se $A \subset B$ e $A \neq B$ então $\sup A < \sup B$?

Comentário: O que o último exercício nos diz é que se já temos o supremo de um conjunto, ao adicionarmos mais elementos neste de forma que o novo conjunto também possua supremo, o supremo do novo conjunto é no mínimo o supremo do anterior já que os elementos deste continuam sendo cotados pelo supremo do conjunto inicial. O mesmo raciocínio vale para o ínfimo, ao adicionarmos elementos em um conjunto o ínfimo se mantém ou diminui.

Exercício 3.
Sejam A, B conjuntos não-vazios de números reais, satisfazendo

$$x \in A, y \in B \Rightarrow x \leq y$$

(a) Prove A é limitado superiormente e que B é limitado inferiormente.
(b) Prove que $\sup A \leq \inf B$.
(c) Mostre que $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Comentário: Esse exercício será fundamental na parte de integração, para caracterizar quando uma função é Riemann integrável.

Exercício 4.
Sejam A, B subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ não-vazios. Mostre que:
(a) $A + B$ é limitado.
(b) sup $(A + B) =$ sup A + sup B
(c) inf $(A + B) =$ inf A + inf B.

Exercício 5.
Sejam A, B subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ não-vazios e $c \in \mathbb{R}$.
Definimos $c.A = \{c.x : x \in A\}$
(a) Mostre que $c.A$ é limitado.
(b) Se $c < 0$ mostre que $\sup c.A = c. \inf A$ e que $\inf c.A = c. \sup A$.
(b) Se $c > 0$ mostre que sup $c.A = c$.sup A e que inf $c.A = c$.inf A.

Exercício 6. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos não-vazios e limitados de números reais positivos.
Definimos o conjunto $A.B = \{x.y : x \in A \text{ e } y \in B\}$.
Já mostramos em aula que $A.B$ é limitado e que sup A.B = sup A. sup B.

Mostre que inf A.B = inf A.inf B

Exercício 7. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando sua imagem $f(X) = \{y \in \mathbb{R}; \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = y\}$ é um subconjunto limitado da reta. Neste caso definimos como $\sup f$ como sendo o supremo do conjunto $f(X)$. Às vezes escrevemos $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ ao invés de $\sup f$ para evidenciar o domínio da função f, ou o subconjunto do domínio que estamos considerando. Considere f e g funções limitadas.

(a) Seja $A \subset X$, mostre que $\sup f|_A := \sup\limits_{x \in A} f(x) \leq \sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup f$. Aqui $f|_A$ denota a restrição de f ao subconjunto A.

(b) $f(X) + g(X)$ denota o conjunto $\{f(x) + g(y) \in \mathbb{R};\ x \in X \text{ e } y \in X\}$. Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$.

(c) Mostre que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.

(d) Dê um exemplo onde $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$.

OS EXERCÍCIOS A e B FORAM PASSADOS EM AULA. NÃO PRECISAM SER ENTREGUES, CASO NÃO CONSIGA RESOLVÊ-LOS, OLHE EM ALGUM LIVRO OU PERGUNTE NAS MONITORIAS:

Exercício A.

1. Mostre que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são abertos.

2. Mostre que se $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, então $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ é aberto.

3. Mostre que se $A_1, A_2, ..., A_k$ é uma coleção finita subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, mostre que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ é aberto.

Exercício B.

1. Mostre que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são fechados

2. Mostre que se $(F_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então $F = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ é fechado.

3. Mostre que se $F_1, F_2, ..., F_k$ é uma coleção finita de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, mostre que $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ é fechado.

Definição. *Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, chamamos de* `fecho de` X *o conjunto dos* `pontos aderentes ao conjunto` X. *Um ponto $y \in \mathbb{R}$ é dito* `ponto aderente ao conjunto` X *quando:*

$\forall\ \varepsilon > 0$ *existe* $x \in X$ *tal que* $x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Notação: Fecho de X: $\overline{X}$.

Note que todo elemento $a \in X$ pertence ao fecho de X. De fato, para cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar $x = a$ e então temos que $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ou seja, $X \subseteq \overline{X}$.

Exercício 8. Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios.
Prove se for verdade ou dê contra-exemplo se for falso:

(a) $\text{int}(X \cup Y) = \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.
(b) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.
(c) $\overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.
(d) $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Observação:
- $\text{int}(X)$ denota o interior do conjunto X.

Exercício 9. Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio. Mostre que:

(a) $\partial X = \overline{X} -$ int X.
(b) $\overline{X} = X \cup \partial X$.

Observação:
- ∂X denota a fronteira de X.

Exercício 10. Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio. Mostre que:
(a) X é aberto se, e somente se, $\partial X \cap X = \emptyset$.
(b) $\text{int}(X) = X - \partial X$.
(c) X é fechado se, e somente se, $\partial X \subset X$.
(d) ∂X é fechado.

Exercício 11. Seja $X \subset \mathbb{R}$.
(a) Mostre que X é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\text{int}(X^c) = \emptyset$.
(b) Mostre que se X é aberto e fechado, então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

Exercício 12.
(a) Seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $|b| < 1$. Mostre que dado $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que pode depender de ε) tal que $|b^n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Comentário: Você está mostrando que $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Exercício 13. Seja $p \in \mathbb{N}$ número natural fixo com $p > 1$.

(a) Mostre que dado qualquer número real positivo $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{p^n} < a$.

(b) Mostre que o conjunto $Q_p = \{\frac{m}{p^n}; m \in \mathbb{Z} \ e \ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exercício 14.
(a) Seja $a \in \mathbb{Q}$ um número racional não nulo e $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.
Mostre que $a.x$ e $a + x$ são irracionais.

(b) Dê exemplo de dois números irracionais x, y tais que $x+y$ é racional.

(c) Mostre ainda um caso onde x, y são irracionais e ambos, $x + y$ e $x.y$ sejam racionais.

A questão acima pode ser resolvida usando irracionais do tipo raiz de um número primo, porém, decidir se dados dois irracionais o produto ou a soma é um número racional é uma tarefa que pode ser muito complicada. É um problema em aberto saber se a soma e o produto do número de Euler e Pi são irracionais.

Definição. *Um número real α é dito* `algébrico` *quando existe um polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros tal que α é raiz de $p(x)$. Em outras palavras, $p(x)$ é da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $0 \leq i \leq n$ e $p(\alpha) = 0$. Quando um número real não é algébrico ele é chamado de* `trascendente`.

Comentário: Note que na definição acima poderíamos ter usado coeficientes racionais ao invés de inteiros. De fato, se α é raiz do polinômio $p(x) = \frac{a_n}{b_n} x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} x^{n-1} + ... + \frac{a_1}{b_1} x + \frac{a_0}{b_0}$ onde $a_i \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{Z}^*$ para todo $0 \leq i \leq n$, podemos multiplicar o polinômio por $b_n . b_{n-1} ... b_1 . b_0$ e assim obtemos um polinômio com coeficientes inteiros que tem α como raiz. Resumindo em palavras: todo número real que é raiz de um polinômio com coeficientes racionais é também raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Exercício 15.
Mostre que se um número real $\alpha \neq 0$ é algébrico então $-\alpha$ e α^{-1} são algébricos.

Comentário: É possível mostrar que o conjunto dos números algébricos é um corpo (subcorpo de $\mathbb{R}$), não faremos isso no curso, consulte um livro de álgebra.