MAT0206 - Lista 7

Matheus T. de Laurentys, 9793714

January 22, 2021

Questões feitas: 1, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 15

Provas extra que irei usar:

critério da comparação

Faltou demonstrar que dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de numeros positivos tais que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$:

(i) Se $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} y_i$ converge, então $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i$ converge.

Considere as somas parciais $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ e $T_n = y_1 + \ldots + y_n$. Claro que $S_n \leq T_n$.

Considere, agora, que:

$$0 \leq S_n = x_i + \ldots + x_n \leq x_i + \ldots + x_n + y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots = S_n + (T - T_n)$$

$$S_n + (T - T_n) = T + (S_n - T_n) \leq T + (0) = T$$

Note que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não decrescente e que $(T+(S_n+T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é não crescente. Sendo assim, dados quaisquer tres naturais n, m, L, é fato que $S_n, S_m \in [S_L, T + (S_L - T_L)]$ e isso mostra que a sequência S_n é de cauchy. Como visto em aula, S_n ser de cauchy implica que $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} S_n$ converge.

Q.1

a)

Seja $I \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos indices de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\sqrt{x_n} \leq \frac{1}{n}$.

Tomando $n \in \mathbb{N}$, se $n \in I$, então $\frac{\sqrt{x_n}}{n} \leq \frac{1}{n^2}$, pois $\sqrt{x_n} \leq \frac{1}{n}$. Caso $n \notin I$, então $\frac{\sqrt{x_n}}{n} < \sqrt{x_n}^2 = x_n$. Sabemos então que:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{x_i}}{i} = \sum_{i\in\mathbb{N}\setminus I} \frac{\sqrt{x_i}}{i} + \sum_{i\in I} \frac{\sqrt{x_i}}{i} \leq \sum_{i\in I} \frac{1}{i^2} + \sum_{i\in\mathbb{N}\setminus I} x_i$$

É dado que $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i$ converge. A série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i^2}$ é uma PG com razão menor que 1 e, por isso, converge (ja foi visto em aula). A soma de série s convergentes também converge. Assim, tome $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (x_i + \frac{1}{i^2})$. Notando que $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{x_i}}{i} \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (x_i + \frac{1}{i^2})$, podemos afirmar que $\frac{\sqrt{x_i}}{i}$ converge pelo critério de comparação (i).

b)

Seja $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n = \alpha > 0$. Tome ϵ tal que $\alpha - \epsilon > 0$ e seja $\beta = \alpha - \epsilon$. Existe apenas um numero finito de elementos da sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ menores que β pela definição de lim inf. Seja I o conjunto dos indices n tais que $y_n > \beta$.

Se $\beta \geq 1$, então $\forall i \in I$, $\frac{x_i}{y_i} \leq x_i$. Sendo assim, pelo critério da comparação (i), a série $\sum\limits_{i\in I} \frac{x_i}{y_i}$ converge. Como $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}\setminus I} \frac{x_i}{y_i}$ é soma finita, então $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{x_i}{y_i}$ converge.

Se $\beta < 1$, então $\forall i \in I$, $\frac{x_1}{y_i} \leq \frac{x_1}{\beta}$. Portanto, tem-se que:

$$\sum_{i\in I} \frac{x_i}{y_i} \leq \sum_{i\in I} \frac{x_i}{\beta} = \frac{1}{\beta} \sum_{i\in I} x_n \leq \frac{1}{\beta} \sum_{i\in\mathbb{N}} x_n$$

Como $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_n$ converge, então $\sum\limits_{i\in I} \frac{x_i}{y_i}$ também converge. Novamente, como $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}\setminus I} \frac{x_i}{y_i}$ é soma finita, então $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{x_i}{y_i}$ converge.

Q.4 Mostar que, dado $X \subset \mathbb{R}$.

$\forall \epsilon > 0$ existe cobertura I enumeravel de X por intervalos abertos tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \epsilon \iff \forall \epsilon > 0$ existe cobertura J enumeravel de X por intervalos fechados tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| < \epsilon$.

($\Rightarrow$)

Dado $\epsilon > 0$. Seja I uma cobertura enumeravel por abertos de X tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \epsilon$. Considere agora um conjunto enumeravel de intervalos fechados J dado por $J_n = I_n + \partial I_n$, isto é , se $I_n = (a, b)$, então $J_n = [a, b]$. Notando que qualquer $x \in X$ coberto por algum $I_n \in I$ é também coberto por J_n, então J é uma cobertura enumeravel de X. Tambem é verdade que $\forall n \in \mathbb{N}, |J_n| = |I_n|$, por definição . Sendo assim, $\sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \epsilon$.

Temos então que $\forall \epsilon > 0$ existe cobertura I enumeravel de X por intervalos abertos tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \epsilon \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ existe cobertura J enumeravel de X por intervalos fechados tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| < \epsilon$.

($\Leftarrow$)

Dado $\epsilon > 0$, tome δ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Seja J uma cobertura enumeravel por fechados de X tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| < \delta$. Seja L um segundo conjunto enumeralvel de intervalos fechados criado a partir de J. L é tal que, se $J_n = [a, b]$, então $L_n = [a - \frac{b-a}{2}, b + \frac{b-a}{2}]$. É claro que L também é uma cobertura por fechados de X pois $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset L_n$ e $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in J_n, x \in L_n$.

Tambem é claro que $\forall n \in \mathbb{N}, |L_n| = 2 \times |J_n|$, pela forma como L_n foi definido. Sendo assim,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |L_i| = 2 \times \sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| < 2 \times \delta < \epsilon$$

Considere, agora, o conjunto enumerável de intervalos abertos I tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $L_n = [a, b]$ então $I_n = (a, b)$. Notando que, $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset I_n$ (pela forma como L foi contruido), I também é uma cobertura de X. Novamente, como $\forall n \in \mathbb{N}, |I_n| = |L_n|$, então $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |L_i| < \epsilon$. Logo, I é uma cobertura enumerável de X e $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \epsilon$.

Temos então que $\forall \epsilon > 0$ existe cobertura J enumerável de X por intervalos fechados tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| < \epsilon \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ existe cobertura I enumerável de X por intervalos abertos tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \epsilon$.

Q.7

a) Mostrar que

$$\exists\epsilon > 0 \text{ tal que } \forall\delta > 0, \exists x, y \in (0, +\infty) \text{ com } |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| > \epsilon$$

Fixando $\epsilon = 1$. Tomando $\delta > 0$ qualquer.

Caso $\delta \geq \frac{2}{\pi}$

Toma-se $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{10}$. Dessa forma, $|x - y| = |0.5 - 0.1| = 0.4 < \frac{2}{\pi}$, porem, $|f(x) - f(y)| = |\sin(2) - \sin(10)| \approx 1.45 > 1$.

Caso $\delta < \frac{2}{\pi}$:

Fixando k algum inteiro. Tomar x da forma $\frac{1}{2\times\pi\times k - \frac{\pi}{2}}$ de forma que $\frac{1}{x} = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$ e, assim, $\sin(\frac{1}{x}) = -1$. Tomar y da forma $\frac{1}{2\times\pi\times k + \frac{\pi}{2}}$ de forma que $\frac{1}{y} = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$ e, assim, $\sin(\frac{1}{y}) = 1$.

Para que $|x - y| < \delta$, temos:

$$|\frac{1}{2\pi k - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}| < \delta$$
$$|\frac{2\pi k - \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \frac{\pi}{2}}{(2\pi k - \frac{\pi}{2}) \times (2\pi k + \frac{\pi}{2})}| < \delta$$
$$|\frac{4\pi k}{(2\pi k)^2 - (\frac{\pi}{2})^2}| < \delta$$

Fixando agora $k \in \mathbb{N}, k > 0$, tem-se:

$$4\pi k < \delta \times (2\pi k)^2 - \delta \times (\frac{\pi}{2})^2$$
$$0 < 4\delta\pi^2 k^2 - 4\pi k - \frac{\delta\pi^2}{4}$$

Considere a função *f*(k) $= 4\delta\pi^2 k^2 - 4\pi k - \frac{\delta\pi^2}{4}$. As raízes da função são :

$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - \delta^2\pi^2}}{4\delta\pi}$$
$$k_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - \delta^2\pi^2}}{4\delta\pi}$$

Como $\delta < \frac{2}{\pi}$, as duas raízes são reais. Como a função descreve um parabola com abertura para cima, para satisfazer a inequação $0 < 4\delta\pi^2 k^2 - 4\pi k - \frac{\delta\pi^2}{4}$, pode-se ter que $k < k_2$ ou que $k > k_1$. Sendo assim, dado δ qualquer, é possivel escolher k de forma que $|x - y| < \delta$ e, alem disso, $|f(x) - f(y)| = |-1 + 2| = 2 > 1 = \epsilon$.

Juntamente ao outro caso, então , temos que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R})$ definida por

$f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ não é uniformemente contínua .

b)

Usando que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \sin(x)$ é diferenciável em todos os pontos do domínio e que sua derivada é dada por $\cos(x)$. Vimos em aula que diferenciável implica contínua .

É notavel que se $\alpha \geq 1$ ou $\alpha \leq -1$, então $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$, pois $|sin(\alpha)| \leq 1$ sempre.

Se $\alpha = 0$, $|sin(\alpha)| = sin(0) = 0 = \alpha \leq |\alpha|$.

Tome então $\alpha \in (0, 1)$. Como $sin(\alpha)$ é contínua no intervalo $[0, \alpha]$ e diferenciável no intervalo $(0, \alpha)$, então $\exists \beta \in (0, \alpha)$, pelo TVM, tal que $\sin'(\beta) = \frac{\sin(\alpha)-\sin(0)}{\alpha-0} \iff \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$. Novamente usando que $\forall \beta \in \mathbb{R}, \cos(\beta) \leq 1$, $\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \iff \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \leq 1$, mostrando que $sin(\alpha) \leq \alpha$ e $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$.

Tome então $\alpha \in (-1, 0)$. Como $sin(\alpha)$ é contínua no intervalo $[\alpha, 0]$ e diferenciável no intervalo $(\alpha, 0)$, então $\exists \beta \in (\alpha, 0)$, pelo TVM, tal que $\sin'(\beta) = \frac{\sin(0)-\sin(\alpha)}{0-\alpha} \iff \cos(\beta) = \frac{-\sin(\alpha)}{-\alpha}$. Novamente usando que $\forall \beta \in \mathbb{R}, \cos(\beta) \leq 1$, $\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \iff \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \leq 1$, mostrando que $sin(\alpha) \leq \alpha$ e $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$.

Sendo assim, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |sin(\alpha)| \leq |\alpha|$.

Considere $a > 0$ qualquer. Dado $\epsilon > 0$ qualquer.

Considere $x, y \in [a, +\infty)$ tais que $|g(x)-g(y)| < \epsilon$, que significa que $|\sin(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{y})| < \epsilon$. Usando a indentidade trigonometrica $\sin(w) - \sin(z) = 2\cos(\frac{w+z}{2})\sin(\frac{w-z}{2})$, tem-se que $|2\cos(\frac{x+y}{2xy})\sin(\frac{x-y}{2xy})| < \epsilon$ então $|\cos(\frac{x+y}{2xy})\sin(\frac{x-y}{2xy})| < \frac{\epsilon}{2}$. É claro que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(\alpha) \leq 1$, portanto, se $|\sin(\frac{x-y}{2xy})| < \frac{\epsilon}{2}$, então $|\cos(\frac{x+y}{2xy})\sin(\frac{x-y}{2xy})| < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, basta que $\exists \delta, |x - y| < \delta \Rightarrow |\sin\frac{x-y}{2xy}| < \frac{\epsilon}{2}$ para que a função g seja uniformemente contínua . Como mostrado acima, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |sin(\alpha)| \leq |\alpha|$, logo, $|\frac{x-y}{2xy}| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |\sin\frac{x-y}{2xy}| < \frac{\epsilon}{2}$.

Assim, basta que $\exists \delta, |x - y| < \delta \Rightarrow |\frac{x-y}{xy}| < \epsilon$. Como $x \geq a$ e $y \geq a$, então $|\frac{x-y}{xy}| \leq |\frac{x-y}{a^2}|$. Finalmente, basta que:

$$\exists \delta, |x - y| < \delta \Rightarrow |\frac{x - y}{a^2}| < \epsilon$$

$$\iff$$

$$\exists \delta, |x - y| < \delta \Rightarrow |x - y| < a^2\epsilon$$

$$\iff$$

$$\delta \leq a^2\epsilon$$

Sendo assim, tomar $\delta = a^2\epsilon$ garante que $\forall x, y \in [a, +\infty)$, se $|x - y| < \delta$ então $|g(x) - g(y)| < \epsilon$.

Q.11

Note que a função f é limitada, pois $f(a)$ e $f(b)$ são cotas superiores ou inferiores. Considere a partição P_n de $[a,b]$ em $n>0$ intervalos de tamanhos iguais. Isto é :

$$P_n = \{a < a + \frac{b-a}{n} < \ldots < a + (n-1)\frac{b-a}{n} < b\}$$

Define-se x_i por $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ para $i \in \mathbb{N} \cup 0, i \leq n$. Tambem se definem I_i da forma $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \mathbb{N}, i \leq n$.

Subtraindo a soma inferior da supereior:

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \sup(f(I_i)) \times |I_i| - \sum_{i=1}^{n} \inf(f(I_i)) \times |I_i|$$

Considerando f decrescente, $\sup(f(I_i)) = f(x_{i-1})$ e $\inf(f(I_i)) = f(x_i)$. Assim,

$$\begin{aligned}
S(f, P_n) - s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) - f(x_i))) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) - f(x_n)) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_0) - f(x_n)) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))
\end{aligned}$$

Tome $\epsilon > 0$ qualquer. Tomando $n \in \mathbb{N}$, o tamanho da partição , tal que $n > \frac{b-a}{\epsilon}(f(a) - f(b))$, então a subtração da soma inderior da supereior sera menor que ϵ, visto:

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)) < \frac{b-a}{\frac{b-a}{\epsilon}(f(a) - f(b))}(f(a) - f(b)) = \epsilon$$

Sendo assim, toda função monotona descrescente é integravel, pelo critério de integrabilidade visto em aula.

Considerando f crescente, $\sup(f(I_i)) = f(x_i)$ e $\inf(f(I_i)) = f(x_{i-1})$. Assim,

$$
\begin{aligned}
S(f,P_n) - s(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))) \\
&= \frac{b-a}{n}(-f(x_0) + f(x_1) - f(x_1) + f(x_2) - \ldots - f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))
\end{aligned}
$$

Tome $\epsilon > 0$ qualquer. Tomando $n \in \mathbb{N}$, o tamanho da partição , tal que $n > \frac{b-a}{\epsilon}(f(b) - f(a))$, então a subtração da soma inderior da supereior sera menor que ϵ, visto:

$$
S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \frac{b-a}{\frac{b-a}{\epsilon}(f(b) - f(a))}(f(b) - f(a)) = \epsilon
$$

Sendo assim, toda função monotona crescente é integravel, pelo critério de integrabilidade visto em aula.

Q.12

Tome $a < b \in I$. Tome $x \in [a,b]$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{b-a}{b-a}x \\
&= \frac{-ax+bx}{b-a} \\
&= \frac{ab-ax+bx-ab}{b-a} \\
&= \frac{a(b-x)+b(x-a)}{b-a} \\
&\overset{t=\frac{b-x}{b-a}}{=} ta + \frac{b-b+x-a}{b-a}b \\
&= ta + (\frac{b-a}{b-a} - \frac{b-x}{b-a})b \\
&= ta + (1-t)b
\end{aligned}
$$

Note que $\forall x \in [a,b], t = \frac{b-x}{b-a}$ é tal que $t \in [0,1]$.

Caso $x = a$, $t = 1$ e $f(ta + (1-t)b) = f(ta) = f(a) = 1f(a) = tf(a) + (1-t)f(b)$.

Caso $x = b$, $t = 0$ e $f(ta + (1-t)b) = f(b) = 1f(b) = tf(a) + (1-t)f(b)$.

Caso $a < x < b$, temos $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Tomando, como acima visto, $t = \frac{b-x}{b-a}$, temos $f(x) = f(ta + (1-t)b)$. Assim:

$$
\begin{aligned}
f(ta + (1-t)b) &\leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\
&= f(a) + (f(b)-f(a))\frac{(b-a)-(b-x)}{b-a} \\
&= f(a) + (f(b)-f(a))(1-t) \\
&= f(a) - f(a) + tf(a) + f(b) - tf(b) \\
&= tf(a) + (1-t)f(b)
\end{aligned}
$$

Assim temos que dados $a < b \in I$, qualquer $x \in [a,b]$ pode ser escrito como $ta + (1-t)b$ com $t \in [0,1]$ e que $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$, como desejado.

Q.13

Como visto em 12, $\forall x \in [a,b], \exists t \in [0,1]; f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$. Isso mostra que a função é limitada superiorment e $\forall x \in [a,b], f(x) \leq \max(f(a), f(b))$.

Tome $c \in (\frac{b-a}{2}, b)$. Como d convexa em $[a,c]$, $\frac{b-a}{2} \in [a,c]$,

$$\frac{b-a}{2} = (1-t)a + tc$$

Claro que $t = \frac{b-a}{2(c-a)}$, pois:

$$\begin{aligned}(1-t)a + tc &= \frac{2ca - 2a^2 - ba + a^2 + bc - ac}{2(c-a)} \\ &= \frac{ca - a^2 - ba + bc}{2(c-a)} \\ &= \frac{(c-a)(a+b)}{2(c-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}f(\frac{a-b}{2}) &\leq tf(c) + (1-t)f(a) \\ &= \frac{b-a}{2(c-a)}f(c) + \frac{2(c-a)-(b-a)}{2(c-a)}f(a)\end{aligned}$$

Isolando $f(c)$, tem-se:

$$\begin{aligned}f(c) &\geq \frac{f(\frac{b-a}{2}) - \frac{2(c-a)-(b-a)}{2(c-a)}f(a)}{\frac{b-a}{2(c-a)}} \\ &= \frac{2(c-a)}{b-a}f(\frac{b-a}{2}) - \frac{2(c-a)-(b-a)}{b-a}f(a) \\ &= \frac{2(c-a)}{b-a}f(\frac{b-a}{2}) - \frac{2c-a-b}{b-a}f(a) \\ &\geq -2|f(\frac{b-a}{2})| - \frac{2c-a-b}{b-a}f(a) \\ &\geq -2|f(\frac{b-a}{2})| - |\frac{2c-a-b}{b-a}||f(a)| \\ &\geq -2|f(\frac{b-a}{2})| - |\frac{b-a}{b-a}||f(a)| \\ &= -2|f(\frac{b-a}{2})| - |f(a)|\end{aligned}$$

Sendo assim, $\forall x \in [\frac{b+a}{2}, b], f(x)$ é limitada inferiormente também . Pode-se usar processo analogo para mostrar que isso também vale para $x \in [a, \frac{b+a}{2}]$. Isso mostra que $f(x)$ é limitada. Assim, $\exists L \geq |f(x)|; x \in [a,b]$.

Tomando agora $x < y \in [a, b]$, temos: $x = (1-t)a + ty$, com $t = \frac{x-a}{y-a}$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\leq (1-t)f(a) + tf(y) - f(y) \\ &= (1-t)(f(a) - f(y)) \\ &= \frac{y-x}{y-a}(f(a) - f(y)) \\ &\leq \frac{2L(y-x)}{y-a} \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$. Tome $y \in (a, b)$ e seja $\beta = y - a$. Note que se fixarmos $\delta = \frac{\epsilon\beta}{4L}$, então $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$, pois $|f(x) - f(y)| \leq |\frac{2L(y-x)}{y-a}| \leq |\frac{2L\delta}{\beta}|$ e, pela escolha de δ, $|\frac{2L\delta}{\beta}| = |\frac{2L\epsilon\beta}{4L\beta}| = \frac{\epsilon}{2}$. Sendo assim, toda função convexa em $I = [a, b]$ é contínua em (a, b).

A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x \in (0,1) \\ \\ 1, \text{cc} \end{cases}$ é convexa em $[0, 1]$, mas não é continua nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Tome $x, y, t \in [0, 1]$ e considere $f(tx + (1-t)y)$. Sem perda de generalidade, suponha $x \leq y$.

Se $x = y$, $f(tx + (1-t)y) = f(x) = tf(x) + (1-t)f(x) = tf(x) + (1-t)f(y)$.

Se $tx + (1-t)y \in (0, 1)$, $f(tx + (1-t)y) = 0$. Como $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq 0$, então $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Se $tx + (1-t)y = 0$, então $t = 1, x = 0$, caso contrario, $1 - t \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow (1-t)y > 0 \Rightarrow tx+(1-t)y > 0$. Assim, $f(tx+(1-t)y) = f(0) = 1 \times f(x)+0 \times f(y) = tf(x) + (1-t)f(y)$.

Se $tx+(1-t)y = 1$, então $t = 0, y = 1$. $f(tx+(1-t)y) = f(1) = 0\times f(x)+1\times f(1) = tf(x) + (1-t)f(y)$.

Sendo assim, ela é convexa.

Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n = \frac{1}{n}$. Ja foi visto que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = 0$. No entanto, pela definição da f, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0$ e, por isso, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)) = 0$ e $0 \neq 1 = f(0)$.

Considere, agora, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n = \frac{n-1}{n}$. Ja foi visto que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = 1$. No entanto, pela definição da f, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0$ e, por isso, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)) = 0$ e $0 \neq 1 = f(0)$.

Sendo assim, f não é contínua nem em $x = 0$ nem em $x = 1$.

Q.14

a)

Usando a metrica habitual $d(x,y) = |y-x|, \forall x,y \in \mathbb{R}$. Assim, usarei que $|f(y)-f(x)| \leq K|y-x|$. O valor K pode ser qualquer constante lipshitz de f.

Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ qualquer. A variação é $V(f;P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. Como $|f(y)-f(x)| \leq K|y-x|$, então tem-se que $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})| \leq K \times \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = K \times (|t_1 - t_0| + |t_2 - t_1| + \ldots + |t_n - t_{n-1}|)$. Note que $|t_n - t_0| = |t_1 - t_0| + |t_2 - t_1| + \ldots + |t_n - t_{n-1}|$.

Temos então , $V(f;P) \leq K \times (t_n - t_0) = K(b-a)$. Isso mostra que $\forall P$ partição de $[a,b]$, $\underset{P}{sup}\{V(f;P); P$ partição de $[a,b]\}$ é finito.

b)

Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ qualquer. Como f monotona, então f limitada, pois $f(a), f(b)$ são cotas superiores ou inferiores.

Supondo que f seja crescente.

$V(f;P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))$, pois $\forall i, 1 \leq i \leq n$ tem-se $f(t_i) \geq f(t_{i-1})$. Sendo assim,

$$V(f;P) = f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \ldots + f(t_n) - f(t_{n-1}) = f(t_n) - f(t_0) < \infty$$

Supondo que f seja decrescente.

$V(f;P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(t_{i-1}) - f(t_i))$, pois $\forall i, 1 \leq i \leq n$ tem-se $f(t_{i-1} \geq f(t_i))$. Sendo assim,

$$V(f;P) = f(t_0) - f(t_1) + f(t_1) - f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1}) - f(t_n) = f(t_0) - f(t_n) < \infty$$

Temos então que tanto monotonas crescentes quanto decrescentes tem variação limitada.

c)

Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}, g : [a,b] \to \mathbb{R}, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ com $h(x) = f(x) + g(x)$. Tome $V(h;P) = \sum_{i=1}^{n} |h(t_i) - h(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) + g(t_i) - f(t_{i-1}) - g(t_{i-1})|$. Pela desigualdade triangular, provada anteriormente,

$$\sum_{i=1}^{n} |[f(t_i) - f(t_{i-1})] + [g(t_i) - g(t_{i-1})]| \leq \sum_{i=1}^{n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})| + |g(t_i) - g(t_{i-1})|)$$

Note $\sum_{i=1}^{n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})| + |g(t_i) - g(t_{i-1})|) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|$.

Sendo assim, $V(h;P) \leq \sum_{i=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})|+\sum_{i=1}^n |g(t_i)-g(t_{i-1})| < \infty$, pois tanto $\sum_{i=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})| < \infty$ quanto $\sum_{i=1}^n |g(t_i)-g(t_{i-1})| < \infty$.

Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}, g : [a,b] \to \mathbb{R}, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ com $h(x) = f(x)g(x)$. Considere:

$$\begin{aligned}
V(h;P) &= \sum_{i=1}^n |h(t_i) - h(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |f(t_i)g(t_i) - f(t_i)g(t_{i-1}) + f(t_i)g(t_{i-1}) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |f(t_i)(g(t_i) - g(t_{-1})) + g(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1}))| \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|f(t_i)(g(t_i) - g(t_{-1}))| + |g(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1}))|) \\
&= \sum_{i=1}^n (|f(t_i)||(g(t_i) - g(t_{-1}))| + |g(t_{i-1})||(f(t_i) - f(t_{i-1}))|)
\end{aligned}$$

Usando que variação limitada em $[a,b]$ implica função limitada.

Prova:

Tomando $x \in [a,b]$ e uma partição P de $[a,b]$ com $P = \{x_0 < \ldots < n_n\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x)| + |f(a)| - |f(a)| \\
&\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \text{ (desigualdade triangular da subtração)} \\
&\leq |f(a)| + V_a^b(f) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Se $x \in (a,b)$, a penultima desigualdade é valida pois $|f(x)-f(a)| \leq \sup_P\{V(f;P)|P \text{ partição de } [a,b]\}$, ja que pode-se tomar partição $P = \{a < x < b\}$ e $V(f;P) = |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq |f(x) - f(a)|$. Note que se $x = a$ ou $x = b$ a resposta é igualmente simples. Basta tomar a partição $P = \{a < x_0 < b\}, x_0 \in (a,b)$ e notar que $|f(x) - f(a)| \leq |f(b) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(a)|$, independentemente do caso.

Como f limitada, $\exists L$ tal que $\forall i \in \mathbb{N}, i \leq n$ tem-se $f(t_i) < L$ e $g(t_i) < L$. Seguindo então que:

$$
\begin{aligned}
V(h;P) &\leq \sum_{i=1}^{n}(|f(t_i)||(g(t_i)-g(t_{-1}))|+|g(t_{i-1})||(f(t_i)-f(t_{i-1}))|) \\
&< L \times (\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{-1})|+\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{-1})|)
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, como f, g são de variação limitada, $\exists M$ tal que $\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{-1})| < M$ e $\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{-1})| < M$, segue,finalmente que:

$$V(h;P) < 2 \times LM < \infty$$

Sendo assim, $h = fg$ é de variação limitada.

Tome, agora $h = |f|$ e alguma partição P de $[a, b]$.

$$
\begin{aligned}
V(h;P) &= \sum_{i=1}^{n}|h(t_i)-h(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n}||f(t_i)|-|f(t_{i-1})|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})| \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Note que $||f(t_i)| - |f(t_{i-1})|| \leq |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ e isso é a desigualdade triangular da subtração que ja foi provada anteriormente. Dessa forma, $h = |f|$ é de variação limitada.

Q.15

Temos

$$
\begin{aligned}
V_b^a(f) &= \sup_P \{V(f;P); P \text{ é partição de } [a,b]\} \\
&= \sup_P [\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|; \text{ com } P = \{t_0 < \ldots < t_n\}]
\end{aligned}
$$

Temos também

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f'(x)| dx &= \sup_P \{s(|f'|;P); P \text{ é partição de } [a,b]\} \\
&= \inf_P \{S(|f'|;P); P \text{ é partição de } [a,b]\} \\
&= \sup_P \{\sum_{i=1}^{n} \inf(|f'([t_{i-1},t_i])|) \cdot (t_i - t_{i-1}); \text{ com } P = \{t_0 < \ldots < t_n\}\} \\
&= \inf_P \{\sum_{i=1}^{n} \sup(|f'([t_{i-1},t_i])|) \cdot (t_i - t_{i-1}); \text{ com } P = \{t_0 < \ldots < t_n\}\}
\end{aligned}
$$

Temos ainda, com $A \subset \mathbb{R}, a \in A \cap A'$, $x \in A, g : A \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
g'([A]) &= \{g'(a); a \in A\} \\
&= \{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}; a \in A\}
\end{aligned}
$$

Fixando agora uma partição qualquer $P = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$. Tem-se que:

$$
\begin{aligned}
|f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t) dt| \text{ (pois } f \text{ contínua -TFC)} \\
&\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(t)| dt \text{ (soma de modulos)}
\end{aligned}
$$

Isso mostra que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(t)| dt \\
&= \int_a^b |f'(t)| dt
\end{aligned}
$$

Como P qualquer, temos $V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(t)| dt$.

Como f' é contínua , dado ϵ qualquer, $\exists \delta$ tal que $x, y \in [a,b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon$.

Fixando ϵ, tome δ tal que $x, y \in [a,b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon$. Tome também a partição P que separa em $n = \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$ intervalos iguais. Isso garante que $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ é tal que todo $i \in \mathbb{N}, i < n; |x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow x_{i-1} \leq x \leq x_i$; $|f'(x_i) - f'(x)| < \epsilon$. Como $|f'(x_i) - f'(x)| \geq |f'(x_i)| - |f'(x)|$, temos também que $|f'(x)| \leq \epsilon + |f'(x_i)|$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(t)|dt &\leq |x_i - x_{i-1}|(|f'(x_i)| + \epsilon) \\
&= |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x_i)dt| + |x_i - x_{i-1}|\epsilon \\
&= |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t) + f'(x_i) - f'(t)dt| + |x_i - x_{i-1}|\epsilon \\
&\leq |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt| + |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x_i) - f'(t)dt| + |x_i - x_{i-1}|\epsilon \\
&\leq |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt| + |x_i - x_{i-1}|\epsilon + |x_i - x_{i-1}|\epsilon \\
&= |f(x_i) - f(x_{i-1})| + 2|x_i - x_{i-1}|\epsilon
\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|dt &\leq \sum_{i=1}^{n}(|f(x_i) - f(x_{i-1})| + 2|x_i - x_{i-1}|\epsilon) \\
&= 2n\epsilon + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= 2n\epsilon + V_a^b(f)
\end{aligned}$$

Como o ϵ é arbitrario, para qualquer valor $\alpha > 0$, $\int_a^b |f'(t)|dt \leq \alpha + V_a^b(f)$ e isso mostra que $\int_a^b |f'(t)|dt \leq V_a^b(f)$.

Sendo assim, temos finalmente que $\int_a^b |f'(t)|dt = V_a^b(f)$ para $f \in C^1([a, b])$.