Lista 5

Matheus T. de Laurentys, 9793714

MAT-0206

Q1. $\limsup x_n = A \to A$ é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pela definição:

$$\limsup x_n = \inf\{\sup X_n, n\in\mathbb{N}\} = A,$$

onde $X_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots\}$

~~Considere a subsequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:~~

~~$a_i =$~~

- Considere a subsequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$a_i = \sup X_i, \text{ onde } X_i = \{x_n, n \geq i\}.$$

→ Seja $\varepsilon > 0$, $\exists l \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq l, |a_n - A| < \varepsilon$.

[Por contradição]

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\nexists l \in \mathbb{N}$ com $a_n - A < \varepsilon$ $\forall n \geq l$. Sendo assim, $A + \varepsilon > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $A + \varepsilon$ é cota inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, porém, isso é contraditório com $A = \inf\{\sup X_n, n\in\mathbb{N}\}$, visto que $\inf\{\sup X_n, n\in\mathbb{N}\} = \inf\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$.

Sendo assim, a subsequência $(a_n)_n$ converge para A, que é ~~por~~ então, um valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) $\beta > A \to \beta$ não é valor de aderência.

[Por contradição]

Seja $(a_n)_n$ uma subsequência de $(x_n)_n$ que converge para β. Sendo assim, ~~$\exists a_k$ tq $a_k > A$)~~ $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\forall l > k$ com $l \in \mathbb{N}$, $a_l > A$. Dessa forma, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists i \geq m$ tal que $x_i > A$. Se fosse assim, porém, $\forall j \in \mathbb{N}$ $(X_j = \{x_j, x_{j+1}, \ldots\}) \Rightarrow \sup X_j > A$ e, por isso, $\inf\{\sup X_j,\ j \in \mathbb{N}\} > A$, resultando em contradição.

c) $\beta > A \to \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $x_n < \beta$.

[Por contradição]

$\nexists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $x_n < \beta$. Se fosse assim, $\forall i \in \mathbb{N}$ $\sup X_i \geq \beta$, e, como $\beta > A$, há contradição com o fato de $\inf\{\sup X_i,\ i \in \mathbb{N}\} = A < \beta$. Dessa forma, $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $x_n < \beta$

2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a = \liminf x_n$

$A = \limsup x_n$

$B = \limsup y_n$

a) $\limsup(x_n + y_n) \leq A + B$

~~Lista 4 exercício 4:~~

~~$\sup(x_n + y_n) = \sup(x_n) + \sup(y_n)$~~

~~$\lim(\sup(x_n) + \sup(y_n)) \leq A + B$~~

Seja $\varepsilon > 0$. Sabe-se que $\exists N$ tq $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N$. Logo, $\forall n \geq N$, $A - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < A - \frac{\varepsilon}{2}$, $B - \frac{\varepsilon}{2} < y_n < B + \frac{\varepsilon}{2}$

$A + B - \varepsilon < x_n + y_n < A + B + \varepsilon$.

Porém, como é possível ~~que~~ tomar N_i para todo elemento da sequência $(\varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/4, \ldots)$ e a sequência $(\varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/4, \ldots)$ converge para zero, então, de fato, ~~$x_n + y_n \leq A + B$~~ $\limsup(x_n + y_n) \leq A + B$, visto que a existência de certo N_i garante que o lim sup seja menor ou igual ao valor $A + B + \frac{\varepsilon_i}{2}$.

b) $\limsup(-x_n) = -a$

O lim sup de uma sequência é o valor de aderência máximo, e, o lim inf, o menor. Note que quando a sequência é negada (multiplicada por -1), seus valores de aderência também. Portanto, seja V os valores de aderência da sequência original:

$$V = (a, \dots, A)$$ ↳ em ordem crescente

$$\downarrow$$

$$-V = (-A, \dots, -a)$$

~~(Tornan)~~ Tornando claro que ~~max(-V) = mi~~

$$\max(-V) = -\min(V)$$

c) Seja $\varepsilon > 0$, é claro que $\exists N$ tq $\forall n > N$, $|x_n - A| < \varepsilon$ e $|y_n - B| < \varepsilon$. Logo $\forall n > N$, $x_n < A + \varepsilon$, $y_n < B + \varepsilon$,

$$x_n \cdot y_n < AB + A\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon^2$$

↳ $\limsup (x_n y_n) < AB + \varepsilon(A + B + \varepsilon)$

Da mesma forma que o item (a), tem que conforme $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon(A+B+\varepsilon) \to 0$, pois a sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0. Sendo assim $\limsup(x_n y_n) \leq AB$.

~~d)~~

~~a→ $x_i = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$ | $x = (1, 2, 1, 2, 1, \ldots)$~~

~~$y_i = 2\ \forall i \in \mathbb{N}$ | $y = (1, 1/2, 1/4, \ldots)$~~

~~$\limsup(x_n + y_n) = 3 = 1 + 2$~~ | $= 2 = 2 + 0$

d)

a: $x_n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

$y_n = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

$\limsup (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 = A$

$\limsup (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 = B$

$\limsup (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 < A + B = 2$

~~c: $x_n (0, 1, 0, 1, \ldots)$~~

~~$y_n = (1, -1, -1, \ldots)$~~

~~$\limsup (x_n) = 1$~~

~~$\limsup (y_n) = \ldots$~~

c:

$x_n = (1, 2, 1, 2, \ldots)$

$y_n = (1, 1/2, 1, 1/2, \ldots)$

$\limsup (x_n) = 2 = A$

$\limsup (y_n) = 1 = B$

$\limsup (x_n \cdot y_n) = 1 < A \cdot B = 2$

3. a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente $\Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n$

$(\Rightarrow)$

Usando que se uma sequência é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \mid \exists N \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $n > N \Rightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$

onde d é o valor absoluto, pois se tratam dos reais.

→ Toda subsequência de x_n converge para l.

[prova]

Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $n > N \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$. Como $y_n = x_m$ para algum $m \geq n > N$, então $|y_n - l| < \varepsilon$ também. Sendo assim $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > N$, então $|y_k - l| < \varepsilon$, mostrando que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l.

→ Como toda subsequência converge para l, então l é o único ponto de aderência.

→ Como existe apenas um ponto de aderência, $\liminf x_n = \limsup x_n$.

($\Leftarrow$)

→ De $\liminf x_n = \limsup x_n$, então há apenas um ponto de aderência. Isso foi visto em aula: lim inf é o menor ponto de aderência e lim sup o maior.

→ Sendo assim, toda subsequência converge para esse ponto de aderência e, em especial, a sequência inteira também.

b) Se α valor de aderência, então existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha$, vide 1(a).

($\Rightarrow$) Seja $\varepsilon > 0$, como $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $|y_n - \alpha| < \varepsilon$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\}$ é infinito, pois $-\varepsilon < y_n - \alpha < \varepsilon \Rightarrow \alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$.

c) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

• $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, n > N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$.

→ $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$
[prova]

• Desigualdade triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$, já foi provada

• Tomando $a = x_n - x$ e $b = x$:

$|x_n| \leq |x_n - x| + |x|$

$|x_n| - |x| \leq |x_n - x|$

• Tomando $a = x - x_n$ e $b = x_n$:

$|x| \leq |x - x_n| + |x_n|$

$|x| - |x_n| \leq |x - x_n| = |x_n - x|$ → $|v| = |-v|$, visto em aula

• Portanto $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$

• Logo, como $|x_n - x| < \varepsilon$, $||x_n| - |x|| < \varepsilon$ também.
Isso mostra que a sequência dada pelos módulos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o módulo do limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) $(\Leftarrow)$ Tome $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$.
Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~dada~~ tal que $a_i \in (\alpha - \frac{\varepsilon}{2^i}, \alpha + \frac{\varepsilon}{2^i})$ e a_i qualquer nesse intervalo. Pela própria construção de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Sendo assim, α é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Scanned with CamScanner

4. $x_n \leq z_n \leq y_n$, $\forall n \geq 1$ e

$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = a$

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$, $|x_n - a| < \varepsilon$ e $|y_n - a| < \varepsilon$. Como $x_n \leq z_n \leq y_n$, então $\cancel{|x_n - a| \leq |z_n - a| \leq |y_n - a|}$ $x_n - a \leq z_n - a$ e $z_n - a \leq y_n - a$. Como visto em aula, $b \leq |b|$ e, assim, $x_n - a \leq |x_n - a| < \varepsilon$ e $y_n - a \leq |y_n - a| < \varepsilon$. Também ~~pode-se concluir~~ vale que $-\varepsilon < x_n - a$. Sendo assim, $-\varepsilon < x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a < \varepsilon$, logo $-\varepsilon < z_n - a < \varepsilon \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$. Portanto, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para a.

5. (x_n) e (y_n) limitadas

a) $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$.

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ onde $M > 0$ e $M \geq |y_n|$ para $n \in \mathbb{N}$ (M existe pois $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada). Como $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| < \delta$. Também, $|x_n| \cdot M < \varepsilon$. Como $M \geq |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \cdot |y_n| < \varepsilon$ e $|x_n \cdot y_n| < \varepsilon$. Dessa forma, $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.

b) Se $\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty$ então $\lim_{n\to\infty}(x_n + z_n) = +\infty$

Seja M uma cota inferior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tome $s > 0$. Seja $r = s - M$. Como $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $z_n > r$. Como $z_n > s - M$, $z_n + M > s$. Como $M \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n + x_n > s$. Sendo assim, $x_n + z_n$ é ilimitado e $\lim_{n\to+\infty}(x_n + z_n) = +\infty$

6 $\exists_{n_0}$ tq:

$\forall n \geq n_0$, $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1$ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1 \Rightarrow 0 < x_{n+1} \leq c \cdot x_n < x_n \Rightarrow \boxed{0 < c < 1}$

• Vale notar que essa restrição para os termos da sequência também implica que $0 < x_{n_0+k} \leq c^k \cdot x_{n_0} < x_{n_0}$.
[Prova - indução]

Base x_{n_0+1}: $0 < \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} \leq c < 1 \rightarrow 0 < x_{n_0+1} \leq c \cdot x_{n_0} < 1$

Passo: Seja $0 < x_{n_0+k} \leq c^k \cdot x_{n_0}$. $0 < \frac{x_{n_0+k+1}}{x_{n_0+k}} \leq c \Rightarrow 0 < x_{n_0+k+1} \leq x_{n_0+k} \cdot c \leq c^k \cdot x_{n_0} \cdot c$

→ Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência definida por

$$\begin{cases} y_i = x_i, \text{ se } i \leq n_0 \\ y_i = C^{i-n_0} \cdot y_{n_0}, \text{ c.c} \end{cases} \quad . \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

[Passo]

Tome $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Tome, então, $\delta = \frac{\varepsilon}{y_{n_0}}$. Por fim, tome $\alpha > \log_C \delta$ (Note que $0 < C < 1$)

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $n > \alpha$, $|y_{n_0+n}| < \varepsilon$, pois $|y_{n_0} \cdot C^{n}| <$

$$< |y_{n_0} \cdot C^{\log_C \delta}| = |y_{n_0} \cdot \delta| =$$

$$= |y_0 \cdot \frac{\varepsilon}{y_{n_0}}| = \varepsilon.$$

Sendo assim, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.

→ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > 0$ tq $\forall n \geq N$, $|y_n| < \varepsilon$.

Porém, como $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\forall n \geq N$, $|x_n| < \varepsilon$, mostrando que x_n também converge para 0.

7. $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Usando compacto $\Leftrightarrow$ fechado e limitado.

(a) $\exists x_0, y_0 \in K$ tq $\forall x \in K$, $x_0 \leq x \leq y_0$.

Como K limitado, $\exists \sup K$ e $\exists \inf K$. Seja $m = \sup K$ e $n = \inf K$.

m é a menor cota superior, logo, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in K$ t.q. $m - \varepsilon \leq x \leq m$.
Porém, se $m \notin K$, então $m - \varepsilon \leq x < m$. Nesse caso, porém, m seria um ~~po~~ número na fronteira de K e isso contradiz o fato de K ser fechado, pois todo fechado contém os pontos da fronteira. $\therefore m \in K$

Da mesma forma, v é a maior cota inferior de K, logo,

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in K$ t.q. $v \leq x \leq v - \varepsilon$
Se $v \notin K$, então $v < x \leq v - \varepsilon$ e isso implica que v está na fronteira de K. Isso contradiz o fato de K ser fechado. $\therefore v \in K$

b) ~~Seja ε a menor distância possível entre quaisquer dois elementos de K. Isto é $\varepsilon = \min(x_i - x$~~

Como K é limitado, $\exists m = \sup K$ e $\exists v = \inf K$. Seja ε a menor distância entre quaisquer dois elementos de K. Pode-se particionar $[v, m] \in \mathbb{R}$ com $\left\lceil \frac{m-v}{\varepsilon} \right\rceil$ intervalos ~~a~~ através da coleção finita de intervalos $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_{\lceil \frac{m-v}{\varepsilon} \rceil}\}$ tal que ~~$\forall$~~
$I_i = [v + (i-1)\varepsilon, v + i\varepsilon)$. Por construção cada I_k contém apenas um elemento de K (de outra forma, $\exists x_i, x_j \in K$ t.q. $|x_j - x_i| < \varepsilon$, contradizendo a escolha de ε). Como $\mathcal{I} \supset [v, m]$, $\forall x \in K$, ~~e~~ $\exists I_i \subset \mathcal{I}$ t.q. $x \in I_i$. Sendo assim, K é finito pelo princípio da casa de pombos, já que $|\mathcal{I}| = \left\lceil \frac{m-v}{\varepsilon} \right\rceil$.

c) Se $E \cap K = \emptyset$, ok

$\rightarrow C \cap B \Rightarrow$ intersecção de fechado é fechado

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in K$, $a < x < b$. Tais a, b existem pois K é limitado

Como $E \cap K \subset K$, então $\forall x \in E \cap K$, $a < x < b$, também.
Dessa forma, $E \cap K$ é limitado. Também, $E \cap K \subset K$ e K fechado.
→ Como $E \cap K$ é fechado e limitado, $E \cap K$ é compacto

8.

a) $X \subset \mathbb{R}$ é denso $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X$ tq $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Usando denso: $\forall (a,b) \subset \mathbb{R}$ com $a < b$, $\exists x \in X$ tq $a < x < b$.

$(\Rightarrow)$

- Seja $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Tome $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ qualquer. Como X é denso, $\exists x \in X$ e $x \in (a - \varepsilon, a)$. Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in (a - \frac{\varepsilon}{2^i}, a)$ e x_i é escolhido de maneira arbitrária no seu intervalo.
A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

[Prova]

Tome $\delta \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. ~~Tome $x \in \mathbb{Q}$~~ Escolha $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\varepsilon}{2^i} < \delta$ (tal escolha existe pois a sequência $\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ é * ~~tal que~~ converge para 0 - propriedade arquimediana).
Como $x_i \in (a - \frac{\varepsilon}{2^i}, a)$, então $x_i \in (a - \delta, a) \supset (a - \frac{\varepsilon}{2^i}, a)$.
~~Ent~~ Com isso, tem-se que $|a - x_i| < \delta$, mostrando que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a.

* Tome $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pela propriedade arquimediana $\exists N$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$. Em especial, $\exists i$ tq $\frac{\varepsilon}{2^i} < \delta$. Como $\left|\frac{\varepsilon}{2^i}\right| < \delta$.

($\Leftarrow$)

Tome $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervalo qualquer com $a<b$. Tome $x \in \mathbb{R}$ e $x \in (a,b)$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ e $\varepsilon < x-a$ e $\varepsilon < x-b$. Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por hipótese, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $n\in\mathbb{N}$ $|x_n - x| < \varepsilon$. Tome x_n. É claro que $a < x_n < b$, pois $|x_n - x| < \varepsilon$ e $\varepsilon < x-a$ e $\varepsilon < x-b$, então $|x_n - x| < x-a$ e $|x_n - x| < x-b$. Sendo assim, X é denso.

9 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq
- $K_n \supseteq K_{n+1}$
- K_n é compacto não vazio

Mostre $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.

Tome a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_i \in K_i$ e x_i é escolhido de forma aleatória. Como $\forall i \in \mathbb{N}$, $x_i \in K_1$ e K_1 é compacto então a sequência converge e converge para algum elemento de $K1$. Porém, também é verdade que $\lim_{n\to\infty} x_n \in K_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

[Prova]

Tome ~~m~~ $m \in \mathbb{N}$. É claro que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, $x_n \in K_m$. Tomando $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_i = x_{i+(m-1)}$ (isto é, removendo os $m-1$ primeiros elementos). ~~N~~ Pelo mesmo argumento $\lim_{n\to\infty} y_n \in K_m$. Porém também é fato que $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$, já que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Dessa forma $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim x_n \in K_m$, portanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \supset \{\lim_{n\to\infty} x_n\} \neq \emptyset$

10.

a) $X \subset \mathbb{R} \Rightarrow \overline{X}$ é fechado

Lista 4: $\overline{X} = X \cup \partial X$

[Por contradição]

• Seja ~~(a com)~~ $a \in \partial \overline{X}$ tal que $a \notin \overline{X}$. Como $a \in \partial \overline{X}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \overline{X}$ tq $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Porém, como $a \notin \overline{X}$ então $a \notin \partial X$ logo $\exists \delta > 0, \nexists x \in X$ com $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

• Considere $\delta > 0$ tal que $\nexists \in X$ com $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Tome $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ e seja $x_0 \in \overline{X}$ tal que $x_0 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Porém, como $x_0 \in \overline{X}$, então $\forall \alpha > 0, \exists \in X$ com $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Em especial, temos algum $x_* \in X$ com $x_* \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. No entanto, baseado na escolha $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a-\delta, a+\delta)$. Portanto, há contradição visto que tal x_* não poderia existir. Pode-se concluir que $\nexists a \in \partial \overline{X}$ tal que $a \notin \overline{X}$. Logo, $\overline{X}$ é fechado.

b) $d(\alpha, X) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \overline{X}$.

($\Rightarrow$) Tome $\varepsilon > 0$. Como $d(\alpha, X) = 0$, $\exists x \in X$ tq

$d(\alpha, x) < \varepsilon$, logo, $|x - \alpha| < \varepsilon$. Como $|x-\alpha| < \varepsilon$, $-\varepsilon < x - \alpha < \varepsilon \Rightarrow \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon \Rightarrow x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Dessa forma, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, há algum elemento de X na vizinhança de α. Sendo assim, por definição, $\alpha \in \overline{X}$.

Scanned with CamScanner

~~($\Leftarrow$) Como $\alpha \in \bar{X}$, então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in \bar{X}$ tq $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.~~
~~Como $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, então $\alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon$, logo,~~
~~$|x - \alpha| < \varepsilon$. Como ε é qualquer, então $\exists x \in \bar{X}$ tal~~
~~que $|x - \alpha| = 0$.~~

($\Leftarrow$) Como $\alpha \in \bar{X}$, $\alpha \in X$ ou $\alpha \in \partial X$.

- Se $\alpha \in X$, então $d(\alpha, X) = d(\alpha, \alpha) = |\alpha - \alpha| = 0$.
- Se $\alpha \in \partial X$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tq $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Isso implica que $|x - \alpha| < \varepsilon$. Se $\varepsilon \to 0$, então $|x - \alpha| = d(\alpha, X) = 0$

11. $X \subset \mathbb{R}$

a) X' é fechado.

(Contradição)

Seja $m \in \partial X'$ e $m \notin X'$. Como $m \in \partial X'$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in X'$ tq $x_0 \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$. Porém, como $x_0 \in X'$, então $\forall \delta > 0$, $\exists x_1 \in X$ tq $x_1 \in (m - \delta, m) \cup (m, m + \delta)$.

~~Caso $x_0 < m$:~~

$\rightarrow$ Toma-se $\delta = \min(|m - x_0|, |m - \varepsilon - x_0|, |m + \varepsilon - x_0|)$.

Como antes, $\exists x \in X$ tq $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Porém, pela escolha de δ, tem-se que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (m - \varepsilon, m + \varepsilon) \setminus \{m\}$, logo $x \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon) \setminus \{m\}$. Isso contradiz o fato de $m \notin X'$, pois m é ponto de acumulação.

Assim, X' é fechado.

b) $X' = (\overline{X})'$

- $X' \subset (\overline{X})'$

Como $X \subset \overline{X}$, então, se $x_0 \in X$ é ponto de acumulação em X, também é em $\overline{X}$.

[Prova]

Tome $\varepsilon > 0$. $\exists x \in X$ tq $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Como $X \subset \overline{X}$, x também pertence a $\overline{X}$, logo x_0 também é ponto de acumulação em $\overline{X}$.

- $(\overline{X})' \subset X'$

[Por contradição]

Tome $x_0 \in (\overline{X})'$ tal que $x_0 \notin X'$. Tome $\varepsilon > 0$ tal que

$\exists x_* \in \overline{X}$, $x_* \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ mas $\nexists x \in X$, $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$

Considere $\delta = \min(|x_* - (x_0 - \varepsilon)|, |x_* - x_0|, |x_* - (x_0 + \varepsilon)|)$. Como $x_* \in \overline{X}$, então $\exists x_1 \in X$ tq $x_1 \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$. Porém, pela escolha de δ, $(x_* - \delta, x_* + \delta) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$, logo, $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. ~~Dessa forma $x_0 \in X'$, uma contradição~~

Porém isso é contraditório com a suposição de $x_0 \notin X'$.

Sendo assim $\nexists x_0 \in (\overline{X})'$ e $x_0 \notin X'$, mostrando que $(\overline{X})' \subset X'$.

c) $\overline{X} = X \cup X'$

Da lista 4 sabe-se que $\overline{X} = X \cup \partial X$. Basta mostrar

$$X \cup X' = X \cup \partial X.$$

($X \cup X' \subset X \cup \partial X$)

Tome $x_0 \in X \cup X'$. Se $x_0 \in X$, então $x_0 \in X \cup \partial X$. Caso $x_0 \notin X$, então $x_0 \in X' \setminus X$. Nesse caso, pela definição de ponto de acumulação, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tq $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Porém, como $((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}) \subset (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, então x_0 também é ponto de aderência e, logo, $x_0 \in \partial X$.

($X \cup \partial X \subset X \cup X'$)

Tome $x_0 \in X \cup X'$. Se $x_0 \in X$, então $x_0 \in X \cup X'$. Caso $x_0 \notin X$, então $x_0 \in \partial X \setminus X$. Temos então que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tq $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Como $x_0 \notin X$ e $x \in X$, $x \neq x_0$, mostrando que $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$. Isso mostra que $x_0 \in X'$, logo $\forall x \in X \cup \partial X$, $x \in X \cup X'$.

12. X limitado de $\mathbb{R}$

a) Y limitado de $\mathbb{R}$ e $X \subset Y \Rightarrow \operatorname{diam} X \leq \operatorname{diam} Y$.

Sejam $x_0 \in X$ e $x_1 \in X$ tais que $\operatorname{diam} X = |x_0 - x_1|$. Como $X \subset Y$, $x_0 \in Y$ e $x_1 \in Y$, então $\operatorname{diam} Y \geq \operatorname{diam} X$ visto que $\operatorname{diam} Y = \sup\{|x-y|$ com $x \in Y$ e $y \in Y\}$ e $\sup\{|x-y|\ x \in Y, y \in Y\} \geq |x_0 - x_1|$.

b) $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} \overline{X}$

Se $X = \overline{X}$ então verdadeiro:

Se $X \neq \overline{X}$, $\operatorname{diam} X \leq \operatorname{diam} \overline{X}$, pois $\forall x \in X$, $x \in \overline{X}$ (visto item (a))

Supondo que $\exists x, y \in \overline{X}$ tal que $|x-y| > \operatorname{diam} X$ (~~como $x, y \in \overline{X}$, $\exists x_\varepsilon, y_\varepsilon \in X$ tais $\forall \varepsilon > 0$ tais que $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$ e $|y - y_\varepsilon| < \varepsilon$~~) Da mesma forma que 10.b), $d(x, X) = 0$ e $d(y, X) = 0$. Dessa forma, tome $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$ tal que $|x - x_0| = 0$ e $|y - y_0| = 0$.

É claro que $|x-y| = |x-x_0| + |y-y_0| + |x_0-y_0| = |x_0-y_0|$. Porém isso mostra que $|x-y| \leq \text{diam}\, X$, contradizendo a escolha de x, y e mostrando que $\text{diam}\, \bar{X} \leq \text{diam}\, Y$. Temos, então $\text{diam}\, X = \text{diam}\, \bar{X}$.

c) $\text{diam}\, X = \sup X - \inf X$

Supondo X limitado tal que $\text{diam}\, X \neq \sup X - \inf X$. Como é limitado, $\exists \sup X$ e $\exists \inf X$ e, como $\text{diam}\, X = \text{diam}\, \bar{X}$, então $\text{diam}\, X > \sup X - \inf X$, pois $\sup X, \inf X \in \bar{X}$. Seja $\text{diam}\, X = |x_0 - y_0|$ com $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$.

Sabe-se que $\inf X \leq x_0 \leq y_0 \leq \sup X$, sem perda de generalidade, e que $x_0 > \inf X$ ou $y_0 < \sup X$ ou ambos. Considere que $|\sup X - \inf X| = |\inf X - x_0| + |x_0 - y_0| + |y_0 - \sup X|$ e como $|\inf X - x_0| + |y_0 - \sup X| > 0$, então $|\sup X - \inf X| - |x_0 - y_0| > 0$.

Isso mostra que $|\sup X - \inf X| > |x_0 - y_0|$, contradizendo a suposição de $\text{diam}\, X > \sup X - \inf X$. Isso, por sua vez, impede que $\text{diam}\, X \neq \sup X - \inf X$, logo, $\sup X - \inf X = \text{diam}\, X$

13. $X \subset \mathbb{R}$ e $f: X \to \mathbb{R}$ limitada

$$f \text{ contínua em } x_0 \Leftrightarrow \omega(f, x_0) = 0$$

Usando: f contínua no ponto x_0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in (x-\delta, x+\delta)$ então $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

($\Rightarrow$) Tome $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em x_0, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in (x-\delta, x+\delta) \to f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

- Como $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \geq 0$ (propriedade de módulo) então $\text{diam}\, Y \geq 0$, $\forall Y \subset \mathbb{R}$. Sendo assim, $\omega(f, x_0) \geq 0$ pois é claro que 0 é uma cota inferior e assim, $0 \leq \omega(f, x_0)$

Supondo, por contradição, que $w(f, x_0) > 0$. Seja então, $L = w(f, x_0) > 0$. Tome $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon < \frac{L}{2}$ e $\varepsilon > 0$.

Com f contínua, temos $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se $X \cap (x_0 - \delta, x + \delta) = \{x_0\}$, então $diam(f(X \cap (x_0 - \delta, \cancel{x} + \delta))) = |x_0 - x_0| = 0$. Se $\exists\, x_1 \neq x_0$ tal que $x_1 \in (x_0 - \delta, x + \delta)$ então $diam(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) \leq |f(x_0) - \varepsilon - (f(x_0) + \varepsilon)|$ pois $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Sendo assim,

$diam(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) \leq |-2\varepsilon| < L$. Logo, $w(f, x_0) < L$, mostrando que $w(f, x_0) = 0$.

($\Leftarrow$)

Tome $\varepsilon > 0$. Como $w(f, x_0) = 0$, então $\exists\, \delta > 0$ tal que $diam(f(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))) < \varepsilon$. Isso mostra que $\forall x, y \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Em especial, $\forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, então $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Sendo assim, f satisfaz a condição de continuidade em x_0.

14.

$f: X \to \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in X$.

$\cdot f(X) \subseteq Y$

$\cdot g: Y \to \mathbb{R}$ contínua em $f(x_0) \in Y$

$\Rightarrow h = g \circ f : X \to \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in X$

a) Usando definição.

[Por contradição]

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists x \in X$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $h(x) \notin (h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon)$. Como g é contínua então $\exists \alpha > 0$ tal que se $y \in Y$ e $y \in (f(x_0) - \alpha, f(x_0) + \alpha)$ então $g(y) \in (g(f(x_0)) - \varepsilon, g(f(x_0)) + \varepsilon) = (h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon)$.

Considere α_0 algum ~~dos~~ desses ~~tal~~ tais α's.

Como f é contínua, $\exists \beta > 0$ tal que se $x \in X$ e $x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$ então $f(x) \in (f(x_0) - \alpha_0, f(x_0) + \alpha_0)$.

Sendo assim, porém $g(f(x))$ com $x \in (x_0 - \beta, x_0 - \beta)$ é tal que $g(f(x)) \in (h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon)$ e, da mesma forma, $\forall x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$, $h(x) \in (h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon)$, contrariando a escolha de ε. Logo, h é contínua.

b) Usando sequência

Tome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Por definição $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Seja $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $a_i = f(x_i)$. Como $\lim_{n \to \infty} a_n = f(x_0)$, então $\lim_{n \to \infty} g(a_n) = g(f(x_0))$. Tem-se então que $\lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$ para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para x_0. Dessa forma $h = g \circ f$ é contínua em x_0.

15. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Tome $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. f contínua em x_0 se $\exists\, \delta > 0$ tq $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to f(x) \in (f(x_0) + \varepsilon, f(x_0) - \varepsilon)$, ~~ou~~ ou, ainda, $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tomando $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x_0 - x| \cdot \frac{1}{|x \cdot x_0|} < \varepsilon$$

Se $x_0 > 0$:

Tome $\delta = \min\{1, \frac{x_0}{2}\}$, pois isso garante que se $|x - x_0| < \delta$, $x > 0$.

$$|x_0 - x| \cdot \frac{1}{|x \cdot x_0|} < \delta \cdot \frac{1}{|x \cdot x_0|} = \delta \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x_0} < \delta \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{(x_0 - \delta)} \to$$

$$\delta \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{(x_0 - \delta)} = \frac{\delta}{x_0 (x_0 - \delta)}$$

Tome $\alpha < \frac{x_0}{2}$. Considere que $\delta < \alpha$. Note que isso garante que $x_0 > 0 \to x > 0$ e $x_0 < 0 \to x < 0$

Têm-se então:

$$|x_0 - x| \cdot \frac{1}{|x\, x_0|} = |x_0 - x| \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x_0} \leq |x_0 - x| \cdot \frac{1}{x_0 - \alpha} \cdot \frac{1}{x_0} =$$

$$= \frac{|x_0 - x|}{x_0(x_0 - \alpha)}$$

Adicionando a restrição $\delta < x_0\left(x_0 - \frac{x_0}{2}\right)\varepsilon = \frac{x_0^2}{2}\varepsilon$ têm-se:

$$\frac{|x_0 - x|}{x_0(x_0 - \alpha)} < \frac{\delta}{\frac{x_0^2}{2}} = \varepsilon$$

Sendo assim, toma-se $\delta < \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2} \cdot \varepsilon\right\}$ de tal forma que $\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Sendo assim, f é contínua em qualquer $x \in X$.