MAT0206 - Lista 2

Q1.

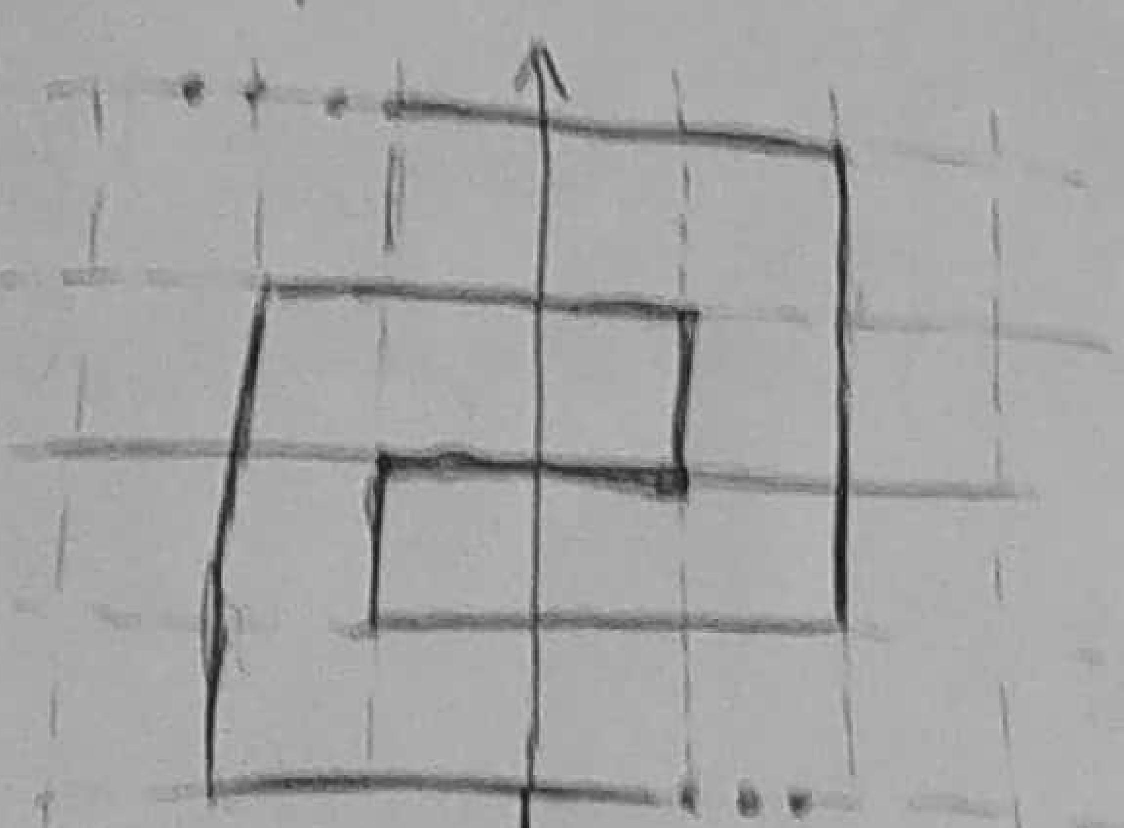
(1.1) $\mathbb{Z}^d$ é enumerável

→ $\mathbb{Z}$ é ~~enumeral~~ enumerável.

Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n)$ = n-ésimo número da sequência $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. Como f é bijetora, $\mathbb{Z}$ é enumerável. $\left(f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ 2|x|+1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \right)$

→ $\mathbb{Z}^2$ é enumerável

Considere $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dada pelo gráfico:



Onde ~~f(x,y)~~ o par (x,y) é o comprimento da espiral começando do zero até passar por (x,y) multiplicado por ± 1 dependendo se a espiral passa pelo $(+1,0)$ ou $(-1,0)$. Sendo assim, $\mathbb{Z}^2$ é enumerável, pois $\mathbb{Z}$ é enumerável, pois f é bijetora.

→ Considerando que $\mathbb{Z}^k$ é enumerável, então $\mathbb{Z}^{k+1}$ é enumerável.

Seja $f: \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$ bijetora. Seja $g: \mathbb{Z}^{k+1} \to \mathbb{Z}^2$ definida por

$g(x_1, \dots, x_{k+1}) = (f(x_1, \dots, x_k), \dots$

Após mostrar o caso base e o passo indutivo, podemos concluir que $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^d$ é enumerável.

(1.2) $\mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d)$ é enumerável.

$$\mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \{x_1, \dots, x_m\} \mid \forall i = 1 \dots m,\ x_i \in \mathbb{Z}^d \right\} \cup \emptyset$$

$$\mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d) = \underbrace{\emptyset \cup \mathbb{Z}^d}_{\text{enumerável, como visto no item 1.1}} \cup \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m > 1}} \left\{ \{x_1, \dots, x_m\} \mid \forall i = 1 \dots m,\ x_i \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

→ Notando que ~~por~~ têm-se $f : {\mathbb{Z}^d}^2 \to \mathbb{Z}^{2d}$ dada por ~~f(x~~ $f(x, y) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$ bijetora, ~~e sabemos que~~ temos então

$$\mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d) = \emptyset \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^{md}.$$ Note que $\mathbb{Z}^{md}$ é enumerável.

[redacted]

Seja S_i, $\forall i = 1 \dots n$, uma sequência infinita sem repetição de todos os elementos de $\mathbb{Z}^{id}$. Seja, então $f : \mathcal{P}_F(\mathbb{Z}^d) \to \mathbb{N}$ dada por:

$f(0) = \emptyset$

$f(i) = i$-ésimo termo na sequência de diagonais mostrada abaixo.

$$\begin{matrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & \cdots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{matrix}$$

$\therefore$ É fácil notar que f é bijetora após perceber que todo elemento de $P_F(\mathbb{Z}^d) \setminus \emptyset$ está ~~em~~ na $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$.

Q2.

1. Considere que $f(n) \geq 1$ pois $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sendo assim, f não pode decrescer infinitamente.

Seja S a sequência de valores diferentes obtidos em ordem pela função f. Se S fosse finita, então a função teria um mínimo e, por ela ser não-crescente, após obter o mínimo, ela se tornaria constante. No entanto, S sempre é finita, pois $\forall k$ tq $f(1) = k$, S atingirá 1 em no máximo $k-1$ passos, e não poderá seguir, por isso, 2.2.

→ Existe uma bijeção entre X e $P(N)$

Seja f uma função que leva a sequência ~~ao~~ $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ no conjunto $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. f é claramente injetora. f é sobrejetora, pois seja $S \subset P(N)$, então temos $S^* = S$ que contém os elementos de maneira ordenada. Como $S^* = \{x_1, x_2, \dots\}$ com $x_i \in \mathbb{N}$ e $x_i < x_{i+1}$, $\forall i$, então a sequência $(x_1, x_2, \dots) \in X$ e, portanto, $S^* \in Im(f)$.

Com isso, temos que $|X| = |P(\mathbb{N})|$

→ $P(\mathbb{N})$ é não enumerável. Logo, $|X|$ é não enumerável

Q3.

(3.1) $(0,1)$ e $[0,1)$

Considere a sequência $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots) = S$.

$f: (0,1) \to [0,1)$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = \frac{1}{2} \\ a_{i-1}, & \text{se } x \text{ é o i-ésimo termo de } S \text{ e } i > 1. \\ x, & \text{c.c.} \end{cases}$

3.2.

$(0,1)$ e $(0,1)\cup\{1,2,3,\dots,k\}$ para k qualquer.

Considere a sequência $S=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots)$ e a sequência $T=(1,2,3,\dots,k)$.

$f:(0,1)\to(0,1)\cup\{1,2,\dots,k\}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} b_i, & \text{se } x=a_i \text{ e } i\leq k \\ a_{i-k}, & \text{se } x=a_i \text{ e } i>k \\ x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com a_i e b_i sendo, respectivamente, os i-ésimos elementos de S e T. ~~para $i\leq k$~~

3.3

$(0,1)$ e $(0,1)\cup\mathbb{N}$.

Conside as sequências $S=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots)$ e $T=(\frac{2}{3},\frac{2}{9},\frac{2}{27},\dots,\frac{2}{3^n},\dots)$. Note que $S\cap T=\emptyset$.

$f:(0,1)\to(0,1)\cup\mathbb{N}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} i, & \text{se } x=a_i \\ a_i, & \text{se } x=b_{2i} \\ b_i, & \text{se } x=b_{2i-1} \\ x, & \text{c.c.} \end{cases}$$

com a_i e b_i sendo, respectivamente, os i-ésimos elementos de S e T.

4.1. Como X é infinito, x tem alguma sequência enumerável e infinita. Considerando X enumerável.

Se Y for infito:

$f: X \cup Y \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x_{i/2}, & \text{se } i \text{ par} \\ y_{(y+1)/2} & \text{se } i \text{ ímpar} \end{cases}$$

se não:

$f: X \cup Y \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} y_i, & \text{se } x = x_i \text{ e } i \leqslant |Y| \\ x_{i-|Y|}, & \text{se } x = x_i \text{ e } i > |Y| \end{cases}$$

Porém, se X não enumerável, então X tem duas sequências infinitas e enumeráveis S e T disjuntas.

Se Y ~~i~~finito: igual acima.

Se Y infinito:

$$f(x) = \begin{cases} y_i, & \text{se } x = s_i \\ s_i, & \text{se } x = t_{2i} \\ t_i, & \text{se } x = t_{2i+1} \\ x, & \text{c.c.} \end{cases}$$

4.2. X enumerável $\Leftrightarrow$ existe bijeção entre X e $\mathbb{N}$
X infinito

~~Se X finito~~,

Como X é enumerável e infinito, tem mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$. Seja S uma sequência sem repetições qualquer que contém todos os elementos de X. Seja $f:(X) \to \mathbb{N}$ uma função definida por $f(x^*) = i$ com $x^* = a_i$, o i-ésimo termo da sequência. É claro que f é injetora, pois a sequência têm todos os elementos de X. f também é sobrejetora pois S não têm repetições e, assim, cada $j \in \mathbb{N}$ também está em $f(X)$.

4.3 $|X| = |Y| \Rightarrow |P(X)| = |P(Y)|$

Seja $n = |X| = |Y|$. É claro que $|P(x)| = |P(Y)|$, pois ambos tem o mesmo número de subconjuntos ~~para~~ de tamanho i, com $i = 0 \ldots n$. No caso, $|P(x)| = |P(Y)| = 1 + 2a + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

5. Seja $f: X \to P(\mathbb{N})$ definida por $f((a_1, \ldots, a_n, \ldots)) = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots$

- $\forall S \subset P(\mathbb{N}), \exists x_S$, uma sequência que contenha todos os elementos de S, com $x_S \in X$. Isso é verdade, pois, pode-se ordenar S, ~~, então~~ conforme as condições de X. A sequência x_S pode ser construída de maneira iterativa de forma que X_{S_i} seja uma sequência válida com i elementos e $X_{S_{i+1}}$ seja construída ~~....~~ inserindo S_i na posição adequada.

$\Rightarrow$ Como todos os elementos de $P(\mathbb{N})$ são cobertos, f é sobrejetora. Como f é sobrejetora, $|X| \geq |P(\mathbb{N})|$. Como $P(\mathbb{N})$ é não-enumerável, X também é não-enumerável.

6. Se S é o conjunto dos reais algébricos, então S é enumerável.

$$S = \{ r \in \mathbb{R} \mid a_0 + a_1 r^1 + a_2 r^2 + \dots = 0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0 \dots n,\ n = 1 \dots \}$$

$$S = \bigcup_{n > 0} \{ r \in \mathbb{R} \mid a_0 + a_1 r^1 + \dots = 0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0 \dots n \}$$

Seja R_n o conjunto das raízes de grau n,

então $S = \bigcup_{n>0} R_n$. Como visto anteriormente $\mathbb{Z}^d$ é contável e isso implica de R_n $(n=d)$, é contável, pois podemos considerar os coeficientes como subconjunto de $\mathbb{Z}^d$.

[redacted]

Como cada R_m é enumerável, então $\forall m, \exists f_{m}: R_m \to \mathbb{N}$, ~~Seja~~ ~~...~~ f_m bijetora. ~~Seja~~ Novamente, pelo fato de $\mathbb{Z}^d$ ser enumerável, pode-se ~~...~~ considerar que ~~...~~ existe $f_{F}: f_1(R_1) \cup f_2(R_2) \to \mathbb{N}$. Também, por isso, vale que existe $f_{123}: f_{1,2}(f_1(R_1) \cup f_2(R_2)) \cup f_3(R_3) \to \mathbb{N}$. Por indução, então, temos que $\bigcup_{m>0} R_m$ é enumerável.

7.

Base: $F_0 = \dfrac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta}$, $F_1 = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}$

• Achar α e β. $x^2 - x - 1 = 0 \overset{(SP)}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 1$

$\Delta = 5$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\qquad \alpha . \beta = -1$

$\rightsquigarrow \alpha - \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$

$F_0 = \dfrac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0$ ✓ $F_1 = 1$ ✓

$\Rightarrow$ Sejam $\dfrac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta}$ e $\dfrac{\alpha^{m-2} - \beta^{m-2}}{\alpha - \beta}$ iguais a F_{m-1} e F_{m-2}, respectivamente. Temos então que $\dfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} = F_m$.

(Prova) $\dfrac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} + \dfrac{\alpha^{m-2} - \beta^{m-2}}{\alpha - \beta} = \dfrac{\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} - \beta^{m-1} - \beta^{m-2}}{\alpha - \beta} =$

$= \dfrac{\alpha^{m-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \beta^{m-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\alpha - \beta} = \dfrac{\alpha^{m-2}(\alpha . \alpha) - \beta^{m-2}(\beta . \beta)}{\alpha - \beta} =$

$= \dfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$

8

8.1 $2^n < n!$, $\forall n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$

• Base: $2^4 = 16$ ✓
$4! = 24$

• Supondo que $2^k < n.k!$, então $2^{k+1} < (k+1)!$, $k \geq 4$.

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$

$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$, como $2^k < k!$ e $2 < k+1$,
então $2^{k+1} < (k+1)!$

8.2 $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$

Base $2 \cdot 4^3 = 2 \cdot 64 = \cancel{68}\ 128$
$3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 = 48 + 12 + 1 = 61$ ✓

• Supondo que $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$, então $2(k+1)^3 > 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1$

$2(k+1)^3 = 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2$

$3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1 = 3k^2 + 6k + 3 + 3k + 3 + 1 = 3k^2 + 9k + 7$

$2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 \overset{?}{>} 3k^2 + 9k + 7$

$2k^3 + 6k^2 \overset{?}{>} 3k^2 + 3k + 5$

$2k^3 \overset{?}{>} 3k^2 + 3k + 1 + (4 - 6k^2)$

$* \ 4 - 6k^2 < 0$

$2k^3 \overset{?}{>} 3k^2 + 3k + 1 > -3k^2 + 3k + 5$

8.3 X finito e m elementos $\rightarrow$ $P(x)$ tem 2^m elementos

- Base: Se $m=0$, $P(x) = \{\emptyset\}$, $|P(x)| = 1 = 2^0$.

- Supondo que X com $k-1$ elementos e $|P(x)| = 2^{k-1}$, então se X' com k elementos, $|P(x')| = 2^k$.

- SPG, seja $X' \setminus X = \{a\}$. $P(x) \subseteq P(x')$, claro. Além disso $\forall S$ tq $S \subset P(x') \setminus P(x)$, $a \in S$.

- Número de subconjuntos <u>com a</u> em $P(x')$:

$m=1 \rightarrow 1$, $n=2 \rightarrow m-1$, $n=3 \rightarrow \dots$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} = 2^{k-1}$$

Sendo assim, $|P(x') \setminus P(x)| = 2^{k-1}$, logo,

$$|P(x')| = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k.$$

9.

9.1. Base: se $n = 1$, $(x+y)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{0}{0} x$

Base: se $n=1$, $(x+y)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{0} x^{1-i} y^i = x+y$ ✓

Se $(x+y)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{k-1-i} y^i$, então vale que $(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^i$.

prova:

$$(x+y)^k = (x+y)(x+y)^{k-1} = x(x+y)^{k-1} + y(x+y)^{k-1} =$$

$$= x\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-1-i}y^i\right) + y\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-1-i}y^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-i}y^i + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-1-i}y^{i+1} =$$

$$= x^k + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-i}y^i + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i-1}x^{k-i}y^i + y^k =$$

$$= x^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}\right)x^{k-i}y^i + y^k$$

$$= x^k + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i + y^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$$

9.2

$$(x-y)^n = (x-y)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}y^i.$$

- Base, se $n=1$, $x-y = (x-y)(x^{1-1}y^0) = (x-y)$ ✓
- Supondo válido caso $n=k$, então, para $n=k+1$:

$$(x-y)^{k+1} = (x-y)(x-y)^k = (x-y)(x-y)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}x^{k-1-i}y^i =$$

$$= (x-y)\left(\sum_{i=0}^{k-1}x^{k-i}y^i - \sum_{i=0}^{k-1}x^{k-1-i}y^{i+1}\right) = (x-y)\left(x^k - y^k + \sum_{i=1}^{k-1}x^{k-i}y^i\right) =$$

$$= (x-y)\sum_{i=0}^{k}x^{k-i}y^i.$$

12 $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, X e Y finitos

Sejam $\mathcal{X}$ os elementos de X que não estão em Y, $\mathcal{Y}$ os elementos de $Y \setminus X$ e z elementos de $X \cap Y$.

É claro que $\mathcal{X} \subset X \cup Y$, $\mathcal{Y} \in X \cup Y$ e $z \subset X \cup Y$ e que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup z = X \cup Y$. Também é claro que $|\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup z| = |X \cup Y|$ e que $|\mathcal{X} \cup z| = |\mathcal{X}| + |z|$.

Temos, então: $X = \mathcal{X} \cup z$ e $Y = \mathcal{Y} \cup z$.

Logo, $|X| + |Y| - |X \cap Y| = |\mathcal{X} \cup z| + |\mathcal{Y} \cup z| - |z| =$

$= |\mathcal{X}| + |z| + |\mathcal{Y}| + |z| - |z| = |\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}| + |z| =$

$= |\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup z| = |X \cup Y|$