Notas de Aula

Análise Real

Prof° Dr. Rodrigo Bissacot

Feito por:
Lucas Roda Ximenes dos Santos[1]

7 de Dezembro de 2020

[1]E-mail: lcsximenes@usp.br

Sumário

1 | Aula 1 - 31/08/2020

1.1 Início do curso

Um bom guia para começar a entender como a matemática funciona seria ler as seguintes bibliografias:

- Os dois primeiros capítulos de [3].
- As notas de aula sobre conjuntos [1].

1.2 Algumas informações úteis

A forma de organização do curso é feita de forma que discutimos inicialmente a coleção de axiomas que padrão assumida pela maioria dos matemáticos:

- **Axioma:** Coleção de afirmações que assumimos como verdades
- **Preocupações da área de fundamentos da matemática:**
  - O conjunto de axiomas é minimal? (ou seja, a prova de algo não necessita de mais axiomas?)
  - Os axiomas são contraditórios?

1.3 Algumas notações

Nessa matéria será utilizada uma ampla gama de notações simbólicas para economizar escrita, mas sem perder a generalidade e o conceito como um todo.

- $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$: O conjunto $\mathbb{A}$ está contido no conjunto $\mathbb{B}$.
- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$: O conjunto $\mathbb{A}$ está contido ou é igual ao conjunto $\mathbb{B}$.
- $\forall$: Para qualquer.
- $\Rightarrow$: Implica que.
- $x \in \mathbb{A}$: x pertence ao conjunto $\mathbb{A}$.
- $x \notin \mathbb{B}$: x não pertence ao conjunto $\mathbb{B}$.
- $\wedge$: e.
- $\vee$: ou.
- $\sim$: Negação.
- $\Leftrightarrow$: Se e somente se.

- $\exists$: Existe.
- $\nexists$: Não existe.

1.4 Conjunto usual de axiomas

O conjunto usual utilizado é o **ZFC**[1]. Alguns dos axiomas desse conjunto são:

1.4.1 Axioma da extensão

Definição 1.1. Dois conjuntos são iguais, quando possuem os mesmos elementos, ou seja, dado dois conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, dizemos que $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ se ambos possuem os mesmos elementos.

$$\boxed{\mathbb{A} = \mathbb{B} \Leftrightarrow [\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \wedge \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}]} \tag{1.1}$$

1.4.2 Axioma do vazio

Definição 1.2. Existe um conjunto, que é único (prova em 37.1), que não possui elementos representado por $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

1.4.3 Axioma da união

Definição 1.3. Dada uma coleção de conjuntos $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$, com I sendo um conjunto de índices, então existe o **conjunto união**, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a algum dos conjuntos da coleção.

$$\boxed{\mathbb{A} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{A}_i} \tag{1.2}$$

1.4.4 Axioma do infinito

Definição 1.4. Definindo o sucessor de um dado conjunto $\mathbb{X}$ por $S(\mathbb{X}) = \mathbb{X} \cup \{\mathbb{X}\} = n+1$, então existe um conjunto que contém a sequência de sucessores a partir do conjunto vazio.

Exemplo 1.1. Suponha que $\mathbb{X} = \varnothing$, se aplicarmos o sucessor nesse conjunto, temos:

$$S(\mathbb{X}) = \mathbb{X} \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

$$S(S(\mathbb{X})) = S(\mathbb{X}) \cup \{S(\mathbb{X})\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}$$

$$\dots$$

$$\boxed{\text{““Construção do conjunto dos números naturais } (\mathbb{N})\text{””}}$$

Essa sequência de conjuntos é identificada como o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$

[1]Ernest Zermelo, Abraham Fraenkel, choice (*axioma da escolha*).

1.5 Subconjunto

Definição 1.5. Dados dois conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, dizemos que $\mathbb{A}$ é um subconjunto de $\mathbb{B}$, quando todo elemento de $\mathbb{A}$ também é elemento de $\mathbb{B}$, ou seja:

$$\forall\ x(x \in \mathbb{A} \Rightarrow x \in \mathbb{B})$$

$$\boxed{\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow (\forall\ x,\ \ x \in \mathbb{A} \Rightarrow x \in \mathbb{B})} \tag{1.3}$$

Comentário 1.1. Se temos que $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, ou seja, todo elemento de $\mathbb{A}$ é também conjunto de $\mathbb{B}$, temos que a negação dessa relação é:

Existe y tal que $y \in \mathbb{A}$ e $y \notin \mathbb{B}$, simbolicamente temos:

$$\boxed{\sim(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) : \mathbb{A} \not\subset \mathbb{B} \Rightarrow \exists\ y\ ;\ y \in \mathbb{A} \wedge y \notin \mathbb{B}} \tag{1.4}$$

1.6 Tabela Verdade

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sentenças, temos então a seguinte tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

A construção da tabela tem base nas seguintes hipóteses:

- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ é verdadeiro (V) quando ao menos umas das sentenças é verdadeira. (ou)
- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ é verdadeiro (V) quando ambas as sentenças são verdadeiras. (e)

1.7 Perguntas

Pergunta 1.1. Considerando um conjunto $\mathbb{A}$ não vazio, pergunta-se: O conjunto vazio está contido em $\mathbb{A}$, ou seja, $\varnothing \subset \mathbb{A}$?

Existem duas opções possíveis de resposta. Ou $\varnothing \subset \mathbb{A}$ ou $\varnothing \not\subset \mathbb{A}$. Se tomarmos como verdade que $\varnothing \not\subset \mathbb{A}$, temos:

$$\varnothing \not\subset \mathbb{A} \Leftrightarrow \exists\ z\ ;\ \underbrace{z \in \varnothing}_{\text{Impossível}} \wedge\ z \notin \mathbb{A}$$

$$\therefore\ \ \varnothing \not\subset \mathbb{A} \text{ é falso}$$

$$\therefore\ \boxed{\varnothing \subset \mathbb{A}} \text{ é verdadeiro}$$

■

Fim da Aula 1

2 | Aula 2 - 02/09/2020

2.1 Axioma das partes

Definição 2.1. Para todo conjunto $\mathbb{X}$, existe um conjunto, que chamamos de **conjunto das partes de** $\mathbb{X}$ (denotado por $\mathcal{P}(\mathbb{X})$) tal que seus elementos são os subconjuntos de $\mathbb{X}$, ou seja, $\mathbb{X}$ é um conjunto tal que $\mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) \Leftrightarrow \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$.

Exemplo 2.1. Seja $\mathbb{X} = \{1, 2\}$, então:

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}}$$

2.2 Produto cartesiano

Definição 2.2. Dados dois conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, definimos o **produto cartesiano** de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ ($\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$) como sendo o conjunto tal que seus elementos são os **pares ordenados** (x,y), com $x \in \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$. Onde par ordenado é definido por:

$$\boxed{(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \ \mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \tag{2.1}$$

A principal propriedade envolvida na definição de par ordenado é a igualdade:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \boxed{a = c} \text{ e } \boxed{b = d}$$

Proposição 2.1. Dados dois conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Sejam (a, b) e (c, d), elementos de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Então vale que:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Demonstração. Utilizando a (2.1) para os pares (a, b) e (c, d) temos que:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \tag{2.2}$$

$$(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\} \tag{2.3}$$

Para a demonstração, dividiremos ela em duas partes, a ida ($\Rightarrow$) e a volta ($\Leftarrow$).

($\Leftarrow$): Assumimos como hipótese inicial para a volta que $a = c$ e $b = d$, portanto podemos afirmar que:

$$\{a\} = \{c\} \tag{2.4}$$

$$\{b\} = \{d\} \tag{2.5}$$

$$\therefore \ \{a, b\} = \{c, d\} \tag{2.6}$$

Logo, pelo axioma da extensão, temos:

$$\boxed{\{\{a\},\{a,b\}\} \stackrel{*}{=} \{\{c\},\{c,d\}\}} \tag{2.7}$$

($\Rrightarrow$): Assumimos como hipótese que $(a,b) = (c,d)$, portanto temos que analisar dois casos e provar que, para ambos os casos, vale que $a = c$ e $b = c$. Os dois casos possíveis a se considerar são:

$$\begin{cases} 1° \text{ Caso: } a = b \\ 2° \text{ Caso: } a \neq b \end{cases} \tag{2.8}$$

Para provar o 1° caso, estamos assumindo que:

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \tag{2.9}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \tag{2.10}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \tag{2.11}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\{a\} = \{c\}}_{a=c} \quad \text{e} \quad \underbrace{\{a\} = \{c,d\}}_{a=c=d} \tag{2.12}$$

Portanto, quando $a = b$, temos que $\boxed{a = c}$ e $a = c = d$, o que implica a igualdade $a = \boxed{b = d}$, provando o 1° caso.

Para provar o 2° caso, assumimos que vale (2.7), portanto temos que:

$$\underbrace{\{a,b\} = \{c\}}_{1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\{a,b\} = \{c,d\}}_{2} \tag{2.13}$$

Como estamos lidando com o caso em que $a \neq b$, ocorre diretamente que 1 não pode ser verdadeira, pois caso valesse, o conjunto $\{a,b\}$ teria que ser igual ao conjunto $\{c\}$, no entanto, para que isto ocorra, $\{a,b\}$ devem ser iguais, logo, 1 é falso.

Portanto, a partir do axioma da extensão (1.1), concluímos que 2 é verdadeira. Da mesma forma, podemos concluir que, se $a \neq b$, então $c \neq d$.

Também por (2.7), temos que:

$$\underbrace{\{a\} = \{c\}}_{3} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\{a\} = \{c,d\}}_{4} \tag{2.14}$$

Da mesma forma que 1 é falso, 4 também é pelo mesmo raciocínio, logo podemos concluir que 3 é verdadeira. Portanto temos os seguintes resultados $a \neq b$, $a = c$ e $\{a,b\} = \{c,d\}$. De 2 e 3, tiramos que:

$$\{a,b\} = \{a,d\} \tag{2.15}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{b = a}_{\text{não ocorre}} \quad \text{ou} \quad b = d \tag{2.16}$$

$$\therefore \ b = d \tag{2.17}$$

Logo, se $(a, b) = (c, d)$, então $\boxed{a = c}$ e $\boxed{b = d}$.

■

2.3 Relações

Definição 2.3. Chamamos de **relação** de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ a qualquer subconjunto do produto cartesiano entre eles ($\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$).

Exemplo 2.2. Sejam os conjuntos $\mathbb{X} = \{1, 2\}$ e $\mathbb{Y} = \{3, 4, 5\}$, temos então que o produto cartesiano $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ é:

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = \begin{Bmatrix} (1,3), (1,4), (1,5) \\ (2,3), (2,4), (2,5) \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

Podemos dizer portanto, que alguns exemplos de relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são:

$$\mathcal{R} = \{(1,3), (1,4), (2,5)\} \tag{2.19}$$

$$\mathcal{R}' = \{(1,3), (2,5)\} \tag{2.20}$$

2.4 Funções

Definição 2.4. Chamamos de função de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ a uma relação $\mathcal{R}$ que satisfaz:

a : Para todo elemento $x \in \mathbb{X}$, existe um par ordenado $(x, y) \in \mathcal{R}$.

b : O elemento y do item a é único, ou seja:

$$\boxed{\forall \ x \in \mathbb{X} \ \exists! \ y \in \mathbb{Y}; (x, y) \in \mathcal{R}} \tag{2.21}$$

c : Em geral, o único $y \in \mathbb{Y}$ associado ao elemento $x \in \mathbb{X}$ é denotado por $f(x)$. Disto, definimos então que:

$$\boxed{\mathcal{R} = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{X}\}} \tag{2.22}$$

Comentário 2.1. Comparando as (2.19) e (2.20) com as definições (2.21) e (2.22), podemos então concluir que a relação $\mathcal{R}$ não pode ser uma função, pois para um único x, existem dois resultados e a relação $\mathcal{R}'$ é uma função, pois para cada x, existe apenas um $f(x)$.

Nomenclatura 2.1. A nomenclatura utilizada para para os conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ definidos acima é:

- $\mathbb{X}$ é chamado **domínio** da função.
- $\mathbb{Y}$ é chamado **contradomínio** da função.

2.4.1 Conjunto imagem

Definição 2.5. Dada uma função $\mathcal{R}$ de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$, chamados de conjunto imagem, o subconjunto de $\mathbb{Y}$ definido por:

$$\boxed{Im = \{y \in \mathbb{Y} \; ; \; \exists \; x \in \mathbb{X} \; ; \; (x, y) \in \mathcal{R}\}} \tag{2.23}$$

Comentário 2.2. Na função $\mathcal{R}'$ em (2.20), o conjunto imagem é $Im(\mathcal{R}) = \{3, 5\}$.

2.5 Sobrejeção

Definição 2.6. Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função. Dizemos que f é sobrejetora quando o conjunto imagem coincidir com o contradomínio.

Nomenclatura 2.2. Imagem de $f := Im(f)$, ou seja, $Im(f) = \mathbb{Y}$. Simbolicamente[1]:

$$\boxed{\forall \; y \in \mathbb{Y} \; \exists \; x \in \mathbb{X} \; ; \; f(x) = y} \tag{2.24}$$

2.6 Perguntas

Pergunta 2.1. Quando duas funções são iguais?

Quando os conjuntos de pares ordenados que definem as funções são iguais.

■

Pergunta 2.2. Dados $\mathbb{W} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\mathbb{X} = [0, 1]$ e $\mathbb{Y} = [0, 2]$, e duas funções definidas por:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, 2x) \; ; \; x \in [0, 1]\} \tag{2.25}$$

$$\mathcal{R}_2 = \left\{(x, 2x) \; ; \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \tag{2.26}$$

Pergunta-se: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$?

Temos que $\mathcal{R}_1$ pode ser escrita por $f_1(x) = 2x$. Como seu domínio é $\mathbb{X}$, temos que para qualquer ponto deste, a $Im(f_1(x)) = [0, 2] = \mathbb{Y}$.

Temos que $\mathcal{R}_2$ pode ser escrita por $f_2(x) = 2x$. Como seu domínio é $\mathbb{W}$, temos que para qualquer ponto deste, a $Im(f_1(x)) = [0, 1] = \mathbb{X}$.

Portanto, os domínios são diferentes, então podemos concluir que $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$.

■

Comentário 2.3. Nas equações (2.25) e (2.26), podemos utilizar uma notação mais simples para escrever a função:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 := f : [0, 1] &\to [0, 2] \\ x &\longmapsto f(x) = 2x \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 := f : [0, \tfrac{1}{2}] &\to [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = 2x \end{aligned} \tag{2.28}$$

[1] $f(x) = y$ é a notação utilizada para dizer que (x, y) pertence a função.

2.7 Questionamento

Será que existe um conjunto $\mathbb{X}$ e uma função f tal que $f : \mathbb{X} \to \mathcal{P}(\mathbb{X})$ que seja sobrejetora? (Prova em 4.2)

Fim da Aula 2

3 Aula 3 - 04/09/2020

3.1 Função Composta

Definição 3.1. Dadas duas funções $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ e $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$. Definimos g composta f por:

$$\boxed{(g \circ f) : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}} \tag{3.1}$$

$$\boxed{(g \circ f)(x) := g(f(x))} \tag{3.2}$$

Lema 3.1. A composição de funções é uma operação associativa. Ou seja, vale que, para os domínios $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ e $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$ a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f} \tag{3.3}$$

A equação (3.3) é sinônimo de dois fatos:

(1) *O domínio e contradomínio de $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são **iguais**.*

Demonstração. Para $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$ temos que:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \xrightarrow{h} h(g(f(x)))$$

$$\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \mathbb{W}$$

$$\therefore \mathbb{X} \to \mathbb{W}$$

Para $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$, logo $\mathbb{X} \to \mathbb{W}$. ■

(2) *Vale a igualdade:*

$$[h \circ (f \circ g)](x) = [(h \circ g) \circ f](x), \ \forall \ x \in \mathbb{X} \tag{3.4}$$

Demonstração. Dado um $x \in \mathbb{X}$, utilizando (3.2), temos:

$$\begin{aligned} [h \circ (g \circ f)](x) &= h((g \circ f)(x)) && (3.5)\\ &= h(g(f(x))) && (3.6)\\ &= (h \circ g)(f(x)) && (3.7)\\ &= \boxed{[(h \circ g) \circ f](x)} && (3.8) \end{aligned}$$

■

3.2 Injeção

Definição 3.2. Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é dita **injetora** (ou **injetiva**) quando: dados $x_1 \in \mathbb{X}$ e $x_2 \in \mathbb{X}$, tais que $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))} \tag{3.9}$$

Comentário 3.1. Seja $\mathcal{P}$ a afirmação de que $x_1, x_2 \in \mathbb{X}; x_1 \neq x_2$ e seja $\mathcal{Q}$ a afirmação de que $f(x_1) \neq f(x_2)$, portanto temos que para uma função injetora:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \tag{3.10}$$

A implicação inversa é sempre verdadeira, pois caso não fosse, $f(x)$ não seria função, logo, vale $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$. A (3.10) é equivalente a dizer que:

$$(\sim \mathcal{Q}) \Rightarrow (\sim \mathcal{P}) \tag{3.11}$$

Ou seja, podemos escrever a (3.9) sob forma de negação tal que:

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}} \tag{3.12}$$

3.3 Função inversa à esquerda

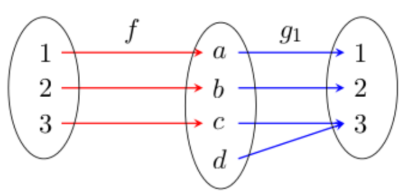
Definição 3.3. Dada uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, dizemos $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é uma inversa à esquerda[1] quando compondo g com f, a função $g \circ f$ devolve o valor do ponto original, ou seja:

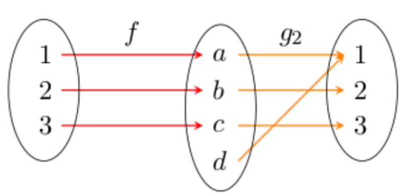
$$g \circ f = I_{\mathbb{X}} \tag{3.13}$$

Simbolicamente obtemos:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = I_{\mathbb{X}}(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{X}} \tag{3.14}$$

Exemplo 3.1. Dados dois conjuntos $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$. Temos então:





[1] A notação é *à esquerda*, pois g é colocada à esquerda da f.

Com essas representações de como as funções f e g se comportam, podemos concluir que, dentro de um domínio pré definido, existem uma infinidade de funções inversas à esquerda que satisfazem à transformação (3.14), ou seja:

$$\boxed{(g_1 \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{X}} \tag{3.15}$$

$$\boxed{(g_2 \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{X}} \tag{3.16}$$

Proposição 3.1. Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função. Então f é **injetora** se, e somente se, f **possui uma inversa à esquerda**.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Assumimos que f é injetora, logo, temos que provar que $\exists g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ que é inversa à esquerda de f. Em outras palavras, precisamos construir uma g que satisfaça (3.14).

Fixando um $x_0 \in \mathbb{X}$, temos que para todo $y \in \mathbb{Y} \setminus Im(f)$:

$$g(y) = x_0 \tag{3.17}$$

Agora para $y \in \mathbb{Y}$ e $y \in Im(f)$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $f(x) = y$. Como assumimos que f é injetora, y é único, logo, para cada

$$y \in Im(f)\ \exists!\ x \in \mathbb{X}; f(x) = y \tag{3.18}$$

Defino portanto $g(y) = x$, tal que x é o único que satisfaz $f(x) = y$, logo, definindo $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, onde:

$$g(y) = \begin{cases} x, \text{ se } y \in Im(f) \Rightarrow f(x) = y \\ x_0, \text{ se } y \notin Im(f) \end{cases} \tag{3.19}$$

Portanto temos que:

$$(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{y}) \tag{3.20}$$

Pela definição da g em (3.19):

$$g(y) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{X} \tag{3.21}$$

Provando que f possui uma inversa à esquerda.

($\Leftarrow$): Assumimos que existe uma $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in \mathbb{X}$, portanto temos que mostrar que f é injetora. Suponha que vale ∼[f é injetora][2], então existem $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$. Como $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é inversa à esquerda de f, temos que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x,\ \forall x \in \mathbb{X} \tag{3.22}$$

Aplicando então x_1 e x_2 em (3.22) temos:

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = x_1 \tag{3.23}$$
$$(g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = x_2 \tag{3.24}$$

Como definimos inicialmente que $f(x_1) = f(x_2)$, teríamos que ter obrigatoriamente que $x_1 = x_2$, no entanto, assumimos que $x_1 \neq x_2$, logo f é obrigatoriamente injetora. ∎

Fim da Aula 3

[2] suponha que f não seja injetora

4 | Aula 4 - 09/09/2020

4.1 Função inversa à direita

Definição 4.1. Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função. $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é uma inversa à direita de f quando $f \circ g = I_y$, ou seja:

$$\boxed{(f \circ g)(y) = f(g(y)) = I_y = y,\ \forall\ y \in Y} \tag{4.1}$$

Proposição 4.1. Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função. Então f é sobrejetora se, e somente se, f possui inversa à direita.

Demonstração. Para a prova, dividiremos ela em 2 partes, ida e volta, ou seja:
($\Rrightarrow$): Suponhamos inicialmente que $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ seja sobrejetora. Precisamos mostrar então que existe $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que vale a identidade:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y,\ \forall\ y \in \mathbb{Y} \tag{4.2}$$

Como f é sobrejetora, então para cada $y \in \mathbb{Y}$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras (ou em símbolos):

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{X}; f(x) = y\} \neq \varnothing,\ \forall\ y \in \mathbb{Y} \tag{4.3}$$

Em que definimos $f^{-1}(\{y\})$ como sendo a pré-imagem da f.[1] Dessa forma, em cada conjunto $f^{-1}(\{y\})$, escolho x_y tal que:

$$f(x_y) = y \tag{4.4}$$

Note que desta forma, associamos a cada $y \in \mathbb{Y}$ um elemento bem definido $x_y \in \mathbb{X}$. Uma representação esquemática seria algo do tipo:

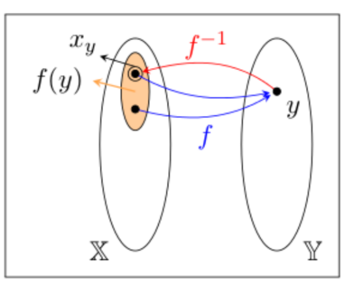


Figura 4.1: Tenho um pouco de dúvida se essas setas realmente representam isso, mas pelo que entendi é isto.

Defino então $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ por $y \mapsto g(y) = x_y$. Note que, por definição e pela (4.4) temos que:

$$y = f(x_y) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) \tag{4.5}$$

[1] Site do Rafael com uma dica sobre pré-imagem

Logo $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é uma inversa à direita da f.
($\Leftarrow$): Assumimos que existe $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que a (4.1) é satisfeita. Precisamos mostrar que f é sobrejetora, ou seja, temos que mostrar que para cada $y \in \mathbb{Y}$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $f(x) = y$. Da equação (4.1), tiramos que $f(g(y)) = y,\ \forall\ y \in \mathbb{Y}$, portanto, basta notar que $g(y) \in \mathbb{X},\ \forall\ y \in \mathbb{Y}$. Então:

$$f(g(y)) = y,\ \forall\ y \in \mathbb{Y} \tag{4.6}$$

Logo f é sobrejetora. ■

Comentário 4.1. A partir da proposição (4.1) temos que, sendo $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função, então:

1. f é injetora $\Leftrightarrow \exists\ g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que:

$$g \circ f = I_x \tag{4.7}$$

2. f é sobrejetora $\Leftrightarrow \exists\ h : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que:

$$f \circ h = I_y \tag{4.8}$$

Aplicando a (2) em (1):

$$g \circ f = g(f(x)) = I_x \overset{(4.8)}{\mapsto} \boxed{\text{g é sobrejetora}} \tag{4.9}$$

Pois a f é inversa à direita de g. Aplicando a (1) em (2):

$$f \circ h = f(h(y)) = I_y \overset{(4.7)}{\mapsto} \boxed{\text{h é injetora}} \tag{4.10}$$

Pois a f é inversa à esquerda de h.

Lema 4.1. *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função e suponha que existam:*

$$g_1 : \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \text{ Uma inversa à esquerda de } f \tag{4.11}$$

$$g_2 : \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \text{ Uma inversa à direita de } f \tag{4.12}$$

Então:

1. f é bijetora.

   Demonstração. Pela (4.11), como f tem inversa à esquerda, então f é injetora. Pela (4.12), como f tem inversa à direita, então f é sobrejetora, logo f é bijetora. ■

2. $g_1 = g_2$ nesse caso, chamando essa inversa de ambos os lados de $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que:

$$f^{-1} \circ f = I_x \tag{4.13}$$

$$f \circ f^{-1} = I_y \tag{4.14}$$

   Nomenclatura 4.1. f^{-1} é denominada **inversa** da f

   Demonstração. Note que g_1 e g_2 possuem o mesmo domínio $\mathbb{Y}$. Lembrando que $g_2 : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é inversa à direita de f se, e somente se:

$$(f \circ g_2)(y) = f(g_2(y)) = y,\ \forall x \in \mathbb{Y} \tag{4.15}$$

$$\therefore\ g_1(y) = g_1[(f \circ g)(y)] = [g_1 \circ (f \circ g_2)](y) \tag{4.16}$$

   Como a composição de funções é associativa (3.3), então:

$$[g_1 \circ (f \circ g_2)](y) \overset{3.3}{=} [(g_1 \circ f) \circ g_2](y) \tag{4.17}$$

   Como $(g_1 \circ f) = I_x$, pois g_1 é inversa à esquerda de f, temos que:

$$[(g_1 \circ f) \circ g_2](y) = (I_x \circ g_2)(y) = \boxed{g_2(y)}\ , \forall\ y \in \mathbb{Y} \tag{4.18}$$

■

4.2 Teorema de Cantor

Esse é o teorema que responde ao questionamento da seção (2.7).

Teorema 4.1. *Seja $\mathbb{Y}$ um conjunto. Não existe $f : \mathbb{Y} \to \mathcal{P}(\mathbb{Y})$ sobrejetora. Ou seja:*

$$\boxed{\forall\ \mathbb{Y} \text{ conjunto, } \nexists\ f : \mathbb{Y} \to \mathcal{P}(\mathbb{Y}) \text{ sobrejetora}} \tag{4.19}$$

Demonstração. Para provar o teorema usaremos uma argumento por absurdo.
Suponhamos que exista um conjunto $\mathbb{Y}$ e que $f : \mathbb{Y} \to \mathcal{P}(\mathbb{Y})$ sobrejetora. Como definimos f sendo sobrejetora, então existe um $a \in \mathbb{Y}$ tal que $f(a) = \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é um subconjunto de $\mathbb{Y}$ definido como:

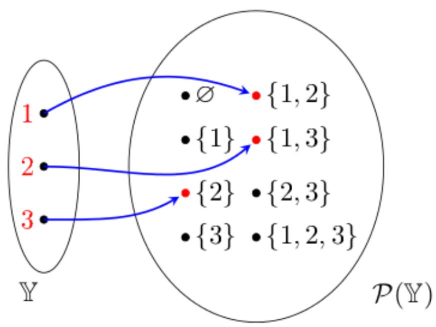
$$\mathcal{A} := \{y \in \mathbb{Y}; y \notin f(y)\} \subseteq \mathbb{Y} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{P} \tag{4.20}$$

Nesse caso temos duas possibilidades:

1. $a \in \mathcal{A} \Rightarrow a \in f(a) = \mathcal{A} := \{y \in \mathbb{Y}; y \notin f(y)\} \Rightarrow a \notin \mathcal{A}$ (absurdo).
2. $a \notin \mathcal{A} \Rightarrow a \notin f(a) = \mathcal{A} := \{y \in \mathbb{Y}; y \notin f(y)\} \Rightarrow a \in \mathcal{A}$ (absurdo).

Provando que a (4.19) é verdadeira para qualquer que seja o conjunto $\mathbb{Y}$. ■

Exemplo 4.1. Como o subconjunto $\mathcal{A}$ é um subconjunto um tanto quando abstrato, podemos utilizar um diagrama de Venn para entender um pouco melhor como ele funciona. Tome como sendo $\mathbb{Y} = \{1, 2, 3\}$. Então o conjunto das partes de $\mathbb{Y}$ é o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Y}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Seja $f : \mathbb{Y} \to \mathcal{P}(\mathbb{Y})$, então temos os seguinte diagrama:



$$f(1) = \{1, 2\} \Rightarrow 1 \in f(1) \tag{4.21}$$
$$f(2) = \{1, 3\} \Rightarrow 2 \notin f(2) \tag{4.22}$$
$$f(3) = \{2\} \Rightarrow 3 \notin f(3) \tag{4.23}$$

Temos então nesse caso que:

$$\boxed{\mathcal{A} = \{2, 3\}} \tag{4.24}$$

4.3 Conjuntos Enumeráveis

Definição 4.2. Dizemos que um conjunto $\mathbb{X}$ é **enumerável** quando existe $f : \mathbb{X} \to \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} =$ (Conjunto dos naturais) **injetora**, ou seja, $\mathbb{X}$ é enumerável quando:

$$\boxed{\exists\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{X} \text{ sobrejetora} \Leftrightarrow \exists\ f : \mathbb{X} \to \mathbb{N} \text{ injetora}} \tag{4.25}$$

Comentário 4.2. Existem conjuntos que não são enumeráveis. Um exemplo é o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, pois não pode existir uma $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Teorema de Cantor - 4.2).

Nomenclatura 4.2. Quando $\nexists$ uma função sobrejetora de $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, escrevemos $\#\mathbb{Y} > \#\mathbb{X}$ (lê-se "A cardinalidade de $\mathbb{Y}$ é maior que a cardinalidade de $\mathbb{X}$"). Note que isso é o mesmo que dizer que não existe função injetiva de $\mathbb{Y}$ em $\mathbb{X}$. Quando tal função existir, ou seja, se existe $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ injetora, então escrevemos: $\#\mathbb{Y} \leqslant \#\mathbb{X}$. Se considerarmos o caso do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, temos que:

$$\#\mathbb{N} \leqslant \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \tag{4.26}$$

Se definirmos como sendo $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por $n \mapsto \{n\}$, então:

$$\#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \tag{4.27}$$

Podemos continuar essa relação e afirmar as desigualdades:

$$\#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) < \#\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < ... \tag{4.28}$$

Ou seja, o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito[2] menor que o conjunto de suas partes, que também é menor que as partes das partes de $\mathbb{N}$.

Fim da Aula 4

[2] O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é considerado o menor conjunto infinito, tal que $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ ($\aleph_0$ lê-se " aleph zero ").

5 | Aula 5 - 11/09/2020

5.1 Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis

Dada a definição na seção (4.3), temos que podemos aplicar a definição de enumerabilidade de diferentes formas, como nos exemplos a seguir.

Exemplo 5.1. Qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ é enumerável. Em particular, $\mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração. Dado um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$, basta definir um função $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ por $x \mapsto f(x) = x$ que é uma função injetora, portanto $\mathcal{X}$ é enumerável. ■

Definição 5.1. Dizemos que $\mathbb{X}$ é finito quando $\mathbb{X}$ é vazio ou quando existe $k \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{X} \to [k]$ bijetora.[1]

Exemplo 5.2. Todo conjunto $\mathbb{X}$ finito é enumerável.

Demonstração. Se tivermos $\mathbb{X}$ um conjunto finito e $f : \mathbb{X} \to [k]$ bijetora, então podemos tomar $g : [k] \to \mathbb{N}$ dada por $i \mapsto g(i) = i$ injetora e também $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ dada por $x \mapsto \varphi(x) = (g \circ f)(x)$. A partir do exercício 5.(a) da lista 1, temos que $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ é injetora, pois é composta de funções injetoras, portanto, $\mathbb{X}$ é enumerável. ■

Lema 5.1. *Se $\mathbb{X}$ é um conjunto enumerável e existe $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ injetora, então $\mathbb{Y}$ é enumerável.*

Demonstração. Por definição temos que $\mathbb{X}$ é enumerável $\Leftrightarrow \exists\ g : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ injetora. Como $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é injetora, temos que se definirmos $\varphi : \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ dada por $y \mapsto \varphi(y) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$ teremos que φ é injetora, pois é composta por duas funções injetoras, portanto, $\mathbb{X}$ é enumerável. ■

Lema 5.2. *Se $\mathbb{X}$ é um conjunto não-enumerável e existe $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ injetora, então $\mathbb{Y}$ é não-enumerável.*

Demonstração. Sabemos inicialmente que $\mathbb{X}$ é não-enumerável e que $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é injetora. Queremos mostrar que $\mathbb{Y}$ é não-enumerável. Suponha $\mathbb{Y}$ como enumerável, portanto $\exists\ g : \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ injetora. Tome então $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ dada por $x \mapsto \varphi(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$, isto implica que φ é injetora, pois é composta por funções injetoras, portanto concluímos que $\mathbb{X}$ é enumerável, o que é uma contradição, portanto $\mathbb{Y}$ é não-enumerável. ■

Comentário 5.1. A partir dos lemas (5.1) e (5.2), concluímos que:
$*$ Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.
$*$ Se um conjunto $\mathbb{Y}$ possui um subconjunto não-enumerável, então $\mathbb{Y}$ é não-enumerável.

[1] $[k] = \{1, 2, 3, ..., k\}$

Exemplo 5.3. O conjunto dos número inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Demonstração. Definimos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $m \mapsto f(m)$ tal que:

$$f(m) = \begin{cases} -2m, \text{ se } m < 0 \\ 2m+1, \text{ se } m \geqslant 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

É necessário provar a bijetividade da f, portanto, temos que:
Se tomarmos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por:

$$g(m) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}m, \text{ se } m \text{ é par} \\ \dfrac{1}{2}m - \dfrac{1}{2}, \text{ se } m \text{ é ímpar} \end{cases} \tag{5.2}$$

Temos que f é bijetora a partir da g, pois se pegarmos cada um dos elementos de $\mathbb{N}$ e aplicarmos a g, obtemos de volta os valores positivos e negativos do conjunto $\mathbb{Z}$, tal que:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2m & 2m+1 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \dots & -m & m & \dots \end{array}$$

Logo $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável[a] pois é f e g são injetoras. Em particular f é bijetora. ∎

[a] $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0$.

5.2 Teorema Fundamental da Aritmética (TFA)

Teorema 5.1. Dado um número natural $n \geqslant 2$, existe uma única fatoração de n em fatores primos tal que a fatoração é única a menos da ordem do produto dos primos distintos. Ou seja, dado $n \in \mathbb{N}; n \geqslant 2$, então existem $p_1, p_2, \dots, p_k$ primos e $a_1, a_2, \dots, a_k$ naturais tal que:

$$\boxed{n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}} \tag{5.3}$$

Comentário 5.2. Como foi dito que a fatoração é única a menos da ordem dos fatores, suponha que:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k} = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot q_\ell^{b_\ell} \tag{5.4}$$

Tal que a sequência de p_k e a sequência de q_ℓ são compostas por primos distintos. O TFA nos garante que:
1 Os indicies k e ℓ são obrigatoriamente iguais.
2 Os conjuntos de primos distintos são iguais: $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = \{q_1, q_2, \dots, q_\ell\}$.
Temos então que $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, ... ,$p_k = q_\ell = q_k$ e que:

$$p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k} = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot q_\ell^{b_\ell} = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{b_\ell} \tag{5.5}$$

$$\Downarrow$$

$$(a_1 = b_1), \quad (a_2 = b_2), \ \dots \ , (a_k = b_\ell) \tag{5.6}$$

Exemplo 5.4. Seja $5^3 \cdot 7^4 = 5^a \cdot 7^b$. O TFA nos garante que:

$$\boxed{a = 3} \quad \boxed{b = 4}$$

Lema 5.3. *O conjunto* $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Demonstração. Tome $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $(n, m) \mapsto f(n, m) = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{B}^m \in \mathbb{N}$ onde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são constantes primas. A função f é injetora, pois suponha que (n, m) e (s, t) sejam elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $f(n, m) = f(s, t)$. Isto implica que:

$$\mathcal{A}^n \cdot \mathcal{B}^m = \mathcal{A}^s \cdot \mathcal{B}^t \tag{5.7}$$

Pelo TFA temos que $n = s$ e $m = t$. Pela proposição (2.1) temos então $(n, m) = (s, t)$, portanto:

$$f(n, m) = f(s, t) \Rightarrow (n, m) = (s, t) \tag{5.8}$$

Logo a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetora, portanto o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. ∎

Lema 5.4. *Se dois conjuntos* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *são enumeráveis, então o produto cartesiano* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *é enumerável.*

Demonstração. Suponha que existam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ injetoras. Tome então $\varphi : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (f(x), g(y))$. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) elementos de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ tal que, pela injetividade de φ:

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2) \Leftrightarrow (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2)) \tag{5.9}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{e} \quad g(y_1) = g(y_2) \tag{5.10}$$

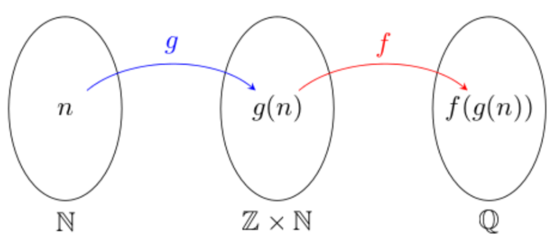
Pela injetividade da f, temos que $x_1 = x_2$ e pela injetividade da g, temos que $y_1 = y_2$, logo:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \tag{5.11}$$

Portanto $\varphi : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é injetora, logo, como o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, então $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ é enumerável. ∎

Lema 5.5. *O conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$ *é enumerável.*

Demonstração. Defina $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $(m, n) \mapsto f(m, n) = \dfrac{m}{n}$. Note que f é sobrejetora por conta da definição dos elementos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pois é um produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis. Portanto, existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ injetora. Tome então $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $n \mapsto \varphi(n) := (f \circ g)(n) = f(g(n))$, ou seja:



Pelo exercício 5.(d) da lista 1, temos que φ é sobrejetora, portanto o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável. ∎

Proposição 5.1. Se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são enumeráveis, então a união $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ é enumerável.

Demonstração. Sabemos que:

$$\mathbb{X} \text{ é enumerável} \Leftrightarrow \exists\ f : \mathbb{X} \to \mathbb{N} \text{ injetora} \tag{5.12}$$

$$\mathbb{Y} \text{ é enumerável} \Leftrightarrow \exists\ g : \mathbb{Y} \to \mathbb{N} \text{ injetora} \tag{5.13}$$

Dados dois conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ enumeráveis. Dessa forma temos que $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \varnothing$ ou $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \neq \varnothing$. Portanto temos que provar dois casos:

($\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \varnothing$): Como $\mathbb{X}$ é enumerável, então $\exists f_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ injetora e como existe uma função $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\mathrm{p}$, onde $\mathbb{N}_\mathrm{p}$ são os números naturais pares, tal que $g_1(n) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, então g_1 é bijetora, pois para todo elemento $2n$, existe um único elemento n tal que $g_1(n) = 2n$ e também que só temos $g_1(n) \neq g_1(m) \Leftrightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$. Logo existe uma função $h_1 = g_1 \circ f_1$ em que h_1 é injetora.
Como o conjunto $\mathbb{Y}$ é enumerável, então $\exists f_2 : \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ injetora e como existe uma função $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\mathrm{i}$, onde $\mathbb{N}_\mathrm{i}$ são os números naturais ímpares, tal que $g_2(n) = 2n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, então g_2 é bijetora, pois para todo elemento $2n + 1$, existe um único elemento n tal que $g_2(n) = 2n + 1$ e $g_2(n) \neq g_2(m) \Leftrightarrow 2n + 1 = 2m + 1 \Rightarrow n = m$. Logo existe uma função $h_2 = g_2 \circ f_2$ em que h_2 é injetora.
Então seja $\varphi : (\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) \to (N_\mathrm{p} \cup \mathbb{N}_\mathrm{i})$ tal que:

$$\varphi(x) = \begin{cases} h_1, & \text{se } x \in \mathbb{X} \\ h_2, & \text{se } x \in \mathbb{Y} \end{cases} \tag{5.14}$$

A função φ está bem definida, pois $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \varnothing$ e sendo assim, $\mathbb{N}_\mathrm{p} \cup \mathbb{N}_\mathrm{i} = \mathbb{N}$ é enumerável, então $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ também é enumerável pela definição (4.2).

($\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \neq \varnothing$): Seja $\mathbb{I} = \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$, um conjunto tal que $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Y}$ e temos $\mathbb{I}$ e $\mathbb{Y}$ conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem elementos em comum, por construção, então a partir do primeiro caso, $\mathbb{I} \cup \mathbb{Y}$ é enumerável, então, pela igualdade, $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ também o é. ■

Proposição 5.2. (*União enumerável*) Seja $(\mathbb{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos indexadas por $\mathbb{N}$ onde cada cada um dos $\mathbb{A}_n$ são enumeráveis, então:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_n \tag{5.15}$$

é um conjunto enumerável.

Comentário 5.3. Na próxima seção iremos mostrar que $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ou seja, existe uma bijeção entre o conjuntos dos números reais e as partes de $\mathbb{N}$. Esse fato implica que $\mathbb{R}$ é um conjunto não-enumerável, tal que se tomarmos cada conjunto unitário $\{x\}$ com $x \in \mathbb{R}$, em que este é enumerável, se tomarmos:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \tag{5.16}$$

Temos que $\{x\}$ é enumerável e $x \in \mathbb{R}$ é não enumerável, o que implica que $\mathbb{R}$ é não-enumerável, ou seja, mesmo que estejamos unindo conjuntos enumeráveis, se indexarmos a união por um conjunto não enumerável, teremos um conjunto não enumeráveis, pois a união "colapsa".

Fim da Aula 5

6 | Aula 6 - 14/09/2020

6.1 União enumerável

Na seção anterior, vimos na proposição (5.2) que para uma coleção de conjuntos $(\mathbb{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enumeráveis, o conjunto $\mathbb{A}$ definido por:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_n \tag{6.1}$$

é enumerável, no entanto, a prova não foi feita e será mostrada agora nesta seção:

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\mathbb{A}_n$ é enumerável, então existe uma $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{A}_n$ sobrejetora. Conforme os lemas (5.1) e (5.3), precisamos mostrar que existe

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n \tag{6.2}$$

Sobrejetora, assim teremos provada a proposição.

Defino então $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n$ dada por $(m, n) \mapsto f_n(m)$

Suponha então que f é sobrejetora. Então Dado $a \in \mathbb{A}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \in \mathbb{A}_{n_0}$, mas por hipótese, sabemos que existe $f_{n_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{A}_{n_0}$ sobrejetora. Isto implica que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(m_0) = a$. Logo, dado $a \in \mathbb{A}$, mostramos que existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que:

$$f(n_0, m_0) = f_{n_0}(m_0) = a \tag{6.3}$$

Portanto, se a função f é sobrejetora, o conjunto $\mathbb{A}$ da união da coleção de conjuntos enumeráveis é enumerável. ■

6.2 Conjuntos não-enumeráveis

Como mostrar que um conjunto é não-enumerável?

6.2.1 "Subconjuntos"não-enumeráveis

Mostrar que o conjunto "possui um subconjunto"não-enumerável. Ou seja, vale o lema (5.2) que mostra que se um dado conjunto $\mathbb{Y}$ é não-enumerável e existe uma $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, então o conjunto $\mathbb{X}$ é não-enumerável. Em particular, se existe uma $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ bijetora, temos que:

$$\mathbb{Y} \text{ é não-enumerável} \Leftrightarrow \mathbb{X} \text{ é não-enumerável} \tag{6.4}$$

Exemplo 6.1. Conforme enunciado no Teorema (4.2), sabemos que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é não-enumerável, e como foi visto que as partes das partes de $\mathbb{N}$ possui cardinalidade maior do que as partes de $\mathbb{N}$, podemos dizer que:

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \tag{6.5}$$

Ou seja, podemos dizer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não-enumerável, então podemos afirmar que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ também é não-enumerável. ■

6.2.2 Não enumerabilidade de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Demonstração a partir da afirmação de que a sequência de zeros e uns $2^{\mathbb{N}} := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não-enumerável.

Lema 6.1. $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#2^{\mathbb{N}}$, tal que:

$$2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n = 0 \vee x_n = 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\} \tag{6.6}$$

Ou seja, existe uma bijeção entre partes de $\mathbb{N}$ e $2^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Dado $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$, a função característica de $\mathbb{A}$ dada por $\mathcal{X}_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que:

$$x \mapsto \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{A} \\ 0, \text{ se } x \notin \mathbb{A} \end{cases} \tag{6.7}$$

Defino então $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por:

$$\mathbb{A} \mapsto f(\mathbb{A}) = (\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(1), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(2), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(3), \dots) = (\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(n))_{n\in\mathbb{N}} \tag{6.8}$$

Suponha inicialmente que f é sobrejetora, então defino uma sequência $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Seja então $\mathbb{A}_{\mathcal{X}} := \{n \in \mathbb{N}; x_n = 1\}$ se n é par. Portanto:

$$\mathcal{X} = (0,1,0,1,0,1,0,1,\dots) \tag{6.9}$$

Note que $f(\mathbb{A}_n) = (\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(1), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(2), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(3), \dots) = \mathcal{X}$, ou seja, dado $\mathcal{X} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, existe $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f(\mathbb{A}_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$, portanto f é sobrejetora.

Suponha agora que f seja injetora, portanto precisamos mostrar que dados $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{N}$ tais que $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$, devemos obter que $f(\mathbb{A}) \neq f(\mathbb{B})$. Sabemos que:

$$\mathbb{A} \neq \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A} \text{ e } \mathbb{B} \text{ não possuem os mesmos elementos} \tag{6.10}$$

Temos então que:

$$\exists\ n \in \mathbb{A};\ n \notin \mathbb{B} \tag{6.11}$$

ou

$$\exists\ m \in \mathbb{B};\ m \notin \mathbb{A} \tag{6.12}$$

Estudando a equação (6.11), temos que:

$$f(\mathbb{A}) = (\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(1), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(2), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(3), \dots, \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(n), \dots) \tag{6.13}$$

Como $n \in \mathbb{A}$, pela equação (6.7), $\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(n) = 1$. Temos também que:

$$f(\mathbb{B}) = (\mathcal{X}_{\mathbb{B}}(1), \mathcal{X}_{\mathbb{B}}(2), \mathcal{X}_{\mathbb{B}}(3), \dots, \mathcal{X}_{\mathbb{B}}(n), \dots) \tag{6.14}$$

Como $n \notin \mathbb{B}$, pela equação (6.7), $\mathcal{X}_{\mathbb{B}}(n) = 0$, mostrando que para esse caso $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$. Para a equação (6.12), o processo é o mesmo, as únicas mudanças necessárias para fazer a demonstração seria substituir na equação (6.13) o conjunto $\mathbb{A}$ pelo conjunto $\mathbb{B}$, e na equação (6.14) o conjunto $\mathbb{B}$ pelo $\mathbb{A}$, obtendo da mesma forma que $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$, portanto $f(\mathbb{A}) \neq f(\mathbb{B})$, logo f é injetora.

Provamos então que a f é uma função bijetora. ■

Corolário 6.1. A partir do Teorema de Cantor (4.2), sabemos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não-enumerável e como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ estão em bijeção (em particular em injeção), pelo lema (5.2), concluímos que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não-enumerável.

Para ilustrar melhor como funcionam as **funções características** abordadas acima, seguem os seguintes exemplos:

Exemplo 6.2. Seja $\mathbb{A} = \varnothing$, temos que, pela equação (6.7) e sabendo que não existem elementos pertencentes ao conjunto $\mathbb{A}$:

$$f(\mathbb{A}) = f(\varnothing) = (\mathcal{X}_{\varnothing}(1), \mathcal{X}_{\varnothing}(2), \mathcal{X}_{\varnothing}(3), \ldots) = (0,0,0,\ldots) \tag{6.15}$$

■

Exemplo 6.3. Seja $\mathbb{A} = \mathbb{N}$, temos então que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(n) = 1$, portanto:

$$f(\mathbb{A}) = f(\mathbb{N}) = (\mathcal{X}_{\mathbb{N}}(1), \mathcal{X}_{\mathbb{N}}(2), \mathcal{X}_{\mathbb{N}}(3), \ldots) = (1,1,1,\ldots) \tag{6.16}$$

■

Exemplo 6.4. Seja $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, temos então que:

$$f(\mathbb{A}) = f(\{1,2,3\}) = (\mathcal{X}_{\mathbb{A}}(1), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(2), \mathcal{X}_{\mathbb{A}}(3), \ldots) = (1,1,1,0,0,\ldots,\overline{0}) \tag{6.17}$$

■

6.2.3 Diagonal de Cantor

A prova pelo argumento da diagonal de Cantor consiste em mostrar a não enumerabilidade do conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Suponhamos que exista uma função $g : \mathbb{A} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sobrejetora, isto implica que o conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é enumerável. Seja g dada por:

$$n \mapsto g(n) = (g_{n1}, g_{n2}, g_{n3}, g_{n4}, \ldots) \tag{6.18}$$

Podemos então construir a seguinte composição:

$$g(1) = (g_{11},\ g_{12},\ g_{13},\ g_{14},\ g_{15}, \ldots) \tag{6.19}$$
$$g(2) = (g_{21},\ g_{22},\ g_{23},\ g_{24},\ g_{25}, \ldots) \tag{6.20}$$
$$g(3) = (g_{31},\ g_{32},\ g_{33},\ g_{34},\ g_{35}, \ldots) \tag{6.21}$$
$$g(4) = (g_{41},\ g_{42},\ g_{43},\ g_{44},\ g_{45}, \ldots) \tag{6.22}$$
$$g(5) = (g_{51},\ g_{52},\ g_{53},\ g_{54},\ g_{55}, \ldots) \tag{6.23}$$

Como g é sobrejetora, temos que $\{g(n),\ n \in \mathbb{N}\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Vamos construir um elemento $x \in \{0,1\}^{\mathbb{B}}$ que não pertence à imagem da g, ou seja, uma contradição à nossa hipótese de que a g é sobrejetora. Defino então:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \tag{6.24}$$

Tal que:

$$x_n = \begin{cases} 1, \text{ se } g_{nn} = 0 \\ 0, \text{ se } g_{nn} = 1 \end{cases} \tag{6.25}$$

Note que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $x \notin g(n),\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, logo g não é sobrejetora, portanto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não-enumerável. ■

6.3 Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder

Definição 6.1. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ conjuntos. Suponha que existam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ injetora e $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ injetora, então:

$$\boxed{\#\mathbb{X} = \#\mathbb{Y}} \tag{6.26}$$

Ou seja, existe $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ bijetora.

Abstração da demonstração. A prova tem como base transformar o problema em um problema de ponto fixo. Ou seja, o teorema segue se:

$$\exists\ \mathbb{X}_\circ \subset \mathbb{X};\ g(f(\mathbb{X}_\circ)^c) = \mathbb{X}_\circ^c \tag{6.27}$$

Lema 6.2. Se existe $\mathbb{X}_\circ \subset \mathbb{X};\ g(f(\mathbb{X}_\circ)^c) = \mathbb{X}_\circ^c$, então a função $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ dada por:

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in \mathbb{X}_\circ \\ g^{-1}(x), \text{ se } x \in \mathbb{X}_\circ^c \end{cases} \tag{6.28}$$

é uma bijeção.

Demonstração. FAZER ■

Demonstração. Transformando então a questão da existência de $\mathbb{X}_\circ$ em um problema de ponto fixo, queremos encontrar $\mathbb{X}_\circ \subset \mathbb{X}$ tal que:

$$g(f(\mathbb{X}_\circ)^c) = \mathbb{X}_\circ^c \overset{*}{\Leftrightarrow} g(f(\mathbb{X}_\circ)^c)^c = (\mathbb{X}_\circ^c)^c = \mathbb{X}_\circ \tag{6.29}$$

A dupla implicação $(*)$ significa que estamos tomando o complementar. Defino então $F : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \mathcal{P}(\mathbb{X})$ tal que:

$$\mathcal{A} \mapsto F(\mathcal{A}) = g(f(\mathcal{A})^c)^c = \mathcal{A} \tag{6.30}$$

Em que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Como queremos encontrar que $\mathbb{X}_\circ \subset \mathbb{X}$ tal que $F(\mathbb{X}_\circ) = \mathbb{X}_\circ$, ou seja $g(f(\mathbb{X}_\circ)^c)^c = \mathbb{X}_\circ$. Seja então $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X},\ x \in \mathbb{X}$. Tome:

$$\mathbb{X}_\circ = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(\mathbb{X}) = \mathbb{X} \cap F(\mathbb{X}) \cap F^2(\mathbb{X}) \cap F^3(\mathbb{X}) \cap \ldots \tag{6.31}$$

Temos que:

$$F(\mathbb{X}) = g\left(f(\mathbb{X})^c\right)^c \subseteq \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X} \cap F(\mathbb{X}) = F(\mathbb{X}) \tag{6.32}$$

Logo:

$$\mathbb{X}_\circ = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(\mathbb{X}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^i(\mathbb{X}) \tag{6.33}$$

Como supomos que a f é injetora, temos que, a partir do exercício 12 da lista 1:

$$f(\mathbb{X}_\circ) = f\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(\mathbb{X})\right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} f(F^i(\mathbb{X})) = \bigcap_{i=0}^{\infty} g\left(f\left(F^i(\mathbb{X})\right)^c\right)^c \tag{6.34}$$

Como queremos provar que $F(\mathbb{X}_\circ) = \mathbb{X}_\circ$, temos que:

$$F(\mathbb{X}_\circ) = g\left(f(\mathbb{X}_\circ)^c\right)^c \tag{6.35}$$

$$= g\left(f\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(\mathbb{X})\right)^c\right)^c \tag{6.36}$$

$$= g\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} f\left(F^i(\mathbb{X})\right)^c\right)^c \tag{6.37}$$

$$= \bigcap_{i=0}^{\infty} g\left(f(F^i(\mathbb{X}))^c\right)^c \tag{6.38}$$

$$= \bigcap_{i=0}^{\infty} F(F^i(\mathbb{X})) = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^{i+1}(\mathbb{X}) \tag{6.39}$$

Logo, temos que:

$$F(\mathbb{X}_\circ) = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^{i+1}(\mathbb{X}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^i(\mathbb{X}) \tag{6.40}$$

Portanto:

$$\boxed{F(\mathbb{X}_\circ) = \mathbb{X}_\circ} \tag{6.41}$$

Isto demonstra que sendo f e g funções injetoras, as cardinalidades do domínio e do contradomínio de ambas as funções são iguais, portanto existe um $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ sobrejetora e injetora, ou seja, bijetora. ■

Fim da Aula 6

7 | Aula 7 - 16/09/2020

7.1 Axiomas de Peano

Existe um conjunto que chamaremos de naturais, denotado por $\mathbb{N}$ e uma **função sucessora** $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo:

(1) A função sucessora é injetora;

(2) $\mathbb{N} \backslash s(\mathbb{N}) := \mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ não é sucessor de nenhum outro natural}\}$ é unitário (possui um único elemento que chamaremos de 1);

(3) Princípio da indução (P.I.): Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$, o princípio da indução nos diz que:

$$\begin{cases} 1 \in \mathbb{X} \\ \forall\ n,\ \ (n \in \mathbb{X} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{X}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbb{X} = \mathbb{N}} \tag{7.1}$$

Comentário 7.1. Os axiomas de Peano nos dizem que o conjunto dos naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{1, \underbrace{s(1)}_{:=2}, \underbrace{s(s(1))}_{:=3}, \underbrace{s(s(s(1)))}_{:=4}, \ldots\} \tag{7.2}$$

7.2 Operações em $\mathbb{N}$

7.2.1 Adição em $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ levando $(m, n) \mapsto m + n$, Definimos indutivamente:

$$\begin{cases} m + 1 := s(m) \\ m + s(n) := s(m + n) \end{cases} \tag{7.3}$$

$$\Downarrow$$

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \tag{7.4}$$

Este resultado será abordado mais a frente.

Lema 7.1. *A adição está bem definida para quaisquer dois naturais m e n.*

Demonstração. (Por indução) Fixemos $m \in \mathbb{N}$ (arbitrário). Queremos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos necessariamente quem é o elemento $(m + n)$ (está bem definido).

Seja $\mathbb{X} = \{n \in \mathbb{N};\ m + n \text{ está bem definido}\}$. Vamos provar que $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

1 Base da indução (mostrar que $1 \in \mathbb{X}$):
$m+1$ está bem definido, pois na definição de adição $m+1 := s(m)$

$$\boxed{\therefore\ 1 \in \mathbb{X}} \tag{7.5}$$

2 Passe indutivo (mostrar que se $n \in \mathbb{N}$, então $s(n) \in \mathbb{X}$):
Assumimos que $n \in \mathbb{X}$. Ou seja, $m+n$ está bem definido (pois fixamos m). Portanto temos que mostrar que $m+s(n) = m+(n+1)$ está bem definido. Mas por definição:

$$m + s(n) = s(m+n) = m + (n+1) \tag{7.6}$$

Como $s(m+n)$ está bem definido por hipótese, então $m+(n+1)$ também está, logo, pelo princípio da indução

$$\boxed{\mathbb{X} = \mathbb{N}} \tag{7.7}$$

Ou seja, como $m \in \mathbb{N}$ está fixado, $m+n$ está bem definido para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Propriedades da adição em $\mathbb{N}$

(1) Associatividade

$$\forall\ m, \forall\ n,\ \forall\ p \text{ vale que } (m+n)+p = m+(n+p) \tag{7.8}$$

(2) Comutatividade

$$\forall\ m,\ \forall\ n \text{ vale que } m+n = n+m \tag{7.9}$$

Lema 7.2. (*Prova de* (1)) A adição é associativa em $\mathbb{N}$.

Demonstração. Considere dois naturais arbitrários m e n. Queremos mostrar que $(m+n)+p = m+(n+p)$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Usamos então indução em p.
Definimos $\mathbb{X} = \{p \in \mathbb{N};\ (m+n)+p = m+(n+p)\}$, temos então:

1 Base da indução (mostrar que vale para $p = 1$):
Note que:

$$(m+n)+1 \overset{(7.3)}{=} s(m+n) \overset{(7.3)}{=} m + s(n) = m + (n+1) \tag{7.10}$$

Logo, para $p = 1$ vale a associatividade.

2 Passe indutivo (Assumimos que $p \in \mathbb{X}$, temos que mostrar que $(p+1) \in \mathbb{X}$):
Temos como hipótese que vale:

$$(m+n)+p = m+(n+p) \tag{7.11}$$

Temos então:

$$(m+n)+(p+1) = (m+n)+s(p) \tag{7.12}$$
$$= s((m+n)+p) \tag{7.13}$$
$$\overset{7.11}{=} s(m+(n+p)) \tag{7.14}$$
$$= m + s(n+p) \tag{7.15}$$
$$= m + (n + s(p)) \tag{7.16}$$
$$= m + (n+(p+1)) \tag{7.17}$$

Pelo princípio da indução, $\mathbb{X} = \mathbb{N}$, portanto, para todo $p \in \mathbb{N}$, vale a associatividade. Como m e n são arbitrários, então vale para qualquer $x \in \mathbb{N}$. ■

Lema 7.3. (*Prova de* (2)) A adição é comutativa em $\mathbb{N}$.

Demonstração. (Por indução) ∎

Comentário 7.2. Podemos incluir, quando necessário, o zero[1] nos axiomas de Peano e na adição definiríamos:

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + s(n) = s(m+n) \end{cases} \tag{7.18}$$

7.2.2 Multiplicação em $\mathbb{N}$

Definimos para multiplicação no conjunto dos naturais:

$$\begin{cases} m \cdot 1 = m \\ m \cdot s(n) := m \cdot n + m \end{cases} \tag{7.19}$$

Lema 7.4. *A multiplicação está bem definida para quaisquer dois naturais m e n.*

Demonstração. (Por indução) ∎

Propriedades da multiplicação em $\mathbb{N}$

(1) Associatividade:

$$\forall\ m,\ \forall\ n,\ \forall\ p \text{ vale que } (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p) \tag{7.20}$$

(2) Comutatividade:

$$\forall\ m,\ \forall\ n \text{ vale que } m \cdot n = n \cdot m \tag{7.21}$$

(3) Distributividade:

$$\forall\ m,\ \forall\ n,\ \forall\ p \text{ vale que } m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p \tag{7.22}$$

7.2.3 Potenciação em $\mathbb{N}$

Definimos para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} m^1 := m \\ m^{p+1} = m^p \cdot m \end{cases} \tag{7.23}$$

Lema 7.5. *A potenciação m^k está bem definida para todo $k \in \mathbb{N}$*

Demonstração. (Por indução) ∎

Propriedades da potenciação em $\mathbb{N}$

(1)

$$n^{p+q} = n^p + n^q \tag{7.24}$$

(2)

$$(n^p)^q = n^{p \cdot q} \tag{7.25}$$

[1] 0 nesse caso seria o elemento que não é sucessor de nenhum outro natural.

7.3 Importância da indução

Um bom exemplo que ilustra muito bem a necessidade do princípio da indução são os números de Fermat. Fermat definiu que a expressão

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \tag{7.26}$$

fornecia valores de números primos, o que seria fascinante, pois mostraria de maneira simples muitos números primos. No entanto, utilizando essa expressão, obtemos:

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 \tag{7.27}$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17 \tag{7.28}$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257 \tag{7.29}$$
$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537 \tag{7.30}$$
$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 \tag{7.31}$$

Quando chegamos em F_5 já conseguimos descobrir que a expressão não é mais válida, visto que o resultado é divisível por 641. Portanto, aparece a importância do princípio da indução, pois caso a fórmula fosse válida para $n + 1$, ela poderia ser provada, mas como isso não foi feito, não obtemos o resultado esperado que seriam apenas números primos.

Fim da Aula 7

8 | Aula 8 - 18/09/2020

8.1 Equivalências

Teorema 8.1. São equivalentes os seguintes enunciados:

(1) Princípio da indução. Se $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ satisfaz:

  (i) $1 \in \mathbb{X}$

  (ii) $\forall,\ (x \in \mathbb{X} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{X})$

  Então $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

(2) Princípio da boa ordenação. Todo subconjunto $\mathbb{X}$ de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, ou seja, se $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in \mathbb{X}$ tal que $n_0 \leqslant a,\ \forall\ a \in \mathbb{X}$, portanto todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui mínimo.

(3) Princípio da indução (indução completa). Se $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ satisfaz:

  (i) $1 \in \mathbb{X}$

  (ii) Se todo $m \leqslant n$ está em $\mathbb{X}$, então $n + 1$ também está.

  Então $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

Comentário 8.1. O item (2) nos permite fazer o passe indutivo da seguinte forma:

$$\mathbb{X} = \{n :\ \mathcal{P}(n) \text{ é verdadeira}\} \tag{8.1}$$

Base da indução: Verificar que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro.

Passe indutivo: Se vale $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(n)$ verdadeiras, então temos que mostrar que $\mathcal{P}(n + 1)$ é verdadeiro.

8.2 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Definição 8.1. Dados m e n naturais, dizemos que m é maior do que n quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Denotamos esta relação por $m > n$.[1]

Lema 8.1. *A relação "maior que"é transitiva, ou seja, se $m > n$ e $n > p$, então $m > p$. Em outras palavras:*

$$(m > n) \wedge (n > p) \Rightarrow (m > p) \tag{8.2}$$

[1] Dizer que "m é maior do que n"é a mesma coisa que dizer que "n é menor do que m", tal que este é denotado por $n < m$.

Demonstração.

$$m > n \Leftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{N};\ m = n + r \tag{8.3}$$

$$n > p \Leftrightarrow \exists\, s \in \mathbb{N};\ n = p + s \tag{8.4}$$

Substituindo (8.4) em (8.3) obtemos:

$$m = n + r \Rightarrow m = (p + s) + r \Rightarrow m = p + (s + r) \tag{8.5}$$

Como assumimos s e r naturais e m é a soma de p com esses termos, então:

$$\boxed{m > p} \tag{8.6}$$

■

Comentário 8.2. Usaremos também a noção de "maior ou igual"denotada por $\geqslant$. Se assumirmos que $m \geqslant n$, então vale que $m > n$ ou $m = n$, portanto $m \geqslant n$ é verdadeiro quando pelo menos uma das alternativas é verdadeira.

Lema 8.2. *São válidas as seguintes relações para "maior ou igual":*

(1) $(m \geqslant n \wedge n \geqslant p) \Rightarrow m \geqslant p$

Demonstração. FAZER ■

(2) $(m \geqslant n \wedge n > p) \Rightarrow m > p$

Demonstração. FAZER ■

8.3 Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{N}$

Na aula (??), vimos algumas das propriedades, enunciaremos então as outras propriedades destas operações no conjunto $\mathbb{N}$.

8.3.1 Adição

(i) Associatividade: $(m + n) + p = m + (n + p)$

Demonstração. Em (1) ■

(ii) Comutatividade: $m + n = n + m$

Demonstração. Em (2) ■

(iii) Lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$

Demonstração. Provaremos apenas a equivalência entre $a = bea + c = b + c$. Seja

$$\mathbb{H} = \{c \in \mathbb{N} : \forall\, a, b \in \mathbb{N},\ a + c = b + c \Rightarrow a = b\} \tag{8.7}$$

Provaremos que $\mathbb{H} = \mathbb{N}$ pelo princípio da indução. $1 \in \mathbb{H}$, porque para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ $a+1 = b+1$ equivale a $s(a) = s(b)$; e como pelos axiomas de Peano, naturais distintos têm sucessores distintos, vê-se que $s(a) = s(b)$ é equivalente a $a = b$. Donde concluímos que $a = b$ equivale a $a+1 = b+1$, isto é, $1 \in \mathbb{H}$. Agora veja que se $c \in \mathbb{H}$, para todos $a, b \in \mathbb{N}$:

$$a + c = b + c \Leftrightarrow s(a+c) = s(b+c) \text{ (}s\text{ é injetiva)} \Leftrightarrow a + s(c) = b + s(c) \tag{8.8}$$

Em particular, $a + s(c) = b + s(c) \Rightarrow a + c = b + c \Rightarrow a = b$, onde a segunda equivalência corresponde ao fato que $c \in \mathbb{H}$. Deduzimos que $c \in \mathbb{H} \Rightarrow s(c) \in \mathbb{H}$, o que, junto com o resultado anterior, implica que $\mathbb{H} = \mathbb{N}$ ■

(iv) Monotonicidade: $(m > n) \Rightarrow m + p > n + p,\ \forall\ p \in \mathbb{N}$

Demonstração. FAZER (a partir da lei do corte isso sai) ■

8.3.2 Multiplicação

(i) Associatividade: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

Demonstração. Em (1) ■

(ii) Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$

Demonstração. Em (2) ■

(iii) Lei do Corte: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n,\ \forall\ p \in \mathbb{N}$

Demonstração. FAZER (mesma coisa que da adição) ■

(iv) Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

Demonstração. FAZER ■

(v) Monotonicidade: $m > n \Rightarrow m \cdot p > n \cdot p$

Demonstração. FAZER ■

8.4 Tricotomia em $\mathbb{N}$

Proposição 8.1. Dados m e n naturais. Vale uma, e somente uma, das afirmações:

(i) $m > n$

(ii) $m = n$

(iii) $m < n$

Demonstração. Chame m de tricotômico se para todo $n \in \mathbb{N}$ a tricotomia. Provaremos que $\mathbb{T} = \mathbb{N}$.
Base da indução: Prova de que $1 \in \mathbb{T}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a dicotomia fundamental:

$$n = 1 \quad \vee \quad n \neq 1 \tag{8.9}$$

O segundo caso implica que $n > 1$, pois estamos nos naturais. Logo a tricotomia não vale se, e somente se $n > 1 \Rightarrow n \neq 1$, pois neste caso $n = 1$ ou $n > 1$ é uma dicotomia equivalente à anterior. Mas veja que $n > 1$ implica que $1 + p = n$, pra algum $p \in \mathbb{N}$, logo $n = p+1 = s(p)$ para o mesmo p. Portanto, n é sucessor de p, o que implica, pelos axiomas de Peano, que $n \neq 1$.

Passo indutivo: Seja $n \in \mathbb{T}$. Tome $m \in \mathbb{N}$. Se $m = 1$, sabemos que $s(n) \neq 1$, logo $s(n) > m$ sempre, e esta é a única possibilidade. Se $m \neq 1$, então $m = s(c) = c + 1$ para algum $c \in \mathbb{N}$. Pelas propriedades da lei do corte, vemos que $m < n + 1$, $m = n + 1$ e $m > n+1$ são respectivamente equivalentes a $c < n$, $c = n$ e $c > n$. Como $n \in \mathbb{T}$, estas três ultimas possibilidades são tricotômicas, de modo que $m < n + 1$, $m = n + 1$ e $m > n + 1$ também o são. Donde deduzimos que $s(n) = n + 1 \in \mathbb{T}$, portanto $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. ∎

8.5 Princípio da boa ordem em $\mathbb{Z}$

Antes de provar como se dá o princípio da boa ordem em $\mathbb{Z}$, temos que definir o seguinte conceito:

Definição 8.2. Dizemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente quando existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leqslant a, \ \forall \, a \in \mathcal{A} \tag{8.10}$$

Exemplo 8.1. $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ é limitado inferiormente, pois $0 \leqslant n, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$

Comentário 8.3. Todo subconjunto $\mathcal{A}$ limitado inferiormente de $\mathbb{Z}$ possui mínimo, ou seja, existe o menor elemento de $\mathcal{A}$.

Definição 8.3. Quando $m \leqslant a, \ \forall \, a \in \mathcal{A}$, dizemos que m[2] é uma **cota inferior** de $\mathcal{A}$.

Lema 8.3. *O princípio da boa ordem em $\mathbb{N}$ implica o princípio da boa ordem em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Usaremos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e que a ordem de $\mathbb{Z}$ coincide com a ordem original de $\mathbb{N}$. Seja então $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ um subconjunto limitado inferiormente dos inteiros. Temos que mostrar que $\mathcal{A}$ possui mínimo.
1 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$. Nesse caso $\mathcal{A}$ possui mínimo pelo Princípio da boa ordem em $\mathbb{N}$.

2 $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{A}$ é limitado inferiormente, existe $m \in \mathbb{Z}$ (posso assumir $m < 0$) tal que $m \leqslant a, \ \forall \, a \in \mathcal{A}$.
Defino então o conjunto $\mathcal{A}' = \{a - m; \ a \in \mathcal{A}\}$. Temos que $m \leqslant a, \ \forall \, a \in \mathcal{A}$, então, como vale a monotonicidade em $\mathbb{Z}$:

$$m \leqslant a \Rightarrow m - m \leqslant a - m \Rightarrow 0 \leqslant a - m, \ \forall \, a \in \mathcal{A} \tag{8.11}$$

$$\therefore \ \mathcal{A}' \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \ \mathcal{A}' \text{ possui mínimo} \tag{8.12}$$

[2] m não precisa necessariamente estar no conjunto $\mathcal{A}$.

Então existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a_0 - m \leqslant a - m, \ \forall \, a \in \mathcal{A} \tag{8.13}$$

$$a_0 - m + m \leqslant a - m + m \Rightarrow a_0 \leqslant a \tag{8.14}$$

$$\boxed{\therefore \ \exists \ a_0 \leqslant a, \ \forall \, a \in \mathcal{A}} \tag{8.15}$$

Logo, todo subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ possui menor elemento. ■

Teorema 8.2. Todo conjunto infinito $\mathbb{X}$ contém um subconjunto infinito e enumerável. Ou seja, se $\mathbb{X}$ é infinito, então existe $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ bijetora.

Demonstração. Para cada $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}$, $\mathcal{A} \neq \varnothing$, escolho um elemento que denotaremos por $x_{\mathcal{A}}$. Defino $f(1) = x_{\mathbb{X}}$ e

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{X} - \{f(1)\} \tag{8.16}$$

Defino então $f(2) = x_{\mathcal{A}_1}$. Note que $f(2) \in \mathbb{X} - \{f(1)\} \Rightarrow f(1) \neq f(2)$, tenho então:

$$\mathcal{A}_2 = \mathbb{X} - \{f(1), f(2)\} \tag{8.17}$$

Defino então $f(3) = x_{\mathcal{A}_2}$ e $\mathcal{A}_2 = \mathbb{X} - \{f(1), f(2)\}$. Note que por construção $f(3) \notin \{f(1), f(2)\}$ portanto:

$$\begin{cases} f(1) \neq f(2) \\ f(1) \neq f(3) \\ f(2) \neq f(3) \end{cases} \tag{8.18}$$

Como para $f(1)$ a função está bem definida, temos que provar que para $n+1$ ela também está, tal que $n \in \mathbb{N}$. definindo $f(n+1) = x_{\mathcal{A}_n}$, temos que:

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{X} - \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\} \tag{8.19}$$

Por construção $f(n+1) \notin \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$, portanto $f(n+1)$ está bem definida. Por conta disso, temos:

$$\begin{cases} f(1) \neq f(2) \\ f(1) \neq f(3) \\ \qquad \vdots \\ f(n+1) \neq f(n) \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{8.20}$$

Portanto para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, existe um único valor de $f(n)$, portanto f é injetora, portanto $\mathcal{A}$ é um subconjunto infinito enumerável de $\mathbb{X}$. ■

Fim da Aula 8

9 | Aula 9 - 21/09/2020

9.1 Teorema dos intervalos encaixantes

Teorema 9.1. Seja $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma coleção de intervalos fechados, não vazios e limitados encaixados, ou seja:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_j \supseteq I_{j+1} \supseteq \ldots \tag{9.1}$$

Temos então que:

$$\forall\ j \in \mathbb{N},\ I_j \supseteq I_{j+1} \tag{9.2}$$

Os intervalos I_j são definidos por:

$$I_j = [a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R};\ a_j \leqslant x \leqslant b_1\} \tag{9.3}$$

Portanto:

$$\boxed{\bigcap_{j=1}^{+\infty} I_j \neq \varnothing} \tag{9.4}$$

E ainda podemos afirmar que:
1 A interseção é um intervalo fechado, ou seja:

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} I_j = [a, b] \tag{9.5}$$

2 Se $\lim\limits_{j\to\infty} |I_j| = \lim\limits_{j\to\infty} (b_j - a_j) = 0$, então a interseção dos intervalos é um conjunto unitário, ou seja, um ponto. Em outras palavras:

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} I_j = \{p\} \tag{9.6}$$

Comentário 9.1.

(1) A hipótese dos intervalos serem fechados não pode ser removida, pois:

$$I_j = \left(0, \frac{1}{j}\right) \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{+\infty} I_j = \varnothing \tag{9.7}$$

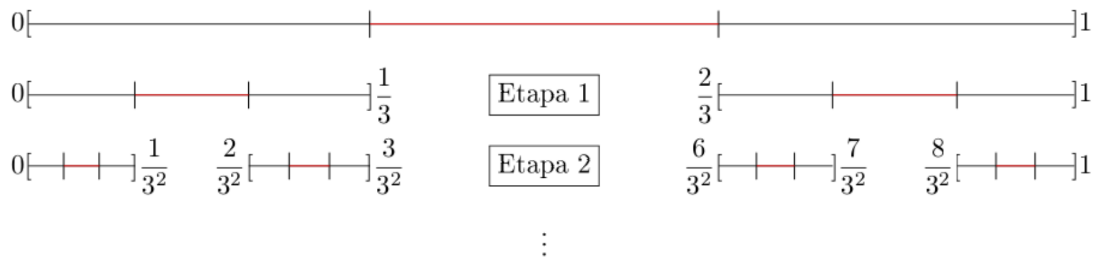
(2) A hipótese de ser limitado também não pode ser removida, pois:

$$I_j = [j, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant j\} \tag{9.8}$$

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} I_j = \varnothing \tag{9.9}$$

9.2 Conjunto de Cantor

O conjunto de cantor ocorre no intervalo $[0,1]$ tal que:



Definição 9.1. O conjunto de Cantor é definido como sendo a interseção:

$$\mathcal{K} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcup_{(j_1,\ldots,j_n)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} I_{j_1,\ldots,j_n} \right] \tag{9.10}$$

Defino os intervalos fechados que compõe o intervalo $[0,1]$ como:

$$I_0 = \left\{0, \frac{1}{3}\right\} \qquad\qquad I_1 = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\} \tag{9.11}$$

$$I_{00} = \left\{0, \frac{1}{3^2}\right\} \qquad I_{01} = \left\{\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right\} \qquad I_{10} = \left\{\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right\} \qquad I_{11} = \left\{\frac{8}{3^2}, 1\right\} \tag{9.12}$$

Comentário 9.2. Sobre a construção do conjunto temos que:

(1) Em cada etapa n, temos 2^n intervalos fechados, cada um deles com comprimento[1]:

$$m(I_n) = \frac{1}{3^n} \tag{9.13}$$

(2) $\mathcal{K}$ por construção é infinito, pois uma vez que o extremo de um intervalo aparece, ele permanece em todas as próximas etapas, e em cada etapa temos 2^n intervalos e, portanto, $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ pontos distintos.

(3) Quanto retiramos em termo de comprimento do intervalo $\{0,1\}$ na construção? Foram apagadas as linhas em vermelho representadas no esquema acima, temos então que, juntando todas as linhas vermelhas e medindo seu comprimento, temos que:

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{et.1} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{3^2}}_{et.2} + \ldots \tag{9.14}$$

Temos então que o comprimento apagado é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 \tag{9.15}$$

"*I got to stay high all the time...*"

[1] Definimos a medida de um conjunto ou intervalos como sendo $m([a,b]) = m((a,b)) = b - a$

(4) A quantidade de pontos em $\mathcal{K}$, que são extremos de algum intervalo, são enumeráveis, pois é união enumerável de conjuntos finitos, ou seja:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{\text{pontos extremos da etapa } n\}}_{\#=2^{n+1}} \tag{9.16}$$

é enumerável.

(5) Pelo item (3) temos que a medida de um conjunto $\mathbb{Y} = [0,1] \setminus \mathcal{K}$, ou seja, o conjunto dos intervalos que retiramos de $[0,1]$, tem medida 1. Podemos escrever:

$$[0,1] = \mathcal{K} \cup [0,1] \setminus \mathcal{K} = \mathcal{K} \cup \mathbb{Y} \tag{9.17}$$

Tomando então a medida desta união temos:

$$m([0,1]) = m(\mathcal{K}) + m(\mathbb{Y}) = 1 \Rightarrow m(\mathcal{K}) = 0 \tag{9.18}$$

Portanto $\mathcal{K}$ é não enumerável e tem medida (conteúdo) nulo.

Temos portanto que:
1 O conjunto de Cantor $\mathcal{K}$ é não-enumerável.

Demonstração. Seja $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}$ tal que:

$$x \in 2^{\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto I_{x_1} \cap I_{x_1x_2} \cap I_{x_1x_2x_3} \cap \ldots \tag{9.19}$$

Exemplo 9.1. A sequência de zeros:

$$(0,0,0,\ldots) \mapsto I_0 \cap I_{00} \cap I_{000} \cap \ldots \tag{9.20}$$

Exemplo 9.2. A sequência de zeros e uns alternados:

$$(1,0,1,0,\ldots) \mapsto I_1 \cap I_{10} \cap I_{101} \cap \ldots \tag{9.21}$$

Temos por construção que $I_{x_1x_2x_3} \supset I_{x_1x_2x_3\ldots x_{n+1}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Pelo item (1), temos que quando $n \to \infty$, temos que o comprimento do intervalo tende à zero, portanto, pelo teorema dos intervalos encaixantes (9.1):

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_{x_1x_2\ldots x_n} = \{\mathfrak{p}_x\} \tag{9.22}$$

Tal que $\mathfrak{p}_x$ é o conjunto de pontos de $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que é não-enumerável. ■

2 A função f é bijetora.

Demonstração. Dividindo em injeção e sobrejeção temos:

(i) f é injetora. Dados duas sequências $x \in 2^{\mathbb{N}}$ e $y \in 2^{\mathbb{N}}$, em que $x \neq y$, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, por exemplo:

$$x = x_1, x_2, \ldots, \overbrace{x_k}^{=0} \tag{9.23}$$

$$y = y_1, y_2, \ldots, \underbrace{y_k}_{=1} \tag{9.24}$$

Quer dizer então que:

$$f(x) = I_{x_1} \cap I_{x_1x_2} \cap \ldots \cap I_{x_1x_2\ldots x_k} \tag{9.25}$$
$$f(y) = I_{y_1} \cap I_{y_1y_2} \cap \ldots \cap I_{y_1y_2\ldots y_k} \tag{9.26}$$

As imagens são diferentes, então na etapa k os intervalos não se interceptam, portanto, f é injetora.

(ii) f é sobrejetora. FAZER

■

Provamos que existe $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}$ bijetora, então temos que:

Corolário 9.1. $\mathcal{K}$ é um conjunto não-enumerável.

Corolário 9.2. $\mathbb{R}$ é não-enumerável

Demonstração. Se $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$ então $\mathbb{R}$ é não-enumerável. ■

9.3 Irracionais

Definição 9.2. O conjunto dos números irracionais é definido como sendo o conjunto tal que:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \tag{9.27}$$

Corolário 9.3. O conjunto dos irracionais é não-enumerável.

Demonstração. Podemos escrever o conjunto dos números reais como sendo:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \tag{9.28}$$

Sabemos que $\mathbb{R}$ é não-enumerável e $\mathbb{Q}$ é enumerável, portanto, para que isso aconteça

$$\boxed{\mathbb{I} \text{ é não-enumerável}} \tag{9.29}$$

■

9.4 Densidade de conjuntos

Definição 9.3. Dizemos que um conjunto $\mathbb{X}$ é denso em $\mathbb{R}$ quando dado qualquer intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $x \in (a, b)$

Lema 9.1. O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

Demonstração. em (??) ■

Teorema 9.2. $\#\mathbb{R} = \#2^{\mathbb{N}}$. Ou seja, existe uma bijeção entre o conjunto de números reais e o conjunto das sequências de zeros e uns.

Demonstração. 1° afirmação: $\exists\ f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ injetora. De fato, tome como sendo f a função $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}$ (conjunto de Cantor) tal que:

$$x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto f(x) = \mathfrak{p}_x \tag{9.30}$$

Que já provamos que é injetora. Como $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, então f existe f injetora tal que $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$.
2° afirmação: $\exists\ g : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ injetora. Observe que $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$. Pelo exercício 4.3 da lista

2 temos que $\#\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mas já mostramos em (6.1) que $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$, portanto basta provar que existe função injetora de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Tome então $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ tal que:

$$x \mapsto g(x) = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q};\ \frac{p}{q} < x \right\} \tag{9.31}$$

Por construção, $\frac{p}{q}$ não são fatoráveis entre si, portanto é único para cada valor de p e q. Como definimos que esse quociente é estritamente menor do que x, temos que ele sempre será único, logo para todo $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$, portanto g é injetora. Portanto existe uma g injetora tal que $g : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$. Portanto existe uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $2^{\mathbb{N}}$. ■

9.5 Exercícios

$\boxed{\text{Exercício 1}}$ Mostre que qualquer intervalo aberto (a, b) está em bijeção com o intervalo aberto $(0, 1)$.

$\boxed{\text{Exercício 2}}$ Exiba uma bijeção entre $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Exercício 3}}$ Seja $(I_j)_{j\in\mathbb{J}}$ uma coleção de intervalos abertos disjuntos, ou seja

$$\forall\ j_1, j_2 \in \mathbb{J}, (j_1 \neq j_2 \Rightarrow I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing) \tag{9.32}$$

Mostre que $\mathbb{J}$ é enumerável

Fim da Aula 9

10 Aula 10 - 23/09/2020

10.1 Anel (Ring)

Definição 10.1. Definimos um anel como sendo um conjunto que satisfaz algumas propriedades pré estabelecidas e é denotado por:

$$\boxed{(\mathbb{A}, +, \cdot)} \tag{10.1}$$

Essa representação significa que $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $(a, b) \mapsto a + b$ e $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $(a, b) \mapsto a \cdot b$. As propriedades que um anel devem satisfazer são:

Adição

(1) Associativa

(2) Comutativa

(3) Existe o elemento neutro aditivo, ou seja, existe $0_{\mathbb{A}}$ tal que:

$$\boxed{a + 0_{\mathbb{A}} = a, \ \forall\ a \in \mathbb{A}} \tag{10.2}$$

(4) Existe o inverso aditivo (ou oposto aditivo) em que para cada $a \in \mathbb{A}$, existe $c \in \mathbb{A}$ tal que $a + c = 0_{\mathbb{A}}$.

Multiplicação

(1) Associativa

(2) Distributiva

Lema 10.1. O elemento neutro de uma anel $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ é único.

Demonstração. Suponha que $0_{\mathbb{A}}$ e $0'_{\mathbb{A}}$ sejam elementos neutros de $\mathbb{A}$. Então:

$$0_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{A}} + 0'_{\mathbb{A}} = 0'_{\mathbb{A}} + 0_{\mathbb{A}} = 0'_{\mathbb{A}} \tag{10.3}$$

$$\therefore \ \boxed{0_{\mathbb{A}} = 0'_{\mathbb{A}}} \tag{10.4}$$

■

Lema 10.2. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ uma anel. Dado um $a \in \mathbb{A}$, o inverso aditivo de a é único.

Demonstração. Se $a \in \mathbb{A}$, temos que como $\mathbb{A}$ é um anel, então $\exists\ c \in \mathbb{A}$ tal que $a + c = 0_{\mathbb{A}}$. Supondo que exista $b \in \mathbb{A}$ tal que $a + b = 0_{\mathbb{A}}$. Então:

$$b = 0_{\mathbb{A}} + b = (a + c) + b = (c + a) + b = c + (a + b) = c + 0_{\mathbb{A}} = c \tag{10.5}$$

$$\therefore \ \boxed{b = c} \tag{10.6}$$

■

Nomenclatura 10.1. Para cada $a \in \mathbb{A}$, denotaremos seu inverso aditivo por $\boxed{-a}$. Como sabemos que o elemento neutro é único para o anel, denotaremos ele por $\boxed{0}$ sem a indexação.

Exemplo 10.1. Exemplos de anéis são:

- $\mathbb{Z}$ - Inteiros
- $\mathbb{Q}$ - Racionais
- $\mathbb{R}$ - Reais
- $\mathbb{C}$ - Complexos
- $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ - Inteiros primos
- $\mathbb{Z}_{\mathrm{m}}$ - Inteiros "naturais "$(m \in \mathbb{N})$
- $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ - Matrizes quadradas de ordem n
- $\mathbb{Z}[x]$ - Polinômios de coeficientes inteiros

10.2 Anel comutativo

Definição 10.2. Dizemos que um anel $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ é comutativo quando a operação de multiplicação é comutativa.

Exemplo 10.2. Exemplos de anéis comutativos são:

- $\mathbb{Z}$ - Inteiros
- $\mathbb{Q}$ - Racionais
- $\mathbb{R}$ - Reais
- $\mathbb{C}$ - Complexos
- $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ - Inteiros primos
- $\mathbb{Z}_{\mathrm{m}}$ - Inteiros "naturais"$(m \in \mathbb{N})$
- $\mathbb{Z}[x]$ - Polinômios de coeficientes inteiros

10.3 Anel comutativo com unidade

Definição 10.3. Chamamos um anel comutativo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ de anel comutativo com unidade quando existe $1_{\mathbb{A}}$ tal que:

$$\boxed{a \cdot 1_{\mathbb{A}} = a} \tag{10.7}$$

Ou seja, a expressão "comutatividade" significa que existe o elemento neutro para a multiplicação do anel.

Exemplo 10.3. Seja $\mathbb{A} = \{x^2 \cdot p(x);\ p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ um anel comutativo. Mostre que a soma é comutativa, a multiplicação é comutativa e que não possui unidade.
O elemento neutro de $\mathbb{A}$ é o polinômio nulo, ou seja $0 = x^2 \cdot 0$. Sejam então:

$$a \in \mathbb{A} \Rightarrow \exists\ p(x) \in \mathbb{Z}[x];\ a = x^2 \cdot p(x) \tag{10.8}$$
$$b \in \mathbb{A} \Rightarrow \exists\ q(x) \in \mathbb{Z}[x];\ b = x^2 \cdot q(x) \tag{10.9}$$

Temos então que:

$$a + b = (x^2 \cdot p(x)) + (x^2 \cdot q(x)) \tag{10.10}$$
$$= x^2 \cdot (p(x) + q(x)) \tag{10.11}$$
$$= x^2 \cdot (q(x) + p(x)) \tag{10.12}$$
$$= (x^2 \cdot q(x)) + (x^2 \cdot p(x)) \tag{10.13}$$
$$= \boxed{b + a} \tag{10.14}$$

Para a multiplicação temos que, pela associatividade:

$$a \cdot b = x^2 \cdot p(x) \cdot x^2 \cdot q(x) \tag{10.15}$$
$$= x^2 \cdot x^2 \cdot p(x) \cdot q(x) \tag{10.16}$$
$$= x^2 \cdot x^2 \cdot q(x) \cdot p(x) \tag{10.17}$$
$$= x^2 \cdot q(x) \cdot x^2 \cdot p(x) \tag{10.18}$$
$$= \boxed{b \cdot a} \tag{10.19}$$

Como $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, temos que sempre existe um número inteiro diferente de zero (pois neste caso seria o polinômio nulo) tal que este valor acompanha a variável x do polinômio. Como o expoente de cada x do polinômio é um $n \in \mathbb{N}$, então $\forall\ p(x) \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow \nexists p(x);\ x^2 \cdot p(x) = x^2$, portanto não existe o elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{A}$.

10.4 Domínio de integridade

Definição 10.4. Chamamos um anel comutativo com unidade $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ de *Domínio de integridade* quando:

$$\boxed{a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0\ \vee\ b = 0} \tag{10.20}$$

Lema 10.3. Em uma anel $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, a multiplicação de um elemento do anel por zero sempre resulta em zero, ou seja:

$$\forall\ a \in \mathbb{A},\ a \cdot 0 = 0 \tag{10.21}$$

Demonstração. Como $\mathbb{A}$ é um anel, dado um $a \in \mathbb{A}$, $a \cdot 0 \in \mathbb{A}$ e existe $-(a \cdot 0)$ (inverso aditivo de $a \cdot 0$) ta que $a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = 0$, temos então:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \tag{10.22}$$
$$a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \tag{10.23}$$

$$0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \tag{10.24}$$
$$0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 \tag{10.25}$$
$$\boxed{a \cdot 0 = 0} \tag{10.26}$$

Analogamente se mostra que $0 \cdot a = 0,\ \forall\ a \in \mathbb{A}$ ■

Exemplo 10.4. Exemplos de domínios de integridade são:

- $\mathbb{Z}$ - Inteiros
- $\mathbb{Q}$ - Racionais
- $\mathbb{R}$ - Reais
- $\mathbb{C}$ - Complexos
- $\mathbb{Z}_p$ - Inteiros primos
- $\mathbb{Z}[x]$ - Polinômios de coeficientes inteiros

10.5 Anel ordenado

Definição 10.5. Dizemos que um anel comutativo com unidade $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ é ordenado quando existe um subconjunto de elementos não nulos de $\mathbb{A}$ denotado por $\mathtt{P}$, tal que $\mathtt{P} \subset \mathbb{A}$ e satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\mathbb{A} = -\mathtt{P} \cup \{0\} \cup \mathtt{P}$ é uma união disjunta, onde $-\mathtt{P} = \{-p;\ p \in \mathtt{P}\}$. Os elementos $p \in \mathtt{P}$ serão denominados **positivos**.

(2) Dados $x \in \mathtt{P}$ e $y \in \mathtt{P}$, temos que:

$$(x + y) \in \mathtt{P} \quad \text{(é positivo)} \tag{10.27}$$
$$(x \cdot y) \in \mathtt{P} \quad \text{(é positivo)} \tag{10.28}$$

Exemplo 10.5. Exemplos de anéis ordenados são:

- $\mathbb{Z}$ - Inteiros
- $\mathbb{Q}$ - Racionais
- $\mathbb{R}$ - Reais

Comentário 10.1. A partir deste ponto, para simplificar a escrita e o raciocínio se manter o mais simples possível, cada vez que mencionarmos a expressão "*anel ordenado*" , isso significará que estamos considerando um "*anel comutativo com unidade que é ordenado*".

Lema 10.4. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. $\forall\, x \in \mathbb{A},\ -(-x) = x$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{A}$, $\exists\ -x \in \mathbb{A}$ tal que $x + (-x) = 0$. Note que, como $-x \in \mathbb{A}$, então existe um único elemento que chamamos de $-(-x)$ tal que $-(x) + [-(-x)] = 0$. Pela unicidade do oposto, segue que:

$$\boxed{x = -(-x)} \tag{10.29}$$

■

Lema 10.5. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. $\forall\, x \in \mathbb{A},\ -x = -1 \cdot x$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{A}$, $\exists!\ -x \in \mathbb{A}$ tal que $x + (-x) = 0$. -1 é o elemento neutro multiplicativo, então:

$$x + (-x) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x \tag{10.30}$$
$$= x \cdot (1 - 1) \tag{10.31}$$
$$= x \cdot 0 \tag{10.32}$$
$$= 0 \tag{10.33}$$

Pela unicidade do oposto, segue que:

$$\boxed{-x = (-1) \cdot x} \tag{10.34}$$

■

Fim da Aula 10

11 | Aula 11 - 25/09/2020

11.1 Ordem em anéis ordenados

Definição 11.1. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. Dizemos que $x > y$ quando existe $p \in \mathtt{P}$ tal que $x = y + p$

Lema 11.1. *Seja* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ *um anel ordenado. Então* $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathtt{P}$

Demonstração.

$$x > 0 \Leftrightarrow \exists\ p \in \mathtt{P};\ x = 0 + p \Rightarrow x = p \tag{11.1}$$

$$\therefore\ \boxed{x \in \mathtt{P}} \tag{11.2}$$

∎

Lema 11.2. *Seja* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ *um anel ordenado. Então* $x < 0 \Leftrightarrow -x \in \mathtt{P}$

Demonstração.

$$x < 0 \Leftrightarrow 0 > x \Leftrightarrow \exists\ p \in \mathtt{P};\ 0 = x + p \tag{11.3}$$

$$\Leftrightarrow \exists\ p \in \mathtt{P};\ +(-p) + 0 = x + p + (-p) \Rightarrow x = -p \tag{11.4}$$

$$\therefore\ \boxed{-x \in \mathtt{P}} \tag{11.5}$$

∎

Proposição 11.1. (*Regra de sinais*)

(1) $x > 0\ \wedge\ y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

(2) $x < 0\ \wedge\ y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

Demonstração. Separando os casos temos:

(1)

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x \in \mathtt{P} \\ y < 0 \Rightarrow -y \in \mathtt{P} \end{cases} \Rightarrow \text{(Como é um anel ordenado) } x \cdot (-p) \in \mathtt{P} \tag{11.6}$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot [(-1) \cdot y] \in \mathtt{P} \Rightarrow [x \cdot (-1)] \cdot y \in \mathtt{P} \Rightarrow [(-1) \cdot x] \cdot y \in \mathtt{P} \tag{11.7}$$

$$\Downarrow$$

$$(-1) \cdot (x \cdot y) \in \mathtt{P} \Rightarrow -(x \cdot y) \in \mathtt{P} \tag{11.8}$$

$$\boxed{x \cdot y < 0} \tag{11.9}$$

(2) (Exercício da lista 3)

■

Lema 11.3. *Seja* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ *um anel ordenado. Então* $\forall\ x \in \mathbb{A},\ x^2 \geqslant 0$.

Demonstração. Se $x \in \mathbb{A}$, vale uma, e somente uma das alternativas (tricotomia do anel):

(i) $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathtt{P} \Rightarrow x^2 = x \cdot x \in \mathtt{P} \Leftrightarrow x^2 > 0$

(i) $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \cdot 0 = 0$

(i) $x < 0 \Leftrightarrow -x \in \mathtt{P} \Rightarrow x^2 = x \cdot x$. Pelo lema (10.4) temos que:

$$x \cdot x = [(-1) \cdot (-1)] \cdot (x \cdot x) \tag{11.10}$$

$$= [(-1) \cdot x] \cdot [(-1) \cdot x] \tag{11.11}$$

$$= (-x) \cdot (-x) \in \mathtt{P} \Rightarrow x^2 > 0 \tag{11.12}$$

■

11.2 Monotonicidade da adição

Lema 11.4. *Seja* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ *um anel ordenado. Se* $x > y$*, então* $x + z > y + z,\ \forall\ z \in \mathbb{A}$.

Demonstração.

$$x > y \Leftrightarrow \exists\ p \in \mathtt{P};\ x = y + p \tag{11.13}$$

$$+z + x = (y + p) + z,\ \forall\ z \in \mathbb{A} \tag{11.14}$$

$$\Updownarrow$$

$$x + z = (y + z) + p \Rightarrow x + z > y + z \tag{11.15}$$

■

Definição 11.2. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. Defino a função módulo[1] por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{11.16}$$

Proposição 11.2. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. Então:

(1) $-|x| < x < |x|\,,\ \forall\ x \in \mathbb{A}$

(2) Vale a tricotomia do anel. Ou seja, dados $x, y \in \mathbb{A}$, vale uma, e somente uma, das alternativas:

   (i) $x > y$

   (ii) $x = y$

   (iii) $x < y$

(3) Definindo o intervalo aberto $(a, b) = \{x \in \mathbb{A};\ a < x < b\}$. Se $x \in (a, b)$ e $y \in (a, b)$, então:

$$|x - y| < b - a \tag{11.17}$$

(4) Dado $\varepsilon > 0$, mostre que:

$$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \tag{11.18}$$

[1]A função modular é sempre maior ou igual a zero para todo $x \in \mathbb{A}$.

Demonstração. Considerando que estamos trabalhando com um anel ordenado $(\mathbb{A}, +, \cdot)$:

(1) Separando em casos, temos que:

(i) $\mathbf{x = 0}$. Se $x = 0 \Rightarrow |x| = |0| = 0 = -|0| = -|x|$

$$-|0| = 0 = |0| \tag{11.19}$$

$$\Downarrow$$

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \tag{11.20}$$

(ii) $\mathbf{x > 0}$. Se $x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \leqslant |x|$, temos então:

$$-|x| = -x < 0 < x \Rightarrow -|x| < x \tag{11.21}$$

Temos portanto que $-|x| < x \wedge x \leqslant |x|$, logo

$$-|x| < x \leqslant |x| \tag{11.22}$$

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \tag{11.23}$$

(iii) $\mathbf{x < 0}$. FAZER

■

(2) FAZER

(4) Separando em ida e volta temos:
($\Rightarrow$): Se $|x| < \varepsilon$, então, de (1):

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| < \varepsilon \tag{11.24}$$

Note que $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -|x| > -\varepsilon$, portanto:

$$-\varepsilon < -|x| \leqslant x \leqslant |x| < \varepsilon \tag{11.25}$$

$$\therefore -\varepsilon < x < \varepsilon \tag{11.26}$$

($\Leftarrow$): Suponhamos agora que vale $-\varepsilon < x < \varepsilon$, temos então:

(i) Seja $x \geqslant 0$ tal que $-\varepsilon < x < \varepsilon$ (chamemos essa desigualdade de (Δ)). Temos então:

$$x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x \tag{11.27}$$

Por (Δ), temos que:

$$x = |x| < \varepsilon \tag{11.28}$$

(ii) Seja $x < 0$ tal que vale (Δ). Da definição de módulo, temos que:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \tag{11.29}$$

Como $x < 0$, então (Δ) pode ser escrita como:

$$-\varepsilon < -x < \varepsilon \tag{11.30}$$

$$-x = |x| < \varepsilon \tag{11.31}$$

$$\therefore \boxed{|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon} \tag{11.32}$$

■

(3) Dados $x \in (a,b)$ e $y \in (a,b)$, temos que:

$$x \in (a,b) \Leftrightarrow a < x < b \tag{11.33}$$
$$y \in (a,b) \Leftrightarrow a < y < b \tag{11.34}$$

Multiplicando (11.34) por (-1) e somando com (11.33):

$$a < \ x \ < b \tag{11.35}$$
$$-b < -\,y < -a \tag{11.36}$$

$$a - b < x - y < b - a \Rightarrow -(b-a) < x - y < b - a \tag{11.37}$$

Denotando $b - a = \varepsilon$ e $x - y = \varphi$, temos, por (4):

$$-\,\varepsilon < \varphi < \varepsilon \Leftrightarrow |\varphi| < \varepsilon \tag{11.38}$$

$$\therefore |\varphi| < \varepsilon \tag{11.39}$$

Logo, fazendo a substituição temos que:

$$\boxed{|x - y| < b - a} \tag{11.40}$$

■

Lema 11.5. *Seja* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ *um anel ordenado. Se* $x > y$ *e* $z > w$*, então:*

$$x + z > y + w \tag{11.41}$$

Demonstração.

$$\begin{cases} x > y \Leftrightarrow x - y > 0 \\ z > w \Leftrightarrow z - w > 0 \end{cases} \Rightarrow (x - y) + (z - w) > 0 \tag{11.42}$$

$$(x - z) - (y + w) > 0 \Leftrightarrow (x + z) > (y + w) \tag{11.43}$$

$$\boxed{x + z > y + w} \tag{11.44}$$

■

Proposição 11.3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $1 \leqslant q \leqslant n$ satisfazendo:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{n \cdot q} \tag{11.45}$$

Demonstração. ?? ■

11.3 Exercícios

$\boxed{\text{Exercício 1}}$ Dado um anel ordenado $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, mostre que:

(a) Se $x \geqslant 0$ e $y < 0 \Rightarrow x \cdot y \leqslant 0$

(b) Se $x > 0$ e $y \leqslant 0 \Rightarrow x \cdot y \leqslant 0$

(c) Se $x \leqslant 0$ e $y < 0 \Rightarrow x \cdot y \geqslant 0$

(d) Se $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot y \geqslant 0$

$\boxed{\text{Exercício 2}}$ Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. Mostre que se $x \in [a, b)$ e $y \in [a, b)$, então $|x - y| < b - a$. Onde $[a, b) = \{x \in \mathbb{A};\ a \leqslant x < b\}$.

Fim da Aula 11

12 | Aula 12 - 28/09/2020

12.1 Mais propriedade de um anel ordenado

Proposição 12.1. Seja $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ um anel ordenado. Então:

(5) (*Desigualdade triangular*) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

(6) $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$

Demonstração. Considerando o anel ordenado $(\mathbb{A}, +, \cdot)$:

(5) Pelo item (1) da proposição (11.2) temos:

$$\begin{cases} -|x| \leqslant x \leqslant |x| \\ -|y| \leqslant y \leqslant |y| \end{cases} \tag{12.1}$$

Somando as desigualdades ficamos com:

$$-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \tag{12.2}$$

$$(-1) \cdot |x| + (-1) \cdot |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \tag{12.3}$$

$$(-1) \cdot (|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \tag{12.4}$$

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \tag{12.5}$$

Do item (4), concluímos que:

$$\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y|} \tag{12.6}$$

■

(6) Podemos reescrever $|x|$ como:

$$|x| = |x + y - y| \tag{12.7}$$

Pela desigualdade triangular, obtemos:

$$|x| \leqslant |x - y| + |y| \tag{12.8}$$

$$|x| + (-|y|) \leqslant |x - y| + |y| + (-|y|) \tag{12.9}$$

$$|x| - |y| \leqslant |x - y| \tag{12.10}$$

Reescrevendo da mesma forma o $|y|$:

$$|y| = |y + x - x| \tag{12.11}$$

Pela desigualdade triangular:

$$|x| \leqslant |y-x| + |x| \tag{12.12}$$

$$|y| + (-|x|) \leqslant |y-x| + |x| + (-|x|) \tag{12.13}$$

$$|y| - |x| \leqslant |y-x| \tag{12.14}$$

Sendo $|y-x| = |x-y|$, temos:

$$-\left(|x| - |y|\right) \leqslant |x-y| \tag{12.15}$$

Temos então que, juntando as desigualdades (12.10) e (12.15):

$$-\left(|x| - |y|\right) \leqslant |x-y| \leqslant |x-y| \tag{12.16}$$

Portanto, de (4):

$$\boxed{\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|} \tag{12.17}$$

■

12.2 Corpo

Definição 12.1. Dizemos que um anel comutativo com unidade $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um **corpo (*field*)** quando, para cada $x \in \mathbb{K},\ x \neq 0$:

$$\exists\ y \in \mathbb{K};\ x \cdot y = 1 \tag{12.18}$$

Nomenclatura 12.1. O elemento y é denominado inverso (ou inverso multiplicativo) de x. Ele será denotado por x^{-1}.

Lema 12.1. *Para cada $x \in \mathbb{K},\ x \neq 0$, o inverso multiplicativo é único.*

Demonstração. Suponho que $y_1 \in \mathbb{K}$ e $y_2 \in \mathbb{K}$ sejam inversos multiplicativos de x tais que:

$$x \cdot y_1 = y_1 \cdot x = 1 \tag{12.19}$$

$$x \cdot y_2 = y_2 \cdot x = 1 \tag{12.20}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 \cdot 1 && (12.21)\\ &= y_1 \cdot (x \cdot y_2) && (12.22)\\ &= (y_1 \cdot x) \cdot y_2 && (12.23)\\ &= 1 \cdot y_2 && (12.24)\\ &= y_2 && (12.25) \end{aligned}$$

Portanto o inverso multiplicativo de um corpo é único. ■

Exemplo 12.1. São exemplos de corpos:

- $\mathbb{Q}$ - Racionais
- $\mathbb{R}$ - Reais
- $\mathbb{C}$ - Complexos

12.3 Corpo intermediário

Será que existe um corpo intermediário entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$? A resposta é **sim**, existem diversos corpos intermediários entre estes dois conjuntos, por exemplo o corpo $\mathbb{K}_{\sqrt{2}}$ é um corpo intermediário tal que:

$$\mathbb{K}_{\sqrt{2}} = \{a + b\sqrt{2};\ a \in \mathbb{Q}\ \wedge\ b \in \mathbb{Q}\} \text{ é um corpo} \tag{12.26}$$

Lema 12.2. *$\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração. (*Por absurdo*) Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem p e q naturais primos entre si[1], tal que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{2} \cdot q \Rightarrow p^2 = (q \cdot \sqrt{2})^2 \Rightarrow p^2 = q^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \tag{12.27}$$

$$\therefore p^2 = 2 \cdot q^2 \tag{12.28}$$

Logo, temos:

(1) p e q não possuem fatores primos comuns, então, pelo TFA:

$$p = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{b_k} \text{ (com } a_{i's} \text{ primos distintos)} \tag{12.29}$$

$$q = c_1^{d_1} \cdot c_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_\ell} \text{ (com } c_{j's} \text{ primos distintos)} \tag{12.30}$$

Como p e q são primos entre si, então $a_i \neq c_j,\ \forall\ i, j$.

(2) Pela equação (12.28), temos que, utilizando (12.29) e (12.30):

$$(a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{b_k})^2 = 2 \cdot (c_1^{d_1} \cdot c_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_\ell})^2 \tag{12.31}$$

$$a_1^{2b_1} \cdot a_2^{2b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{2b_k} \stackrel{\Delta}{=} 2 \cdot c_1^{2d_1} \cdot c_2^{2d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_{2\ell}} \tag{12.32}$$

Por Δ e pelo TFA, obrigatoriamente existe algum a_i, com $1 \leqslant i \leqslant k$, tal que a_i=2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_1 = 2$. Então:

$$2^{2b_1} \cdot a_2^{2b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{2b_k} \stackrel{\Delta}{=} 2 \cdot c_1^{2d_1} \cdot c_2^{2d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_{2\ell}} \tag{12.33}$$

Temos então, para $b \geqslant 1$:

$$\cancel{2} \cdot c_1^{2d_1} \cdot c_2^{2d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_{2\ell}} = \cancel{2} \cdot 2^{2b_1 - 1} \cdot a_2^{2b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{2b_k} \tag{12.34}$$

$$c_1^{2d_1} \cdot c_2^{2d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_{2\ell}} = 2^{2b_1 - 1} \cdot a_2^{2b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{2b_k} \tag{12.35}$$

Como $b_1 \geqslant 1 \Rightarrow 2b_1 - 1 \geqslant 1$. Novamente pelo TFA, na igualdade (12.35), temos duas fatorações com fatores primos, e o primo 2 aparece na fatoração do lado direito. O TFA, nos garante que obrigatoriamente 2 deve ser um dos primos da fatoração do lado esquerdo. Logo algum dos primos $c_{i's}$ é igual a 2. Suponhamos, sem perda de generalidade que $c_1 = 2$. Conclusão:

$$\begin{cases} p = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{b_k} \\ q = c_1^{d_1} \cdot c_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot c_\ell^{d_\ell} \end{cases} \Rightarrow \text{são primos entre si} \tag{12.36}$$

Então, $\forall\ i, j \Rightarrow a_i \neq c_j$. Por outro lado, concluímos que $a_1 = c_1 = 2$, portanto temos uma contradição.

[1] Dizer que são primos entre si equivale a dizer que eles não possuem fatores primos em comum, ou seja, são irredutíveis.

Portanto temos que $\mathbb{K}_{\sqrt{2}}$ é um corpo intermediário. Em outras palavras:

$$\boxed{\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{K}_{\sqrt{2}} \subsetneq \mathbb{R}} \tag{12.37}$$

■

Lema 12.3. *Todo corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *é um domínio de integridade.*

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K}$ tais que $a \cdot b = 0$. Temos que mostrar que $a = 0$ ou $b = 0$. Suponhamos então que $a \neq 0$, então devemos concluir que $b = 0$. Como $\mathbb{K}$ pe um corpo e $a \neq 0$, $\exists\ a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a^{-1} \cdot a = 1$, dessa forma:

$$\begin{cases} a^{-1} \cdot a = 1 \\ a \cdot b = 0 \end{cases} \tag{12.38}$$

$$a^{-1} \cdot a \cdot b = 0 \cdot a^{-1} \tag{12.39}$$

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0 \tag{12.40}$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \tag{12.41}$$

$$\boxed{b = 0} \tag{12.42}$$

■

12.4 Corpo ordenado

Definição 12.2. Dizemos que um corpo é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado quando $\mathtt{P} \subset \mathbb{K}$ tal que:

(1) $\mathbb{K} = -\mathtt{P} \cup \{0\}\mathtt{P}$ (união disjunta)

(2) Dados $x \in \mathtt{P}$ e $y \in \mathtt{P}$, temos que:

$$(x + y) \in \mathtt{P} \tag{12.43}$$

$$(x \cdot y) \in \mathtt{P} \tag{12.44}$$

Comentário 12.1. Qualquer conjunto finito não pode ser ordenado.

Exemplo 12.2. São exemplos de corpos ordenados:

- $\mathbb{Q}$ - Racionais
- $\mathbb{R}$ - Reais

Fim da Aula 12

13 Aula 13 - 30/09/2020

13.1 Propriedade arquimediana

Definição 13.1. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ é limitado superiormente quando $\mathbb{X}$ possui uma **cota superior**.

Definição 13.2. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{K}$ é uma **cota superior**[1] de $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ quando:

$$x \leqslant \alpha, \ \forall \ x \in \mathbb{X} \tag{13.1}$$

Exemplo 13.1. Seja $\mathbb{X} = (0, 1) \subset \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Mostre que 1 é cota superior de $\mathbb{X}$.

Demonstração. Pela definição do conjunto $\mathbb{X}$, temos que:

$$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\} \Rightarrow x < 1, \ \forall \ x \in \mathbb{X} \tag{13.2}$$

$$\therefore \ x = 1 \text{ é cota superior de } \mathbb{X} \tag{13.3}$$

■

Observação: Como $x < 1 < 2$, temos que $x < 2, \ \forall \ x \in \mathbb{X}$, portanto 2 também é cota superior de $\mathbb{X}$, ou seja, existem infinitas cotas superiores de $\mathbb{X}$, tais que são todas maiores ou iguais a 1.

Comentário 13.1. Se $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$, temos que:

($\mathcal{P}$) $\mathbb{X}$ é limitado superiormente se, e somente se:

$$\exists \ \alpha \in \mathbb{K};\ x \leqslant \alpha, \ \forall \ x \in \mathbb{X} \tag{13.4}$$

Ou seja, α é cota superior de $\mathbb{X}$

($\sim \mathcal{P}$) $\forall \ \alpha \in \mathbb{K}, \ \exists \ x \in \mathbb{X}$ tal que $x \geqslant \alpha$, ou seja, $\mathbb{X}$ é **ilimitado superiormente**.

Lema 13.1. *Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Sempre podemos identificar cópias algébricas de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dentro de qualquer corpo $\mathbb{K}$, tal que:*

(a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$

(b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$

(c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$

Demonstração. Temos para cada item:

[1] α não precisa necessariamente pertencer à $\mathbb{X}$

(a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo, é, em particular, um anel comutativo com unidade. Então possui o elemento neutro multiplicativo: $1_{\mathbb{K}} = 1 \in \mathbb{K}$, portanto, basta tomar:

$$1 = 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{K} \tag{13.5}$$

$$1 + 1 = 2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{K} \tag{13.6}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + ...}_{n \text{ parcelas}} = n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{K} \tag{13.7}$$

(b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo, todo $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ possui um oposto $-n \in \mathbb{K}$ tal que $(-n) + n = 0$, portanto:

$$\{-n, (-n+1), ..., -1, 0, 1, ..., (n-1), n\} \tag{13.8}$$

(c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$. Para cada $m \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$, $m \neq 0$, como $\mathbb{K}$ é um corpo, $\exists\ m^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $m \cdot m^{-1} = 1$.[2] Identificamos os racionais em $\mathbb{K}$ pelo conjunto dos elementos da forma:

$$n \cdot m^{-1} \Rightarrow \frac{n}{m};\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{13.9}$$

E ainda valem as contenções:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}} \tag{13.10}$$

■

Proposição 13.1. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. São equivalentes:

(i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente;

(ii) Dados $a \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;

(iii) Dado $a \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração. Separando em casos temos que:

(i)⇒(ii) Assumimos então que vale (i). Temos que mostrar então que dado $a \in \mathbb{K}$, $a > 0$ e $b \in \mathbb{K}$, existe $n \cdot a > b$. De fato, como $a > 0$, segue que $a \neq 0$. Sendo $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. Tomo $\alpha = b \cdot a^{-1} \in \mathbb{K}$, como vale (i), então existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > b \cdot a^{-1}$, portanto:

$$n \cdot a > b \cdot a^{-1} \cdot a \tag{13.11}$$

$$n \cdot a > b \cdot (a^{-1} \cdot a) \tag{13.12}$$

$$\boxed{n \cdot a > b} \tag{13.13}$$

(ii)⇒(iii) Assumimos então que vale (ii). Tome $b = 1$ no item (ii), ou seja, dado $a \in \mathbb{K}$, $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ tal que $1 < n \cdot a$. Então, como $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então $\exists\ n^{-1} \in \mathbb{K};\ n \cdot n^{-1} = 1$, logo:

$$1 \cdot n^{-1} < n \cdot a \cdot n^{-1} \tag{13.14}$$

$$n^{-1} < (n \cdot n^{-1}) \cdot a \tag{13.15}$$

$$n^{-1} < a \Rightarrow 0 < n^{-1} < a \tag{13.16}$$

$$\boxed{0 < \frac{1}{n} < a} \tag{13.17}$$

[2] A notação m^{-1} é equivalente à notação $\frac{1}{m}$.

(iii)⇒(i) Assumimos então que vale (iii). Temos que mostrar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ não é limitado superiormente, ou seja, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha$. De fato:

(1°) Se $\alpha \leqslant 0$, basta tomar $n = 1$, então temos:

$$\alpha \leqslant 0 \leqslant 1 \Rightarrow \alpha < 1 \in \mathbb{N} \tag{13.18}$$

(2°) Se $\alpha > 0$, como $\mathbb{K}$ é corpo, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$. Pelo exercício () $x^{-1} > 0$. Por (iii) tomando $a = \alpha^{-1}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \alpha^{-1}$, então:

$$\frac{1}{n} \cdot n < \alpha^{-1} \cdot \alpha \Rightarrow 1 < n \cdot \alpha^{-1} \tag{13.19}$$

$$1 \cdot \alpha < \alpha^{-1} \cdot \alpha \tag{13.20}$$

$$\alpha < n \tag{13.21}$$

Portanto $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

■

13.2 Corpos Arquimedianos

Definição 13.3. Um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é chamado de **arquimediano** quando $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado.

Comentário 13.2. Ser arquimediano é o mesmo que dizer que vale qualquer um dos itens da proposição (13.1).

Lema 13.2. *(Ponto médio)Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Dados $x \in \mathbb{K}$ e $y \in \mathbb{K}$ tais que $x < y$, então:*

$$x < \frac{x+y}{2} < y \tag{13.22}$$

Onde o elemento $\frac{x+y}{2} := 2^{-1} \cdot (x+y)$.

Demonstração. Como a desigualdade é dupla, temos que provar:

(i) Vale a desigualdade $x < \dfrac{x+y}{2}$. Como $x < y$ temos que:

$$x + x < y + x \tag{13.23}$$

$$2 \cdot x < x + y \tag{13.24}$$

$$2 \cdot x \cdot 2^{-1} < (x+y) \cdot 2^{-1} \tag{13.25}$$

$$\boxed{x < \frac{x+y}{2}} \tag{13.26}$$

(ii) Vale a desigualdade $\dfrac{x+y}{2} < y$. Como $x < y$ temos que:

$$x + y < y + y \tag{13.27}$$

$$x + y < 2 \cdot y \tag{13.28}$$

$$(x+y)\cdot 2^{-1} < 2\cdot y\cdot 2^{-1} \tag{13.29}$$

$$\boxed{\frac{x+y}{2} < y} \tag{13.30}$$

■

Exemplo 13.2. Dado $\mathbb{X} = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ um corpo ordenado. Prove que $\mathbb{X}$ não possui máximo.

Demonstração. Suponha que exista $\alpha \in \mathbb{X}$ tal que $x \leqslant \alpha$, $\forall\, x \in \mathbb{X}$, ou seja:

$$\alpha \in \mathbb{X} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\alpha+1}{2} < 1 \tag{13.31}$$

$$0 < \frac{\alpha+1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{\alpha+1}{2} \in \mathbb{X} \text{ e } \alpha < \frac{\alpha+1}{2} \tag{13.32}$$

Implicando que existe um valor maior do que α que foi dito inicialmente como máximo de $\mathbb{X}$, portanto temos uma contradição, logo $\mathbb{X}$ não possui máximo. ■

13.3 Subconjuntos densos de $\mathbb{R}$

Definição 13.4. Dizemos que $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ quando dado qualquer intervalo (a,b), $a < b$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $x \in (a,b)$

Proposição 13.2. O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Para mostrar a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, devemos mostrar que, dados $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} \in (a,b)$, ou seja:

$$\exists\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q};\ a < \frac{p}{q} < b \tag{13.33}$$

A ideia da prova é tal que, como $\mathbb{R}$ é arquimediano (pois é completo), então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$, logo podemos dividir a reta em intervalos de tamanhos iguais da forma $\frac{1}{n} < b - a$.

Considero então os racionais da forma $\frac{m}{n}$, onde fixo $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$ e $m \in \mathbb{Z}$.
Tome $\mathbb{X} \subset \mathbb{Z}$ definindo $\mathbb{X} = \{m \in \mathbb{Z};\ b \leqslant \frac{m}{n}\}$, note que $\mathbb{X}$ é limitado interiormente, então:

$$\mathbb{X} = \{m \in \mathbb{Z};\ n\cdot b \leqslant m\} \tag{13.34}$$

Pelo PBO em $\mathbb{Z}$, existe $m_0 \in \mathbb{X}$ sendo o mínimo de $\mathbb{X}$. Como m_0 é o mínimo de $\mathbb{X}$, então $m_0 - 1 \notin \mathbb{X}$, então:

$$m_0 - 1 < n\cdot b \Rightarrow \frac{m_0-1}{n} < b \tag{13.35}$$

Temos que mostrar que $a < \frac{m_0-1}{n}$. Sabemos que $\frac{1}{n} < b - a$, ou seja:

$$\frac{1}{n}\cdot n < (b-a)\cdot n \tag{13.36}$$

$$1 < n\cdot(b-a) \Rightarrow 1 < n\cdot b - n\cdot a \tag{13.37}$$

Como por hipótese $m_0 < n \cdot b$, temos que:

$$n \cdot a < n \cdot b - 1 < m_0 - 1 \tag{13.38}$$

$$a < \frac{m_0 - 1}{n} \tag{13.39}$$

Portanto, $\exists \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; \ a < \frac{p}{q} < b$, logo, podemos concluir que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. ■

Fim da Aula 13

14 | Aula 14 - 02/10/2020

14.1 Cotas superiores em corpos ordenados

Lema 14.1. O conjunto das cotas superiores de $\mathbb{X} = (0, 1)$ possui mínimo. Ou seja existe a menor cota superior que é igual à 1.

Demonstração. Seja o conjunto $\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha$ é cota supeior de $\mathbb{X}\}$. Temos que mostrar então que 1 é a menor cota superior de $\mathbb{X}$, temos então:

(1) Por definição, temos que $x < 1,\ \forall\, x \in \mathbb{X}$, logo 1 é cota superior de $\mathbb{X}$.

(2) Suponha que exista $\alpha < 1$ cota superior de $\mathbb{X}$. Se $\alpha \leqslant 0$, então α não pode ser cota, pois tomando $x = \frac{1}{2}$, temos que $\alpha < \frac{1}{2}$, no entanto $\frac{1}{2} \in \mathbb{X}$, então temos uma contradição. Seja então o caso em que $0 < \alpha < 1$, sabemos que $0 < \alpha < \frac{\alpha+1}{2} < 1$, ou seja

$$0 < \frac{\alpha + 1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{\alpha + 1}{2} \in \mathbb{X} \wedge \frac{\alpha + 1}{2} > \alpha \tag{14.1}$$

Logo α não pode ser cota superior.

Temos então que, como 1 é cota superior e $\forall\ \alpha < 1$, α não é cota superior. Segue que 1 é a menor cota superior de $\mathbb{X}$. ■

Definição 14.1. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Dizemos que um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ possui um elemento $x_0 \in \mathbb{X}$ que é máximo de $\mathbb{X}$ quando $x \leqslant x_0,\ \forall\ x \in \mathbb{X}$. Ou seja, x_0 é máximo de $\mathbb{X}$ quando:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{X} \\ x \leqslant x_0,\ \forall\ x \in \mathbb{X} \end{cases} \tag{14.2}$$

Comentário 14.1. No conjunto $\mathbb{X} = (0, 1)$ temos que 1 não é máximo de $\mathbb{X}$, pois não pertence à $\mathbb{X}$ e 1 é a menor cota superior de $\mathbb{X}$.

Definição 14.2. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado e $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente (ou seja, $\mathbb{X}$ possui cotas superiores). Dizemos que $\alpha \in \mathbb{K}$ é supremo de $\mathbb{X}$ quando α for a menor cota superior de $\mathbb{X}$, ou seja, existe o $\sup \mathbb{X}$.

Exemplo 14.1. Seja $\mathbb{X} = (0, 1)$, temos pela definição de supremo que $\sup \mathbb{X} = 1$.

Pergunta 14.1. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Tome $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ limitado superiormente. Será que existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha = \sup \mathbb{X}$?

A reposta é que nem sempre. Depende do corpo que estamos trabalhando. A prova aparecerá em aulas posteriores.

Exemplo 14.2. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais. Seja $\mathbb{X} = \{r \in \mathbb{Q}; 0 < r^2 < 2 \wedge 0 < r\}$. Mostre que $\mathbb{X}$ não possui $\sup \mathbb{X} \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Demonstração. Note que pela definição de $\mathbb{X}$, temos que $r^2 < 2$, o que é o mesmo que dizer que $r < \sqrt{2}$, no entanto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{X}$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ou seja pela definição de supremo, temos que $\sup \mathbb{X} = \sqrt{2} \notin \mathbb{K} = \mathbb{Q}$, ou seja, $\mathbb{X}$ não possui máximo. ∎

Comentário 14.2. Note que $\mathbb{X}$ possui cotas superiores, ou seja, é um conjunto limitado superiormente. De fato o é, tome $\alpha = 4$, como queremos mostrar que 4 é cota superior de $\mathbb{X}$, podemos resolver isso supondo que $\alpha = 4$ não seja cota superior de $\mathbb{X}$, ou seja, $\exists\ r \in \mathbb{X}$ tal que $r > 4$ (que é o mesmo que dizer que 4 não é cota superior). Daí temos que:

$$r \in \mathbb{X} \Leftrightarrow [0 < r \wedge 0 < r^2 < 2] \Rightarrow 4 < r \tag{14.3}$$

$$4 \cdot r < r \cdot r \Rightarrow 4r < r^2 \tag{14.4}$$

Mas por definição:

$$4r < r^2 < 2 \tag{14.5}$$

Então multiplicando $4 < r$ por 4 temos:

$$4 \cdot 4 < 4 \cdot r \tag{14.6}$$

$$16 < 4 \cdot r \Rightarrow 16 < 4 \cdot r < r^2 < 2 \tag{14.7}$$

Que é uma contradição, logo mostramos que $\mathbb{X} = \{r \in \mathbb{Q};\ 0 < r \wedge 0 < r^2 < 2\}$ é limitado superiormente, visto que 4 é uma cota superior de $\mathbb{X}$.

14.2 Corpo completo

Definição 14.3. Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é completo quando para todo subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$, com $\mathbb{X}$ limitado superiormente, então existe supremo de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{K}$. Ou seja, se $\mathbb{K}$ é completo, então $\mathbb{X}$ limitado superiormente implica que $\exists\ \sup \mathbb{X} \in \mathbb{K}$ a menor cota superior de $\mathbb{X}$.

Comentário 14.3. Nem todo corpo ordenado é completo, um exemplo é o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$. Já vimos que existe um subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado superiormente (ou seja, é um corpo ordenado), no entanto, vimos que esse subconjunto não possui supremo pertencente à $\mathbb{Q}$. (Exemplo (14.2))

Proposição 14.1. Todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Demonstração. Temos que provar que um corpo ordenado completo é arquimediano, ou seja, se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, então o conjunto dos naturais é ilimitado superiormente. Vamos então supor o contrário, ou seja, suponhamos que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente, ou seja, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $n \leqslant \alpha,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{K}$ assumimos que é completo, existe $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{K}$, ou seja é a menor cota superior de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$. Então $n \leqslant s = \sup \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ (s é cota superior de $\mathbb{N}$) e s é o menor elemento de $\mathbb{K}$ satisfazendo $n \leqslant s = \sup \mathbb{N}$, somando -1 nessa desigualdade:

$$n - 1 \leqslant s - 1 < s \tag{14.8}$$

Note que o conjunto $\mathbb{A} = \{m = n - 1;\ n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ implica que:

$$m \leqslant s - 1 < s,\ \forall\ m \in \mathbb{N} \tag{14.9}$$

Temos então que $s - 1$ é cota superior de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$ e que $s - 1 < s$, o que nos leva à uma contradição, pois assumimos que s era a menor cota superior de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$, portanto, todo corpo ordenado completo é arquimediano. ∎

Corolário 14.1. A partir desse resultado, temos que $\mathbb{R}$ é arquimediano.

14.3 Exercícios

$\boxed{\textbf{Exercício 1}}$ Mostre que para o conjunto $\mathbb{X} = (0,1)$, o subconjunto

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \text{ é cota superior de } \mathbb{X}\} \tag{14.10}$$

É igual a $\mathbb{A} = [1, +\infty) = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \geqslant 1\}$.

$\boxed{\textbf{Exercício 2}}$ Mostre que o conjunto $\mathbb{X} = (0,1)$ não possui máximo.

$\boxed{\textbf{Exercício 3}}$ Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Mostre que dado $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$, quando $\mathbb{X}$ permite máximo, então o elemento máximo de $\mathbb{X}$ é único.

$\boxed{\textbf{Exercício 4}}$ Mostre que se $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$, em que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado, possui máximo, então o máximo é cota superior de $\mathbb{X}$.

$\boxed{\textbf{Exercício 5}}$ Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo ordenado. Considere então $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$.

(a) Suponha que $\mathbb{X}$ seja limitado superiormente. Mostre que o $\sup \mathbb{X}$, quando existe, é único.
Dica: Use a tricotomia

(b) Suponha $\mathbb{Y} \subset \mathbb{K}$. Mostre que se $\mathbb{Y}$ tem elemento máximo, então o máximo é o supremo de $\mathbb{Y}$.

Fim da Aula 14

15 | Aula 15 - 05/10/2020

15.1 Algumas provas do conjunto $\mathbb{Q}$

Proposição 15.1. O conjunto dos racionais é um corpo ordenado que não é completo, mas é arquimediano.

Demonstração. Para demonstrar a proposição temos que mostrar que dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\exists\, n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} < n$. Primeiramente note que podemos assumir, sem perda de generalidade que $q > 0$, pois caso $q < 0$ temos:

- $p > 0 \wedge q < 0 \Rightarrow \dfrac{p}{q} = \dfrac{-p}{-q} \wedge -q > 0$
- $p < 0 \wedge q < 0 \Rightarrow \dfrac{p}{q} = \dfrac{-p}{-q} \wedge -q > 0$

Temos então que $q \in \mathbb{N}$ e, portanto, $q \geqslant 1$. Multiplicando ambos os lados por $|p| + 1$:

$$q \cdot (|p| + 1) \geqslant (|p| + 1) > |p| \geqslant p \tag{15.1}$$

$$\frac{1}{q} \cdot q \cdot (|p| + 1) \geqslant p \cdot \frac{1}{q} \tag{15.2}$$

$$|p| + 1 \geqslant \frac{p}{q} \tag{15.3}$$

Logo, $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{Q}$, ou seja $\mathbb{Q}$ é um corpo arquimediano. ■

Lema 15.1. Sejam x, y, z e α elementos de um anel ordenado. Supondo que:

$$x \leqslant y < z \leqslant \alpha \tag{15.4}$$

Então vale a desigualdade:

$$\alpha - x \geqslant z - y \tag{15.5}$$

Demonstração. Utilizando a desigualdade $x \leqslant y$ obtemos:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow -x \geqslant -y \tag{15.6}$$

$$+ (z) - x \geqslant -y + (z) \Rightarrow z - x \geqslant z - y \tag{15.7}$$

Utilizando agora a desigualdade $z \leqslant \alpha$:

$$z \leqslant \alpha \Rightarrow +(-x) + z \leqslant \alpha + (-x) \tag{15.8}$$

$$z - x \leqslant \alpha - x \Rightarrow \alpha - x \geqslant z - x \tag{15.9}$$

Juntando então as inequações (15.7) e (15.9):

$$\alpha - x \geqslant z - x \geqslant z - y \tag{15.10}$$

$$\boxed{\alpha - x \geqslant z - y} \tag{15.11}$$

■

Proposição 15.2. Outra prova de que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Dado um intervalo (a, b), onde $a < b$, devemos mostrar que existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} \in (a, b)$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo completo, segue que $\mathbb{R}$ é arquimediano, dessa forma, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Tome então um $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo que $\frac{1}{n} < b - a$ fixo. Seja o conjunto:

$$\mathbb{Y} = \left\{m \in \mathbb{Z};\ b \leqslant \frac{m}{n}\right\} \tag{15.12}$$

$$\mathbb{Y} = \{m \in \mathbb{Z};\ b \cdot n \leqslant m\} \tag{15.13}$$

Donde $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{Z}$ e é limitado inferiormente. Pelo PBO em $\mathbb{Z}$, temos que $\mathbb{Y}$ possui mínimo. Suponhamos m_0 o mínimo de $\mathbb{Y}$, daí segue, pela definição de $\mathbb{Y}$ que:

$$a < \frac{m_0 - 1}{n} < b \tag{15.14}$$

Suponhamos que:

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m_0}{n} \tag{15.15}$$

Temos então que:

$$\frac{m_0}{n} - \frac{m_0 - 1}{n} = \frac{1}{n} \geqslant b - a \tag{15.16}$$

O que contradiz a nossa hipótese, visto que n foi escolhido de forma a satisfazer a inequação $\frac{1}{n} < b - a$, donde $a < \frac{m_0 - 1}{n} < b$, ou seja, $\frac{m_0 - 1}{n} \in (a, b) \in \mathbb{Q}$, portanto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. ■

Corolário 15.1. O conjunto dos irracionais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{R}$ é um conjunto não-enumerável. Pelo exercício 3.(b) da Lista 3 qualquer intervalo (a, b) está em bijeção com $\mathbb{R}$, portanto, qualquer intervalo (a, b) é não-enumerável. Suponha então que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja denso em $\mathbb{R}$. Isto implica que existe um intervalo aberto (c, d), com $c < d$ que não contém nenhum número irracional. Daí segue que $(c, d) \subseteq \mathbb{Q}$, o que é uma contradição, pois qualquer intervalo da reta é não-enumerável e $\mathbb{Q}$ é enumerável. Portanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. ■

15.2 $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Teorema 15.1. $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ou seja, existe uma bijeção entre o conjunto dos números reais e o conjunto das partes de $\mathbb{N}$.

Demonstração. Já mostramos que existe uma função f de partes de $\mathbb{N}$ na reta injetora. De fato, sabemos que existe uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Também sabemos que existe uma bijeção entre o conjunto de Cantor $\mathcal{K}$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Compondo as bijeções temos que existe $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{K}$ bijetora. Mas já sabemos que $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$, segue então que existe $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ injetora.
Como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ estão em bijeção, segue que existe uma bijeção $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Considere então a seguinte função:

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \text{ dada por } x \mapsto \psi(x) = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; \frac{p}{q} < x\right\} \tag{15.17}$$

Ou seja, para cada número x, a função ψ o leva para um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Sejam então $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, temos que vale a tricotomia, logo $x < y$

ou $x > y$. Assumindo que $x < y$ (o caso em que $x > y$ é análogo), como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então $\exists\ \frac{p}{q} \in \mathbb{R};\ \frac{p}{q} \in (x, y)$, então:

$$x < \frac{p}{q} < y \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{q} \in \psi(y) \\ \frac{p}{q} \notin \psi(x) \end{cases} \tag{15.18}$$

Portanto $\psi(x) \neq \psi(y)$, logo ψ é injetora. Tome então $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada pela composição $x \mapsto \xi(x) := (\phi \circ \psi)(x)$. Como sabemos que composta de injetoras é injetora, então ξ é injetora. Logo, pelo teorema de Cantor-Schröder-Bernstein temos que:

$$\exists\ h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \text{ injetora} \tag{15.19}$$

$$\exists\ \xi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ injetora} \tag{15.20}$$

Portanto $\#R = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. ■

Fim da Aula 15

16 Aula 16 - 07/10/2020

16.1 Topologia da reta

Definição 16.1. Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{X}$ é um ponto interior de $\mathbb{X}$ quando **existe** $\varepsilon_x > 0$ tal que:

$$(\varepsilon_x - x, x + \varepsilon_x) \subset \mathbb{X} \tag{16.1}$$

Definição 16.2. Dado $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, chamamos de **Interior de** $\mathbb{X}$ o conjunto dos pontos interiores de $\mathbb{X}$ denotado por $\operatorname{int}(\mathbb{X})$ ou $[\mathring{\mathbb{X}}]$

Exemplo 16.1. Seja o conjunto $\mathbb{X} = (2, 3] = \{x \in \mathbb{R};\ 2 < x \leqslant 3\}$ temos que o conjunto de pontos interiores de $\mathbb{X}$ é:

$$[\mathring{X}] = [(2, \mathring{} 3]] = (2, 3) \subset [(2, \mathring{} 3)] \tag{16.2}$$

Exemplo 16.2. Dado o conjunto $\mathbb{X} = (2, 3)$, mostre que 3 não é ponto interior de $\mathbb{X}$.

Demonstração. Dado $\varepsilon_x > 0$, o intervalos $(3 - \varepsilon_x, 3 + \varepsilon_x)$ nunca está contido em $\mathbb{X}$. Basta tomar $y = \dfrac{3 + (3 + \varepsilon_x)}{2}$, temos portanto:

$$3 < y < 3 + \varepsilon_x \Rightarrow x \notin \mathbb{X} \tag{16.3}$$

■

Comentário 16.1. *(Notação de espaços métricos)* O intervalo $(3 - \varepsilon_x, 3 + \varepsilon_x)$ é uma notação diferente para a bola centrada em x e de raio ε, ou seja:

$$(3 - \varepsilon_x, 3 + \varepsilon_x) = \mathcal{B}_\varepsilon(x) \tag{16.4}$$

Definição 16.3. $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é um **aberto** quando todo ponto de $\mathbb{X}$ é ponto interior. Em outras palavras, $\mathbb{X}$ é **aberto** quando $\mathbb{X} = [\mathring{\mathbb{X}}]$.

Exemplo 16.3. O conjunto $\mathbb{X} = (2, 3)$ é **aberto** visto que $\mathbb{X} = [\mathring{\mathbb{X}}]$.

Exemplo 16.4. O conjunto $\mathbb{X} = (2, 3]$ não é aberto, pois $3 \in \mathbb{X}$ e 3 não é ponto interior de $\mathbb{X}$.

Definição 16.4. Dizemos que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ é **fechado** quando $\mathbb{F}^{\mathsf{C}} = \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$ é aberto

Comentário 16.2. Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não são abertos nem fechados. Por exemplo o conjunto $\mathbb{X} = (2, 3]$.

(1) $\mathbb{X}$ não é aberto, pois $3 \in \mathbb{X}$ e $3 \notin [\mathring{\mathbb{X}}]$

(2) $\mathbb{X}$ não é fechado, pois $\mathbb{X}^{\complement} = (-\infty, 2] \cup (3, +\infty]$ não é aberto, visto que $2 \in \mathbb{X}^{\complement}$ e $2 \notin [\mathring{\mathbb{X}^{\complement}}]$.

Definição 16.5. Dado $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$. Chamamos de **fronteira de** $\mathbb{X}$ o conjunto dos elementos $x \in \mathbb{R}$, tais que $\forall\ \varepsilon > 0$:

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{X} \neq \varnothing \tag{16.5}$$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{X}^{\complement} \neq \varnothing \tag{16.6}$$

Isto equivale a dizer que $\forall\ \varepsilon > 0$:

$$\exists\ y \in \mathbb{X};\ y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \tag{16.7}$$

$$\exists\ z \in \mathbb{X}^{\complement};\ z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \tag{16.8}$$

Denotamos a fronteira de $\mathbb{X}$ por $\partial\mathbb{X}$.

Exemplo 16.5. A fronteira do conjunto $\mathbb{X} = (2, 3]$ é $\partial\mathbb{X} = \{2, 3\}$ ou seja, são os pontos 2 e 3.

Exemplo 16.6. Considerando o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, temos que $[\mathring{\mathbb{Q}}] = \varnothing$, ou seja, nenhum ponto é ponto interior de $\mathbb{Q}$, no entanto $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, pois dado $x \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contém pontos racionais e irracionais. De maneira análoga, temos que $\partial\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

16.2 Mais sobre supremo

Já vimos que como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, dado $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente, existe $\alpha = \sup \mathbb{X} \in \mathbb{R}$ tal que:

(1) $x \leqslant \alpha,\ \forall\ x \in \mathbb{X}$ (ou seja, α é cota superior de $\mathbb{X}$)

(2) Se $c \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant c,\ \forall\ x \in \mathbb{X} \Rightarrow \alpha \leqslant c$ (α é a menor cota superior de $\mathbb{X}$)

Comentário 16.3. As propriedades (1) e (2) caracterizam o supremo de um conjunto $\mathbb{X}$. Ou seja, $\alpha \in \mathbb{R}$ é o supremo de um conjunto $\mathbb{X}$ se, e somente se, valem as propriedades acima mencionadas.

Lema 16.1. Dado $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente. $\alpha = \sup \mathbb{X}$ quando:

(i) $x \leqslant \alpha,\ \forall\ x \in \mathbb{X}$;

(ii) $\forall\ c \in \mathbb{R};\ c < \alpha,\ \exists\ x \in \mathbb{X};\ c < x \leqslant \alpha$.

Demonstração. Basta mostrar que (i)$\Leftrightarrow$(ii). Seja então $c \in \mathbb{R}$ tal que c é cota superior de $\mathbb{X}$, isto implica que $\alpha \leqslant c$. Sejam as relações:

$(\mathcal{P})$ c é cita superior de $\mathbb{X}$

$(\mathcal{Q})$ $\alpha \leqslant c$.

Temos então que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \Leftrightarrow (\sim \mathcal{Q}) \Rightarrow (\sim \mathcal{P})$, ou seja:

$$c < \alpha \Rightarrow \exists\ x \in \mathbb{X};\ c < x \leqslant \alpha \Rightarrow c \text{ não é cota superior de } \mathbb{X} \tag{16.9}$$

Provamos então que **são equivalentes**, no caso de $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente:

(1) α é supremo de $\mathbb{X}$;

(2) $\begin{cases} x \leqslant \alpha, \ \forall\ x \in \mathbb{X} \ (\alpha \text{ é cota superior de } \mathbb{X}) \\ (x \leqslant c, \ \forall\ x \in \mathbb{X}) \Rightarrow \alpha \leqslant c \ (\alpha \text{ é a menor cota superior de } \mathbb{X}) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x \leqslant \alpha, \ \forall\ x \in \mathbb{X} \ (\alpha \text{ é cota superior de } \mathbb{X}) \\ c < \alpha \Rightarrow \exists\ x \in \mathbb{X};\ c < x \ (\alpha \text{ é a menor cota superior de } \mathbb{X}) \end{cases}$

Sendo $c < \alpha \Leftrightarrow \varepsilon := \alpha - c > 0 \Leftrightarrow \alpha - \varepsilon = c$, ou seja, $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x \in \mathbb{X}$ tal que $\alpha - \varepsilon = c < x$.

(4) $\begin{cases} x \leqslant \alpha, \ \forall\ x \in \mathbb{X} \ (\alpha \text{ é cota superior de } \mathbb{X}) \\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x \in \mathbb{X};\ \alpha - \varepsilon < x \ (\alpha \text{ é a menor cota superior de } \mathbb{X}) \end{cases}$

■

16.3 Exercícios

Exercício 1 Mostre que todo ponto $x \in (2,3)$ é ponto interior.
Dica: Para cada $x \in (2,3)$, tome $\varepsilon_x = \min\{x-2, 3-x\} > 0$ e mostre que $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subset (2,3]$. Resta um único ponto em $(2,3]$ que veremos que não é ponto interior deste intervalo.

Exercício 2 Mostre que:

(a) $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são **abertos**

(b) Se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são abertos, então $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ é aberto

(c) Seja $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de abertos de $\mathbb{R}$. Então:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i \text{ é aberto} \tag{16.10}$$

Exercício 3 Mostre que todo aberto não-vazio é não-enumerável

Exercício 4 Dê um exemplo de uma coleção infinita de abertos $(\mathbb{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{A}_n$ é aberto, tal que

$$\mathbb{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_n \text{ não é aberto} \tag{16.11}$$

Exercício 5 Mostre que:

1. $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são **fechados**.
2. Se $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$ são fechados, então $\mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2$ é fechado.
3. Seja $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de fechados de $\mathbb{R}$. Então:

$$\mathbb{F} = \bigcap_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{F}_i \text{ é fechado} \tag{16.12}$$

Exercício 6 Mostre que os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são fechados e abertos simultaneamente são $\varnothing$ e $\mathbb{R}$.

Fim da Aula 16

17 | Aula 17 - 09/10/2020

17.1 Um exercício de supremo

Exercício Sejam $\mathbb{A} \subseteq (0, +\infty)$ e $\mathbb{B} \subseteq (0, +\infty)$ subconjuntos limitados superiormente de $\mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \{a \cdot b;\ a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{B}\}$ é limitado superiormente

(b) $\sup(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B}$

Solução (a) Sendo $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ limitados superiormente, como $\mathbb{R}$ é completo, então:

$$\exists\ \sup \mathbb{A} \in \mathbb{R} \tag{17.1}$$

$$\exists\ \sup \mathbb{B} \in \mathbb{R} \tag{17.2}$$

Tomando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ diferentes de vazio, temos:

$$\varnothing \neq \mathbb{A} \subseteq (0, +\infty) \Rightarrow \forall\ a \in \mathbb{A}\ (0 < a \leqslant \sup \mathbb{A}) \tag{17.3}$$

$$\varnothing \neq \mathbb{B} \subseteq (0, +\infty) \Rightarrow \forall\ b \in \mathbb{B}\ (0 < b < \sup \mathbb{B}) \tag{17.4}$$

Multiplicando (17.3) por b e multiplicando (17.4) por $\sup \mathbb{A}$, ficamos com:

$$0 < a \cdot b \leqslant \sup \mathbb{A} \cdot b \tag{17.5}$$

$$0 < \sup \mathbb{A} \cdot b \leqslant \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B} \tag{17.6}$$

Juntando as duas equações, temos:

$$0 < a \cdot b \leqslant \sup \mathbb{A} \cdot b \leqslant \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B} \tag{17.7}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < a \cdot b \leqslant \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B} \tag{17.8}$$

Portanto, $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ é limitado superiormente e $\sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B}$ é uma cota superior de $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$.

$\blacksquare$

(b) Pelo item (a), como $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ é limitado superiormente e $\mathbb{R}$ é completo, então existe $\sup(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \in \mathbb{R}$. Também por (a), $\sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B}$ é cota superior de $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$, donde por definição de supremo, temos que:

$$\sup(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \leqslant \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B} \tag{17.9}$$

Pois o supremo é a maior cota superior. Suponha que:

$$\sup(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) < \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B} \tag{17.10}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sup(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})}{\sup \mathbb{A}} < \sup \mathbb{B} \tag{17.11}$$

Como $\sup \mathbb{B}$ é a menor cota superior

18 | Aula 18 -

19 | Aula 19 -

20 | Aula 20 -

21 | Aula 21 -

22 | Aula 22 -

23 | Aula 23 -

24 | Aula 24 -

25 | Aula 25 -

26 | Aula 26 -

27 | Aula 27 -

28 Aula 28 -

29 | Aula 29 -

30 | Aula 30 - 18/11/2020

30.1 Compactos via coberturas abertas

Definição 30.1. Seja $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico e $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{M}$. Uma coleção de conjuntos abertos $\mathscr{C} = (\mathbb{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$, ou seja $\mathbb{C}_\lambda$ é um aberto de $\mathbb{M}$, é dita uma cobertura de $\mathbb{X}$ quando:

$$\mathbb{X} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \tag{30.1}$$

E uma subcobertura finita de $\mathscr{C}$ de $\mathbb{X}$ é uma coleção finita de abertos de $\mathscr{C}$ que ainda cobre $\mathbb{X}$. Ou seja, existem $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$ em $\mathcal{L}$ tais que:

$$\mathbb{X} \subset \mathbb{C}_{\lambda_1} \subset \mathbb{C}_{\lambda_2} \subset ... \subset \mathbb{C}_{\lambda_n} \tag{30.2}$$

Comentário 30.1.

Exemplo 30.1. Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Tomando os intervalos abertos $\mathbb{C}_n = (n-1, n+1)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ temos que:

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_n \tag{30.3}$$

Logo, $\mathscr{C} = (\mathbb{C}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ não adimite nenhuma subcobertura finita que cobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 30.2. Seja $\mathbb{X} = (0, 2)$. Tomando os intervalos abertos $\mathbb{C}_n = \left(\dfrac{1}{n}, 2\right)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\mathbb{X} = (0,2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2\right) \tag{30.4}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{X} = (0,2) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_n \tag{30.5}$$

Note que se $n < m \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{m} \Rightarrow \mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}_m$. Disto segue que para qualquer coleção finita de abertos $\mathbb{C}_{n_1},\ \mathbb{C}_{n_2}, ...,\ \mathbb{C}_{n_k}$ de $\mathscr{C}$, considerando que $n_1 < n_2 < ... < n_k$, temos que:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}_i = \underbrace{\mathbb{C}_{n_k}}_{maior\ \mathbb{C}_n} = \left(\frac{1}{n_k}, 2\right) \tag{30.6}$$

Que não cobre o conjunto $\mathbb{X} = (0, 2)$.

Definição 30.2. Seja $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico e $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$. $\mathbb{K}$ é dito compacto quando TODA cobertura de $\mathscr{C}$ por abertos de $\mathbb{K}$ possuir uma subcobertura finita que ainda cobre $\mathbb{K}$. Ou seja, se $\mathscr{C} = (\mathbb{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ é uma coleção de abertos de $\mathbb{M}$ tal que:

$$\mathbb{K} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \tag{30.7}$$

Então existem $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$ em $\mathcal{L}$ tais que:

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{C}_{\lambda_1} \subset \mathbb{C}_{\lambda_2} \subset ... \subset \mathbb{C}_{\lambda_n} \tag{30.8}$$

Teorema 30.1. *(Borel-Lebesgue) Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e fechado. Então toda cobertura $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}$ por abertos admite uma subcobertura finita. Ou seja, em $\mathbb{R}$ ou em dimensão finita*[1]*:*

$$[\text{Limitado e Fechado}] \Rightarrow \underbrace{[\text{Compacto}]}_{\text{(via coberturas)}} \tag{30.9}$$

Demonstração. Existem dois casos necessários para que a demonstração do teorema esteja completa:

(1° Caso) $\mathbb{K} = [a, b]$. Caso de coberturas onde os elementos são intervalos abertos.
Seja $\mathscr{C} = (\mathbb{I}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{L}}$ onde $\mathbb{I}_\lambda = (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ com $\alpha_\lambda < \beta_\lambda$ tal que:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbb{L}} \mathbb{I}_\lambda \tag{30.10}$$

Temos que mostrar que existe uma subcobertura finita de $\mathscr{C}$ que cobre $\mathbb{K} = [a, b]$. Seja então $\mathbb{X} = \{x \in [a, b]; [a, x]$ pode ser coberto por uma quantidade dinita de elementos de $\mathscr{C}\}$. Note que $\mathbb{X} \neq \varnothing$, pois $a \in \mathbb{X}$, ou seja, como:

$$\left([a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{I}_\lambda\right) \Rightarrow (\exists\ \lambda_\circ \in \mathcal{L};\ a \in \mathbb{I}_{\lambda_\circ}) \tag{30.11}$$

Donde $[a, a] = \{a\}$ é coberto pelo intervalo $\mathbb{I}_{\lambda_\circ}$. Logo $\mathbb{I}_{\lambda_\circ}$ é uma subcobertura finita que cobre $[a, a]$, portanto se $\mathbb{X} \neq \varnothing$ e $\mathbb{X} \subseteq [a, b]$, então $\exists \sup \mathbb{X} = c \leqslant b$.

Afirmação 1: $c = \sup \mathbb{X} \in \mathbb{X}$.

Como $a \in \mathbb{X}$ e $\sup \mathbb{X} = x \leqslant b$, segue que:

$$c \in [a, b] \Rightarrow \exists \lambda' \in \mathcal{L};\ \mathbb{I}_{\lambda'} = (\alpha_0, \beta_0) \ni c \tag{30.12}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_0 < c \tag{30.13}$$

Por definição de supremo, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que:

$$\alpha_0 < x < c = \sup \mathbb{X} \tag{30.14}$$

Mas como $x \in \mathbb{X}$, então existem $\mathbb{I}_{\lambda_1},\ \mathbb{I}_{\lambda_2}, ...,\ \mathbb{I}_{\lambda_n}$ tais que:

$$[a, x] \subset \mathbb{I}_{\lambda_1} \cup \mathbb{I}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathbb{I}_{\lambda_n} \tag{30.15}$$

[1] A implicação da (30.9) é falsa em dimensão infinita. Já vimos o exemplo da bola unitária em $\ell^\infty(\mathbb{N})$

Temos então que $\alpha_0 < x \leqslant c < \beta_0$ com $\mathbb{I}_{\lambda'} = [\alpha_0, \beta 0]$, portanto:

$$[x, c] \subset [\alpha_0, \beta_0] \tag{30.16}$$

Juntando então o que foi escrito em (30.15) e (30.16), temos que:

$$[a, c] \subset \mathbb{I}_{\lambda_1} \cup \mathbb{I}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathbb{I}_{\lambda_n} \tag{30.17}$$

$$\Downarrow$$

$$\sup \mathbb{X} = c \in \mathbb{X} \tag{30.18}$$

Afirmação 2: $\sup X = c = b$. Note que isto conclui a demonstração para o caso de coberturar por intervalos abertos, pois teremos mostrado que $[a, b]$ admite uma subcobertura finita.

Sabemos que $\sup \mathbb{X} = c \leqslant b$. Suponhamos então que $\sup \mathbb{X} < b$. Como $c \in \mathbb{X}$, temos que $[a, c]$ possui uma subcobertura finita

$$[a, c] \subset \mathbb{I}_{\lambda_0} \cup \mathbb{I}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathbb{I}_{\lambda_n} \tag{30.19}$$

São abertos de $\mathscr{C}$, onde $c \in \mathbb{I}_{\lambda_0} = (\alpha_0, \beta_0)$.Então $\exists\ c'$ tal que $c < c' < b$ e $c' \in (\alpha`_0, \beta_0)$. Tome então um $\gamma = \min\{b, \beta_0\}$. Temos então que:

$$[a, c'] \subset \mathbb{I}_{\lambda_0} \cup \mathbb{I}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathbb{I}_{\lambda_n} \tag{30.20}$$

Absurdo, pois teríamos que $\sup \mathbb{X} = c < \gamma \in \mathbb{X}$, logo $c = b$.

Portanto, toda cobertura de $[a, b]$ por intervalos abertos possui uma subcobertura finita.

(2° Caso) Caso de coberturas por abertos quaisquer. Seja $\mathscr{C} = (\mathbb{A}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ uma coleção de abertos tal que:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{A}_\lambda \tag{30.21}$$

Temos que mostrar que existe uma subcobertura finita de $\mathscr{C}$ que ainda cobre $[a, b]$, temos então a (30.21) implica que para cada $x \in [a, b]$, existe $\lambda_x \in \mathcal{L}$ tal que $x \in \mathbb{A}_{\lambda_x}$. Como $\mathbb{A}_{\lambda_x}$ é aberto e $x \in \mathbb{A}_x$, então existe um intervalo $\mathbb{I}_x = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset \mathbb{A}_{\lambda_x}$, temos então:

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} \mathbb{I}_x \subset \bigcup_{x \in [a,b]} \mathbb{A}_{\lambda_x} \tag{30.22}$$

Pelo 1° caso, sabermos que toda cobertura por intervalos abertos de $[a, b]$ possui uma cobertura finita, assim, existem $\chi_1,\ \chi_2, .., \ \chi_n$ em $[a, b]$ tais que:

$$[a, b] \subset \mathbb{I}_{\chi_1} \cup \mathbb{I}_{\chi_2} \cup ... \cup \mathbb{I}_{\chi_n} \tag{30.23}$$

Mas para cada um desses intervalos, temos um intervalo aberto da cobertura original, ou seja:

$$\mathbb{I}_{\chi_1} \subset \mathbb{A}_{\lambda_{\chi_1}},\ \mathbb{I}_{\chi_2} \subset \mathbb{A}_{\lambda_{\chi_2}}, ...,\ \mathbb{I}_{\chi_n} \subset \mathbb{A}_{\lambda_{\chi_n}} \tag{30.24}$$

Portanto:

$$[a, b] \subset \mathbb{I}_{\chi_1} \cup \mathbb{I}_{\chi_2} \cup ... \cup \mathbb{I}_{\chi_n} \subset \mathbb{A}_{\lambda_{\chi_1}} \cup \mathbb{A}_{\lambda_{\chi_2}} \cup ... \cup \mathbb{A}_{\lambda_{\chi_n}} \tag{30.25}$$

Logo $\left(\mathbb{A}_{\lambda_{\chi_i}}\right)_{i=1}^{n}$ é uma subcobertura finita de $\mathscr{C}$ que cobre $[a, b]$. ■

Comentário 30.2. Provamos que toda cobertura por abertos de um intervalos fechado e limitado $[a, b]$ possui uma subcobertura finita.

Comentário 30.3. Provaremos mais adiante que todas as definições de conjuntos compactos são equivalentes.

30.2 Borel-Lebesgue caso geral

Demonstração. Seja $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado e fechado. Temos que mostrar que toda cobertura $\mathscr{C} = (\mathbb{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ admite uma subcobertura finita.
Se $\mathbb{F}$ é limitado, então existe um intervalo $[a, b]$ tal que $\mathbb{F} \subseteq [a, b]$. Como $\mathbb{F}$ é fechado, então $\mathbb{A} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{F}$ é aberto, portanto:

$$\mathbb{F} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \Rightarrow \mathbb{F} \cup \mathbb{A} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \cup \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{F} \cup \mathbb{A} = \mathbb{R} \tag{30.26}$$

Ou seja:

$$[a, b] \subset \mathbb{R} = \mathbb{F} \setminus \mathbb{A} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \cup \mathbb{A} \tag{30.27}$$

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \cup \mathbb{A} \tag{30.28}$$

Tomo então uma subcobertura finita de $\bigcup\limits_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathbb{C}_\lambda \cup \mathbb{A}$, ou seja, existem $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$ tais que:

$$\mathbb{F} \subseteq [a, b] \subset \mathbb{C}_{\lambda_1} \cup \mathbb{C}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathbb{C}_{\lambda_n} \cup \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}_{\lambda_1} \cup \mathbb{C}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathbb{C}_{\lambda_n} \tag{30.29}$$

Logo $\mathbb{F}$ possui uma subcobertura finita. ■

Fim da Aula 30

31 | Aula 31 - 23/11/2020

31.1 Séries

Definição 31.1. Dada uma sequência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos como sendo a *n-ésima soma parcial*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{31.1}$$

Da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, ou em outra notação $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Definição 31.2. Dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente quando existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$. Neste caso:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} S_n} \tag{31.2}$$

Caso contrário, dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

Exemplo 31.1. Considerando a sequência $x_n = (-1)^n$, temos S_n's da forma:

$$S_1 = -1 \tag{31.3}$$
$$S_2 = (-1) + (-1)^2 = 0 \tag{31.4}$$
$$S_3 = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 = -1 \tag{31.5}$$

$$\vdots$$

$$S_{2n+1} = -1 \tag{31.6}$$
$$S_{2n} = 0 \tag{31.7}$$

Logo a sequência de somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, portanto não existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$, segue então que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.

Exemplo 31.2. Sendo $a \in \mathbb{R}$ e assumindo $a \geqslant 1$. Considerando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ temos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$S_1 = a^1 \geqslant 1 \tag{31.8}$$
$$S_2 = a^1 + a^2 \geqslant 1 + 1 \geqslant 2 \tag{31.9}$$

Por indução, temos que $a^n \geqslant 1, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, portanto:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{31.10}$$

Pelo exercício 1 da lista 6 temos que dadas duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ que satisfazem $x_n \leqslant y_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \tag{31.11}$$

Temos então que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) = +\infty \tag{31.12}$$

Portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ é divergente quando $a \geqslant 1$.

Exemplo 31.3. Sendo $a \in \mathbb{R}$, assumindo $0 < a < 1$ e tomando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, temos que as n-ésimas somas parciais dessa série são dadas por $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i$ temos que, tomando $n \geqslant 2$:

$$S_n - a \cdot S_n = \sum_{i=1}^{n} a^i - a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a \right) = a - a^{n+1} \tag{31.13}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_n = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}} \tag{31.14}$$

Tomando o limite desta soma:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \frac{a - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{a}{1 - a} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{1 - a}}_{=0} = \frac{a}{1 - a} \tag{31.15}$$

Logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ é convergente e converge para $\dfrac{a}{1 - a}$.

Comentário 31.1. Dependendo da série, iniciaremos a soma a partir do zero ou outro valor qualquer que melhore os cálculos. Note que:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ é convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ é convergente}} \tag{31.16}$$

E vale que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{31.17}$$

Definição 31.3. Dizemos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é absolutamente convergente quando:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \text{ é convergente}} \tag{31.18}$$

Lema 31.1. Toda série absolutamente convergente é convergente. Ou seja, se a série $S_n' = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ converge, então a série $S_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é convergente, portanto:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n' \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n \tag{31.19}$$

Demonstração. Como $(S_n)_n$ é uma sequência de números reais, então $(S_n)_n$ é convergente se, e somente se, $(S_n)_n$ é de Cauchy, o mesmo vale para a sequência $(S_n')_n$. Mas por hipótese S_n' é convergente, portanto $\exists \lim_{n\to\infty} S_n'$, segue então que $(S_n')_n$ é de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0, \exists\, n_{0\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\left|S_n' - S_m'\right| < \varepsilon,\ \forall\ m, n \geqslant n_0 \tag{31.20}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $n > m$ (ou seja $n = m + p,\ p \in \mathbb{N}$), portanto:

$$\left|S_n' - S_m'\right| = \left|S_{m+p}' - S_m'\right| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0 \tag{31.21}$$

Ou seja:

$$||x_{m+1}| + |x_{m+2}| + ... + |x_{m+p}|| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.22}$$

$$\Updownarrow$$

$$|x_{m+1}| + |x_{m+2}| + ... + |x_{m+p}| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.23}$$

É equivalente a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ser de Cauchy. Assim provamos que dado $\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_{m+p}| \leqslant |x_{m+1}| + |x_{m+2}| + ... + |x_{m+p}| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.24}$$

$$\Downarrow$$

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_{m+p}| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.25}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|S_{m+p}' - S_m'\right| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.26}$$

Provamos então que dado $\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left|S_{m+p}' - S_m'\right| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.27}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|S_n' - S_m'\right| < \varepsilon,\ \forall\ m, n \geqslant n_0 \tag{31.28}$$

Ou seja, $(S_n)_n$ é de Cauchy, e portanto convergente, assim, concluímos que $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, a série:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ é convergente} \tag{31.29}$$

■

Corolário 31.1. (*Critério de Cauchy da convergência de séries*) A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ é convergente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left|\sum_{i=m}^{m+p} x_i\right| = |x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+p}| < \varepsilon,\ \forall\ m \geqslant n_0,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \tag{31.30}$$

$$\Updownarrow$$

$$(S_n)_n \text{ é de Cauchy} \tag{31.31}$$

Lema 31.2. Definindo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ como a série harmônica, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \tag{31.32}$$

Ou seja, a série harmônica diverge.

Demonstração. (*Por absurdo*) Suponhamos que exista o limite $S = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$. Podemos escrever então que S é da forma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{3}}}_{\geqslant \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{5}}}_{\geqslant \frac{1}{6}} + \frac{1}{6} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{7}}}_{\geqslant \frac{1}{8}} + \frac{1}{8} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{9}}}_{\geqslant \frac{1}{10}} + \frac{1}{10} + \ldots \tag{31.33}$$

$$\Downarrow$$

$$S \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{=\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}_{=\frac{1}{5}} + \tag{31.34}$$

$$S \geqslant \frac{1}{2} + S \Rightarrow 0 \geqslant \frac{1}{2} \tag{31.35}$$

Absurdo, logo $\nexists\ S = \lim_{n \to \infty} S_n$, portanto a série harmônica diverge para infinito. ■

Fim da Aula 31

32 | Aula 32 - 25/11/2020

32.1 Critério de comparação

Proposição 32.1. Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ duas sequências de números reais não-negativas tais que $x_n \leqslant y_n$. Note que se $x_n \leqslant y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então vale que:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_n = S_n \leqslant S'_n = \sum_{i=1}^{n} y_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{32.1}$$

Ou seja:

(i) Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ é convergente, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ também é convergente.

(ii) Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é divergente, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ também é divergente. Em particular temos que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n = +\infty \tag{32.2}$$

Demonstração. EXERCÍCIO
Dica: Observe que a sequência S_n é não-decrescente, pois

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{x_{n+1}}_{\geqslant 0} \geqslant S_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{32.3}$$

Já provamos que, neste caso, $(S_n)_n$ converge se, e somente se $(S_n)_n$ é limitada. Vale o mesmo para $(S'_n)_n$, temos então pelo confronto:

$$0 \leqslant S_n \leqslant S'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{32.4}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} S'_n \tag{32.5}$$

Também já provamos que o limite quando existe é o supremo. ∎

32.2 Segunda prova de que a série harmônica converge

Voltando ao Lema (31.2) temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = +\infty \tag{32.6}$$

Demonstração. (*Prova direta - usando comparação*) Vamos mostrar que $(S_n)_n$ não é de Cauchy (não converge), mostrando que $(S_n)_n$ possui uma subsequência que vai para infinito. Tome então a subsequência $(S_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $n_k = 2^k$. Temos então:

$$S_{2^k} = 1 + \overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}^{\geqslant\frac{1}{4}} + \overbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}^{\geqslant\frac{1}{8}} + \overbrace{\left(\frac{1}{8}+...+\frac{1}{15}\right)}^{\geqslant\frac{1}{16}} + \overbrace{\left(\frac{1}{16}+...\right)}^{\geqslant\frac{1}{32}} + \tag{32.7}$$

$$+ ... + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}}+...+\frac{1}{2^{k-1}-1}\right)}_{\geqslant\frac{1}{2^k}} + \frac{1}{2^k} \tag{32.8}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{2^k} > 1 + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + ... + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \tag{32.9}$$

$$S_{2^k} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+..+\frac{1}{2}}_{(k-1)\text{ parcelas}} + \frac{1}{2^k} > k\cdot\frac{1}{2} \tag{32.10}$$

$$S_{2^k} > k\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2^k} \geqslant \lim_{k\to\infty} k\cdot\frac{1}{2} = +\infty \tag{32.11}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} S_{2^k} = +\infty \tag{32.12}$$

Logo, a subsequência $(S_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ diverge, sendo assim, pela proposição (32.1) temos que a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também diverge e portanto a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}$ é divergente. ■

Exemplo 32.1. Considere a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$. Vamos mostrar que esta série é convergente por comparação. Temos então que vamos ter que comparar a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^p}$ com um outra série que sabemos que converge. Temos inicialmente que:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} \geqslant \underbrace{S_n + \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(2^n+1)^p}}_{S'_n} \tag{32.13}$$

$$S'_n = 1 + \left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p}+...+\frac{1}{7^p}\right) + ... + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+...+\frac{1}{(2^{n-1}-1)^p}\right) \tag{32.14}$$

$$S'_n \leqslant 1 + 2\cdot\frac{1}{2^p} + 2^2\cdot\frac{1}{4^p} + 2^3\cdot\frac{1}{8^p} + ... + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{(2^{n-1})^p} \tag{32.15}$$

$$S'_n \leqslant 1 + (2^{1-p}) + (2^{1-p})^2 + (2^{1-p})^3 + ... + (2^{1-p})^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(2^{1-p})^i \tag{32.16}$$

Portanto S'_n é menor ou igual que uma série geométrica de razão 2^{1-p}. Como $p>1$ temos então que $1-p<0$, ou seja:

$$2^{1-p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} < 1 \tag{32.17}$$

Logo, podemos concluir que:

$$S_n \geqslant \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (2^{1-p})^i}_{\text{converge}} \tag{32.18}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (2^{1-p})^i = \frac{1}{1-2^{1-p}} \tag{32.19}$$

Então, por critério de comparação a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

Comentário 32.1. Fixado um $a \geqslant 1$, temos que a função $f(p) = a^p$, $(p > 0,\ p \in \mathbb{R})$ é monótona se $p < q \Rightarrow a^p \leqslant a^q$, daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$n^p < n^1 = n,\ \forall\ 0 < p < 1 \tag{32.20}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^p},\ \forall\ 0 < p < 1 \tag{32.21}$$

Donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ quando $0 < p < 1$. Ou seja:

$$\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty \ \boxed{\text{diverge}} \text{ quando } 0 < p < 1 \\
\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \mathcal{L} \ \boxed{\text{converge}} \text{ quando } p > 1
\end{tikzcd}$$

32.3 Critério do termo geral:

Se $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é convergente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Equivalentemente, se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ (inclui o caso quando $\nexists \displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$), então série diverge.

Demonstração. Se $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é convergente, então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ou seja, $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$, implicando que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|S_m - S_n| < \varepsilon,\ \forall\ m, n \geqslant n_0 \tag{32.22}$$

Tomando então $m = n - 1$, temos:

$$|S_m - S_n| = |S_n - S_m| = |S_n - S_{n-1}| = |x_n| < \varepsilon,\ \forall\ n \geqslant n_0 \tag{32.23}$$

Provamos então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \varepsilon$, $\forall\ n \geqslant n_0$, ou seja:

$$|x_n - 0| < \varepsilon,\ \forall\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \tag{32.24}$$

■

Exemplo 32.2. A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = +\infty$, pois pela lista 6, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \text{ diverge} \tag{32.25}$$

Comentário 32.2. Não vale a volta, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, mas $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

32.4 Exercícios

Exercício 1. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ seja uma série convergente. Mostre que:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\{S_n;\ n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\{S_{\mathcal{J}};\ \mathcal{J} \subset \mathbb{N},\ \mathcal{J} \text{ finito}\}$ tal que $S_{\mathcal{J}} = \sum_{i\in\mathcal{J}} x_i$

Exercício 2. Seja $\mathcal{I}$ um conjunto. Definimos a série indexado por $\mathcal{I}$ sendo a soma formal:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i \tag{32.26}$$

Note que $\mathcal{I}$ pode ser não-enumerável. Suponhamos que $x_i \geqslant 0,\ \forall\, i \in \mathcal{I}$. Definindo a soma por:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i := \sup\left\{\sum_{i\in\mathcal{J}} x_i;\ \mathcal{J} \subset \mathcal{I},\ \mathcal{J} \text{ finito}\right\} \tag{32.27}$$

Mostre que se $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i < \infty$, ou seja $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i \in \mathbb{R}$, então o conjunto $\mathbb{I} := \{i \in \mathcal{I};\ x_i > 0\}$ é enumerável.

Dica: Usar o Exercício 1.(b)

Fim da Aula 32

33 | Aula 33 - 27/11/2020

33.1 Teste da razão

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n,\ x_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, vale que:

(1) Se $\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

(2) Se $\lim_{n\to\infty} \inf \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

(3) Casos onde $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$ ou $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$ são iguais a 1, não podemos concluir nada.

Demonstração. (*1*) Se $\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < c < 1 \tag{33.1}$$

Então, da lista 5, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < c,\ \forall\, n \geqslant n_0$, ou seja:

$$x_{n_0+1} < c \cdot x_{n_0} \tag{33.2}$$

E também:

$$x_{n_0+2} < c \cdot x_{n_0+1} \tag{33.3}$$

$$x_{n_0+2} < c \cdot x_{n_0+1} < c \cdot c \cdot x_{n_0} = c^2 \cdot x_{n_0} \tag{33.4}$$

$$x_{n_0+2} < c^2 \cdot x_{n_0} \tag{33.5}$$

Logo, por indução, podemos concluir que $x_{n_0+k} < c^k \cdot x_{n_0},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\mapsto \sum_{k=1}^{m} x_{n_0+k} < \sum_{k=1}^{m} c^k \cdot x_{n_0} \tag{33.6}$$

Tomando então o limite quando $m \to \infty$ temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_0+k} < \left(\sum_{k=1}^{\infty} c^k\right) x_{n_0} = \frac{c}{c-1} \cdot x_{n_0} < +\infty \tag{33.7}$$

Onde na última igualdade usamos o fato de que $0 < c < 1$ e concluímos que a série entre parênteses é uma série geométrica e portanto convergente. Temos então, pelo critério de comparação:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_0+k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_n < +\infty \tag{33.8}$$

Ou seja:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathbb{R} \tag{33.9}$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. ■

Demonstração. (*2*) Se $1 < \lim_{n\to\infty} \inf \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$, então $\exists\ c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$1 < c < \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \tag{33.10}$$

Portanto $\exists\ n_0 \to \mathbb{N}$ tal que:

$$1 < c < \frac{x_{n+1}}{x_n},\ \forall\ n \geqslant n_0 \tag{33.11}$$

Então temos desta desigualdade que:

$$x_{n_0} < x_{n_0+1} \tag{33.12}$$

$$x_{n_0+1} < x_{n_0+2} \tag{33.13}$$

Logo, por indução:

$$x_{n_0} < x_{n_0+1} < x_{n_0+2} < ... < x_{n_0+k},\ \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{33.14}$$

Temos então uma sequência crescente, ou seja:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_0+k} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \neq 0 \tag{33.15}$$

Então, pelo critério do termo geral, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge. ■

Demonstração. (*3*) Para provar, basta apenas fornecer contraexemplos em que $\lim_{n\to\infty} \inf = \lim_{n\to\infty} = 1$ tal que uma das séries converge e a outra diverge. Tome então a série harmônica que sabemos que diverge. Temos então a série $x_n = \frac{1}{n}$, daí:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \tag{33.16}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \inf \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1 \tag{33.17}$$

Agora tomando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, temos a sequência $y_n = \frac{1}{n^p}$, segue então que:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n}^p} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^p} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} \tag{33.18}$$

Como assumimos que $p > 1$, então o denominador vai tender à 1 no infinito, visto que $\frac{1}{n} \to 0$ no infinito, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \inf \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1 \tag{33.19}$$

E sabemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p > 1$ converge, portanto se $\lim_{n\to\infty} \inf = \lim_{n\to\infty} \sup = 1$, então não podemos concluir nada da série. ■

33.2 Questão da série convergente

Se $\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$, podemos concluir que a série é divergente? Pois contrariaria o item (1) do teste da razão.

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série convergente de números reais positivos. Defino então a seguinte série:

$$\underbrace{y_1}_{x_1} + \underbrace{2y_1}_{x_2} + \underbrace{y_2}_{x_3} + \underbrace{2y_2}_{x_4} + \underbrace{y_3}_{x_5} + \underbrace{2y_3}_{x_6} + ... + \underbrace{y_n}_{x_{n_i}} + \underbrace{2y_n}_{x_{n_p}} \tag{33.20}$$

Ou seja:

$$x_n = \begin{cases} y_{(n+1)/2}, \text{ se } n \text{ é impar} \\ 2 \cdot y_{n/2}, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases} \tag{33.21}$$

Temos então que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pode ser escrita na forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot x_n \tag{33.22}$$

Como a soma de séries convergentes é convergente e uma constante multiplicada por uma série convergente também converge (Olhar exercícios), então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente. Mas temos que a subsequência dos índices pares da sequência $\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)$:

$$\frac{x_{2k}}{x_{2k-1}} = \frac{2 \cdot y_k}{y_k} = 2, \ \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{33.23}$$

Então $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{x_{2k}}{x_{2k-1}}\right) = 2$, ou seja, 2 é valor de aderência da sequência $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, o que implica que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \geqslant 2 > 1 \tag{33.24}$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$. Portanto, não podemos concluir que a série é divergente apenas pelo fato de que $\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$ ■

Corolário 33.1. Se tivermos uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ composta de termos positivos, vale que:

(1) Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge;

(2) Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge;

(3) Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1$, então não podemos concluir nada sobre a série.

Corolário 33.2. Se tivermos uma série $\sum_{n=1}^{\infty}$ composta por termos não-nulos, então vale que:

(1) Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

(2) Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não é absolutamente convergente.

Exemplo 33.1. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \tag{33.25}$$

Em particular:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \approx 2,71828... \in \mathbb{R} \tag{33.26}$$

Quando $x \neq 0$, temos a sequência $y_n = \frac{|x|^n}{n!}$ tal que:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \tag{33.27}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right) = 0 < 1 \tag{33.28}$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right|$ é convergente, ou seja, $\sum_{n=1}^{x^n} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente.

33.3 Teste da raíz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série de termos positivos, temos então:

(1) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} < 1$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente;

(2) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} > 1$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente;

(3) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} = 1$, então não podemos concluir nada.

Demonstração. (*1*) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} < 1$, então $\exists\ x \in \mathbb{R},\ c > 0$, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} < c < 1 \tag{33.29}$$

Portanto, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{x_n} < c,\ \forall\ n \geqslant n_0$. Multiplicando n-vezes (elevando a n), ficamos com:

$$0 < x_n < c^n,\ \forall\ n \geqslant n_0,\ 0 < c < 1 \tag{33.30}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \sum_{n=n_0}^{m} x_n < \sum_{n=n_0}^{m} c^n,\ \forall\ n \geqslant n_0 \tag{33.31}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \lim_{m\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} c^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} c^n \tag{33.32}$$

Como $0 < c < 1$, então $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c^n$ converge para $\dfrac{c^{n_0}}{1-c}$, pois é uma série geométrica, logo $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$ converge, ou seja:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n_0} < \infty \tag{33.33}$$

Portanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente. ■

Demonstração. (*2*) Se $1 < \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$1 < c < \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} \tag{33.34}$$

Lembrando que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n}$ é valor de aderência da sequência $(\sqrt[n]{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$, então $\exists\ (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{x_{n_k}} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} \tag{33.35}$$

Pela (33.34), então $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n_k]{x_{n_k}} > c > 1,\ \forall\ k \geqslant k_0$, portanto:

$$1 < c^{n_k} < x_{n_k},\ \forall\ k \geqslant k_0 \tag{33.36}$$

Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, pois $1 < c$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, portanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge. ■

Demonstração. (*3*) Para demonstrar que não podemos concluir nada com a hipótese, basta mostrar exemplos que contrariem a hipótese. Considere então a série harmônica que diverge. Temos então:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \tag{33.37}$$

Pela lista 6, temos que $\sqrt[n]{n} = 1, \ \forall \ n > 0$, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \tag{33.38}$$

Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \tag{33.39}$$

Tomando agora a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\forall \ p > 1$, que sabemos que converge, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} \tag{33.40}$$

Sabemos que $\sqrt[n]{n^p} = sqrt[n]n \cdot \sqrt[n]{n} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{n}$ p vezes, portanto, $\sqrt[n]{n^p} = 1$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1 \tag{33.41}$$

Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1 \tag{33.42}$$

Portanto, não podemos concluir nada caso $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} = 1$. ■

33.4 Exercícios

Exercício 1. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ duas séries convergentes de números reais. Mostre que:

(a) Dado $c \in \mathbb{R}$ e definindo $z_n = c \cdot x_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é uma série convergente. Mostre também que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot x_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{33.43}$$

(b) Definindo $w_n = x_n + y_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ é convergente. Mostre também que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{33.44}$$

Dica: Lembrar das propriedades básicas de limite.

Fim da Aula 33

34 | Aula 34 - 30/11/2020

34.1 Eficiência do teste da raiz

Para dar uma intuição maior de que a eficiência do teste da raiz é maior do que a eficiência do teste da razão é dando um exemplo que com o teste da razão não podemos concluir nada sobre a série, mas com o teste da raiz conseguimos obter um resultado concreto e fechado.

Exemplo 34.1. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \ldots\right) \tag{34.1}$$

Que pode ser escrita por:

$$x_n = \begin{cases} x_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n} \\ \\ x_{2n} = \dfrac{1}{3^n} \end{cases} \tag{34.2}$$

Neste caso, temos os quocientes:

$$\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{\dfrac{1}{3^n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{34.3}$$

$$\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{3^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \tag{34.4}$$

Por construção temos que o quociente $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Segue então que:

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \geqslant 0 \tag{34.5}$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 0 \tag{34.6}$$

Que é um resultado que não conclui nada sobre a sequência. Temos no outro caso que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \tag{34.7}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \infty \tag{34.8}$$

Que também não conclui nada sobre a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ou seja, utilizando o teste da razão, não conseguimos extrair nenhuma informação da sequência. No entanto, pelo teste da raiz temos que:

$$\sqrt[2n]{x_{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{34.9}$$

$$\sqrt[2n-1]{x_{2n-1}} = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2n-1}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}} \tag{34.10}$$

Esta última que, quando $n \to \infty$, nos fornece o valor de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Temos então que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{x_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{x_{2n-1}} < 1 \tag{34.11}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{x_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \tag{34.12}$$

O que nos dá, pelo teste da raiz que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Teorema 34.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos. Então:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\inf\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{x_n}} \leqslant \boxed{\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{x_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)} \tag{34.13}$$

A primeira desigualdade a prova fica como exercício, ou seja, o primeiro retângulo em azul. A segunda desigualdade foi provada na P2. Provaremos então a terceira desigualdade (segundo retângulo em azul). O enunciado do teorema nos fornece imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 34.1. Se o teste da razão é útil para decidir se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, então certamente o mesmo vale para o teste da raiz, ou seja, se o teste da razão diz que a série converge, então o uso do teste da razão também vai mostrar a convergência da série. (Note que não vale a recíproca, vide exercício anterior).

Demonstração. (2) (*Por absurdo*) Suponhamos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{x_n} > \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \tag{34.14}$$

Existe então um $c > 0$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{x_n} > c > \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \tag{34.15}$$

A segunda desigualdade nos diz que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < c,\ \forall\ n \geqslant n_0$, ou seja:

$$\begin{cases} \frac{x_{n+1}}{x_n} < c \\ \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} < c \\ \quad\vdots \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} < c \end{cases} \tag{34.16}$$

Tomando então o produto das desigualdades, obtemos:

$$\frac{x_n}{\cancel{x_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{x_{n-1}}}{\cancel{x_{n-2}}} \cdot \cancel{\cdots} \cdot \frac{\cancel{x_{n+2}}}{\cancel{x_{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{x_{n+1}}}{x_n} < c^{n-n_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_n}{x_{n_0}} < c^{n-n_0},\ \forall\ n \geqslant n_0 \tag{34.17}$$

$$x_n < c^n \cdot \frac{x_0}{c^{n_0}},\ \forall\ n \geqslant n_0 \tag{34.18}$$

$$\sqrt[n]{x_n} < c \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{x_{n_0}}{c^{n_0}}}}_{\to 1 \text{ no } \infty} \tag{34.19}$$

Tomando então o lim sup em ambos os lados:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} \leqslant c \cdot \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{x_{n_0}}{c^{n_0}}} \tag{34.20}$$

Que contradiz a hipótese inicial, portanto temos um absurdo, logo vale que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{x_n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \tag{34.21}$$

■

34.2 Funções analíticas

Dado um intervalo aberto $\mathbb{I}$ e $x_0 \in \mathbb{I}$, temos que:

Definição 34.1. Dizemos que $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ é analítica em $x_0 \in \mathbb{I}$ quando $\exists\ r > 0$ e uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,\ \forall\ x \in (x_0 - r, x_0 + r)} \tag{34.22}$$

Quando isso acontece, podemos mostrar que f possui derivadas em todas as ordens em x_0 e também:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0}{n!} \tag{34.23}$$

Ou seja, definindo $(x - x_0)^0 = 1$, temos que:

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0) = a_0 \tag{34.24}$$

$$f^{(1)} = a_1 \tag{34.25}$$

$$f^{(2)} = a_2 \tag{34.26}$$

$$\vdots$$

34.3 Raio de convergência de uma série de potências

Proposição 34.1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(a_n)_n$ uma sequência de números reais. Existe $r \in [0, \infty)$ tal que:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente $\forall\, x \in (x_0-r, x_0+r)$. Em particular, quando $r \to \infty \Rightarrow x \in \mathbb{R}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverge $\forall\, x \in (\infty, x_{0-r}) \cup (x_0+r, \infty) \Leftrightarrow x \notin [x_0-r, x_{0+r}]$;

(3) $r = \dfrac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Demonstração. (*1 e 3*) Aplicando o teste da raiz na série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-x_0|^n \tag{34.27}$$

Temos que:

(i) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x-x_0|^n} < 1$, então a série converge.

(ii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x-x_0|^n} > 1$, então a série diverge.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x-x_0|^n} = \lim_{n\to\infty} \sup \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0|\right) < 1 \tag{34.28}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| < 1 \tag{34.29}$$

Que implica que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente. Temos por fim:

$$|x-x_0| < \underbrace{\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}}_{:=r} \tag{34.30}$$

■

Demonstração. (*2*) EXERCÍCIO ■

34.4 $\mathcal{A}$nálise $\mathbb{R}$eal $\times$ $\mathcal{A}$nálise $\mathbb{C}$omplexa

No curso de análise real, trabalhamos com o corpo $\mathbb{R}$ e temos que a definição de derivada (ainda não foi apresentada, mas provavelmente será):

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ x_0 \in \mathbb{R} \tag{34.31}$$

No entanto existem funções que são diferenciáveis, mas que não existe a segunda derivada. Já no curso de análise complexa, tratamos os resultados no corpo $\mathbb{C}$. A definição de derivada continua válida neste corpo, ou seja:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \ z_0 \in \mathbb{C} \tag{34.32}$$

Mas neste caso, temos que toda função holomorfa (ou seja, diferenciável em $\mathbb{C}$) é analíticae portanto possui derivada de todas as ordens. Ou seja, se:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{34.33}$$

Então existe, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{34.34}$$

34.5 Medida nula

Definição 34.2. Dizemos que um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ tem medida nula quando $\forall \ \varepsilon > 0$, existe uma coleção de intervalos abertos $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que:

(1) $\mathbb{X} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{I}_n| < \varepsilon$. Lembre que, conforme "definimos"na nota de rodapé 1 da página (46):

$$m((a,b)) = m([a,b]) = b - a \tag{34.35}$$

Denotaremos um conjunto de medida nula por $m(\mathbb{X}) = 0$.

Lema 34.1. *Todo conjunto enumerável tem medida nula.*

Demonstração. Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável, ou seja $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Equivalentemente $\exists \ f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ sobrejetora tal que $f(n) = x_n$. Então dado $\varepsilon > 0$, para cada $x_n \in \mathbb{X}$, tomo o seguinte intervalo:

$$\mathcal{I}_n = \left(x - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \tag{34.36}$$

Daí, segue que $\mathbb{X} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$. Temos também que:

$$|\mathcal{I}_n| = \left(x + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) - \left(x - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{34.37}$$

Logo, tomando a soma infinita, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{I}_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 0 \tag{34.38}$$

Portanto, todo conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ enumerável tem medida nula. ■

Comentário 34.1. Em teoria da medida, teremos uma medida λ (denominada *Medida de Lebesgue*) tal que:

$$\lambda((a,b)) = b - a \tag{34.39}$$

E para todo conjunto $\mathbb{X}$ de medida nula teremos $\lambda(\mathbb{X}) = 0$.

34.6 Exercícios

Exercício 1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ e uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que as seguintes séries de potência possuem o mesmo raio de convergência:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n(x-x_0)^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n(x-x_0)^{n-2}$.

Exercício 2. Mostre que o conjunto de Cantor $\mathcal{K}$ tem medida nula. Pra facilitar a vida clica aqui: 46

Fim da Aula 34

35 | Aula 35 - 02/12/2020

35.1 Integral de Riemann

Definição 35.1. Dado um intervalo fechado $[a, b]$, chamamos de partição de $[a, b]$, conjuntos finitos de pontos que contenham os pontos a e b. Ou seja a partição de $[a, b]$ pode ser dada por:

$$\mathcal{P} = \{\underbrace{x_0}_{=a} \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{n-1} \leqslant \underbrace{x_n}_{=b}\} \tag{35.1}$$

Vamos sempre nomear os ponto fazendo $x_0 = a$ e $x_n = b$ quando $\mathcal{P}$ tiver $n+1$ elementos. Nesse caso, quando a partição possuir $n+2$ elementos, os intervalos fechados:

$$\mathcal{I}_1 = [x_0, x_1],\ \mathcal{I}_2, ...,\ \mathcal{I}_n = [x_{n-1}, x_n] \tag{35.2}$$

São chamados de intervalos da partição. Onde os comprimentos dos intervalos são dados por::

$$|\mathcal{I}_i| = x_i - x_{i-1},\ \forall\ i = 1, 2, ..., n \tag{35.3}$$

Definição 35.2. Dada uma função $f : [a, b] \to R$ limitada. Definimos a soma inferior e a soma superior da f em relação à $\mathcal{P}$ como sendo:

A soma inferior de f em relação à $\mathcal{P}$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \inf\left[f(\mathcal{I}_i)\right] \cdot |\mathcal{I}_i| \tag{35.4}$$

A soma superior de f em relação à $\mathcal{P}$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sup\left[f(\mathcal{I}_i)\right] \cdot |\mathcal{I}_i| \tag{35.5}$$

Comentário 35.1. Observe que por definição, dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{P}),\ \forall\ \mathcal{P} \text{ partição} \tag{35.6}$$

Em particular, vamos mostrar que, para toda partição $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, vale:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{Q}) \tag{35.7}$$

Lema 35.1. (*Refinamento de partições*) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{P}$ partição de $[a, b]$. Então dado $y \in [a, b]$, temos que:*

$$\boxed{s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P} \cup \{y\})} \leqslant \boxed{S(f, \mathcal{P} \cup \{y\}) \leqslant S(f, \mathcal{P})} \tag{35.8}$$

Demonstração. (*1*-Primeiro retângulo) Seja $\mathcal{P} = \{x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n\}$. Se $y \in \mathcal{P}$, não há o que provar, pois $\mathcal{P} \cup \{y\} = \mathcal{P}$. Queremos então mostrar o caso em que y não está inicialmente em $\mathcal{P}$. Tome então um intervalo fechado $\mathcal{I}_j = [x_{j-1}, x_j]$ tal que $y \in \mathcal{I}_j$. Temos então:

$$\mathcal{P} \cup \{y\} = \{x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{j-1} < y < x_j < ... < x_{n-1} < x_n\} \tag{35.9}$$

Pela definição de soma inferior:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \inf[f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| = \tag{35.10}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} [\inf (f(\mathcal{I}_i)) \cdot |\mathcal{I}_i| + \inf (f(\mathcal{I}_j) \cdot |I_j|)] +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} \inf [f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| \tag{35.11}$$

Como $[x_{j-1}, y] \subseteq [x_{j-1}, x_j] = \mathcal{I}_j$ e $[y, x_j] \subseteq [x_{j-1}, x_j] = \mathcal{I}_j$, portanto:

$$f([x_{j-1}, y]) \subseteq f(x_{j-1}, x_j) = f(\mathcal{I}_j) \tag{35.12}$$

$$f([y, x_j]) \subseteq f([x_{j-1}, x_j]) = f(\mathcal{I}_j) \tag{35.13}$$

Temos então, dado que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \inf \mathbb{B} \leqslant \inf \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} \inf[f(\mathcal{I}_j)] \leqslant \inf[f([x_{j-1}, y])] \\ \inf[f(\mathcal{I}_j)] \leqslant \inf[f([y, x_j])] \end{cases} \tag{35.14}$$

E também que o comprimento de $\mathcal{I}_j$:

$$|\mathcal{I}_j| = x_j - x_{j-1} = (x_j - y) + (y - x_{j-1}) = |[y, x_j]| + |[x_{j-1}, y]| \tag{35.15}$$

Na equação (35.11), analisando somente a parcela $\inf[f(\mathcal{I}_j)] \cdot |\mathcal{I}_j|$ temos que:

$$\inf[f(\mathcal{I}_j)] \cdot |\mathcal{I}_j| = \inf[f(\mathcal{I}_j)] \cdot |[x_{j-1}, y]| + \inf[f(\mathcal{I}_j)] \cdot |[y, x_j]| \tag{35.16}$$

$$\inf[f(\mathcal{I}_j)] \cdot |\mathcal{I}_j| \leqslant \inf[f([x_{j-1}, y])] \cdot |[x_{j-1}, y]| + \inf[f([y, x_j])] \cdot |[y, x_j]| \tag{35.17}$$

Temos então que:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf[f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| + \inf[f([x_{j-1}, y])] \cdot |[x_{j-1}, y]| + \inf[f([y, x_j])] \cdot |[y, x_j]| + \tag{35.18}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \inf[f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| = s(f, \mathcal{P} \cup \{y\}) \tag{35.19}$$

Logo, quando refinamos a partição, ou seja, quando adicionamos mais elementos na partição:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P} \cup \{y\}) \tag{35.20}$$

■

Demonstração. (*2-segundo retângulo*): EXERCÍCIO ■

Corolário 35.1. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$. Para qualquer coleção finita de pontos $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq [a, b]$, temos que:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P} \cup \{y_1, y_2, ..., y_m\}) \leqslant S(f, \mathcal{P} \cup \{y_1, y_2, ..., y_m\}) \leqslant S(f, \mathcal{P}) \tag{35.21}$$

Demonstração. (*Por indução*) EXERCÍCIO ■

Proposição 35.1. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições de $[a, b]$. Então sempre vale que:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{Q}) \tag{35.22}$$

Demonstração. Note que a união das partições gera uma nova partição. Tome então:

$$\mathcal{R} := \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \cup \{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\} \tag{35.23}$$

Temos então que podemos escrever $\mathcal{R}$ de duas formas:

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \underbrace{\{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}}_{\text{refinamento de } \mathcal{P}} \tag{35.24}$$

$$\mathcal{R} = \underbrace{\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}}_{\text{refinamento de } \mathcal{Q}} \cup \mathcal{Q} \tag{35.25}$$

Note que o refinamento de $\mathcal{P}$ são todos os pontos $y \in \mathcal{Q}$ tais que $y \notin \mathcal{P}$. Da mesma forma, o refinamento de $\mathcal{Q}$ são todos os pontos $x \in \mathcal{P}$ tais que $x \notin \mathcal{Q}$. Temos então pelo corolário que:

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P} \cup \{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}) = s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leqslant S(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leqslant S(f, \mathcal{Q}) \tag{35.26}$$

A última desigualdade decorre do fato de $\mathcal{P}$ ser o refinamento de $\mathcal{Q}$. ■

35.1.1 Integral superior e inferior

Sejam os conjuntos:

$$\mathbb{A} = \{s(f, \mathcal{P}),\ \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b]\} \tag{35.27}$$

$$\mathbb{B} = \{S(f, \mathcal{Q}),\ \mathcal{Q} \text{ partição de } [a, b]\} \tag{35.28}$$

Sabendo que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são conjuntos que satisfazem a condição:

$$(a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{B}) \Rightarrow a \leqslant b \tag{35.29}$$

Temos que pelo exercício 3.(b) da lista 4 que:

$$\sup \mathbb{A} \leqslant \inf \mathbb{B} \tag{35.30}$$

Ou seja, para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, temos:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b]\} \leqslant \inf\{S(f, \mathcal{Q}); \mathcal{Q} \text{ partição de } [a, b]\} \tag{35.31}$$

Definimos tais elementos como sendo:

A integral inferior da f

$$\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x := \sup\{s(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b]\} \tag{35.32}$$

A integral superior da f

$$\int_{a}^{-b} f(x)\mathrm{d}x := \inf\{S(f,\mathcal{Q}); \mathcal{Q} \text{ partição de } [a,b]\} \tag{35.33}$$

Agora pelo exercício 3.(c) da lista 4, temos que $\sup \mathbb{A} = \inf \mathbb{B}$ se, e somente se, $\forall\ \varepsilon > 0$, existem $x \in \mathbb{A}$ e $y \in \mathbb{B}$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Definição 35.3. Dizemos que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável quando:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{-b} f(x)\mathrm{d}x \tag{35.34}$$

Ou seja, f é Riemann integrável se, e somente se:

$$\sup\{s(f,\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição de } [a,b]\} = \inf\{S(f,\mathcal{Q}); \mathcal{Q} \text{ partição de } [a,b]\} \tag{35.35}$$

Note que estamos dentro das hipóteses do exercício 3 da lista 4, pois sabemos que, para quaisquer partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$, vale que:

$$s(f,\mathcal{P}) \leqslant S(f,\mathcal{Q}) \tag{35.36}$$

Proposição 35.2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é Riemann integrável se, e somente se, $\forall\ \varepsilon > 0$, existem $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições de $[a,b]$ tai que:

$$S(f,\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon \tag{35.37}$$

Demonstração. EXERCÍCIO 3 DA LISTA 4 ■

Nomenclatura 35.1. Quando uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada for Riemann integrável, o valor:

$$\sup\{s(f,\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição de } [a,b]\} = \inf\{S(f,\mathcal{Q}); \mathcal{Q} \text{ partição de } [a,b]\} \tag{35.38}$$

É chamado de Integral de Riemann. Denotamos tal integral como:

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(f,\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição de } [a,b]\} = \inf\{S(f,\mathcal{Q}); \mathcal{Q} \text{ partição de } [a,b]\} \tag{35.39}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{-b} f(x)\mathrm{d}x \tag{35.40}$$

35.2 Exercícios

$\boxed{\text{Exercício 1.}}$ Dadas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis a Riemann. Mostre que:

(a) $(f+g)$, $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{R})$ e $(f \cdot g)$ são limitadas e integráveis.

(b) $\displaystyle\int_{a}^{b} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{a}^{b} c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

(d) Dado $c \in [a,b]$, vale que $f\big|_{[a,c]}$ e $f\big|_{[c,b]}$ são limitadas e integráveis.

(e) Dado $c \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

Fim da Aula 35

36 | Aula 36 - 04/12/2020

36.1 Exemplos

Exemplo 36.1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se f for a função constante, ou seja, $\exists\ c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$. Então f é integrável e:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = c \cdot (b - a) \tag{36.1}$$

Demonstração. Dada uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n\}$, então:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \inf[f(\mathcal{I}_i)] \cdot \left|\mathcal{I}_\rangle\right| \tag{36.2}$$

Como a função é constante, então $\inf[f(\mathcal{I}_i)] = c,\ \forall\ i = 1, 2, ..., n$ e considerando o intervalo toda a partição $\mathcal{P}$, temos que $|\mathcal{I}_i| = b - a$, daí:

$$s(f, \mathcal{P}) = c \cdot (b - a) \tag{36.3}$$

Analogamente, para a soma superior da f temos:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sup[f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| \tag{36.4}$$

Da mesma forma, $\sup[f(\mathcal{I}_i)] = c,\ \forall\ i = 1, 2, ..., n$ e $|\mathcal{I}_i| = b - a$, portanto:

$$S(f, \mathcal{P}) = c \cdot (b - a) \tag{36.5}$$

Segue então que:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x := \sup\{s(f, \mathcal{P})\} = \inf\{S(f, \mathcal{P})\} := \int_a^{-b} f(x)\mathrm{d}x,\ \forall\ \mathcal{P} \text{ partição} \tag{36.6}$$

$$\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{-b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c \cdot (b - a) \tag{36.7}$$

Portanto, f é Riemann integrável. ■

Exemplo 36.2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada pela função característica dos racionais tal que:

$$f(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{36.8}$$

Então f é descontínua em todos os pontos do domínio.

Demonstração. (i) Seja $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, neste caso $f(q) = \mathcal{X}(q) = 1$. Como o conjunto dos irracionais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do intervalo $[0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = q$ em que:

$$x_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1], \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{36.9}$$

Portanto, $f(x_n) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \tag{36.10}$$

$$1 = f(q) \neq f(x_n) = 0 \tag{36.11}$$

Então f é descontínua em todos os pontos racionais do intervalo $[0,1]$.
(ii) Seja $r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$, neste caso $f(r) = \mathcal{X}(r) = 0$. Como o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do intervalo $[0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = r$ em que:

$$y_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{36.12}$$

Portanto, $f(y_n) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = 1, \ n \in \mathbb{N}$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \tag{36.13}$$

$$0 = f(r) \neq f(y_n) = 1 \tag{36.14}$$

Então f é descontínua em todos os pontos irracionais do intervalo $[0,1]$. Logo, como f está definida em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e em ambos os conjuntos ela é descontínua, segue que f é descontínua em todos os pontos do intervalo $[0,1]$. ■

Exemplo 36.3. A função característica dos racionais não é integrável.

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = \{x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n\}$ uma partição. Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$, para cada intervalo $\mathcal{I}_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$. Então:

$$\exists\ q_i \in \mathbb{Q};\ q_i \in (x_{i-1}, x_i) = \operatorname{int}(\mathcal{I}_i) \subset \mathcal{I}_i \tag{36.15}$$

$$\exists\ r_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};\ r_i \in (x_{i-1}, x_i) = \operatorname{int}(\mathcal{I}_i) \subset \mathcal{I}_i \tag{36.16}$$

Temos então que:

$$\begin{cases} f(q_i) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(q_i) = 1 \Rightarrow \sup[f(\mathcal{I}_i)] = 1 \\ f(r_i) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(r_i) = 0 \Rightarrow \inf[f(\mathcal{I}_i)] = 0 \end{cases} \tag{36.17}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{I}_i| = b - a$, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{I}_i| = 1 - 0 = 1$, logo, para toda partição $\mathcal{P}$ de $[0, 1]$:

$$\begin{cases} s(f, \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \inf[f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| = 0 \\ S(f, \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sup[f(\mathcal{I}_i)] \cdot |\mathcal{I}_i| = 1 \end{cases} \tag{36.18}$$

Então:

$$\begin{cases} \sup\{s(f, \mathcal{P})\} = \sup\{0\} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{-0}^{1} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}x = 0 \\ \inf\{S(f, \mathcal{P})\} = \inf\{1\} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{-1} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}x = 1 \end{cases} \tag{36.19}$$

Logo, $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x)$ não é Riemann integrável, ou seja, $\nexists \displaystyle\int_0^1 \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}x$. ■

Comentário 36.1. Em teoria da medida, $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ é Lebesgue integrável e:

$$\int_{[0,1]} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} \mathrm{d}\lambda = 1 \cdot \lambda(\{x \in [0, 1]; \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) = 1\}) + 0 \cdot \lambda(\{x \in [0, 1]; \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = 0\}) = 0 \tag{36.20}$$

36.2 Critério de integrabilidade

Proposição 36.1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. f é Riemann integrável se, e somente se, $\forall\ \varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que:

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon \tag{36.21}$$

Demonstração. Lembrando do exercício 3 da lista 4, temos que:

($\Rightarrow$) f é integrável implica que:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P})\} = \inf\{S(f, \mathcal{P})\},\ \forall\ \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b] \tag{36.22}$$

Como $s(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{Q})$ para quaisquer partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Pelo item (c) do exercício 3, temos que:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P})\} = \inf\{S(f, \mathcal{P})\},\ \forall\ \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b] \tag{36.23}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ s(f, \mathcal{P}) \wedge S(f, \mathcal{Q});\ S(f, \mathcal{Q}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon \tag{36.24}$$

Lembrando que $s(f,\mathcal{P}) \leqslant s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})$, então:

$$-\,s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leqslant -s(f,\mathcal{P}) \tag{36.25}$$

Sabendo também que $S(f,\mathcal{Q}) \leqslant S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})$, logo:

$$S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leqslant S(f,\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leqslant S(f,\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon \tag{36.26}$$

Sendo então $\mathcal{R} = \mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, então:

$$S(f,\mathcal{R}) - s(f,\mathcal{R}) < \varepsilon \tag{36.27}$$

($\Leftarrow$) Ver a aula de novo pois não sei se o que eu copiei ta certo ∎

Comentário 36.2. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$. Temos então que:

$$\begin{align} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} \sup[f(\mathcal{I}_i)]\cdot|\mathcal{I}_i| - \sum_{i=1}^{n} \inf[f(\mathcal{I}_i)]\cdot|\mathcal{I}_i| \tag{36.28}\\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sup[f(\mathcal{I}_i)] - \inf[f(\mathcal{I}_i)])\cdot|\mathcal{I}_i| \tag{36.29}\\ &= \sum_{i=1}^{n} w(f,\mathcal{I}_i)\cdot|\mathcal{I}_i| \tag{36.30}\end{align}$$

Tal que $w(f,\mathcal{I}_i)$ é a variação de f em $\mathcal{I}_i$ definida por:

$$w(f,\mathcal{I}_i) = \sup\{f(x) - f(y);\ x,y \in \mathcal{I}_i\} \tag{36.31}$$

Proposição 36.2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Então f é Riemann integrável.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como $[a,b]$ é compacto e f é contínua, segue que f é uniformemente contínua. Assim, $\exists\ \delta > 0$ tal que:

$$(x,y \in [a,b] \land |x-y| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{36.32}$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$ tal que $|I_i| = x_i - x_{i=1} < \delta,\ \forall\ i = 1,2,...,n$. Desta forma, fixando um $i \in \{1,2,...,n\}$, se:

$$(x,y \in \mathcal{I}_i = [x_{i-1},x_i]) \Rightarrow |x-y| \leqslant x_i - x_{i-1} < \delta \tag{36.33}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - f(y) \leqslant |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{36.34}$$

$$\Downarrow$$

$$\sup\{f(x) - f(y);\ x,y \in \mathcal{I}_i\} < \frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall\ i = 1,2,...,n \tag{36.35}$$

Logo, existe partição $\mathcal{P}$ tal que:

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} w(f,\mathcal{I}_i)\cdot|\mathcal{I}_i| < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{I}_i|}_{=b-a} < \varepsilon \tag{36.36}$$

Portanto f é integrável.

∎

36.3 Exercícios

Exercício 1. Seja $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que se $\mathbb{X}$ contém um intervalo não degenerado, então $\mathbb{X}$ não tem medida nula. Equivalentemente, se $m(\mathbb{X}) = 0$, então $(a, b) \not\subset \mathbb{X}$, para todo intervalo (a, b). Segue do Teorema de Riemann (f é Riemann integrável $\Leftrightarrow$ $m(D_f) = 0$, onde D_f é o conjunto de descontinuidade da f) que a função não é integrável.(Um exemplo é o Exemplo (36.2) em que o conjunto dos pontos de descontinuidade é $[0, 1]$).

Fim da Aula 36

37 | Provas extras

37.1 O conjunto vazio é único

Demonstração. Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ dois conjuntos com nenhum elemento. Da pergunta (1.1), obtivemos que o conjunto vazio está contido em todo e qualquer conjunto. Dessa forma, se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ não possuem elementos, então podemos dizer que:

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \tag{37.1}$$

Da mesma forma, podemos afirmar que:

$$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \tag{37.2}$$

Pelo axioma da extensão (1.4.1), podemos afirmar que se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$, então

$$\boxed{\mathbb{A} = \mathbb{B} = \varnothing} \tag{37.3}$$

Logo o conjunto vazio é único. ∎

☾ Fim da Prova 37.1 ☽

37.2 União enumerável - prova por indução

Demonstração. Pela proposição (5.1), sabemos que vale a união com $n = 2$. Suponha então que:

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \mathbb{A}_k \tag{37.4}$$

é enumerável, portanto temos que:

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \mathbb{A}_k \cup \mathbb{A}_n \tag{37.5}$$

é enumerável, pois é união de dois conjuntos enumeráveis, portanto:

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{A}_k \tag{37.6}$$

é enumerável. ∎

☾ Fim da Prova 37.2 ☽

37.3 Prova de que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Demonstração. Por indução:
Base da indução: Seja a base $n = 1$, temos então:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \tag{37.7}$$

Portanto vale a base da indução.
Passe indutivo: Assumimos que vale a hipótese:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \tag{37.8}$$

Temos que mostrar que vale para $(n+1)$ elementos. Temos então:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 && (37.9)\\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{6 \cdot (n+1) \cdot (n+1)}{6} && (37.10)\\
&= \frac{(n+1)}{6} \cdot [n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)] && (37.11)\\
&= \frac{(n+1)}{6} \cdot [2n^2 + 7n + 6] && (37.12)\\
&= \frac{(n+1)}{6} \cdot (n+2) \cdot (2n+3) && (37.13)\\
&= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)}{6} && (37.14)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}} \tag{37.15}$$

∎

Fim da Prova 37.3

Bibliografia

[1] Leandro Aurich. *Notas de aula - Teoria dos Conjuntos.* 2018.

[2] Marco Cabral Cássio Neri. *Curso de Análise.* UFRJ, 2011.

[3] William Faris. *Real Analysis Structures.* University of Arizona, 2006.

[4] Abramo Hefez. *Curso de Álgebra*, volume 1. IMPA, 2002.

[5] Elon Lages Lima. *Análise*, volume 1. IMPA, 2014.

[6] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education, 1976.