Disciplinas:
MAP 5706 - Introdução à Análise Real (DINTER)
MAP 0216 - Introdução à Análise Real
MAT 0206 - Análise Real

Semestre: 2020/2

Professor: Rodrigo Bissacot - Sala 147A - IME-USP

mail: rodrigo.bissacot@gmail.com

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:

`https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/analise2020`

Monitores:

João Maia - mail: joao.vitor.maia@usp.br
Rafael Severiano - mail: rafaelseveriano@usp.br
Thiago Alexandre - mail: thiago2.alexandre@usp.br
Thiago Raszeja - mail: tcraszeja@gmail.com

Monitorias:

João Maia - Segundas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Alexandre - Terças 17h-18h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Rafael Severiano - Quintas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Raszeja - Sexta 19h-20h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO.

Lista 2: Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.
Diagonal de Cantor. Conjuntos Finitos e Infinitos. Indução Matemática.

ENTREGA: DIA 25 DE SETEMBRO - SEXTA ÀS 23:59.

MODO DE ENVIAR A LISTA: Envie sua lista para o endereço **prova.analise.2020@gmail.com**, com o seguinte assunto (título) da mensagem, em maiúsculo:

LISTA 2 - NOME - NUSP - SIGLA DA DISCIPLINA

Definição 1. *Seja X um conjunto. Dizemos que X é* `finito` *quando $X = \emptyset$ ou quando existe um natural m e uma função bijetora de $f : X \to [m]$ onde $[m] = \{1, 2, ..., m\}$. Neste caso dizemos que X tem m elementos e denotamos esse fato escrevendo $|X| = m$ ou $\#X = m$. Caso contrário dizemos que X é* `infinito`.

Exercício 1. Seja $d \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros.

(1.1) Mostre que $\mathbb{Z}^d$ é enumerável.

(1.2) Definimos o conjunto $\mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d)$ como sendo o conjunto das partes finitas de $\mathbb{Z}^d$. Ou seja, $A \in \mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d)$ se, e somente se, A é finito e $A \subset \mathbb{Z}^d$. Mostre que $\mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d)$ é enumerável.

Exercício 2.
(2.1) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é monótona não-crescente.
Mostre que f é constante a partir de um certo número natural.
Ou seja, mostre que existe um natural a e outro natural m tais que $f(n) = a$ para todo $n \geq m$.

(2.2) Seja X o conjunto das sequências em de números naturais que são estritamente crescentes. Em outras palavras, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ se, e somente se, $x_1 < x_2 < x_3 < ....$ Ou seja, $x_i < x_j$ quando $i < j$.
Mostre que X é não enumerável.

Exercício 3.
Construa bijeções entre os seguintes conjuntos:
(Não basta provar apenas que existe, precisa exibir a função.)

(3.1) $(0, 1)$ e $[0, 1)$.

(3.2) $(0, 1)$ e $(0, 1) \cup \{1, 2, 3, ..., k\}$. ($k$ um natural qualquer)

(3.3)$(0, 1)$ e $(0, 1) \cup \mathbb{N}$.

Obs: Aqui $(0, 1)$ denota o intervalo da reta dos números entre 0 e 1.

O exercício anterior é um caso particular do seguinte exercício:

Exercício 4.
(4.1) Seja X infinito e Y enumerável. Mostre que $\#(X \cup Y) = \#X$. Ou seja, você deve provar que existe uma bijeção entre os conjuntos $X \cup Y$ e X.

(4.2) Seja X infinito. Mostre que se X é enumerável então existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X.

(4.3) Sejam X e Y conjuntos.
Mostre que se $\#X = \#Y$ então $\#\mathcal{P}(X) = \#\mathcal{P}(Y)$.
Exercício 5.
Considere o seguinte conjunto X de sequências de números inteiros:

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \ x_{2i-1} < x_{2i+1} \ e \ \ x_{2(i+1)} < x_{2i} \ \forall \ i \in \mathbb{N}\}$$

Ou seja, X é o conjunto das sequências de números inteiros tais que a subsequência dos índices pares forma uma sequência decrescente e a sub sequência dos índices ímpares forma uma sequência crescente.
Decida se X é enumerável ou não. Provando sua resposta.

Definição 2. *Um número real α é dito* `algébrico` *quando existe um polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros tal que α é raiz de $p(x)$, em outras palavras, $p(x)$ é da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $0 \leq i \leq n$ e $p(\alpha) = 0$. Quando um número real não é algébrico ele é chamado de* `trascendente`.

Comentário: Note que na definição acima poderíamos ter usado coeficientes racionais ao invés de inteiros. De fato, se α é raiz do polinômio $p(x) = \frac{a_n}{b_n}x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x^{n-1} + ... + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0}$ onde $a_i \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{Z}^*$ para todo $0 \leq i \leq n$, podemos multiplicar o polinômio por $b_n.b_{n-1}...b_1.b_0$ e assim obtemos um polinômio com coeficientes inteiros que tem α como raiz. Resumindo em palavras: todo número real que é raiz de um polinômio com coeficientes racionais é também raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Exercício 6.
Mostre que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável.

Dica: Use que um polinômio de grau n com coeficientes inteiros de `grau n` (maior expoente que aparece na variável x) tem no máximo n raízes reais diferentes, isso acontece em todos os corpos (veja qualquer livro de álgebra). Esse fato, e o exercício **1.1**, devem resolver a questão.

Exercício 7. `(Sequência de Fibonacci)`
A sequência de Fibonacci é definida recursivamente da seguinte forma:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 2$$

Mostre que $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ onde α e β são as raízes do polinômio $x^2 = x+1$, com α positivo e β negativo.

Dica: Use Indução completa (segunda forma) e observe que para construir o elemento seguinte da sequência você precisa dos dois anteriores e, portanto, sua base de indução é verificar a identidade para os dois primeiros elementos da sequência.

Exercício 8.
(8.1) Mostre que $2^n < n!$, para todo $n \geq 4$, n natural.

(8.2) Mostre que $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$, para todo $n \geq 4$, n natural.

(8.3) Mostre que se X é finito e tem m elementos, então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^m elementos.

Exercício 9.
Mostre que dados x e y em $\mathbb{Z}$, para todo $n \geq 1$, n natural, temos que:

(9.1) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$

Dica: Enuncie e prove a relação de Stifel. Isso será útil no item (a).

(9.2) $x^n - y^n = (x-y).\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i\right]$

(9.3) Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ elementos de $\mathbb{Z}$. Mostre que:

$$\prod_{n=1}^{n} (1 + x_i) = \sum_{A \subset [n]} \prod_{i \in A} x_i$$

.

Por conveção, $\displaystyle\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1$ e $[n] = \{1, ..., n\}$.

Comentário: Exercício vale para qualquer anel comutativo com unidade e não somente para $\mathbb{Z}$, ou seja, vale para $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e outros anéis.

Exercício 10. (*Algoritmo da divisão de Euclides*).
Dados $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que existem, e que são únicos, inteiros q e r tais que:

$$m = n.q + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < n$$

Dica: Use o princípio da boa ordenação em $\mathbb{Z}$, que diz que todo conjunto limitado inferiormente possui um menor elemento.

Exercício 11. Seja X é um conjunto finito.

(11.1) Mostre que uma função $f : X \to X$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

(11.2) Suponha que $|X| = m$. Mostre que para todo $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, se Y é um conjunto finito tal que $|Y| = m+k$, então não existe função injetora de Y em X. (*Pigeonhole principle - Princípio da Casa dos Pombos).*
Dica: Indução em k.

Exercício 12. Sejam X e Y conjuntos finitos.
Mostre que $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$.