

Lista 5

Mathews T. de Laurentys, 9793714

MAT-0206

Q1. $\limsup x_n = A \rightarrow A$ é valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pela definição:

$$\limsup x_n = \inf \{ \sup X_n, n \in \mathbb{N} \} = A,$$

$$\text{onde } X_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots\}$$

~~Considere a subsequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:~~

$$a_i =$$

• Considere a subsequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$a_i = \sup X_i, \text{ onde } X_i = \{x_n, n \geq i\}.$$

→ Seja $\epsilon > 0$, $\exists l \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq l, |a_n - A| < \epsilon$.

[Por contradição]

$\exists \epsilon > 0$, $\nexists l \in \mathbb{N}$ com $a_n - A < \epsilon \forall n \geq l$. Sendo assim, $A + \epsilon > a_n \forall n \in \mathbb{N}$. Logo $A + \epsilon$ é cota inferior de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, porém, isso é contraditório com $A = \inf \{ \sup X_n, n \in \mathbb{N} \}$, visto que $\inf \{ \sup X_n, n \in \mathbb{N} \} = \inf \{ a_n, n \in \mathbb{N} \}$.

Dando assim, a subsequência $(a_n)_n$ converge para A , que é, portanto, um valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) $\beta > A \rightarrow \exists n_0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, x_n < \beta$.
[Por contradição]

$\exists n_0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, x_n < \beta$. Se fosse assim,
 $\forall i \in \mathbb{N} \sup X_i \geq \beta$, e, como $\beta > A$, há contradição
como o fato de $\inf \{\sup X_i, i \in \mathbb{N}\} = A < \beta$. Dessa
forma, $\exists n_0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, x_n < \beta$

$$2. (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a = \liminf x_n$$

$$A = \limsup x_n$$

$$B = \limsup y_n$$

$$a) \limsup (x_n + y_n) \leq A + B$$

~~Lista 4 Exercício 4:~~

$$\text{+ } \sup(x_n + y_n) = \sup(x_n) + \sup(y_n)$$

$$\lim(\sup(x_n) + \sup(y_n)) \leq A + B$$

Seja $\epsilon > 0$. Dado-se que $\exists N$ tq $|x_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ e

$|y_n - B| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N$. Logo, $\forall n \geq N$, $A - \frac{\epsilon}{2} < x_n < A + \frac{\epsilon}{2}$,

$$B - \frac{\epsilon}{2} < y_n < B + \frac{\epsilon}{2}$$

$$A + B - \epsilon < x_n + y_n < A + B + \epsilon.$$

Porém, como é possível ~~que~~ tomar N_i para todo elemento da sequência $(\epsilon, \epsilon/2, \epsilon/4, \dots)$ e a sequência $(\epsilon, \epsilon/2, \epsilon/4, \dots)$ converge para zero, então, de fato, ~~$x_n + y_n \leq A + B$~~ $\limsup (x_n + y_n) \leq A + B$, visto que a existência de certo N_i garante que o \limsup seja menor ou igual ao valor $A + B + \frac{\epsilon}{2}$.

c) Seja $\epsilon > 0$, ~~é~~ claro que $\exists N$ tq $\forall m \geq N$,
 $|x_m - A| < \epsilon$ e $|y_m - B| < \epsilon$. Logo $\forall m \geq N$, $x_m < A + \epsilon$,
 $y_m < B + \epsilon$
 $x_m + y_m < AB + A\epsilon + B\epsilon + \epsilon^2$

$$\hookrightarrow \limsup (x_n y_n) < AB + \epsilon (A + B + \epsilon)$$

Da mesma forma que o item (a), tem que conforme $\epsilon \rightarrow 0$,
 $\epsilon (A + B + \epsilon) \rightarrow 0$, pois a sequência $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0.
 Sendo assim $\limsup (x_n y_n) \leq AB$.

d)

$$a \rightarrow x_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad | \quad X = (1, 2, 1, 2, 1, \dots)$$

$$y_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad | \quad Y = (1, 1/2, 1/4, \dots)$$

$$\limsup (x_n + y_n) = 3 = 1 + 2 \quad | \quad = 2 = 2 + 0$$

d)

$$a: x_n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$y_n = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$\limsup (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 = A$$

$$\limsup (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 = B$$

$$\limsup (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 < A + B = 2$$

$$C: x_n = (0, 1, 0, 1, \dots) \quad | \quad C:$$

$$y_n = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$\limsup (x_n) = 1$$

$$\limsup (y_n) = -1$$

$$x_n = (1, 2, 1, 2, \dots)$$

$$y_n = (1, 1/2, 1, 1/2, \dots)$$

$$\limsup (x_n) = 2 = A$$

$$\limsup (y_n) = 1 = B$$

$$\limsup (x_n + y_n) = 1 < A + B = 2$$

3. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente $\Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n$
 (\Rightarrow)

Usando que se uma sequência é convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$,
 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon$
 onde d é a norma absoluta, pois se tratam dos reais.

→ Toda subsequência de x_n converge para l .

[prova]

Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$,

$\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon$. Como

~~$y_n = x_n$~~ $y_m = x_m$ para algum $m \geq n > N$, então $|y_n - l| < \epsilon$ também. Sendo assim $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > N$, então $|y_k - l| < \epsilon$, mostrando que a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l .

→ Como toda subsequência converge para l , então l é o único ponto de aderência.

→ Como existe apenas um ponto de aderência,
 $\liminf x_n = \limsup x_n$.

(\Leftarrow)

→ De $\liminf x_n = \limsup x_n$, então há apenas um ponto de aderência. Isso foi visto em aula: \liminf é o menor ponto de aderência e \limsup o maior.

→ Sendo assim, toda subsequência converge para esse ponto de aderência l , em especial, a sequência inteira também.

b) Se α valor de aderência, então existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha$, ou seja $l(\alpha)$.

(\Rightarrow) Dado $\epsilon > 0$, como $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $|y_n - \alpha| < \epsilon$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)\}$ é infinito, pois $-\epsilon < y_n - \alpha < \epsilon \Rightarrow \alpha - \epsilon < y_n < \alpha + \epsilon$.

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|.$$

$$\bullet \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n > N, \text{ então } |x_n - x| < \epsilon.$$

$$\rightarrow ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$$

[prova]

$$\bullet \text{Desigualdade triangular: } |a+b| \leq |a| + |b|, \text{ j\u00e1 foi}$$

prova.

$$\bullet \text{Tomando } a = x_n - x \text{ e } b = x:$$

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x|$$

$$|x_n| - |x| \leq |x_n - x|$$

$$\bullet \text{Tomando } a = x - x_n \text{ e } b = x_n:$$

$$|x| \leq |x - x_n| + |x_n| \quad \rightarrow |v| = |-v|, \text{ visto em aula}$$

$$|x| - |x_n| \leq |x - x_n| = |x_n - x|$$

$$\bullet \text{Portanto } ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$$

$$\bullet \text{Logo, como } |x_n - x| < \epsilon, ||x_n| - |x|| < \epsilon \text{ tamb\u00e9m.}$$

Isso mostra que a seq\u00fc\u00eancia dada pelos m\u00f3dulos $|x_n|$ converge para o m\u00f3dulo do limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$b) (\Leftarrow) \text{ Tome } \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subseq\u00fc\u00eancia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_i \in (x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2})$ e a_i qualquer nesse intervalo. Pela pr\u00f3pria constru\u00e7\u00e3o de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Sendo assim, x \u00e9 valor de ader\u00eancia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$4. x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

Seja $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$,
 $|x_n - a| < \epsilon$ e $|y_n - a| < \epsilon$. Como $x_n \leq z_n \leq y_n$,
 então ~~$|x_n - a| < |z_n - a| < |y_n - a|$~~ $x_n - a \leq z_n - a$ e
 $z_n - a \leq y_n - a$. Como visto em aula, $\epsilon < |b|$ e, assim,
 $\frac{1}{2}\epsilon < x_n - a \leq |x_n - a| < \epsilon$ e $y_n - a \leq |y_n - a| < \epsilon$. Também
 vale que $-\epsilon < x_n - a$. E sendo
 assim, $-\epsilon < x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a < \epsilon$, logo
 $-\epsilon < z_n - a < \epsilon \Rightarrow |z_n - a| < \epsilon$. Portanto, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 também converge para a .

5. (x_n) e (y_n) limitados

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

Dado $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, tomar $\delta = \epsilon$ onde $M > 0$ e $M \geq |y_n|$
 para $n \in \mathbb{N}$ (M existe pois $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada). Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,
 $\exists N \in \mathbb{N}, N > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| < \delta$. Também, $|x_n| \cdot M < \epsilon$.
 Como $M \geq |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \cdot |y_n| < \epsilon$ e $|x_n \cdot y_n| < \epsilon$.
 Dessa forma, $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0.

b) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + z_n) = +\infty$

Seja M uma cota inferior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tome $s > 0$.

Seja $r = s - M$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty$, ENÉNTal que

$$\forall n \geq N, z_n > r. \text{ Como } z_n > s - M, z_n + M > s.$$

Como $M \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$, $z_n + x_n > s$. Sendo assim,

$$x_n + z_n \text{ é ilimitado e } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + z_n) = +\infty$$

6 Ex 19:

$$\forall n \geq n_0, 0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1 \Rightarrow 0 < x_{n+1} \leq c \cdot x_n < x_n \Rightarrow \boxed{0 < c < 1}$$

Vale notar que essa restrição para os termos da sequência também implica que $0 < x_{n_0+k} \leq c^k \cdot x_{n_0} < x_{n_0}$.
[Porem - indução]

$$\text{Base: } x_{n_0+1} = 0 < \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} \leq c < 1 \rightarrow 0 < x_{n_0+1} \leq c \cdot x_{n_0} < x_{n_0}$$

$$\text{Passo: Seja } 0 < x_{n_0+k} \leq c^k \cdot x_{n_0}. \quad 0 < \frac{x_{n_0+k+1}}{x_{n_0+k}} \leq c \Rightarrow 0 < x_{n_0+k+1} \leq x_{n_0+k} \cdot c \leq c^k \cdot x_{n_0} \cdot c$$

→ Dado $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência definida por

$$\begin{cases} y_i = x_i, & \text{se } i \leq m_0 \\ y_i = C \cdot y_{m_0}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

[Passo]

Toma $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$. Toma, então, $\delta = \frac{\epsilon}{y_{m_0}}$. Por fim, toma $\alpha > \log \delta$ (Note que $\alpha < 1$)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } m > \alpha, |y_{m_0+m}| &< \epsilon, \text{ pois } |y_{m_0} \cdot C^m| < \\ &< |y_{m_0} \cdot C^{\log \delta}| = |y_{m_0} \cdot \delta| = \\ &= |y_{m_0} \cdot \frac{\epsilon}{y_{m_0}}| = \epsilon. \end{aligned}$$

Dado assim, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0.

→ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Dado $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > 0$ tq $\forall n \geq N, |y_n| < \epsilon$.

Porém, como $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\forall n \geq N, |x_n| < \epsilon$,

mostrando que x_n também converge para 0.

7. KCR compacto. Usando compacto \Leftrightarrow fechado e limitado.

(a) $\exists x_0, y_0 \in K$ tq $\forall x \in K, x_0 \leq x \leq y_0$.

Como K limitado, $\exists \sup K = \inf K$. Por Dado $m = \sup K$ e $m = \inf K$.

m é a menor cota superior, logo, $\forall \epsilon > 0, \exists x \in K$ t.q. $m - \epsilon < x < m$.
 Porém, se $m \notin K$, então $m - \epsilon < x < m$. Nesse caso, porém, m seria um número na fronteira de K e isso contradiz o fato de K ser fechado, pois todo fechado contém os pontos de fronteira. $\therefore m \in K$.

Da mesma forma, m é a maior cota inferior de K , logo,

$\forall \epsilon > 0, \exists x \in K$ t.q. $m \leq x \leq m + \epsilon$.
 Se $m \notin K$, então $m \leq x \leq m + \epsilon$ e isso implica que m está na fronteira de K . Isso contradiz o fato de K ser fechado. $\therefore m \in K$.

b) ~~Definir a menor distância possível entre quaisquer dois elementos de K . Isso é $\epsilon = \min(x_i - x_j)$~~

Como K é limitado, $I_m = \sup K$ e $I_o = \inf K$. Definir a menor distância entre quaisquer dois elementos de K . Pode-se particionar $[I_o, I_m] \in \mathbb{R}$ com $\lceil \frac{m-o}{\epsilon} \rceil$ intervalos e através da coleção finita de intervalos $\{I_1, I_2, \dots, I_{\lceil \frac{m-o}{\epsilon} \rceil}\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{\lceil \frac{m-o}{\epsilon} \rceil} I_i = [I_o, I_m]$.
 $I_i = [o + (i-1)\epsilon, o + i\epsilon)$. Por construção cada I_i contém apenas um elemento de K (de outra forma, $\exists x_1, x_2 \in K$ t.q. $|x_2 - x_1| < \epsilon$, contradizendo a escolha de ϵ). Como $\bigcup_{i=1}^{\lceil \frac{m-o}{\epsilon} \rceil} I_i \supset [I_o, I_m]$, $\forall x \in K, \exists I_i \subset Y$ t.q. $x \in I_i$. Dando assim, K é finito pelo princípio da cota de pontos, já que $|Y| = \lceil \frac{m-o}{\epsilon} \rceil$.

c) Se $E \cap K = \emptyset$, ok

\rightarrow L4 B \Rightarrow interseção de fechado e fechado.

Definir $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in K, a < x < b$. Tais a, b existem pois K é limitado.

Como $E \cap K \subset K$, então $\forall x \in E \cap K, a < x < b$, também.
 Dado ponto, $E \cap K$ é limitado. Também, $E \cap K \subset K$ e K fechado.
 Como $E \cap K$ é fechado e limitado, $E \cap K$ é compacto.

8. a) $x \in \mathbb{R}$ é denso $\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X \text{ t.q.}$

Usando
 denso: $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}$ com $a < b$,
 $\exists x \in X \text{ t.q. } a < x < b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(\Rightarrow)

• Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Tome $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ qualquer. Como

X é denso, $\exists x \in X$ e $x \in (a - \epsilon, a)$. Considere a
 sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in (a - \epsilon, a)$ e x_i é
 escolhido de maneira arbitrária no seu intervalo.

A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

[Prova]

Tome $\delta \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. ~~Tome $\epsilon \in \mathbb{R}$~~ Escolha $i \in \mathbb{N}$ tal que
 $\frac{\epsilon}{2^i} < \delta$ (tal escolha existe pois a sequência $(\frac{\epsilon}{2^i})_{i \in \mathbb{N}}$ \neq
 tal que converge para 0 - propriedade aritmética).
 Como $x_i \in (a - \frac{\epsilon}{2^i}, a)$, então $x_i \in (a - \delta, a) \supset (a - \frac{\epsilon}{2^i}, a)$.
 Portanto, tem-se que $|a - x_i| < \delta$, mostrando que
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a .

* Tome $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Pela propriedade aritmética $\exists N$ tal
 que $\frac{1}{N} < \delta$. Em especial, $\exists i \text{ t.q. } \frac{\epsilon}{2^i} < \delta$. Como $|\frac{\epsilon}{2^i}| < \delta$.

(\Leftarrow)

Tome $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervalo qualquer com $a < b$.

Tome $x \in \mathbb{R}$ e $x \in (a, b)$. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ e $\epsilon < x - a$ e

$\epsilon < x - b$. Considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Por hipótese,

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, n \in \mathbb{N} |x_n - x| < \epsilon$. Tome x_n .

É claro que $a < x_n < b$, pois $|x_n - x| < \epsilon$ e $\epsilon < x - a$

e $\epsilon < x - b$, então $|x_n - x| < x - a$ e $|x_n - x| < x - b$.

Logo assim, X é denso.

9. $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

- $K_n \supseteq K_{n+1}$
- K_n é compacto não vazio

Mostre $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.

Tome a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in K_i$ e x_i é escolhido de forma arbitrária. Como $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \in K_1$ e K_1 é compacto então a seqüência converge e converge para algum elemento de K_1 .

Porém, também é verdade que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in K_i \forall i \in \mathbb{N}$.

[Lema]

Tome $m \in \mathbb{N}$. É claro que $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m, x_m \in K_m$.

Tomando $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subseqüência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_i = x_{i+(m-1)}$ (isto é, começando em $m-1$ primeiros elementos). Pelo mesmo

argumento $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in K_m$. Porém também é fato que

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, já que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Dessa forma

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in K_n$, portanto $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \supset \{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \neq \emptyset$.

10

a) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{X}$ é fechado

Lema 4: $\bar{X} = X \cup \partial X$

[Por contradição]

• Seja ~~o~~ $a \in \partial \bar{X}$ tal que $a \notin \bar{X}$. Como $a \in \partial \bar{X}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \bar{X}$ tq $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Porém, como $a \notin \bar{X}$ então $a \notin \partial X$ logo $\exists \delta > 0, \nexists x \in X$ com $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

• Considere $\delta > 0$ tal que $\nexists x \in X$ com $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Tome $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ e seja $x_0 \in \bar{X}$ tal que $x_0 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Porém, como

$x_0 \in \bar{X}$, então $\forall \alpha > 0, \exists x \in X$ com $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Em especial, temo ~~algum~~ algum $x_1 \in X$ com $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. No entanto, baseado na escolha $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a - \delta, a + \delta)$.

Portanto, há contradição visto que tal x_1 não poderia existir. Pode-se concluir que $\nexists a \in \partial \bar{X}$ tal que $a \notin \bar{X}$. Logo, \bar{X} é fechado.

b) $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in \bar{X}$.

(\Rightarrow) Tome $\varepsilon > 0$. Como $d(a, X) = 0$, $\exists x \in X$ tq

$$d(a, x) < \varepsilon, \text{ logo, } |x - a| < \varepsilon. \text{ Como } |x - a| < \varepsilon, \\ -\varepsilon < x - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Rightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Dessa forma, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, há algum elemento de X na vizinhança de a . Sendo assim, por definição, $a \in \bar{X}$.

~~(\Leftarrow) Como $a \in \bar{X}$, então $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X$ tq $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.
 Como $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, então $a-\epsilon < x < a+\epsilon$, logo,
 $|x-a| < \epsilon$. Como ϵ é qualquer, então $\exists x \in X$ tal
 que $|x-a| = 0$.~~

(\Leftarrow) Como $a \in \bar{X}$, $a \in X$ ou $a \in \partial X$.

• Se $a \in X$, então $d(a, X) = d(a, a) = |a-a| = 0$.

• Se $a \in \partial X$:

$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X$ tq $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Isso implica que

$|x-a| < \epsilon$. De $\epsilon \rightarrow 0$, então $|x^*-a| = d(a, X) = 0$.

II. $X \subset \mathbb{R}$

a) X' é fechado.

(Contradição)

Seja $m \in X'$ e $m \notin X'$. Como $m \in \partial X'$, $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X'$ tq
 $x \in (m-\epsilon, m+\epsilon)$. Porém, como $x_0 \in X'$, então $\forall \delta > 0$,
 $\exists x_1 \in X$ tq $x_1 \in (m-\delta, m) \cup (m, m+\delta)$.

~~Como $x_0 < m$:~~

\rightarrow Tomar-se $\delta = \min(|m-x_0|, |m-\epsilon-x_0|, |m+\epsilon-x_0|)$.

Como antes, $\exists x \in X$ tq $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Porém, pela
 escolha de δ , tem-se que $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (m-\epsilon, m+\epsilon) \cap \mathbb{N}$,
 logo $x \in (m-\epsilon, m+\epsilon) \cap \mathbb{N}$. Isso contradiz o fato de
 $m \notin X'$, pois m é ponto de acumulação.
 Assim, X' é fechado.

$$b) X' = (\bar{X})'$$

$$\cdot X' \subset (\bar{X})'$$

Como $x \in \bar{X}$, então, se $x_0 \in X$ é ponto de acumulação em X , também é em \bar{X} .
[Prov.]

Tome $\epsilon > 0$. $\exists x \in X$ tq $x \in (x_0 - \epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \epsilon)$. Como $x \in \bar{X}$, x também pertence a \bar{X} , logo x_0 também é ponto de acumulação em \bar{X} .

$$\cdot (\bar{X})' \subset X'$$

[Por contradição]

Tome $x_0 \in (\bar{X})'$ tal que $x_0 \notin X'$. Tome $\epsilon > 0$ tal que

$\exists x_1 \in \bar{X}, x_1 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ mas $\nexists x_2 \in X, x_2 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$

Considere $\delta = \min(|x_1 - (x_0 - \epsilon)|, |x_1 - x_0|, |x_1 - (x_0 + \epsilon)|)$. Como $x_1 \in \bar{X}$, então $\exists x_2 \in X$ tq $x_2 \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Porém, pela escolha de δ , $(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$, logo, $x_2 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$. Dessa forma $x_0 \in X'$, uma contradição. Assim isso é contraditório com a suposição de $x_0 \notin X'$.

Dado assim $\nexists x_0 \in (\bar{X})' \setminus X'$, mostrando que $(\bar{X})' \subset X'$.

c) $\bar{X} = X \cup X'$

Da lista 4 sabe-se que $\bar{X} = X \cup \partial X$. Basta mostrar
 $X \cup X' = X \cup \partial X$.

$(X \cup X' \subset X \cup \partial X)$

Tomemos $x_0 \in X \cup X'$. Se $x_0 \in X$, então $x_0 \in X \cup \partial X$. Como $x_0 \notin X$, então $x_0 \in X' \cap X$. Nesse caso, pela definição de ponto de acumulação, $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X$ t.q. $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap X$. Porém, como $((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap X) \setminus \{x_0\} \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, então x_0 também é ponto de aderência e, logo, $x_0 \in \partial X$.

$(X \cup \partial X \subset X \cup X')$

Tomemos $x_0 \in X \cup \partial X$. Se $x_0 \in X$, então $x_0 \in X \cup X'$. Como $x_0 \notin X$, então $x_0 \in X' \cap X$. Tomemos então que $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X$ t.q. $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Como $x_0 \notin X$ e $x \in X, x \neq x_0$, mostrando que $x \in ((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap X)$. Isso mostra que $x_0 \in X'$, logo $\forall x \in X \cup \partial X, x \in X \cup X'$.

12. X limitado de \mathbb{R}

a) Y limitado de \mathbb{R} e $X \subset Y \Rightarrow \text{diam } X \leq \text{diam } Y$.

Sejam $x_0 \in X$ e $x_1 \in X$ tais que $\text{diam } X = |x_0 - x_1|$. Como $X \subset Y$, $x_0 \in Y$ e $x_1 \in Y$, então $\text{diam } Y \geq \text{diam } X$ visto que $\text{diam } Y = \sup\{|x - y| \mid x \in Y, y \in Y\} \geq \sup\{|x - y| \mid x \in X, y \in X\} \geq |x_0 - x_1|$.

b) $\text{diam } X = \text{diam } \bar{X}$.

De $X \subset \bar{X}$ então verdadeiro:

Se $X \neq \bar{X}$, $\text{diam } X < \text{diam } \bar{X}$, pois $\forall x \in X, x \in \bar{X}$ (visto item (a)).

Supondo que $\exists x, y \in \bar{X}$ tal que $|x - y| > \text{diam } X$ (como $x, y \in \bar{X}$, $\exists x_1, x_2 \in X$ tais que $|x - x_1| < \epsilon$ e $|y - x_2| < \epsilon$). Da mesma forma que 10.b), $d(x, X) = 0$ e $d(y, X) = 0$. Dessa forma, tome $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$ tal que $|x - x_0| = 0$ e $|y - y_0| = 0$.

É claro que $|x - y| = |x - x_0| + |x_0 - y_0| + |y_0 - y| = |x_0 - y_0|$. Porém isso mostra que $|x - y| \notin \text{diam } X$, contradizendo a escolha de x, y e mostrando que $\text{diam } \bar{X} \leq \text{diam } X$. Temos, então $\text{diam } X = \text{diam } \bar{X}$.

c) $\text{diam } X = \sup X - \inf X$.

Supondo X limitado tal que $\text{diam } X \neq \sup X - \inf X$. Como X é limitado, $\sup X$ e $\inf X$ $\in \mathbb{R}$, como $\text{diam } X = \text{diam } \bar{X}$, então $\text{diam } X > \sup X - \inf X$, pois $\sup X, \inf X \in \bar{X}$. Seja $\text{diam } X = |x_0 - y_0|$ com $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$.

Deve-se que $\inf X \leq x_0 \leq y_0 \leq \sup X$, sem perda de generalidade, a que $x_0 > \inf X$ ou $y_0 < \sup X$ ou ambos. Considere que $|\sup X - \inf X| = |\inf X - x_0| + |x_0 - y_0| + |y_0 - \sup X|$ e como $|\inf X - x_0| + |y_0 - \sup X| > 0$, então $|\sup X - \inf X| - |x_0 - y_0| > 0$.

Isso mostra que $|\sup X - \inf X| > |x_0 - y_0|$, contradizendo a suposição de $\text{diam } X = \sup X - \inf X$. Isso, por sua vez, impede que $\text{diam } X \neq \sup X - \inf X$, logo, $\sup X - \inf X = \text{diam } X$.

13. $x \in \mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ limitada

$$f \text{ contínua em } x_0 \Leftrightarrow w(f, x_0) = 0$$

Usando: $f \text{ contínua em } x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$.

(\Rightarrow) Tome $\epsilon > 0$. Como f é contínua em x_0 , $\exists \delta > 0$ tal que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$.

• Como $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \geq 0$ (propriedade de módulo) então $\text{diam } Y \geq 0, \forall Y \subset \mathbb{R}$. Sendo assim, $w(f, x_0) \geq 0$ pois é claro que 0 é um limite inferior e, assim, $0 \leq w(f, x_0)$.

Supondo, por contradição, que $w(f, x_0) > 0$. Seja
então, $L = w(f, x_0) > 0$. Tome $\epsilon \in \mathbb{R}$ e $\epsilon < \frac{L}{2}$ e $\epsilon > 0$.

Com f contínua, tome $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ para
todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se $X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$, então
 $\text{diam}(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. Se $\exists x_1 \neq x_0$ tal que
 $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então $\text{diam}(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) \geq |f(x_1) - f(x_0)|$
pois $f(x_1) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Sendo assim,

$\text{diam}(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) \leq |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon$. Logo, $w(f, x_0) < L$,
mostrando que $w(f, x_0) = 0$.

(\Leftarrow)

Tome $\epsilon > 0$. Como $w(f, x_0) = 0$, então $\exists \delta > 0$
tal que $\text{diam}(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) < \epsilon$. Isso
mostra que $\forall x, y \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Em especial, $\forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$,
 $-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon$, $f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$, então
 $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Sendo assim, f
satisfaz a condição de continuidade em x_0 .

14.

~~Q~~ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in X$.

$$f(x) \in Y$$

$$g: Y \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua em } f(x_0) \in Y$$

$$\Rightarrow h = g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua em } x_0 \in X$$

a) Usando definição.

[Por contradição]

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0, \exists x \in X, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $h(x) \notin (h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon)$. Como g é contínua

então $\exists \alpha > 0$ tal que se $y \in Y, y \in (f(x_0) - \alpha, f(x_0) + \alpha)$ então $g(y) \in (g(f(x_0)) - \epsilon, g(f(x_0)) + \epsilon) = (h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon)$.

Considere α_0 algum ~~dos~~ desses tais α 's.

Como f é contínua, $\exists \beta > 0$ tal que se $x \in X, x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$ então $f(x) \in (f(x_0) - \alpha_0, f(x_0) + \alpha_0)$.

Dando assim, porém $g(f(x))$ com $x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$ ~~se~~ g é tal que $g(f(x)) \in (h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon)$ e.

da mesma forma, $\forall x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta), h(x) \in (h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon)$, contrariando a escolha de ϵ . Logo, h é contínua.

b) Usando sequência.

Tome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Por definição $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_n = f(x_n)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(x_0)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(f(x_0))$. Tem-se então que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$ para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para x_0 . Dessa forma $h = g \circ f$ é contínua em x_0 .

15. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Tomemos $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. f contínua em x_0 .

se $\exists \delta > 0$ tq $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$,
ou seja, ainda, $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tomando $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_0 - x}{xx_0} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x_0 - x| \cdot \frac{1}{|xx_0|} < \varepsilon$$

Tomemos $\alpha < \frac{x_0}{2}$. Considere que $\delta < \alpha$. Note que isso garante que $\forall x_0 > 0 \rightarrow x > 0$ e $x_0 < 0 \rightarrow x < 0$

Têm-se então:

$$\begin{aligned} |x_0 - x| \cdot \frac{1}{|xx_0|} &= |x_0 - x| \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x_0} \leq |x_0 - x| \cdot \frac{1}{x_0 \alpha} \cdot \frac{1}{x_0} = \\ &= \frac{|x_0 - x|}{x_0(x_0 - \alpha)} \end{aligned}$$

Adicionando a restrição $\delta < x_0(x_0 - \frac{x_0}{2}) = \frac{x_0^2}{2}$ tem-se:

$$\frac{|x_0 - x|}{x_0(x_0 - \alpha)} < \frac{\delta}{\frac{x_0^2}{2}} = \epsilon.$$

Sendo assim, tomamos $\delta < \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2} \cdot \epsilon \right\}$ de tal forma que $\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Sendo assim, f é contínua em qualquer $x \in X$.