Lista 1

Matheus Tararam de Laurentys
9793714

Q1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

$(A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A)$

- $\forall x \in A \cap B, x \in A \Rightarrow A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A, x \in B \Rightarrow \forall x \in A, x \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$

→ Como $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap B$, $A \cap B = A$

$(A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B)$

- $\forall x \in A, x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$

→ Como $\forall x \in A, x \in B$ então $A \subseteq B$

~~$A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$~~

$(A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B)$

- $\forall x \in A \cup B$, $x \in A$ ou $x \in B$. Como, por hipótese, $\forall x \in A, x \in B$, então $\forall x \in A \cup B, x \in B$. $A \cup B \subseteq B$.
- $\forall x \in B$, $x \in B \cup A$, pela definição de união. $B \subseteq B \cup A$.

→ Sendo assim $A \cup B = B$

$(A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B)$

$\rightarrow \forall x \in A \cup B, x \in B$. Em especial, $\forall x \in A, x \in B$. Sendo assim, $A \subseteq B$.

2.

$$\left(A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i) \right)$$

- $\forall x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$, $x \in A$ ou $x \in A_i, \forall i \in I$.
  - Se $x \in A$, então $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$, pois $\forall j \in I$, $A \subseteq A \cup A_j$.
  - Se $x \in A_i, \forall i \in I$, então $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$, pois $\forall j \in I$, $A_j \subseteq A \cup A_j$.

$\Rightarrow \cancel{\forall x \in}\ A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$

$$\left(\bigcap_{i \in I} (A \cup A_i) \subseteq A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right)$$

$\forall x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$, $x \in (A \cup A_i)\ \forall i \in I$. Sendo assim, se $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$, então $x \in A$ ou $x \in A_i, \forall i \in I$.

- Se $x \in A$, $x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$ pela definição de união
- Se $x \in A_i, \forall i \in I$, $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup A$, também pela definição de união.

$\rightarrow \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i) \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup A$.

$$\therefore A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$$

3. Se h é inversa à direita de f, então $f(h(x)) = x$, $x \in \{1,2\}$, notando que $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}$ e $h: \{1,2\} \to \{1,2,3,4\}$

As inversas a direita h_i de f são:

- $h_1 \mid h_1(1) = 1,\ h_1(2) = 3$
- $h_2 \mid h_2(1) = 1,\ h_2(2) = 4$
- $h_3 \mid h_3(1) = 2,\ h_3(2) = 3$
- $h_4 \mid h_4(1) = 2,\ h_4(2) = 4$

4.

a)

$(A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B))$

- $\forall S \subseteq A,\ S \subseteq B$. Sendo assim, $\forall S \subseteq A$, $S \in P(A)$, então $S \in P(B)$.
- $\forall S \in P(A)$, $S \subseteq A$, pela definição de conjunto das partes.

$\to$ Dessa forma, $\forall S \in P(A)$, $S \in P(B)$ e, portanto, $P(A) \subseteq P(B)$.

$(P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B)$

- Pela definição de conjunto das partes, $\forall S \in P(A)$, $S \subseteq A$. Como $\forall S \in P(A)$, $S \in P(B)$, então $\forall S \subseteq A$, $S \subseteq B$. Em especial, $S = A$ e $A \subseteq A$ e $A \subseteq B$.

$\therefore A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

b) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

~~(Seja S contido em $P(A) \cup P(B)$, então $S \subseteq P(A)$ ou $S \subseteq P(B)$.)~~

Seja S pertencente a $P(A) \cup P(B)$, então $S \in P(A)$ ou $S \in P(B)$. Sendo assim, ~~ou~~ $S \subseteq A$ ou $S \subseteq B$. De qualquer modo, $S \subseteq A \cup B$. ~~Ds~~ Dessa forma $S \in P(A \cup B)$.

$\therefore P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Um exemplo em que $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ e $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$

Sejam $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, $P(A) \cup P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset\}$

$P(A \cup B) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$

c)

$(P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B))$

$\cdot \forall S \in P(A) \cap P(B) \rightarrow S \in P(A)$ e $S \in P(B) \rightarrow S \subseteq A$ e $S \subseteq B \rightarrow S \subseteq (A \cap B)$.

Sendo assim, $\forall S \in P(A) \cap P(B)$, $S \in P(A \cap B)$.

$(P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B))$

$\cdot \forall S \in P(A \cap B) \rightarrow S \subseteq A \cap B \rightarrow S \subseteq A$ e $S \subseteq B \Rightarrow S \in P(A)$ e $S \in P(B)$

Como $\forall S \in P(A \cap B)$, $S \in P(A)$ e $S \in P(B)$, então $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$.

$\therefore P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

5.

a)

Sejam x e y elementos quaisquers de X

Supondo que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, têm-se $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g é injetora, $f(x) = f(y)$, e com f é injetora, $X = y$. Sendo assim temos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow X = y$ e isso mostra que a composta também é injetora.

b)

$(g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x = y) \Rightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Sejam x e y elementos quaisquer de X tais que $f(x) = f(y)$. Sendo assim $g(f(x)) = g(f(y))$ e, pelo fato de $g \circ f$ ser injetora, $x = y$. Como $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, a função f é injetora.

c) $\begin{cases} g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x = y \\ \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y \end{cases} \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$

Seja y_1 e $y_2 \in Y$ tais que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $g(y_1) = g(y_2)$. ← Existe pois f é sobrejetora.

Nesse caso, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Porém, como $g \circ f$ é injetora, $x_1 = X_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$ e $y_1 = y_2$. Como $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, g é injetora.

5

d) $\begin{cases} \forall z \in Z, \exists x \in X \text{ tq } (g \circ f)(x) = z \\ g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y$

Seja $g(f(x)) = z$, $x \in X$ e $z \in Z$

Seja $y \mid g(y) = z$, então $g(f(x)) = g(y)$

Sendo assim, têm-se $f(x) = y$.

Porém, como g é injetora, $\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y$ pelo raciocínio acima.

6.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \iff \forall A \subseteq X, f^{-1}(f(A)) = A$

$(\Rightarrow)$

Seja $A \subseteq X$ qualquer. Como f é injetora, tome $B \subseteq Y$ a imagem de $f(A)$. Qualquer $f(a) = b$ é tal que $f^{-1}(b) = a$, pois f^{-1} é inversa a esquerda de f. Conclui-se que $f^{-1}(f(A)) = A$.

$(\Leftarrow)$

Tome $A \subseteq X$ qualquer. Se $\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) \neq f(a_2)$, então f é injetora no conjunto A. Caso contrário existem a_1 e a_2 tais que $f(a_1) = f(a_2)$.

Nesse caso porém, não vale que $f^{-1}(f(A)) = A$, pois $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e, por isso, a inversa não poderá recuperar a_1 e a_2, pois é uma função. Sendo assim, esse segundo caso não existe.

Avaliando o caso 1 e tomando $A = X$ em particular, têm-se que f é injetora.

7. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Y \to Z$

f sobrejetora $\iff$ $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

$(\Rightarrow)$

Seja $A \subseteq Y$ o conjunto de elementos imagem de f.
$\forall a \in A$, $g(a) = h(a)$, pois se $a = f(x)$, $g(f(x)) = h(f(x))$.
Porém, vale que $A = Y$ pois f é sobrejetora. sendo assim $\forall y \in Y$, $g(y) = h(y)$ e, por isso, $g = h$.

$(\Leftarrow)$

Seja $A \subseteq Y$ o conjunto imagem de f.
É claro que $\forall a \in A$, $g(a) = h(a)$. Porém como $\forall a \in A, g(a) = h(a) \Rightarrow \forall y \in Y, g(y) = h(y)$, têm-se que $A = Y$. Porém, como $A = Y$, então f é sobrejetora.

8. $f: X \to Y$. f injetora $\Leftrightarrow \forall A, B \subseteq X$, $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

$(\Rightarrow)$

~~Sejam [illegible] L, M, N as imagens de $f(A\setminus B)$, $f(A)$ e $f(B)$. f injetora $\overset{?}{\Rightarrow}$ $L = M \setminus N$?~~

~~Seja $l \in L$, então existe $x \in A\setminus B$ tq $f(x) = l$.~~

~~Seja $m \in M$ e $m \notin N$~~

$\forall y \in f(A\setminus B)$, $\exists x \in A$ e $x \notin B$ tq $f(x) = y$.

$\Rightarrow$ Como é injetora $\nexists x' \in B$ tq $f(x') = y$.

$\forall y \in (f(A) \setminus f(B))$, $\exists x \in A$ e $x \notin B$ tq $f(x) = y$.

Como as imagens de $f(A\setminus B)$ e $f(A)\setminus f(B)$ têm as mesmas restrições, elas são iguais. Isto é,

$f(A\setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

$(\Leftarrow)$

~~De $f(A\setminus B)$~~ Sejam A e B subconjuntos de X

- $\forall x \in X$ tq $x \in A$ e $x \notin B$, $f(x) \in f(A\setminus B)$
- Por outro lado

$(\Leftarrow)$

- $f(A \setminus B) = \{f(x) \mid x \in A, x \notin B\}$
- $f(A) \setminus f(B) = \{f(x) \mid f(x) \in f(A)$ e $\forall x' \in B, f(x') \neq f(x)\}$

Como $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$, então

$$x \in A, x \notin B \Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ e } \forall x' \in B, f(x') \neq f(x)$$

Em particular pode-se tomar

$A = \{x\}$, $B = X \setminus \{x\}$ para todo elemento x de X.

Isso mostra que $\forall x \in X, \exists x' \in X, x \neq x' \mid f(x) = f(x')$.

Em outras palavras, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$!

$\therefore f$ é injetora.

9. (a) $f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$

$f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \{f(x) \mid \forall \lambda \in L, x \in A_\lambda\}$

$\bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda) = \{f(x) \mid \forall \lambda \in L, f(x) \in f(A_\lambda)\}$

Seja x tal que $x \in A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Sendo assim $f(x) \in f(A_\lambda)$ para todos os $\lambda \in L$. Isso mostra que $f(x) \in f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$ e assim, que $f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$.

b)

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \left\{ f(x) \mid x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right\}$$

$$\bigcup_{\lambda \in L} \left(f(A_\lambda)\right) = \left\{ f(x) \mid \exists_\lambda \in L \text{ tq } f(x) \in f(A_\lambda) \right\}$$

→ Seja $x \in A$ tq. $\exists \lambda' \in L, x \in A_{\lambda'}$. Nesse caso, $x \in A_{\lambda'}$, é claro que $f(x) \in f(A_{\lambda'})$ e, por isso, $f(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \subseteq \bigcup(f(A_\lambda))$.

→ Seja $f(x)$ tq. $\exists \lambda' \in L, f(x) \in f(A_{\lambda'})$. Sendo assim, existe x', possivelmente vários, em $A_{\lambda'}$. Portanto, $x' \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e, assim, $f(x) \in f(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda)$. $\therefore \bigcup_{\lambda \in L}(f(A_\lambda)) \subseteq f(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda)$.

Logo, $f(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L}(f(A_\lambda))$.

c)

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) &= \left\{ x \in A \mid f(x) \in \bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right\} \\
&= \left\{ x \in A \mid \exists_\mu \in M \text{ tq } f(x) \in B_\mu \right\} \\
&= \bigcup_{\mu \in M} \left\{ x \in X \mid f(x) \in B_\mu \right\} \\
&= \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)
\end{aligned}$$

d) $f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \{x \in A \mid \forall \mu \in M, f(x) \in B_\mu\}$

$= \bigcap_{\mu \in M} \{x \in A \mid f(x) \in B_\mu\}$

$= \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$

10.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2$.

Seja $A = \{2\}$ e $B = \{-2\}$, $f(A) = \{4\}$ e $f(B) = \{4\}$

$f(A \cap B) = \emptyset$

$f(A) \cap f(B) = \{4\}$

11. $f: X \to Y$ injetora $\iff \forall A \subseteq X, f(A^c) \subseteq f(A)^c$

$(\Rightarrow)$,

- É claro que $f(A^c) \subseteq Y$
- Mostrando que $f(A^c) \cap f(A) = \emptyset$.
  [Contradição]
  Seja $f(x) \in f(A)$ e $f(x) \in f(A^c)$. Sendo assim, existe $x' \in A$ e $x^* \in A^c$ tal que $f(x') = f(x^*)$. Isso, porém, é impossível visto que f é ~~compl~~ injetora.

$\Rightarrow f(A^c) \subseteq Y \setminus f(A) \Rightarrow f(A^c) \subseteq f(A)^c$

($\Leftarrow$) [Por contradição]

Seja $f(x) = f(y)$ com $x \neq y$.

Seja $A \subseteq X$, $A = \{x\}$.

Como $y \in A^c$, $f(y) \in f(A^c)$. Contudo, como $x \in A$ e $f(x) \in f(A)$, $f(x) \notin f(A)^c$. Nesse caso, há contradição, pois $f(A^c) \not\subseteq f(A)^c$.

Sendo assim, $\nexists x, y \in X$ tal que $x \neq y$ e $f(x) = f(y)$.

Dessa forma, sabe-se que f é injetora

12. f injetora $\Leftrightarrow$ para toda família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$,

$$f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$$

($\Leftarrow$) [Por contradição] - Supondo f não injetora

Sejam x, y elementos de X tais que $f(x) = f(y)$ e $x \neq y$.

Considere a família $\{\{x\}, \{y\}\}$.

É claro que $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ e, assim, $f(\emptyset) \neq f(\{x\}) \cap f(\{y\})$, já que $f(\{x\}) = f(\{y\})$. Sendo assim, há contradição, mostrando que f é injetora.

($\Rightarrow$)

Seja $f(x) \in f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right)$. Sendo assim, $\forall \lambda \in L$, $\exists x_\lambda \in A_\lambda$ tq $f(x_\lambda) = f(x)$. Como f é injetora todos tais x_λ são iguais.

Logo, $x \in A_\lambda \; \forall \lambda \in L$, mostrando que $f(x) \in \bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$.