Disciplinas:
MAP 5706 - Introdução à Análise Real (DINTER)
MAP 0216 - Introdução à Análise Real
MAT 0206 - Análise Real

Semestre: 2020/2

Professor: Rodrigo Bissacot - Sala 147A - IME-USP

mail: rodrigo.bissacot@gmail.com
Listas de exercícios e informações sobre o curso em:

`https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/analise2020`

Monitores:

João Maia - mail: joao.vitor.maia@usp.br
Rafael Severiano - mail: rafaelseveriano@usp.br
Thiago Alexandre - mail: thiago2.alexandre@usp.br
Thiago Raszeja - mail: tcraszeja@gmail.com

Lista 7: Séries. Funções Uniformemente Contínuas. Integral de Riemann. Medida e Conteúdo Nulo. Derivada e o Teorema do Valor Médio (TVM). Sequência de funções, convergência simples (pontual) e convegência uniforme.

ENTREGA: DOMINGO - DIA 17.01.2021 - 22H
HORÁRIO DE SÃO PAULO

ESCOLHA 30 PONTOS
A P3 VALERÁ 70

Exercício 1. (4 pontos)
Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ seja convergente. Prove que:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ é convergente.

(b) se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de reais não nulos tal que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} y_n > 0$.
Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{y_n}$ é convergente

Exercício 2. (4 pontos)

(a) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

(e é o número de Euler.)

(b) Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2.x_n}$ para $n \geq 1$.
Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e determine o valor do limite.

Exercício 3. (4 pontos)

(a) Seja então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não negativos. Mostre que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := \sup_{\substack{S\subset\mathbb{N} \\ |S|<\infty}} \sum_{n\in S} x_n$$

(b) **"Séries"com conjunto de índices arbitrários.**
Uma questão natural depois de aprendermos séries é pensar no caso de termos um conjunto arbitrário $\mathcal{I}$, como definir o objeto abaixo:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i$$

Seja então $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma coleção de números reais não negativos indexada por um conjunto $\mathcal{I}$ não necessariamente enumerável, definimos:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i := \sup_{\substack{S\subset\mathcal{I} \\ |S|<\infty}} \sum_{i\in S} x_i$$

Mostre que se $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i < \infty$ então o conjunto $\{i \in \mathcal{I}; x_i > 0\}$ é enumerável.

Observação: Isso nos mostra que toda "série"de termos não negativos com um número não enumerável de termos não nulos diverge.

Definição 1. *Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem* `medida nula` *quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura* `enumerável` *de X por meio intervalos abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seja, $X \subseteq I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n ...$) tal que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

Exercício 4. (2 pontos) Mostre que na definição de conjunto de medida nula poderíamos ter usado intervalos fechados. Ou seja, Mostre que $X \subset \mathbb{R}$ tem `medida nula` se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura `enumerável` de X por meio intervalos fechados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [a_n, b_n]$, com $X \subseteq I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n ...$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n| < \varepsilon$.

Definição 2. *Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem* `conteúdo nulo` *quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura* `finita` *de X por meio intervalos abertos $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ (ou seja, $X \subseteq I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$) tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \varepsilon$.*

Exercício 5. (4 pontos)

(a) Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo então seu fecho $\overline{X}$ também tem conteúdo nulo.
(b) Dê um exemplo de um conjunto que tem medida nula mas que não tem conteúdo nulo.
(c) Mostre que um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.
(d) Mostre que o Conjunto de Cantor tem conteúdo nulo.

Exercício 6. (4 pontos) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz, mostre que se $A \subseteq X$ tem medida nula então $f(A)$ também tem medida nula.

Exercício 7. (4 pontos)

(a) Considere $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e definida por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
Mostre que f não é uniformemente contínua.

(b) Considere agora um novo domínio, seja $a > 0$ e $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ para todo $x \in [a, +\infty)$.
Mostre que g é uniformemente contínua.

Exercício 8. (4 pontos)

Considere um intervalo $[a, b]$ e duas funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis tal que o conjunto $A = \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula. Mostre que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Exercício 9. (2 pontos)

(a) Exiba um intervalo $[a, b]$ e uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para uma quantidade infinita de pontos x em $[a, b]$ satisfazendo

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Comentário: Você precisa definir a função f e provar que a função é integrável e que a integral é nula.

(b) Seja $\mathcal{I}([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; \int_a^b |f(x)|dx < +\infty\}$, ou seja, $\mathcal{I}([a, b])$ é o espaço das funções de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ cujo módulo é integrável.
Seja $d_1 : \mathcal{I}([a, b]) \times \mathcal{I}([a, b]) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

A função d_1 é uma métrica em $\mathcal{I}([a, b])$?
Se sim, prove. Se não, justifique porque.

Exercício 10. (3 pontos) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que existe $x_0 \in [a, b]$ satisfazendo $f(x_0) \neq 0$. Mostre que $\int_a^b |f(x)|dx > 0$.

Exercício 11. (2 pontos) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona.
Mostre que f é integrável.

Definição 3. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Se $I \subseteq X$, dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é* `convexa` *em I quando dados quaisquer $a < b$ em I, a parte do gráfico $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$ está abaixo(ou coincide) do segmento de reta que liga os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, ou seja:*

$$a < x < b \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a) \tag{1}$$

Exercício 12. (2 pontos) Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Mostre que $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I se, e somente se, dados quaisquer $a < b$ em I tivermos:

$$f(t.a + (1 - t).b) \leq t.f(a) + (1 - t).f(b) \quad \forall\, t \in [0, 1] \tag{2}$$

Observação: Quando a desigualdade é estrita (ou seja $<$ ao invés de $\leq$) dizemos que a função é `estritamente convexa`.

Observação: Quando as desigualdades acima são no sentido contrário (ou seja $\geq$ ao invés de $\leq$ e $>$ ao invés de $<$) dizemos que a função é `côncava` e estritamente côncava, respectivamente.

Exercício 13. (4 pontos) Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I então f é contínua em (a, b). Dê um exemplo de f convexa em $[a, b]$ e que seja descontínua nos extremos a e b.

Definição 4. *Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo fechado e seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, para cada partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ definimos a variação de f referente a partição $\mathcal{P}$ por $V(f; \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. Diremos que f é uma* `função de variação limitada` *quando o supremo das variações sobre todas as partições possíveis é finito, ou seja:*

$$\sup_{\mathcal{P}}\{V(f; \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} = V_a^b(f) < \infty$$

Quando f for de variação limitada o número real $V_a^b(f)$ é chamado de `variação total de` *f no intervalo $[a, b]$.*

Exercício 14. (6 pontos) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ prove que:

(a) Se f é Lipschitz então é de variação limitada.

(b) Se f é monótona então é de variação limitada.

(c) Se f e g são de variação limitada então $f + g$, $f.g$ e $|f|$ são de variação limitada.

Exercício 15. (6 pontos)

Seja $\mathcal{C}^1([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; f \text{ é derivável e } f' \text{ é contínua}\}$, mostramos em aula que toda função $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ é Lipschitz. Portanto, toda função $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ é de variação limitada. Mostre que se $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ então

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Observação: Esse exercício é importante porque justifica porque essa integral é definida como `comprimento de arco` da curva $t \to f(t)$ quando t varia de a à b.

Exercício 16. (4 pontos) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Mostre que o conjunto de pontos onde f é não é diferenciável é enumerável.

Exercício 17. (4 pontos) Seja $\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$ o espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$, onde K é um compacto de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $d(f,g) =: ||f-g||_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)-g(x)|$ define uma métrica em $\mathcal{C}(K)$.

(a) Sejam uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e f em $\mathcal{C}(K)$. Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente pra f se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

Exercício 18. (6 pontos) Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformememnte contínua. Mostre que:

(i) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

(ii) Se $A \subseteq X$ é limitado então $f(A)$ é limitado.

(iii) Mostre que ambas afirmações dos itens (i) e (ii) são falsas no caso de funções apenas contínuas.

Exercício 19. (6 pontos) Seja x_0 um ponto de acumulação de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, exista o limite

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n.$$

Mostre que:

(i) Existe um número real L tal que $\lim_{n\to\to\infty} L_n = L$.

(ii) Vale $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Ou seja, estamos provando que

$$\lim_{n\to\to\infty} [\lim_{x\to x_0} f_n(x)] = \lim_{x\to x_0} [\lim_{n\to\to\infty} f_n(x)].$$

(iii) Dê um exemplo onde não podemos trocar a ordem dos limites como no item (ii) onde a convergência não é uniforme mas somente pontual.

Exercício 20. (4 pontos) Seja $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Mostre que $F(x.y) = F(x) + F(y)$.

Observação: Aqui estamos usando a convenção de que se $0 < x < 1$ então $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt$. Essa é uma das maneiras de definirmos a função logarítmo.

Exercício 21. (6 pontos)

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definida por:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

(i) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função nula em $[0,1]$.

(ii) Mostre que a convergência do item (i) não é uniforme.

(iii) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 0\ dx = 0.$

Exercício 22. (4 pontos)

(i) Mostre que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ converge uniformemente para a função nula.

(ii) Mostre que $f_n'(x) = \cos(nx)$ não converge nem pontualmente para qualquer função.

Observação: Esse exercício mostra que no caso de convergência uniforme de funções diferenciáveis, isso não nos diz nada sobre a convergência de suas derivadas. Mas se impormos a convergência uniforme nas derivadas e não na f e adicionarmos um pouco mais de hipóteses, é ainda possível mostrar que a derivada do limite é o limite das derivadas, analogamente ao que foi feito na caso das integrais.

Exercício 23. (4 pontos) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona.

(i) Seja $x_0 \in (a,b)$ um ponto onde f é descontínua. Mostre que a descontinuidade em x_0 é de `primeira espécie`, também chamada de `tipo salto`, ou seja existem os limites laterais abaixo mas estes são distintos:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

(ii) Mostre que o conjunto de pontos onde f é descontínua é enumerável. Conclua que f é integrável.

Exercício 24. (4 pontos) Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que f é convexa se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Conclua que se f duas vezes diferenciável, então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Definição 5. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ e $E \subseteq \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ onde $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as funções de X em $\mathbb{R}$, dado $x_0 \in X$ dizemos que o conjunto E é* `equicontínuo` *em x_0 quando:*

> *Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ temos que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todas as f em E.*

Quando temos um conjunto de funções definidas num conjunto X que é equicontínuo em todos os pontos de X dizemos que E é um conjunto equicontínuo, se for uma família ou sequência dizemos que temos uma `família equicontínua de funções` *ou uma* `sequência equicontínua de funções`.

Exercício 25. (4 pontos) Seja $K > 0$ e $\mathrm{Lip}_K([a,b])$ o conjunto das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que admite K como sua constante de Lipschitz. Mostre que $\mathrm{Lip}_K([a,b])$ é um conjunto eqüicontínuo.

Exercício 26. (4 pontos) Sejam uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e f em $\mathcal{C}(X)$, o conjunto de funções contínuas de X em X. Mostre que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente pra f, então o conjunto $\mathcal{F} = \{f_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ é um conjunto eqüicontínuo.

Exercício 27. (4 pontos)

Considere a seguinte sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \sin(nx)\ \forall\ x \in [0,1]$.
Mostre que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é equicontínua.