Disciplinas:
MAP 5706 - Introdução à Análise Real (DINTER)
MAP 0216 - Introdução à Análise Real
MAT 0206 - Análise Real

Semestre: 2020/2

Professor: Rodrigo Bissacot - Sala 147A - IME-USP

mail: rodrigo.bissacot@gmail.com
Listas de exercícios e informações sobre o curso em:

`https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/analise2020`

Monitores:

João Maia - mail: joao.vitor.maia@usp.br
Rafael Severiano - mail: rafaelseveriano@usp.br
Thiago Alexandre - mail: thiago2.alexandre@usp.br
Thiago Raszeja - mail: tcraszeja@gmail.com

Monitorias:

João Maia - Segundas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Alexandre - Terças 17h-18h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Rafael Severiano - Quintas 14h-15h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO
Thiago Raszeja - Sexta 19h-20h - Link: FÓRUM DE DISCUSSÃO.

Lista 6: Sequências Parte II: Sequências importantes e seus limites.
Topologia da Reta Parte III: Ponto de acumulação de um conjunto.
Intervalos. Compactos (de novo)
Funções contínuas Parte II: funções contínuas em intervalos, funções contínuas em compactos.

SOBRE A LISTA

NÃO PRECISA ENTREGAR - MAS CAI NA P2

Exercício 1.
(a) Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-decrescente de números reais não-negativos, ou seja, $0 \leq s_n \leq s_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Prove que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

(b) Nas mesmas hipóteses do item (a), mostre que se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente então $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Exercício 2.
(Existência e unicidade da raiz n-ésima de números positivos)
O objetivo desse exercício é mostrar que, dado um número real $a \geq 0$ e $n \geq 2$, n natural, existe um único número real b não-negativo tal que $b^n = a$. Esse número será denotado por $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$.

(a) **(unicidade)**
Mostre (por indução?) que dados $0 \leq b_1 < b_2$ temos que $b_1^n < b_2^n$.
A partir disso conclua a unicidade da raiz n-ésima (supondo que esta exista). Justifique também que a função raiz n-ésima é estritamente crescente. Ou seja, se $0 \leq a_1 < a_2$ então $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$.

(b) **(Existência)**
Vamos mostrar que $\sqrt[n]{a} = \sup E$ onde $E = \{0 \leq y; y^n \leq a\}$.
De fato, se $a = 0$ então $E = \{0\}$, donde segue que $\sqrt[n]{0} = 0$.
O caso interessante é quando $a > 0$, que segue dos seguintes exercícios:

(b.1) Prove que $E \neq \emptyset$.
Dica: Defina $t = \frac{a}{a+1}$. Mostre que para todo $n \geq 1$ temos que $t^n < a$.

(b.2) Prove que é limitado superiormente.
Dica: Defina $s = a + 1$. Mostre que s é cota superior de E.

(b.3) De (b.1) e (b.2) segue que existe $\sup E$. Mostre que $\sqrt[n]{a} = \sup E$.
Dica: Em outras palavras, o que você quer provar é que se $b = \sup E$, então $b^n = a$. Isso será feito usando a tricotomia de $\mathbb{R}$, mostrando que não podemos ter nem $b^n > a$ e nem $b^n < a$. Então, obrigatoriamente, segue que $b^n = a$.

Prova de que não podermos ter $b^n < a$.
Suponha, por absurdo, que tenhamos $b^n < a$.
Tome $0 < h < 1$ satisfazendo $h < \frac{a-b^n}{(b+1)^n - b^n}$. (Por que existe?)
Mostre que $(b+h)^n < a$. [O que contradiz b ser o supremo de E].

Prova de que não podermos ter $b^n > a$.
Suponha, por absurdo, que tenhamos $b^n > a$.
Tome $0 < h < 1$ satisfazendo $h < \frac{b^n - a}{(b+1)^n - b^n}$ e $h < b$. (Por que existe?)
Mostre que $t = b - h$ satisfaz $t^n > a$. Prove que t é uma cota superior de E menor que b. [O que contradiz b ser o supremo de E].

Exercício 3. Prove que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $[0, \infty)$ usando a definição com ε e δ.

Exercício 4. Neste exercício $n \in \mathbb{N}$.
4.1 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ seguindo os seguintes passos:
Passo 1. Definindo $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$, mostre que $y_n \geq 0$.
Passo 2. Dado $c \geq 0$ mostre que: $(1+c)^n \geq 1 + nc + \frac{n.(n-1)}{2}c^2$.
Passo 3. Fazendo $c = \sqrt[n]{n} - 1$ no item anterior, mostre que:

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}\ , \forall\ n \geq 2.$$

Use o exercício 3 anterior e conclua a prova.

4.2 Use o item 4.1 e mostre que se $1 \leq a$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
4.3 Use o item 4.2 e mostre que se $0 < a < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Exercício 5. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais.
Mostre que:
(5.1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$
(5.2) Se $0 < x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Exercício 6. Prove as seguintes afirmações: (neste exercício $n \in \mathbb{N}$)

(6.1) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.
(6.2) Dados $1 \leq a$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.
(6.3) Seja $a > 1$ e $P(x)$ um polinômio. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{a^n} = 0$.
[Potência (base maior que 1) cresce mais rápido que qualquer polinômio.]
Dica: Use o item anterior.

(6.4) Dado $0 < a$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.
[Fatorial cresce mais rápido que potência (base maior que 1).]

Exercício 7. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ existe seguindo o seguinte roteiro:
(7.1) Mostre que a sequência $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é monótona não-decrescente.
(7.2) Mostre que para $n \geq 2$ temos que $x_n \leq 3$.
Conclua que a sequência então converge.

Obs: Chamamos o limite de *número de Euler* e o denotamos por e.

Exercício 8.
Seja (x_n) uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$.
Seja (y_n) a sequência de números reais definida por:

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Exercício 9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.
Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é contínua em $\mathbb{R}$.
(b) Para todo A aberto de $\mathbb{R}$ temos que $f^{-1}(A)$ é aberto de $\mathbb{R}$.
(b) Para todo F fechado de $\mathbb{R}$ temos que $f^{-1}(F)$ é fechado de $\mathbb{R}$.

Teorema do ponto fixo de Brouwer

Seja $\overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1\}$ a bola fechada unitária do $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$.
Seja $f : \overline{B}_1(0) \to \overline{B}_1(0)$ contínua, então f tem um ponto fixo.
Ou seja, existe $x_0 \in \overline{B}_1(0)$ tal que $f(x_0) = x_0$.
Esse é um teorema de topologia. Mas podemos provar a versão unidimensional facilmente usando o Teorema do Valor Intermediário:

Exercício 10.
(10.1) Seja $\overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 1\} = [-1, 1]$ a bola fechada unitária de $\mathbb{R}$ e $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ contínua.
Mostre que existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
Dica: Considere a função $g(x) = f(x) - x$ e use o Teorema do Valor Intermediário.

(10.2) Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ contínua.
Mostre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
Dica: Use o exercício anterior.

Exercício 11.
(11.1) Seja $p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que n é par e a_n é positivo. Mostre que $p(x)$ atinge seu mínimo em algum valor real, ou seja, existe x_0 tal que $p(x_0) \leq p(x)$ para todo x real.

(11.2) Seja $p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que n é ímpar.
Mostre que existe x_0 tal $p(x_0) = 0$.

Exercício 12. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$.
Mostre que se $x_0 \in X$ e f é descontínua em x_0 então $x_0 \in X'$.

Exercício 13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional;} \\ \\ 1 - x & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em x_0 se, e somente se, $x_0 = \frac{1}{2}$.

Exercício 14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \text{ é racional;} \\ \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

(14.1) Mostre que f é bijeção.
(14.2) Mostre que f é descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Exercício 15. Seja $a > 0$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional;} \\ \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ é uma fração irredutível e } q > 0. \end{cases}$$

Mostre que f é contínua somente nos pontos irracionais de $[a, b]$.