MAT0206 - Prova 2

Matheus T. de Laurentys, 9793714

November 21, 2020

Provas Auxiliares:

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$:

[Por contradição] Seja $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $\nexists x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $x \in (a, b)$. Como $\mathbb{Q}$ é denso, então existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in (a, b)$. Se existir outro inteiro no intervalo, então existe $y; |x - y| = 1$ no intervalo. Então $[x, y] \in (a, b)$ e isso implica que $\frac{b-a}{2} \in (a, b)$. Como $\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, tem-se contradição.

Dessa forma, ha apenas um inteiro em (a, b). Nesse caso, todavia, tem-se $(a, z) \cup (z, b) \subset (a, b)$ sem inteiros. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (a, x)$. Isso contradiz a suposição, pois $q \in (a, b)$. Tem-se então que $\nexists (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $\nexists x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $x \in (a, b)$. Sendo assim, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Q.1:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de números reais.

$A = \text{limsup } x_n$ e $B = \text{limsup } y_n$.

a) $\lim \inf (-x_n) = -A$

Como visto em aula, limsup x_n é o maior limite de qualquer subsequência convergente de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e liminf x_n o menor desses limites.

Considere a sequência $(B, \ldots, A)$, de pontos que são limites de subsequências de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ordenada de maneira não decrescente.

Se $x \in \mathbb{R}$ é limite de subsequência de (x_n), então $-x$ é limite de sequência de $(-x_n)$. Se $x \in \mathbb{R}$ é limite de subsequência de $(-x_n)$, então $-x$ é limite de sequência de (x_n)

[Prova] Tome $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} (z_n) = x$. Então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $\forall i \in \mathbb{N}, a_i = -z_i$, é subsequência de $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = -x$, pois $\forall \epsilon > 0, \exists a_i \in (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|a_i - (-x)| < \epsilon$. Isso é verdadeiro pois $\forall \epsilon > 0, \exists z_i \in (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|z_i - x| < \epsilon$. Essa mesma prova também mostra que se $x \in \mathbb{R}$ é limite de subsequência de $(-x_n)$, então $-x$ é limite de sequência de (x_n)

Sendo assim, $(-B, \ldots, -A)$ é a sequência de pontos que são limites de subsequências de $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Toma-se então a sequência ordenada $(-A, \ldots, -B)$ de tais limites. Como liminf é o menor desses limites, então $\text{liminf}(-x_n) = -A$.

b) Seja $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = x_0$. Mostre limsup $(x_n - y_n) \geq x_0 - B$.

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = x_0$, então a sequência é convergente e, assim, tem apenas um ponto de limite, x_0. Logo, limsup $(x_n) = x_0$. Pode-se, então , re-escrever limsup $(x_n - y_n) \geq x_0 - B$ como limsup $(x_n - y_n) \geq \text{limsup}(x_n) - \text{limsup}(y_n) = A - B$.

[Por contradição] Suponha que limsup $(x_n - y_n) < A - B$. Tome $\epsilon = A - B -$ limsup$(x_n - y_n)$. $\epsilon > 0$

Como existem subsequências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que seus limites sejam limsup(x_n) e limsup(y_n), então $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq \mathbb{N}$, $|x_n - A| < \frac{\epsilon}{4}$ e $|y_n - B| < \frac{\epsilon}{4}$. Sendo assim, $A - \frac{\epsilon}{4} < x'_n < A + \frac{\epsilon}{4}$ e $B - \frac{\epsilon}{4} < y'_n < B + \frac{\epsilon}{4}$.

Temos então que

$$A - B - \frac{\epsilon}{2} = A - \frac{\epsilon}{4} - (B - \frac{\epsilon}{4}) < x'_n - y'_n < A + \epsilon - B - \epsilon = A - B$$

Como ϵ

a

Q.2:

a) $X_\alpha := \{m + n.\alpha; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$ e α irracional. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas. $\forall x \in X, f(x) = g(x)$. Prove $f = g$.

[Por contradição] $\exists x_0 \in \mathbb{R}; f(x_0) \neq g(x_0)$.

Seja $\epsilon < f(x_0) - g(x_0), \epsilon \neq 0$. Considere que $\epsilon > 0$, sem perda de generalidade. Como $f - g$ tambem é contínua então $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) - g(x) \in (f(x_0) - g(x_0) - \epsilon, f(x_0) - g(x_0) + \epsilon))$. Sendo assim, existe uma vizinhança $V = (f(x_0) - g(x_0) - \epsilon, f(x_0) - g(x_0) + \epsilon)$ de x_0 tal que $\forall x \in V, |f(x) - g(x)| \geq f(x_0) - g(x_0) - \epsilon > 0$. A segunda desigualdade vale pela escolha de ϵ.

Porem, como os irracionais são densos em $\mathbb{R}$, então $\exists \alpha \in V, \alpha$ é irracional. Isso contradiz o fato de $\forall x$ irracional, $f(x) = g(x)$. Logo, $\nexists x_0 \in \mathbb{R}; f(x_0) \neq g(x_0)$. Sendo assim $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ e isso mostra que $f = g$.

b) a) é verdadeiro caso α seja racional?

Sim, esse caso tambem é verdadeiro e, na verdade, a prova é a mesma.

Segue, de qualquer forma, a prova desse caso.

[Por contradição] $\exists x_0 \in \mathbb{R}; f(x_0) \neq g(x_0)$.

Seja $\epsilon < f(x_0) - g(x_0), \epsilon \neq 0$. Considere que $\epsilon > 0$, sem perda de generalidade. Como $f - g$ tambem é contínua então $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) - g(x) \in (f(x_0) - g(x_0) - \epsilon, f(x_0) - g(x_0) + \epsilon))$. Sendo assim, existe uma vizinhança $V = (f(x_0) - g(x_0) - \epsilon, f(x_0) - g(x_0) + \epsilon)$ de x_0 tal que $\forall x \in V, |f(x) - g(x)| \geq f(x_0) - g(x_0) - \epsilon > 0$. A segunda desigualdade vale pela escolha de ϵ.

Porem, como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, então $\exists \alpha \in V, \alpha$ é racional. Isso contradiz o fato de $\forall x$ racional, $f(x) = g(x)$. Logo, $\nexists x_0 \in \mathbb{R}; f(x_0) \neq g(x_0)$. Sendo assim $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ e isso mostra que $f = g$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos com $\forall x \in X, f(x) = g(x)$ e α irracional?

Antes, provar que $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \setminus X_\alpha$:

[Por contradição] Suponha $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e $q \notin \mathbb{R} \setminus X_\alpha$.

Como $q \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $q \in X_\alpha$. Isso significa que $q = \frac{a}{b} = m + n\alpha$, sendo $a, n, m \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 1$. Se esse fosse o caso, $a = b.m + b.n.\alpha \to (a - b.m) = b.n.\alpha$. Como $(a - b.m) \in \mathbb{Z}, b.n.\alpha \in \mathbb{Z}$. Como α irracional, $\nexists z \in \mathbb{Z}$ tal que $z.\alpha \in Z$, mostrando que $b.n.\alpha \notin \mathbb{Z}$. Sendo assim, $q \notin X_\alpha$, e, consequentemente, $q \in \mathbb{R} \setminus X_\alpha$. Isso mostra que $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \setminus X_\alpha$.

Para a questão. Sim, existe tal g. Tome g dada por:
$\begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X_\alpha \\ f(x) + 10, & c.c. \text{ Note que isso inclui } \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$
[Por contradição] Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que g é contínua em x_0.

Como g contínuaem x_0, então $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $g(x) \in (g(x_0) - \epsilon, g(x_0) + \epsilon)$. Seja, então , algum $\epsilon > 0$ e $\epsilon < 10$. Como $C = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ denso em $\mathbb{R}$, qualquer que seja $\delta > 0$, $\exists q \in C$ tal que $q \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Como $g(q) = g(x_0) + 10, g(q) \notin (g(x_0) + \epsilon, g(x_0) + \epsilon)$. Isso contradiz o fato de g ser contínua em x_0. Sendo assim, g é descontínua em todos os pontos.

Q.3 Sejam A e B conjuntos compactos tais que $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$. $d(A, B) = inf\{|a - b|; a \in A \text{ e } b \in B\}$

a) $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow d(A, B) > 0$
[Por contradição] Sejam $a \in A, b \in B$ tais que $|a - b| = 0$.

Tome $\epsilon > 0$. Como $|a - b| = 0$, $b \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Sendo assim, $a \in \partial B$. Como B é fechado, tem-se contradiçãopois conjuntos fechados contem sua fronteira (visto em L4 E10c). Sendo assim, $\nexists a \in A, b \in B$ tais que $|a - b| = 0$. Assim, $|a - b| \neq 0$.

Como $|a - b| \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$, então $d(A, B) > 0$.

b)$(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \exists a \in A, b \in B; d(A, B) = |a - b|$
Tem-se que $\forall a \in A, b \in B$, $d(A, B) \leq |a - b|$ imediatamente pois $\forall a \in A, b \in B$, $|a - b| \in |a - b|; a \in A, b \in B$ e $\forall x \in X$. $\inf X \leq x$ por definição.

[Por contradição] Seja, $\forall a \in A, b \in B$, $D = d(A, B) < |a - b|$.

Como D é infimo, então existe uma sequência de $|a - b|; a \in A, b \in B$ cujo limite é D. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma tal sequênciaṪome $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - D| < \epsilon$. Por definição$x_n = |a - b|, a \in A, b \in B$. Porem, se fixado $\epsilon = d(A, B) - |a - b|$, então existem $a \in A, b \in B$ com $|(a - b) - D| < d(A, B) - |a - b|$,
c) De exemplos de $A, B \subset \mathbb{R}$ fechados tais que $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, d(A, B) = 0$.
Tome $A = \mathbb{N}$ e $B = \{n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Ambos tem apenas pontos isolados, e por isso, são fechados. Assim, $inf\{|n - n + \frac{1}{n}|\} = inf\{|\frac{1}{n}|\} = 0$.

Mantendo B, pode-se tomar $A' = A \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_k; n_i \in \mathbb{N} \text{ quaisquers}\}$.

Mantendo A, pode-se tomar $B' = \{n + f.\frac{1}{n}\ n \in \mathbb{N}, f \text{ limitada}\}$

EXTRA

a) f tem a propriedade (U) $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X com $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = x_0$ tem-se limsup $f(x_n) \leq f(x_0)$.
$(\Rightarrow)$
[Por contradição] Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X com $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = x_0$, mas limsup $f(x_n) > f(x_0)$.

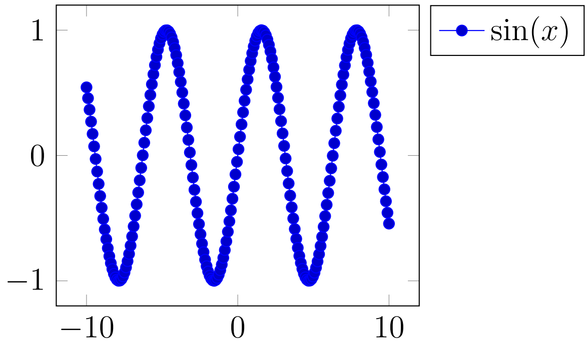
Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $L = \lim f(y_n) > f(x_0)$. Seja $\alpha = \frac{L - f(x_0)}{2}$. Tome $0 < \epsilon < \alpha$. Como f tem propriedade U, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Porem, pela escolha de ϵ, tem-se uma vizinhança $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x_0 tal que $\nexists x \in V, f(x) \in$

$(L-\alpha, L+\alpha)$, contradizendo o fato de L ser limite. Sendo assim $\nexists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = x_0$, mas limsup $f(x_n) > f(x_0)$. Logo, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = x_0$, limsup $f(x_n) \leq f(x_0)$

($\Leftarrow$)

[Por contradição] Seja $\epsilon > 0$ de forma que $\nexists\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap X, f(x) < f(x_0$

Tome alguma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = x_0$. Tome, então , $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $L = \lim f(y_n) \leq f(x_0)$. Porem, como essa subsequência converge para L, então $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, |f(x_n) - L| < \epsilon$. Isso implica que $L-\epsilon < f(x_n) < L+\epsilon$. Porem, como $L \leq f(x_0)$, entao $f(x_n) \leq f(x_0)+\epsilon$. Isso contradiz a escolha de tal ϵ. Por fim, isso mostra que $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0; \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap X, f(x) < f(x_0)+\epsilon$.



Nota: Poderia ser qualquer f contínuaem $x_0 = 0$.

b) Note que se f limitada superiormente, então ela assume valor máximo em X, pois ela é definida em X.

Tome $x_0 = supX$ e $\epsilon > 0$. Pela definição, existe vizinhança de x_0 com f limitada. Tomando $x_i < x_0$ nessa vizinhança, tem-se outra vizinhança limitada.

Pode-se combrir os conjunto X com tais vizinhança. Porem, como visto em aula, toda familia de abertos cobrindo um compacto tem uma subfamilia finita que tambem o cobre. Tal familia mostra que f é limitada superiormente pois sejam $x, y \in (a, b), f(x) < f(y)+\epsilon_1, f(y) < f(x)+\epsilon_2$.