Disciplinas:
MAP 5706 - Introdução à Análise Real (DINTER)
MAP 0216 - Introdução à Análise Real
MAT 0206 - Análise Real

Semestre: 2020/2

Professor: Rodrigo Bissacot - Sala 147A - IME-USP

mail: rodrigo.bissacot@gmail.com

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:

`https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/analise2020`

Monitores:

João Maia - mail: joao.vitor.maia@usp.br
Rafael Severiano - mail: rafaelseveriano@usp.br
Thiago Alexandre - mail: thiago2.alexandre@usp.br
Thiago Raszeja - mail: tcraszeja@gmail.com

Monitorias:

João Maia - Segundas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Alexandre - Terças 17h-18h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Rafael Severiano - Quintas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Raszeja - Sexta 19h-20h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO.

Lista 3: Anéis e Corpos Ordenados. Subconjuntos densos da reta. Desigualdade triangular e de Bernoulli. Supremo.

ENTREGA: DIA 13 DE OUTUBRO - TERÇA ÀS 23:59.

MODO DE ENVIAR A LISTA: Envie sua lista para o endereço **prova.analise.2020@gmail.com**, com o seguinte assunto (título) da mensagem, em maiúsculo:

LISTA 3 - NOME - NUSP - SIGLA DA DISCIPLINA

Exercício 1. Indução a partir de um natural qualquer
Prove o seguinte resultado que é muito útil para quando queremos provar que alguma propriedade é válida a partir de algum natural não necessariamente 0 ou 1. Aqui $\mathbb{N}$ contém o zero.
Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que
(i) $a \in X$
(ii) $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$.
Mostre que $\{a, a + 1, a + 2, ...\} = \{a + m; m \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.
Dica: Indução em m.

Exercício 2.
(a) Seja $X \subset \mathbb{Z}$ um conjunto limitado superiormente.
Mostre que X tem máximo.
Dica: Use o princípio da boa ordenação em $\mathbb{Z}$.

Exercício 3.
(a) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ definida abaixo é uma bijeção.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1 + |x|}\right),$$

(b) Dados $a < b$ em $\mathbb{R}$. Mostre que existe uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e o intervalo aberto (a, b). **Dica:** use o item anterior.

(c) Dados $a < b$ e $c < d$ quaiquer em $\mathbb{R}$. Mostre que existe uma bijeção entre (a, b) e (c, d).

Exercício 4. Esse exercício requer apenas uma manipulação algébrica de desigualdades. A partir de agora vamos nos dedicar a exercícios que utilizam manipulações cada vez mais sofisticadas.

Sejam A, B, C e D números reais não negativos tais que:
$i) A \leq C$;
$ii) B \leq C$;
$iii) A.B \leq C.D$;
Mostre que $A + B \leq D + C$.

Obs: Acreditem ou não, esse exercício é parte importante de um famoso teorema em Mecânica Estatística.

Exercício 5.
(a) Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$ é enumerável então $X^c = \mathbb{R} - X$ é denso $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que se $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}$ e c é um número real não-nulo então $c.S = \{c.x\ ; x \in S\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

(c) Seja $S \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.
Seja $s_1 \in S$, mostre que $S - \{s_1\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

(d) Seja $S \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.
Seja $\{s_1, s_2, ..., s_k\} \subset S$ um subconjunto finito de S.
Mostre que $S - \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ é denso em $\mathbb{R}$. **Dica:** Indução.

Nomenclatura: Neste curso *anel ordenado* significa que estamos falando de um anel comutativo, com unidade e ordenado.

Exercício 6.
Sejam x, y e z elementos de um anel ordenado.
Mostre que:
(b) $|x| = |-x|$
(b) $|x.y| = |x|.|y|$
(c) Se $0 < y \leq 1$ então $0 < y^n \leq 1$ para todo n natural.
(d) Se $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ então $|x^2 - y^2| \leq 2.|x - y|$.

Exercício 7.
Seja $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros.
(a) Mostre que se $0 < y \leq 1$ e $y \in \mathbb{Z}$ então $y = 1$.
(b) Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$ e $n < y \leq n + 1$ e $y \in \mathbb{Z}$ então $y = n + 1$.

Exercício 8. Seja $\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{n}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Mostre que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

Exercício 9. Seja $x \neq 0$ num corpo ordenado K e $n \in \mathbb{N}$ qualquer.
Prove que $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$.

Exercício 10. Seja K um corpo ordenado. Sejam, a, $b \in K$ tais que $a \neq b$ e $\varepsilon = \dfrac{|b - a|}{2}$. Mostre que $(a - \varepsilon,\, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon,\, b + \varepsilon) = \emptyset$.

Exercício 11.
(a) Mostre que o conjunto $K_{\sqrt{2}} = \{a + b\sqrt{2}; a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$, forma um corpo quando munido das operações induzidas do conjunto dos reais.

Dica: Basta conferir que este conjunto satisfaz todas as condições para um conjunto ser chamado de corpo. Neste caso dizemos que $K_{\sqrt{2}}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

(b) Uma maneira bastante usual de mostrar que $\mathbb{Q}$ não é um corpo completo é mostrar que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; 0 \leq x \text{ e } x^2 < 2\}$ é limitado superiormente mas não possui um supremo dentro do póprio corpo $\mathbb{Q}$. O supremo de A é $\sqrt{2}$, e $\sqrt{2}$ é elemento de $K_{\sqrt{2}}$. Desta forma existe $\sup A$ em $K_{\sqrt{2}}$. Sendo assim, será que $K_{\sqrt{2}}$ é completo? Justifique sua resposta (prove).

Exercício 12.
Seja $(A_i)_{i \in J}$ uma coleção de intervalos abertos limitados e não vazios, ou seja, $A_i = (a_i, b_i)$ com $a_i < b_i$, $\forall i \in J$. Suponha que esses intervalos são disjuntos dois a dois. Isto é, se $i \neq i$, então $A_i \cap A_j = \emptyset$.
Prove que o conjunto de índices J é enumerável.

Dica: $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Definição. Dizemos que um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é *discreto* quando para cada $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap X = \{x\}$.
Exemplo de subconjunto discreto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Z}$ (inteiros).
Pra ver que $\mathbb{Z}$ é discreto, basta tomar $\varepsilon_x = \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Exercício 13. Seja X um subconjunto discreto de $\mathbb{R}$.
Mostre que X é enumerável.

Exercício 14. Seja $f : X \to X$ uma função.
Definimos como *órbita de x* o conjunto:

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ..., f^{(n)}(x), ...\} = \{f^{(n)}(x); n \in \mathbb{N}\}$$

Definindo a relação $\backsim$ por: $x \backsim y$ quando $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$.
Mostre que $\backsim$ é uma relação de equivalência.

Exercício 15. Seja X um subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{R}$.
Mostre que se $\sup X \notin X$ então X é infinito.