MAT0206 - Prova 3

Matheus T. de Laurentys, 9793714

January 23, 2021

Q.1

a)

[Por contradição]

Temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\inf \sqrt[n]{x_n} < \lim_{n\to\infty}\inf \frac{x_{n+1}}{x_n}$$
$$\exists c; \lim_{n\to\infty}\inf \sqrt[n]{x_n} < c < \lim_{n\to\infty}\inf \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

A segunda desigualdade da segunda linha mostra que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ tem-se $c < \frac{x_{n+1}}{x_n}$, visto que o lim inf é o menor ponto de acumulação .

Tomando $n_0 > N$ tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{x_{N+1}}{x_N} > c \\ \dots \\ \frac{x_{n_0}}{x_{n_0-1}} > c \end{cases}$$

Multiplicando esses $(n_0 - N)$ termos temos que:

$$\frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n_0}}{x_{n_0-1}} > c \cdot \ldots \cdot c \; *$$
$$\iff$$
$$\frac{x_{n_0}}{x_N} > c^{n_0-N}$$
$$\iff$$
$$x_{n_0} > c^{n_0} \cdot \frac{x_N}{c^N}$$
$$\iff$$
$$\sqrt[n_0]{x_{n_0}} > c \cdot \sqrt[n_0]{\frac{x_N}{c^N}}$$

* Note que a sequência é de termos positivos, logo não ha problema com os sinais.

Sendo assim, $\forall n > N$, $\sqrt[n]{x_n} > c \cdot \sqrt[n]{\frac{x_N}{c^N}}$. Ja foi visto (L6 E4.2,4.3) que $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{\frac{x_N}{c^N}}) = 1$, logo, tem-se $\lim_{n\to\infty}\inf \sqrt[n]{x_n} \geq c \cdot \lim_{n\to\infty}\inf \sqrt[n]{\frac{x_N}{c^N}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\inf \sqrt[n]{x_n} \geq c$. Logo, tem-se contradição com a hipotese inicial. Portanto, $\lim_{n\to\infty}\inf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n\to\infty}\inf \sqrt[n]{x_n}$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Por definição tem-se

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$
$$\text{logo } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

Nota-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ é de termos positivos. Foi visto em aula que para sequência de termos positivos:

$$\lim\ \inf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \lim\ \inf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \le \lim\ \sup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \le \lim\ \sup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Nota-se que todas as desigualdades foram provadas (1a no item a, 2a na P2, 3a em aula).

Vou usar a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \frac{x!}{n^n}$. Vou mostrar que $\lim\ \inf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\ \sup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$, a partir do resultado que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n}) = L$, pois como ja vimos, se a sequência converge para um limite, então lim inf = lim sup. Alem disso, isso mostrara que $\lim\ \inf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim\ \sup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = L$ (sanduiche) e isso, conforme ja visto, mostra que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = L$. O interesse de tomar $x_n = \frac{x!}{n^n}$ vem do fato de $\sqrt[n]{x_n} = \frac{\sqrt[n]{x!}}{n}$ que, por consequencia, tera o valor L.

Seguindo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= (\frac{n}{n+1})^n \\
&= \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^n} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Conferme ja explicado, temos que $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{x!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Q.2

a)

Tome $h : X \to \mathbb{R}$ dada por $h = f \cdot g$. Dado $\epsilon > 0$.

Como f e g são limitadas, temos que $\exists L \in \mathbb{R}; \forall x \in X; L > |f(x)|$ e $L > |g(x)|$. Fixe qualquer tal L e tome também $\beta = \frac{\epsilon}{L}$.

Como f e g uniformemente contínua s temos que $\exists \delta_f, \delta_g > 0$ tais que $\forall x, y \in X$, $|x - y| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\beta}{2}$ e $|x - y| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\beta}{2}$.

Fixe então $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Tomando $x, y \in X$ com $|x - y| < \delta$, temos:

$$
\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\
&= |f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y)| \\
&= |f(x) \cdot (g(x) + g(y)) - g(y) \cdot (f(x) + f(y))| \\
&\leq ||f(x) \cdot (g(x) + g(y))| + |g(y) \cdot (f(x) + f(y))|| \\
&= ||f(x)| \cdot |(g(x) + g(y))| + |g(y)| \cdot |(f(x) + f(y))||
\end{aligned}
$$

Usando a hipotese de que f e g são limitadas e $L > |f(x)|$ e $L > |g(x)|$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &\leq ||f(x)| \cdot |(g(x) + g(y))| + |g(y)| \cdot |(f(x) + f(y))|| \\
&< |L \cdot |(g(x) + g(y))| + L \cdot |(f(x) + f(y))|| \\
&= L(||(g(x) + g(y))| + |(f(x) + f(y))||)
\end{aligned}
$$

Usando agora que $|f(x) - f(y)| < \frac{\beta}{2}$ e $|g(x) - g(y)| < \frac{\beta}{2}$ (devido a escolha de x, y), temos:

$$
\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &< L(||(g(x) + g(y))| + |(f(x) + f(y))||) \\
&= L(|(g(x) + g(y))| + |(f(x) + f(y))|) \\
&\leq L(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2})
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
|h(x)-h(y)| &< L(\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}) \\
&= L\cdot\frac{\epsilon}{L} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

Sendo assim, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |h(x)-h(y)| < \epsilon$. Isso mostra que a função $h = f \cdot g$ é uniformemente contínua .

b

Tome $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas dadas por $f(x) = g(x) = x$. Tome $h = f \cdot g$.

Tanto f quanto g são uniformemente contínua s.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$. Assim, temos que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$, pois $|f(x)-f(y)| = |x-y| < \delta = \epsilon$.

No entanto, $h = f \cdot g$ dada por $h(x) = x^2$ não é uniformemente contínua .

Prova [por contradição]:

Tome ϵ qualquer. Como h uniformemente contínua temos que $\exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$. Tome qualquer tal δ.

Tome $y = x + \frac{\delta}{2}$, temos que $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Assim,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |x^2 - x^2 - x\delta - \frac{\delta^2}{4}| \\
&= |-x\delta - \frac{\delta^2}{4}| \\
&= |x\delta + \frac{\delta^2}{4}| \\
&\geq |x\delta| - |\frac{\delta^2}{4}| \\
&= |x|\delta - \frac{\delta^2}{4}
\end{aligned}
$$

No entando, se $|x| \geq \frac{\epsilon + \frac{\delta^2}{4}}{\delta}$, temos contradição visto que:

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\geq |x|\delta - \frac{\delta^2}{4} \\
&\geq \epsilon + \frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^2}{4} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

Vale ressaltar que tal escolha de x é sempre possivel vide o dominio.

Q.3

Note que como a função f é contínua no intervalo $[a, b]$, ela também é limitada. Sendo assim, ela é integravel.

Seja $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Como f contínua , $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ tem-se que $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Tome uma partição $P_* = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ com um dos intervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ tal que $I_k \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|dx &= \sup_P \{s(|f|; P); P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&\geq s(|f|; P_*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \inf(|f([x_{i-1}, x_i])|) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \inf(|f([x_{k-1}, x_k])|) \cdot |[x_{k-1}, x_k]| \\
&\geq |(f(x_0) - \epsilon)| \cdot |[x_{k-1}, x_k]| \; * \\
&= |\frac{f(x_0)}{2}| \cdot |[x_{k-1}, x_k]|
\end{aligned}$$

* $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$ tem-se $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$, devido a escolha de P mediante $I_k \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

Como $f(x_0) \neq 0, |\frac{f(x_0)}{2}| > 0$. Notando que $[x_{k-1}, x_k] = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] = I_i$ é um intervalo, temos que $|[x_{k-1}, x_k]| = x_k - x_{k-1}$, por definição . Alem disso, $x_k - x_{k-1} > 0$, pois, novamente, I_k é intervalo. Dessa forma,

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq |\frac{f(x_0)}{2}| \cdot |[x_{k-1}, x_k]| > 0$$

Q.4

a)

Usando a metrica habitual $d(x,y) = |y-x|, \forall x,y \in \mathbb{R}$. Tome $f : X \to \mathbb{R}$ função Lipschitz. Assim, dados $x,y \in X$, usarei que $|f(y)-f(x)| \leq K|y-x|$. O valor K pode ser qualquer constante lipshitz de f.

Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ qualquer. A variação é $V(f;P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. Como $|f(y)-f(x)| \leq K|y-x|$, então tem-se que $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})| \leq K \times \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = K \times (|t_1-t_0|+|t_2-t_1|+\ldots+|t_n-t_{n-1}|)$. Note que $|t_n - t_0| = |t_1 - t_0| + |t_2 - t_1| + \ldots + |t_n - t_{n-1}|$.

Temos então , $V(f;P) \leq K \times (t_n - t_0) = K(b-a)$. Isso mostra que $\forall P$ partição de $[a,b]$ tem-se $V(f;P) < K(b-a)$, logo $\underset{P}{sup}\{V(f;P); P$ partição de $[a,b]\}$ é finito, pois $K(b-a)$ é cota superior.

Como toda $f \in C^1$ é Lipschitz, então toda $f \in C^1$ é de variação limitada.

b)

Fixando agora uma partição qualquer $P = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a,b]$. Tem-se que:

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx| \text{ (pois } f \text{ contínua -TFC)} \\ &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)|dx \text{ (soma de modulos)} \end{aligned}$$

Isso mostra que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)|dx \\ &= \int_a^b |f'(x)|dx \end{aligned}$$

Como P qualquer, temos $V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(x)|dx$.

Como f' é contínua , dado ϵ qualquer, $\exists \delta$ tal que $x,y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon$.

Fixando ϵ, tome δ tal que $x,y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon$. Tome também a partição P que separa em $n = \lceil \frac{b-a}{\delta+1} \rceil$ intervalos iguais. Isso garante que $P = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ é tal que todo $i \in \mathbb{N}, i \leq n$ temos $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ assim, tem-se que $\forall x; x_{i-1} \leq x \leq x_i$; $|f'(x_i) - f'(x)| < \epsilon$.

Como $|f'(x_i) - f'(x)| \geq |f'(x_i)| - |f'(x)|$, temos também que $|f'(x)| - |f'(x_i)| < \epsilon$ e que $|f'(x)| < \epsilon + |f'(x_i)|$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)|dx &\leq |[x_i, x_{i-1}]|(|f'(x_i)| + \epsilon) \\
&= |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x_i)dx| + |[x_i, x_{i-1}]|\epsilon \\
&= |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) + f'(x_i) - f'(x)dx| + |[x_i, x_{i-1}]|\epsilon \\
&\leq |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx| + |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x_i) - f'(x)dx| + |[x_i, x_{i-1}]|\epsilon \\
&\leq |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx| + |[x_i, x_{i-1}]|\epsilon + |[x_i, x_{i-1}]|\epsilon \\
&= |f(x_i) - f(x_{i-1})| + 2|[x_i, x_{i-1}]|\epsilon
\end{aligned}
$$

Portanto, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f'(x)|dx &\leq \sum_{i=1}^{n}(|f(x_i) - f(x_{i-1})| + 2|x_i - x_{i-1}|\epsilon) \\
&= 2n\epsilon + \sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= 2n\epsilon + V_a^b(f)
\end{aligned}
$$

Como o ϵ é arbitrario, para qualquer valor $\alpha > 0$, $\int_a^b |f'(x)|dx \leq \alpha + V_a^b(f)$ e isso mostra que $\int_a^b |f'(x)|dx \leq V_a^b(f)$.

Sendo assim, temos finalmente que $\int_a^b |f'(x)|dx = V_a^b(f)$ para $f \in C^1([a, b])$.

Q.5

a)

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$

Tome $x \in X \cap (a, a+\delta)$.

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \\ &\implies \\ \lim_{x\to a_+} f(x)-f(a) &= \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \\ &= \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a_+}(x-a) \\ &= f'_+(a)\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que a função f é contínua pela direita em $x = a$. Sendo assim, dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in X \cap (a, a+\delta)$, então $f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$.

Como $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L < 0$, tome $\epsilon = \frac{L}{2}$. Como visto acima, $\exists x_0 > a$ tal que se $x \in (a, x_0)$ tem-se que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$. Tomando $\delta = x_0 - a$.

Tome $x \in (a, a+\delta)$ qualquer. Como $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$, temos que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$. Sendo assim e como $x > a \to x-a > 0$, temos $f(x)-f(a) > 0$.

Finalmente então , $f(x) > f(a), \forall x \in (a, a+\delta)$.

b)

Seja $a \in X \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$ derivável a esquerda em a. Mostre que se $f'_-(a) < 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X(a-\delta, a)$ então $f(a) > f(x)$.

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a_-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$

Tome $x \in X \cap (a-\delta, a)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\
&\Longrightarrow \\
\lim_{x \to a_-} f(x) - f(a) &= \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\
&= \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a_-} (x - a) \\
&= f'_-(a) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Isso mostra que a função f é contínua pela esquerda em $x = a$. Sendo assim, dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in X \cap (a - \delta, a)$, então $f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.

Como $\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L < 0$, tome $\epsilon = \frac{L}{2}$. Como visto acima, $\exists x_0 < a$ tal que se $x \in (x_0, a)$ tem-se que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Tomando $\delta = a - x_0$.

Tome $x \in (a - \delta, a)$ qualquer. Como $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$, temos que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$. Sendo assim e como $x > a \to x - a > 0$, temos $f(x) - f(a) > 0$.

Finalmente então , $f(x) > f(a), \forall x \in (a - \delta, a)$.